УДК 517.8
Антоник И.А.
Научные руководители: к.т.н., доцент Махнист Л.П., доцент Гладкий И.И.

О МОМЕНТАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Пуассона распределение – распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0,1,2,\dots$ с вероятностями

$$P(X = k) = p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

где $\lambda > 0$ – параметр.

Начальным моментом n-го порядка ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины называется $\alpha_n = M\left(X^n\right)$.

Учитывая разложение функции e^x в ряд Маклорена, получим, что

$$\alpha_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.$$

Функция распределения закона Пуассона:

$F(x) = P(X < x) = 0$, если $x \le 0$, и $F(x) = P(X < x) = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\lceil x\rceil-1}\frac{\lambda^k}{k!}$, если $x > 0$,

где $\lceil x\rceil$ – наименьшее целое, большее или равное x: $\lceil x\rceil = \min\{n \in Z \mid n \ge x\}$).

Рассмотрим функцию $F(m+1,\lambda) = 1 - \frac{1}{m!}\int\limits_0^{\lambda} y^m e^{-y}dy$.

Заметим, что $F(1,\lambda) = 1 - \frac{1}{0!}\int\limits_0^{\lambda} y^0 e^{-y}dy = 1 - \int\limits_0^{\lambda} e^{-y}dy = 1 + e^{-y}\Big|_0^{\lambda} = e^{-\lambda} = p_0$.

Используя метод интегрирования по частям, получим:

$$F(m+1,\lambda) = 1 - \frac{1}{m!}\int\limits_0^{\lambda} y^m e^{-y}dy = 1 + \frac{1}{m!}\int\limits_0^{\lambda} y^m de^{-y} = 1 + \frac{1}{m!}\left(y^m e^{-y}\Big|_0^{\lambda} - \int\limits_0^{\lambda} e^{-y}dy^m\right) =$$

$$= 1 + e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} - \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^{\lambda} e^{-y}y^{m-1}dy = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} + F(m,\lambda) = \sum_{k=1}^{m} p_k + F(1,\lambda) = \sum_{k=0}^{m} p_k.$$

Следовательно, функцию распределения *F(x)* можно определить следующим образом:

$F(x) = P(X < x) = 0$, если $x \le 0$,

$F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{k=0}^{\lceil x\rceil-1} p_k = F(\lceil x\rceil,\lambda) = 1 - \frac{1}{(\lceil x\rceil - 1)!}\int\limits_0^{\lambda} y^{\lceil x\rceil-1}e^{-y}dy$, если $x > 0$.

Заметим, что для любого целого неотрицательного числа m выполняется:

$$\frac{1}{m!}\int\limits_0^{+\infty} y^m e^{-y}dy = -\frac{1}{m!}\int\limits_0^{+\infty} y^m e^{-y}de^{-y} = -\frac{1}{m!}\left(y^m e^{-y}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-y}dy^m\right) =$$

$$= \frac{-1}{m!}\lim_{y\to+\infty} y^m e^{-y} + \frac{m}{m!}\int\limits_0^{+\infty} e^{-y}y^{m-1}dy = \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^{+\infty} e^{-y}y^{m-1}dy = 1 - \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 1.$$

Следовательно,

$$F(m+1,\lambda) = 1 - \frac{1}{m!}\int\limits_0^{\lambda} y^m e^{-y}dy = \frac{1}{m!}\int\limits_0^{+\infty} y^m e^{-y}dy - \frac{1}{m!}\int\limits_0^{\lambda} y^m e^{-y}dy = \frac{1}{m!}\int\limits_{\lambda}^{+\infty} y^m e^{-y}dy.$$

Математическое ожидание закона распределения Пуассона (начальный момент 1-го порядка):

$$\alpha_1 = M(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = \lambda .$$

Вычислим начальный момент 2-го порядка:

$$\alpha_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(\lambda^k\right)'}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cancel{k}\lambda^k}{(k-1)!}\right)' = \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)' = \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right)' =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda}\right)' = \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda' e^{\lambda} + \lambda(e^{\lambda})'\right) = \lambda e^{-\lambda}\left(1\cdot e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = \lambda(1+\lambda) = \lambda + \lambda^2 .$$

Начальный момент 2-го порядка можно вычислить иначе:

$$\alpha_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k + k(k-1))\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\right) =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda} + \lambda^2 e^{\lambda}\right) = \lambda + \lambda^2$$

Здесь использовалось соотношение $k^2 = k + k(k-1)$. Несложно проверить, что $k^3 = k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2)$. Тогда начальный момент 3-го порядка:

$$\alpha_3 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^3 p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^3\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2))\lambda^k}{k!} = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3.$$

Можно проверить, что $k^4 = k + 7k(k-1) + 6k(k-1)(k-2) + k(k-1)(k-2)(k-3)$. Тогда начальный момент 4-го порядка:

$$\alpha_4 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^4 p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k + 7k(k-1) + 6k(k-1)(k-2) + k(k-1)(k-2)(k-3))\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda} + 7\lambda^2 e^{\lambda} + 6\lambda^3 e^{\lambda} + \lambda^4 e^{\lambda}\right) = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4 .$$

Найдем **начальные факториальные моменты** n-го порядка:

$$\alpha_{[n]} = M\left(X^{[n]}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{[n]} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^{[n]}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)\lambda^k}{k!} = \lambda^n e^{-\lambda}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-n}}{(k-n)!} = \lambda^n e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^n .$$

Начальные моменты n-го порядка случайной величины X связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением

$$\alpha_n = M\left(X^n\right) = M\left(S_n^{(n)}X^{[n]} + \ldots + S_1^{(n)}X^{[1]}\right) = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)} M\left(X^{[m]}\right) = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)}\alpha_{[m]}$$

где коэффициенты $S_m^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода.

Тогда для **начальных моментов** n-го порядка распределения Пуассона выполняется $\alpha_n = \sum\limits_{m=1}^{n} S_m^{(n)}\lambda^m$. Например,

$$\alpha_1 = \sum_{m=1}^{1} S_m^{(1)}\lambda^m = S_1^{(1)}\lambda = \lambda$$ – математическое ожидание,

$$\alpha_2 = \sum_{m=1}^{2} S_m^{(2)}\lambda^m = S_1^{(2)}\lambda + S_2^{(2)}\lambda^2 = \lambda + \lambda^2,$$

$$\alpha_3 = \sum_{m=1}^{3} S_m^{(3)}\lambda^m = S_1^{(3)}\lambda + S_2^{(3)}\lambda^2 + S_3^{(3)}\lambda^3 = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$\alpha_4 = \sum_{m=1}^{4} S_m^{(4)}\lambda^m = S_1^{(4)}\lambda + S_2^{(4)}\lambda^2 + S_3^{(4)}\lambda^3 + S_4^{(4)}\lambda^4 = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4.$$

Начальный момент n-го порядка распределения Пуассона связан с начальными моментами более низких порядков этого распределения соотношением:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^{n-1}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^{n-1}\lambda^k}{k!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i k^i\right)\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\sum_{i=0}^{n-1}\left(C_{n-1}^i e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^i\lambda^k}{k!}\right) = \lambda\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\alpha_i.$$

Тогда, например,

$$\alpha_2 = \lambda\sum_{i=0}^{1} C_1^i\alpha_i = \lambda\left(C_1^0\alpha_0 + C_1^1\alpha_1\right) = \lambda(\alpha_0 + \alpha_1) = \lambda(1+\lambda) = \lambda + \lambda^2,$$

$$\alpha_3 = \lambda\sum_{i=0}^{2} C_2^i\alpha_i = \lambda\left(C_2^0\alpha_0 + C_2^1\alpha_1 + C_2^2\alpha_2\right) = \lambda(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$\alpha_4 = \lambda\sum_{i=0}^{3} C_3^i\alpha_i = \lambda\left(C_3^0\alpha_0 + C_3^1\alpha_1 + C_3^2\alpha_2 + C_3^3\alpha_3\right) = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4.$$

Центральным моментом n-го *порядка* случайной величины X называется $\mu_n = M\left((X - M(X))^n\right)$. Очевидно, что $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$. Центральные моменты n-го порядка случайной величины X связаны с ее начальными моментами соотношением

$$\mu_n = M\left((X - M(X))^n\right) = M\left((X-\alpha_1)^n\right) = M\left(\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m X^{n-m}\alpha_1^m\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} M\left((-1)^m C_n^m X^{n-m}\alpha_1^m\right) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m M(X^{n-m})\alpha_1^m = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m\alpha_{n-m}\alpha_1^m.$$

Найдем некоторые центральные моменты n-го порядка:

дисперсия $\mu_2 = D(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \left(\lambda^2 + \lambda\right) - \lambda^2 = \lambda$ (*среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\lambda}$),

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3(\lambda^2 + \lambda)\lambda + 2\lambda^3 = \lambda,$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = 3\lambda^2 + \lambda.$$

Центральный момент n-го порядка распределения Пуассона связан с центральными моментами более низких порядков этого распределения соотношением:

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (k-\lambda)^n p_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-\lambda)^n \lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-\lambda)^{n-1} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} -$$

$$-\lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k-\lambda)^{n-1} \lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-1}^i \mu_i + \lambda \mu_{n-1} - \lambda \mu_{n-1} = \lambda \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-1}^i \mu_i$$

Используя соотношение $\mu_n = \lambda \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-1}^i \mu_i$, получим:

$$\mu_2 = \lambda \sum_{i=0}^{0} C_1^i \mu_i = \lambda C_1^0 \mu_0 = \lambda,$$

$$\mu_3 = \lambda \sum_{i=0}^{1} C_2^i \mu_i = \lambda \left(C_2^0 \mu_0 + C_2^1 \mu_1 \right) = \lambda (1+0) = \lambda,$$

$$\mu_4 = \lambda \sum_{i=0}^{2} C_3^i \mu_i = \lambda \left(C_3^0 \mu_0 + C_3^1 \mu_1 + C_3^2 \mu_2 \right) = \lambda (1+0+3\lambda) = \lambda + 3\lambda^2.$$

Заметим, что **коэффициент асимметрии** $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^3}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (при положительной (отрицательной) асимметрии более «длинная» часть кривой плотности распределения лежит правее (левее) моды) и **эксцесса коэффициент** $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\lambda^2 + \lambda}{\sqrt{\lambda^4}} - 3 = \frac{1}{\lambda}$ (эксцесс – скалярная характеристика островершинности графика плотности вероятности унимодального (одномодального) распределения).

Коэффициент вариации $V(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

Очевидно, что $V(X) < 1$ $(V(X) > 1)$, если $\lambda > 1$ $(\lambda < 1)$.

Мода распределения $M_0(X) = k_0$, если $p_{k_0} \geq p_{k_0-1}$ и $p_{k_0} \geq p_{k_0+1}$.

Неравенство $p_{k_0} \geq p_{k_0-1}$ выполняется, если $\frac{\lambda^{k_0}}{k_0!} \geq \frac{\lambda^{k_0-1}}{(k_0-1)!}$ или $\frac{\lambda^{k_0}}{\lambda^{k_0-1}} \geq \frac{k_0!}{(k_0-1)!}$, т.е., когда $\lambda \geq k_0$.

Неравенство $p_{k_0} \geq p_{k_0+1}$ выполняется, если $\frac{\lambda^{k_0}}{k_0!} \geq \frac{\lambda^{k_0+1}}{(k_0+1)!}$ или $\frac{(k_0+1)!}{k_0!} \geq \frac{\lambda^{k_0+1}}{\lambda^{k_0}}$, т.е., когда $k_0 + 1 \geq \lambda$.

Следовательно, для моды $M_0(X) = k_0$ выполняется неравенство $\lambda - 1 \leq k_0 \leq \lambda$.

Таким образом, если $\lambda \notin N$, то распределение имеет моду $M_0(X) = [\lambda]$, где $[\lambda]$ – целая часть параметра λ, и распределение является унимодальным (одномодальным). Если же $\lambda \in N$, то распределение имеет две моды $M_0(X) = \lambda - 1$ и $M_0(X) = \lambda$, и распределение является бимодальным (двухмодальным).

Список цитированных источников

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.

2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1977. – 831 с.