УДК 531.8:621.926.9

# РАСПРАЦОЎКА АЛГАРЫТМУ АНАЛІТЫЧНАГА МЕТАДУ КІНЕМАТЫЧНАГА АНАЛІЗУ ЧАТЫРОХЗВЕННАГА МЕХАНІЗМА ЛАНЦУЖНАГА АГРЭГАТА

**У. А. Патапаў[1], С. І. Русан[2], Л. А. Сівачэнка[3], С. У. Болатаў[4]**

[1] Старшы выкладчык кафедры тэхнічнага забеспячэння сельскагаспадарчай вытворчасці і аграноміі Баранавіцкага дзяржаўнага ўніверсітэта, г. Баранавічы, Рэспубліка Беларусь, e-mail: vladimir-potapov-1990@mail.ru
[2] К. т. н., дацэнт, Баранавіцкага дзяржаўнага ўніверсітэта г. Баранавічы, Рэспубліка Беларусь, e-mail: rusan33@mail.ru
[3] Д. т. н., прафесар, прафесар кафедры транспартныя і тэхналагічныя машыны Беларуска-Расійскага ўніверсітэта, г. Магілёў, Рэспубліка Беларусь, e-mail: 228011@mail.ru
[4] К. т. н., дацэнт, дэкан электратэхнічнага факультэта Беларуска-Расійскага ўніверсітэта, г. Магілёў, Рэспубліка Беларусь, e-mail: s.v.bolotov@mail.ru

**Рэферат**

У артыкуле распрацаваны алгарытм аналітычнага метаду кінематычнага аналізу чатырохзвеннага механізма, які дазваляе з высокай дакладнасцю вызначыць значэнні скорасці і паскарэння яго звенняў у любы момант часу. Чатырохзвеннікі знаходзяць шырокае распаўсюджанне як самастойныя механізмы, так і ў складзе механічных сістэм. Даследуемы тут варыянт механізма плануецца выкарыстаць у якасці прываднога ў ланцужных агрэгатах.

**Ключавыя словы:** чатырохзвенны механізм, аналітычны метад, кінематычны аналіз, скорасць, паскарэнне, ланцужны агрэгат.

## DEVELOPMENT OF AN ALGORITHM FOR THE ANALYTICAL METHOD FOR THE KINEMATIC ANALYSIS OF A FOUR-LINK MECHANISM OF A CHAIN UNIT

**V. A. Potapov, S. I. Rusan, L. A. Sivachenko, S. V. Bolotov**

**Abstract**

The algorithm of the analytical method for the kinematic analysis of a four-link mechanism is developed in the article, which makes it possible to determine with high accuracy the values of the speed and acceleration of its links at any time. Four-links mechanisms are widely used both as independent mechanisms and as part of mechanical systems. The variant of the mechanism studied here is planned to be used as a drive in chain units.

**Keywords:** four-link mechanism, analytical method, kinematic analysis, speed, acceleration, chain unit.

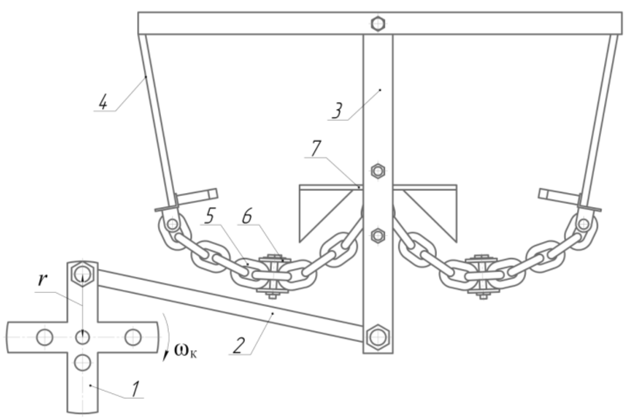
### Уступ

Чатырохзвенныя механізмы, інакш – чатырохзвеннікі, шырока выкарыстоўваюцца ў разнастайных аб’ектах тэхнікі. Таму з’яўляюцца прадметам вывучэння ў падручніках і дапаможніках па тэорыі механізмаў і машын [1–10]. Рух іх звенняў пераважна даследуецца распрацаванымі ў мінулым графічнымі метадамі, недахоп якіх агульнавядомы. У наш час імклівага прагрэсу вылічальнай тэхнікі адкрываецца магчымасць пераходу да больш дакладных аналітычных метадаў вывучэння руху механізмаў, у тым ліку і чатырохзвеннікаў. У прыведзеным тут матэрыяле выкладзена спроба распрацаваць сродкамі тэарэтычнай механікі, аналітычнай геаметрыі і дыферэнцыяльнага вылічэння адпаведны алгарытм. Дадзенае даследаванне ў пэўнай ступені накіравана на рашэнне прыкладной задачы, а менавіта – распрацоўцы алгарытму кінематычнага аналізу чатырохзвеннага механізма ланцужнага агрэгата, што выкарыстоўваецца ў тэхналогіі здрабнення дыскрэтных матэрыялаў.

### Функцыяванне прываднога механізма ў ланцужным агрэгаце

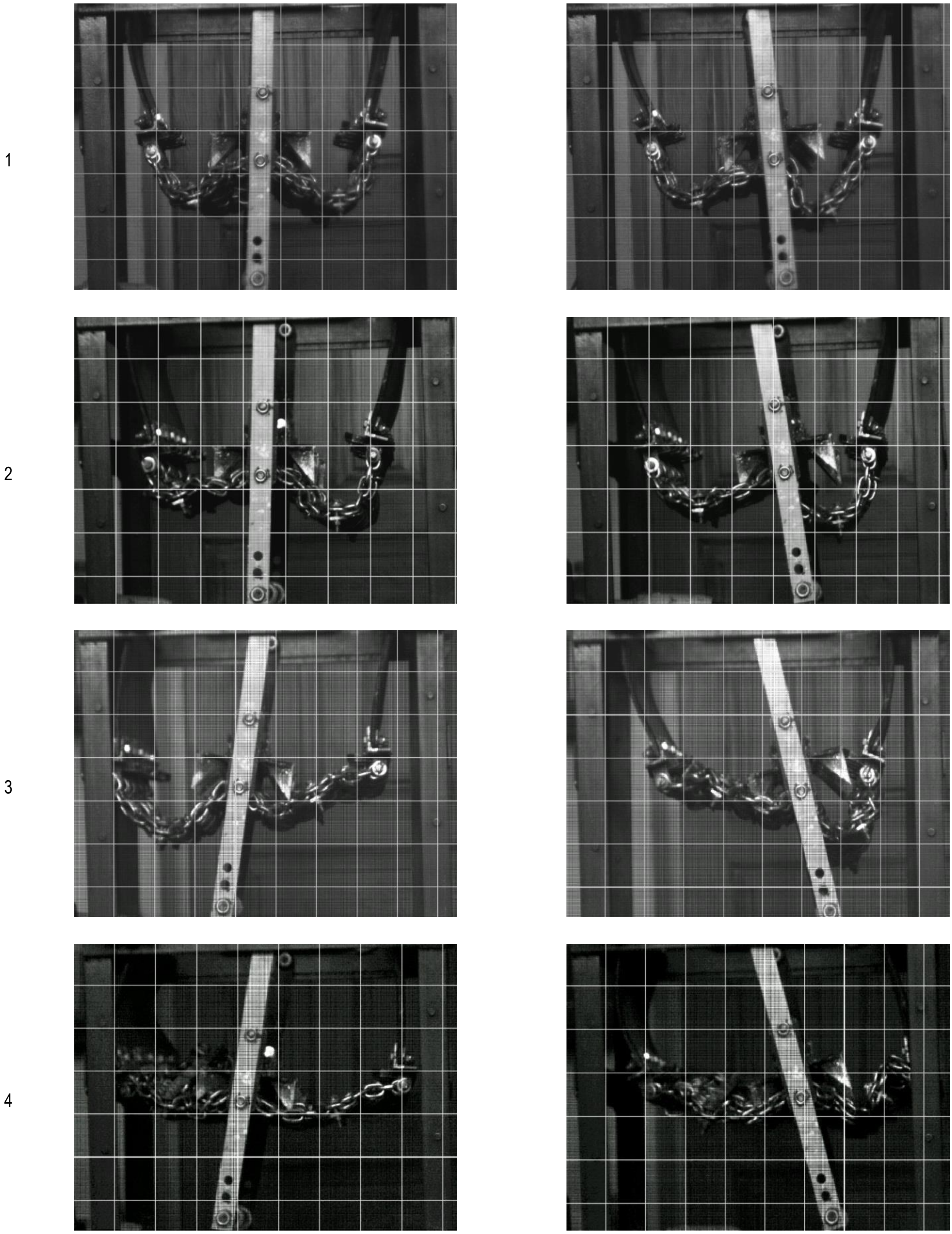
Апісаны ніжэй чатырохзвеннік з'яўляецца прывадным механізмам у ланцужным агрэгаце. Яго схема і рабочыя элементы прадстаўлены на рысунку 1.

На падставе раней праведзеных даследаванняў якасці перапрацоўкі мелу было ўстаноўлена, што з павелічэннем даўжыні крывашыпа $r$ і яго вуглавой скорасці $\omega_к$ (вар'іруемыя параметры) павялічваецца значэнне ступені драбнення і спажыванай магутнасці [11]. Для вывучэння руху была праведзена хуткасная відэаздымка прываднога механізма і рабочых элементаў ланцужнага агрэгата, якая дазволіла візуальна ацаніць формы ненагружаных рабочых элементаў у залежнасці ад вар'іраваных параметраў у крайніх становішчах маятнікавых рычагоў. На рысунку 2 паказаны вынікі хуткаснай відэаздымкі выходных звенняў – каромысла і рабочыя элементы (ланцужныя палотны, штанга, гнуткія сценкі і здымныя планкі) – пры розных значэннях $r$ і $\omega_к$.




1 – крывашып; 2 – шатун; 3 – два каромыслы (на рысунку сумяшчаюцца, інакш маятнікавыя рычагі); 4 – гнуткія сценкі; 5 – ланцужныя палотны; 6 – здымныя планкі; 7 – штанга; $r$ – даўжыня крывашыпа; $\omega_к$ – вуглавая скорасць крывашыпа

**Рысунак 1** – Прывадны механізм і рабочыя элементы ланцужнага агрэгата



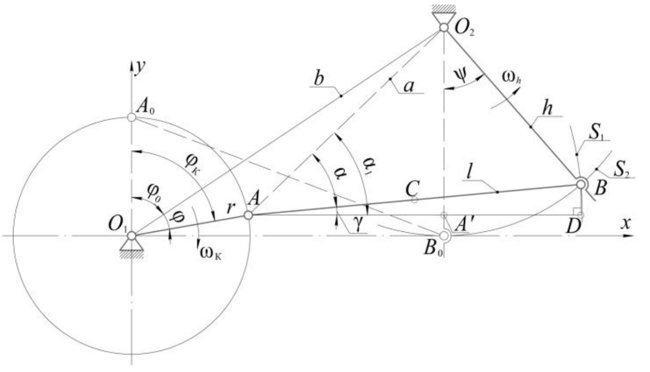

**Рысунак 2** – Вынікі хуткаснай відэаздымкі пры розных значэннях даўжыні крывашыпа $r$
і яго вуглавой скорасці $\omega_к$ (першы рад: $r$ = 30 мм, $\omega_к$ = 31,4 рад / с; другі рад: $r$ = 30 мм, $\omega_к$ = 62,8 рад / с;
трэці рад: $r$ = 75 мм, $\omega_к$ = 31,4 рад / с; чацвёрты рад: $r$ = 75 мм, $\omega_к$ = 62,8 рад / с)


doi.org/10.36773/1818-1112-2022-128-2-105-112

Як бачым, змена ўваходных геаметрычных і кінематычных параметраў прываднога механізма значна ўплывае на характар руху рабочых элементаў, а ў канчатковым выніку і на выхадныя тэхналагічныя і энергетычныя параметры ланцужнага агрэгата [11]. Атрыманы ніжэй алгарытм аналітычнага метаду кінематычнага аналізу прываднога механізма дазволіць дакладна вызначыць абсалютныя і адносныя значэнні скарасці і паскарэння выходных звенняў і адпаведна ацаніць уплыў зададзеных геаметрычных і кінематычных параметраў на іх значэнне.

**Распрацоўка алгарытму аналітычнага метаду кінематычнага аналізу чатырохзвеннага механізма**

Пры распрацоўцы алгарытму прымем наступную схему прываднога механізма (рысунак 3).




**Рысунак 3 –** Схема чатырохзвенніка $O_1ABO_2$; ілюстрацыя да вызначэння вуглоў (5)

Ён прадстаўлены ў выглядзе чатырохзвенніка, які складаецца з рухомых звенняў – крывашыпа $O_1A$, шатуна $AB$, маятнікавага рычага $O_2B$, і нерухомага – $O_1O_2$. Нерухомае звяно ў тэорыі механізмаў і машын называюць стойкай, а маятнікавы рычаг – каромыслам. Абазначым даўжыні звенняў $O_1A$, $AB$, $O_2B$, $O_1O_2$ адпаведна літарамі $r$, $l$, $h$ і $b$. Пачатак каардынат сумяшчаем з воссю вярчэння крывашыпа $O_1$. Каардынатную вось $O_1x$ накіроўваем управа па датычнай да траекторыі шарніра $B$, а вось $O_1y$ – уверх перпендыкулярна да $O_1x$. Становішча крывашыпа ў адвольны момант часу $t$ будзем вызначаць вуглом $\varphi_к$, які адлічваецца ад восі $O_1y$ па стрэлцы гадзінніка, а яго вугал павароту адносна стойкі $O_1O_2$ абазначым праз $\varphi$. Пачатковае становішча механізма (пры $\varphi_к = 0$) на рысунку 3 паказана пункцірам $O_1A_0B_0O_2$. Вуглавое перамяшчэнне каромысла адносна яго пачатковага становішча абазначым літарай $\psi$. Далей будзем лічыць, што крывашып верціцца з пастаяннай вуглавой скорасцю $\omega_к$. У даследаванні неабходна пры зададзеных геаметрычных параметрах механізма і $\omega_к$ вызначыць кінематычныя характарыстыкі руху яго звенняў. Для гэтага спачатку знойдзем ураўненні іх руху, гэта значыць вуглы павароту і каарданаты цэнтра мас шатуна як функцыі часу $t$. Ураўненне руху крывашыпа са становішча $O_1A_0$ прадставім формулай

$$\varphi_K = \varphi_0 + \varphi\,,$$

дзе $\varphi = \omega_K(t - t_0)$, $t_0 = \varphi_0 / \omega_K$. Каардынаты шарніра $A$ у адвольны момант часу вызначаюцца па формулах:

$$x_A = r\sin\varphi_K;\; y_A = r\cos\varphi_K\,.$$

Шатун будзем лічыць аднародным стрыжнем пастаяннага сячэння. Яго цэнтр мас знаходзіцца пасярэдзіне даўжыні $l$ у пунце $C$. Шатун выконвае плоскапаралельны рух, які апісваецца трыма ўраўненнямі: каардынатамі $x_C$, $y_C$ пункта $C$ і вуглом павароту $\gamma$ адносна нерухомай восі $O_1x$. На рысунку 3 лінія $AD$ паралельна да восі $O_1x$. Як відаць, вугал $\gamma = \alpha_1 - \alpha$. Знаходзім вуглы $\alpha$ і $\alpha_1$. У трохвугольніку $ABO_2$ невядома старана $a = AO_2$. Вызначаем яе па тэарэме косінусаў з трохвугольніка $AO_1O_2$: $a^2 = r^2 + b^2 - 2rb\cos\varphi$, дзе $\varphi = \varphi_K - \varphi_0$. Паводле той жа тэарэмы ў трохвугольніку $ABO_2$ $h^2 = a^2 + l^2 - 2al\cos\alpha$, адкуль $\cos\alpha = (a^2 + l^2 - h^2) / 2al = f_1$ і $\alpha = \arccos f_1$. У прамавугольным трохвугольніку $AA'O_2$ $tg\,\alpha_1 = A'O_2 / AA' = \Delta y / \Delta x = f_2$, дзе $\Delta x = x_{O_2} - x_A$, $\Delta y = y_{O_2} - y_A$ ($x_{O_2}, y_{O_2}$ – каардынаты восі $O_2$). Адсюль $\alpha_1 = arc\,tg\,f_2$.

Такім чынам,

$$\gamma = arctg\,f_2 - \arccos f_1\,. \tag{1}$$

Як відаць з рысунка 3,

$$x_C = x_A + l(\cos\gamma)/2;\; y_C = y_A + l(\sin\gamma)/2\,. \tag{2}$$

Сістэма ўраўненняў (1), (2) апісвае плоскапаралельны рух шатуна.

Становішча пунка $B$ у адвольны момант часу $t$ можна вызначыць графічна шляхам засечак дугамі $S_1$, $S_2$ радыусаў $l$ і $h$ з цэнтраў $A$ і $O_2$. Для аналітычнага вызначэння яго каардынат запішам сістэму ураўненняў дзвюх адпаведных дугам $S_1$, $S_2$ акружнасцей у параметрычнай форме:

$$x_B = x_A + l\cos\gamma;\; y_B = y_A + l\sin\gamma\,; \tag{3}$$

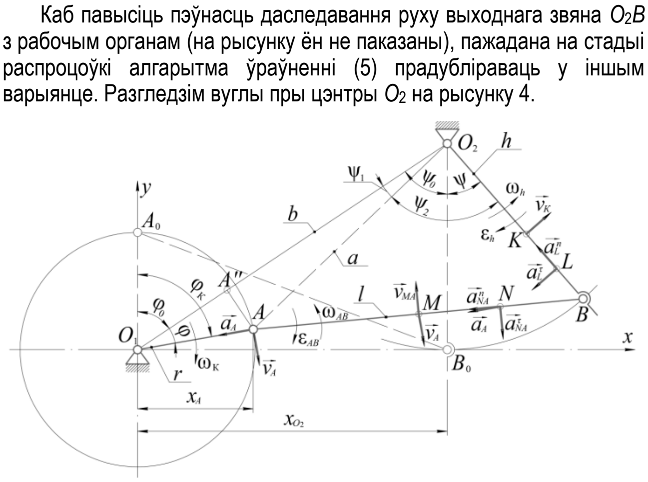
$$x_B = x_{O_2} + h\sin\psi;\; y_B = y_{O_2} - h\cos\psi\,. \tag{4}$$

З сістэмы (3), (4) выключаем $x_B$, $y_B$; атрымліваем: $x_A + l\cos\gamma = x_{O_2} + h\sin\psi$; $y_A + l\sin\gamma = y_{O_2} - h\cos\psi$. Адсюль:
$\sin\psi = (l\cos\gamma - \Delta x)/h = f_3$; $\cos\psi = (\Delta y - l\sin\gamma)/h = f_4$ і

$$\psi = \arcsin f_3;\; \psi = \arccos f_4\,. \tag{5}$$

Кожная з формул (5) апісывае вярчальны рух маятнікавага рычага $O_2B$. Для кантролю разлікаў выкарыстоўваецца вядомая з трыганаметрыі залежнасць: $\sin^2\psi + \cos^2\psi = 1$.

Каб павысіць пэўнасць даследавання руху выходнага звяна $O_2B$ з рабочым органам (на рысунку ён не паказаны), пажадана на стадыі распроцоўкі алгарытма ўраўненні (5) прадубліраваць у іншым варыянце. Разгледзім вуглы пры цэнтры $O_2$ на рысунку 4.




**Рысунак 4** – Ілюстрацыя да выводу формулы (6) і кінематычныя характарыстыкі руху звенняў

Відавочна, вугал $\psi = \psi_1 + \psi_2 - \psi_0$. Знойдзем складаемыя $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_0$. Праводзім адрэзак $AA''$, перпендыкулярны да лініі $O_1O_2$. У трохвугольніку $AA''O_2$ $tg\,\psi_1 = AA'' / A''O_2$, дзе $AA'' = r\sin\varphi$, $A''O_2 = b - r\cos\varphi$. Тады $tg\,\psi_1 = (r\sin\varphi)/(b - r\cos\varphi) = f_5$. З трохвугольніка $AO_2B$ вызначаем: $l^2 = a^2 + h^2 - 2ah\cos\psi_2$, адкуль $\cos\psi_2 = (a^2 + h^2 - l^2)/2ah = f_6$. Пастаянны вугал $\psi_0$ у трохвугольніку $O_1O_2B_0$ знаходзім па формуле $\psi_0 = arctg\,(x_{O_2}/h)$.

Ураўненне руху каромысла прымае від:

$$\psi = arctg\, f_5 + arccos f_6 - arctg\,(x_{O_2}/h). \qquad (6)$$

Знойдзем вуглавую скорасць $\omega_{AB}$ шатуна *AB*. Ураўненню вярчальнай часткі яго руху (1) адпавядае дзвюхкампанентная формула вуглавой скорасці

$$\omega_{AB} = \omega_{AB1} - \omega_{AB2}. \qquad (7)$$

Тут, паводле формулы (1),

$$\omega_{AB1} = \frac{d(arctg\, f_2)}{dt} = \frac{d(arctg\, f_2)}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dt} =$$
$$= (1+f_2^2)^{-1}\frac{\left[\Delta x\cdot d(\Delta y)/dt - \Delta y\cdot d(\Delta x)/dt\right]}{(\Delta x)^2} =$$
$$= \frac{(\Delta x)^2\left[(x_{O_2} - r\sin\varphi_K)r\sin\varphi_K\omega_K - (y_{O_2} - r\cos\varphi_K)(-r\cos\varphi_K\omega_K)\right]}{a^2(\Delta x)^2},$$

ці

$$\omega_{AB1} = \frac{r\omega_K(x_{O_2}\sin\varphi_K + y_{O_2}\cos\varphi_K - r)}{a^2}. \qquad (8)$$

$$\omega_{AB2} = \frac{d(arccos f_1)}{dt} = \frac{d(arccos f_1)}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dt} =$$
$$-(1-f_1^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\left[2al\cdot d(q^2)/dt - q^2 2l\cdot d(a)/dt\right]}{4a^2l^2},$$

дзе $q^2 = a^2 + l^2 - h^2$.

Далей будзем улічваць, што тут

$$(1-f_1^2)^{-\frac{1}{2}} = 2al(4a^2l^2 - q^4)^{-\frac{1}{2}};$$

$$d(q^2)/dt = d(a^2)/dt = 2rb\sin\varphi\omega_K;$$

$$d(a)/dt = d(\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\varphi})/dt = rb\sin\varphi\omega_K/a.$$

Атрымліваем:

$$\omega_{AB2} = \frac{rb\omega_K \sin\varphi(q^2 - 2a^2)}{a^2\sqrt{4a^2l^2 - q^4}}. \qquad (9)$$

Падстаўляем (8) і (9) у (7); знаходзім:

$$\omega_{AB} = r\omega_K\left\{\left[\frac{(x_{O_2}\sin\varphi_K + y_{O_2}\cos\varphi_K - r)}{a^2}\right] - \left[\frac{b\sin\varphi(q^2 - 2a^2)}{a^2\sqrt{4a^2l^2 - q^4}}\right]\right\}. \qquad (10)$$

Лінейную скорасць $v_M$ любога пункта *M* шатуна (рысунак 4) вылічваем па формуле $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$, дзе $v_A = \omega_K r$, $v_{MA} = \omega_{AB}\cdot AM$, $\vec{v}_{MA} \perp AM$.

Пераходзім да вызначэння вуглавога паскарэння $\varepsilon_{AB}$ шатуна *AB*. Сыходзім з формулы (7) $\varepsilon_{AB} = d\omega_{AB}/dt = d\omega_{AB1}/dt - d\omega_{AB2}/dt$, ці

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{AB1} - \varepsilon_{AB2}. \qquad (11)$$

Каб вызначыць $\varepsilon_{AB1}$, формулу (8) запішам у выглядзе: $\omega_{AB1} = r\omega_K(p/k)$, дзе $p = (x_{O_2}\sin\varphi_K + y_{O_2}\cos\varphi_K - r)$; $k = a^2$. Тады $\varepsilon_{AB1} = r\omega_K d(p/k)/dt$, ці

$$\varepsilon_{AB1} = \frac{r\omega_K(kp' - pk')}{k^2}. \qquad (12)$$

Тут $p' = dp/dt = \omega_K(x_{O_2}\cos\varphi_K - y_{O_2}\sin\varphi_K)$; $k' = d(a^2)/dt = 2rb\omega_K\sin\varphi$.

Формулу (9) прадстаўляем у выглядзе: $\omega_{AB2} = br\omega_K\left[(u/v)\cdot(s/w)\right]$, дзе $u = sin\varphi$; $v = a^2$; $s = q^2 - 2a^2$; $w = \sqrt{4a^2l^2 - q^4}$. Знаходзім:

$$\varepsilon_{AB2} = d\left(\omega_{AB2}\right)/dt = br\omega_K\left[(u/v)(s/w)' + (u/v)'(s/w)\right] =$$
$$= br\omega_K\left\{\left[(u/v)(ws' - w's)/w^2\right] + \left[(vu' - uv')/v^2\right]/(s/w)\right\},$$

альбо

$$\varepsilon_{AB2} = br\omega_K\left\{[u(ws' - w's)/vw^2] + s(vu' - uv')/wv^2\right\}. \qquad (13)$$

У формуле (13) $u' = cos\varphi\cdot\omega_K$; $v' = 2rbsin\varphi\omega_K$; $s' = -2rb\sin\varphi\omega_K$;

$$w' = (8l^2rb\sin\varphi\omega_K - 4q^2rb\sin\varphi\omega_K)/2\sqrt{4a^2l^2 - q^4} =$$
$$= 2rb\omega_K\sin\varphi\left(2l^2 - q^2\right)/\sqrt{4a^2l^2 - q^4}.$$

Па формуле (11) знаходзім:

$$\varepsilon_{AB} = r\omega_K^2\left\{(kp'' - pk'')/k^2 - b\left\{\begin{matrix}\left[u(ws'' - w''s)/vw^2\right] + \\ + s(vu'' - uv'')/wv^2\end{matrix}\right\}\right\}. \qquad (14)$$

Тут множнікі, абазначаныя двума штрыхамі ("), адрозніваюцца ад выкарыстаных у формулах (12) і (13) адсутнасцю $\omega_K$ – у формуле (14) $\omega_K$ вынесена за дужкі. Паскарэнне адвольнага пункта *N* шатуна вылічваецца па формуле

$$\vec{a}_N = \vec{a}_A + \vec{a}_{NA}^n + \vec{a}_{NA}^\tau, \qquad (15)$$

дзе $a_A = r\omega_K^2$, $a_{NA}^n = \omega_{AB}^2\cdot AN$, $a_{NA}^\tau = \varepsilon_{AB}\cdot AN$, $\vec{a}_{NA}^n \parallel AN$, $\vec{a}_{NA}^\tau \perp AN$.

Напрамкі вектароў, падсумаваных у формуле (15), паказаны на рысунку 4.

Для вызначэння вуглавой скорасці $\omega_h$ каромысла скарыстаемся ўраўненнем яго руху (6), паводле якога $\psi = \psi_1 + \psi_2 - \psi_0$. Знаходзім: $\omega_h = d\psi_1/dt + d\psi_2/dt + d\psi_0/dt$. Паколькі $d\psi_0/dt = 0$, то

$$\omega_h = \omega_{h1} + \omega_{h2}. \qquad (16)$$


doi.org/10.36773/1818-1112-2022-128-2-105-112

Тут

$$\omega_{h1} = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d(arctgf_5)}{dt} = \frac{d(arctgf_5)}{df_5} \cdot \frac{df_5}{dt} =$$

$$= (1+f_5^2)^{-1}\left[\frac{(b-r\cos\varphi)r\cos\varphi\omega_\kappa - (r\sin\varphi)r\sin\varphi\omega_\kappa}{(b-r\cos\varphi)^2}\right],$$

дзе $(1+f_5^2)^{-1} = (b-r\cos\varphi)^2 / \left[(b-r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2\right]$.

Канчаткова атрымліваем:

$$\omega_{h1} = \frac{r\omega_\kappa(b\cos\varphi - r)}{a^2}.$$

Далей знаходзім:

$$\omega_{h2} = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d(\arccos f_6)}{dt} = \frac{d(\arccos f_6)}{df_6} \cdot \frac{df_6}{dt} =$$

$$= -(1-f_6^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\left[2ah \cdot d(q_1^2)/dt - q_1^2 2h \cdot d(a)/dt\right]}{4a^2h^2},$$

дзе $q_1^2 = a^2 + h^2 - l^2$.

$$d(q_1^2)/dt = d(a^2)/dt = 2rb\sin\varphi\omega_\kappa;$$

$$d(a)/dt = d(\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\varphi})/dt = rb\sin\varphi\omega_\kappa / a.$$

Атрымліваем:

$$\omega_{h2} = \frac{rb\omega_\kappa \sin\varphi(q_1^2 - 2a^2)}{a^2\sqrt{4a^2h^2 - q_1^4}}. \quad (17)$$

Такім чынам, паводле формулы (16) вуглавая скорасць каромысла роўна:

$$\omega_h = r\omega_\kappa\left\{\left[\frac{b\cos\varphi - r}{a^2}\right] + \left[\frac{b\sin\varphi(q_1^2 - 2a^2)}{a^2\sqrt{4a^2h^2 - q_1^4}}\right]\right\}. \quad (18)$$

Скорасць $v_K$ адвольнага пункта $K$, у тым ліку і рабочага органа, роўна: $v_K = \omega_h \cdot O_2K$; вектар $\bar{v}_K \perp O_2K$.

Шляхам дыферэнцыравання роўнасці (16) знаходзім вуглавое паскарэнне каромысла ў выглядзе сумы:

$$\varepsilon_h = \varepsilon_{h1} + \varepsilon_{h2}. \quad (19)$$

Тут

$$\varepsilon_{h1} = \frac{d\omega_{h1}}{dt} = r\omega_\kappa \frac{d\left[(b\cos\varphi - r)/a^2\right]}{dt} =$$

$$= r\omega_\kappa \frac{\left[a^2(-b\sin\varphi\omega_\kappa) - (b\cos\varphi - r)\cdot 2br\sin\varphi\omega_\kappa\right]}{a^4},$$

ці

$$\varepsilon_{h1} = \frac{-br\omega_\kappa^2 \sin\varphi\left[a^2 + 2r(b\cos\varphi - r)\right]}{a^4}. \quad (20)$$

Для вызначэння $\varepsilon_{h2}$ структуру формулы (17) прадставім у выглядзе: $\omega_{h2} = br\omega_\kappa\left[(u_1/v_1)\cdot(s_1/w_1)\right]$, дзе $u_1 = \sin\varphi$; $v_1 = a^2$; $s_1 = q_1^2 - 2a^2$; $w_1 = \sqrt{4a^2h^2 - q_1^4}$. Знаходзім:

$$\varepsilon_{h2} = d(\omega_{h2})/dt = br\omega_\kappa\left[(u_1/v_1)(s_1/w_1)' + (u_1/v_1)'(s_1/w_1)\right] =$$

$$= br\omega_\kappa\left\{\left[(u_1/v_1)(w_1s_1' - w_1's_1)/w_1^2\right] + \left[(v_1u_1' - u_1v_1')/v_1^2\right](s_1/w_1)\right\},$$

альбо

$$\varepsilon_{h2} = br\omega_\kappa\left\{[u_1(w_1s_1' - w_1's_1)/v_1w_1^2] + s_1(v_1u_1' - u_1v_1')/w_1v_1^2\right\}. \quad (21)$$

У формуле (21) $u_1' = \cos\varphi\cdot\omega_\kappa$; $v_1' = 2rb\sin\varphi\omega_\kappa$; $s_1' = -2rb\sin\varphi\omega_\kappa$;

$$w_1' = (8h^2rb\sin\varphi\omega_\kappa - 4q_1^2rb\sin\varphi\omega_\kappa)/2\sqrt{4a^2h^2 - q_1^4} =$$

$$= 2rb\omega_\kappa\sin\varphi\left(2h^2 - q_1^2\right)/\sqrt{4a^2h^2 - q_1^4}.$$

Падстаўляем (20) і (21) у (19); атрымліваем вуглавое паскарэнне каромысла:

$$\varepsilon_h = br\omega_\kappa^2\left\{\begin{array}{l} -\left\{\sin\varphi\left[a^2 + 2r(b\cos\varphi - r)\right]/a^4\right\} + \\ + \left[u_1(w_1s_1'' - w_1''s_1)/v_1w_1^2 + s_1(v_1u_1'' - u_1v_1'')/w_1v_1^2\right] \end{array}\right\}. \quad (22)$$

Тут, як і вышэй у формуле (14), множнікі, абазначаныя (''), адрозніваюцца ад адпаведных множнікаў з (') адсутнасцю скорасці $\omega_\kappa$.

Паскарэнне адвольнага пункта $L$ каромысла роўна

$$\vec{a}_L = \vec{a}_L^n + \vec{a}_L^\tau,$$

дзе $a_L^n = \omega_h^2 \cdot O_2L$, $a_L^\tau = \varepsilon_h \cdot O_2L$, $\vec{a}_L^n \parallel O_2L$, $\vec{a}_L^\tau \perp O_2L$.

Каб прыдаць формулам для вылічэння кінематычных характарыстык руху звенняў абагульнены выгляд, пяройдзем да адносных геаметрычных параметраў $\rho = r/l$ і $\lambda = h/l$. Тады формулы (10), (14), (18), (22) прымуць выгляд:

$$\omega_{AB} = \rho\omega_\kappa\left[\begin{array}{l} \dfrac{2\sin\varphi_\kappa\sqrt{\lambda^2-\eta^2}\sqrt{1-\rho^2} - 2\eta\eta_1\sin\varphi - 2\rho\sqrt{\lambda^2-\eta^2} + 2\lambda^2\eta_1\sin\varphi + 2\lambda}{2\sqrt{\lambda^2-\eta^2}} \times \\ \times \dfrac{\cos\varphi_\kappa\sqrt{\lambda^2-\eta^2}}{\left(\lambda^2 - 2\eta + 1\right)} \end{array}\right],$$

$$\varepsilon_{AB} = \rho\omega_\kappa^2\left\{\begin{array}{l} (k_1p'_1 - p_1k'_1)/k_1^2 - \\ - b_1\left\{\left[u_2(w_2s'_2 - w'_2s_2)/v_2w_2^2\right] + s_2(v_2u'_2 - u_2v'_2)/w_2v_2^2\right\} \end{array}\right\},$$

$$\omega_h = -\rho\omega_\kappa\left[\frac{2\rho\sqrt{\lambda^2-\eta^2} + 2\eta_1\sin\varphi - 2\eta\eta_1\sin\varphi + 2\eta_1\sqrt{\lambda^2-\eta^2}\left(2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - 1\right)}{2\sqrt{\lambda^2-\eta^2}\left(\lambda^2 - 2\eta + 1\right)}\right],$$

$$\varepsilon_h = \eta_1\rho\omega_\kappa^2\left\{\begin{array}{l} -\left\{\sin\varphi\left[a_1^2 + 2\rho(\eta_1\cos\varphi - \rho)\right]/a_1^4\right\} + \\ + \left[u_3(w_3s'_3 - w'_3s_3)/v_3w_3^2 + s_3(v_3u'_3 - u_3v'_3)/w_3v_3^2\right] \end{array}\right\},$$

дзе $\eta = \eta_1\rho\cos\varphi$; $\eta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \rho^2 + 1}$;

$k_1 = \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}\right)^2$; $p_1 = \sqrt{1-\rho^2}\sin\varphi_\kappa + \lambda\cos\varphi_\kappa - \rho$;

$k'_1 = 2\rho\eta_1\sin\varphi$; $p'_1 = \sqrt{1-\rho^2}\cos\varphi_\kappa - \lambda\sin\varphi_\kappa$; $u_2 = \sin\varphi$;

$w_2 = \sqrt{4\left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}\right)^2 - \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + 1 - \lambda^2}\right)^4}$;


doi.org/10.36773/1818-1112-2022-128-2-105-112

$$s_2 = \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + 1 - \lambda^2}\right)^2 - 2\left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}\right)^2;$$

$$v_2 = \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}\right)^2;\ u'_2 = cos\,\varphi;$$

$$w'_2 = \frac{2\rho\eta_1 \sin\varphi\left[2 - \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + 1 - \lambda^2}\right)^2\right]}{\sqrt{4\left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}\right)^2 - \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + 1 - \lambda^2}\right)^4}};$$

$$s'_2 = -2\rho\eta_1 \sin\varphi;\ v'_2 = 2\rho\eta_1 \sin\varphi;$$

$$a_1 = \sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta};\ u_3 = \sin\varphi;$$

$$w_3 = \sqrt{4\left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}\right)^2 \lambda^2 - \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + \lambda^2 - 1}\right)^4};$$

$$s_3 = \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + \lambda^2 - 1}\right)^2 - 2\left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}\right)^2;$$

$$v_3 = \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}\right)^2;\ u'_3 = cos\,\varphi;$$

$$w'_3 = \frac{2\rho\eta_1 \sin\varphi\left[2\lambda^2 - \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + \lambda^2 - 1}\right)^2\right]}{\sqrt{4\left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta}\right)^2 \lambda^2 - \left(\sqrt{\rho^2 + \eta_1^2 - 2\eta + \lambda^2 - 1}\right)^4}};$$

$$s'_3 = -2\rho\eta_1 \sin\varphi;\ v'_3 = 2\rho\eta_1 \sin\varphi.$$

У канструкцыі ланцужнага агрэгата, як адзначалася раней, даўжыня крывашыпа *r* з'яўляецца вар'іруемым параметрам. Згодна з праведзенымі раней даследаваннямі асіметрыі ваганняў выходнага звяна прываднога механізму ланцужнага агрэгата устаноўлена, што з павелічэннем адноснага геаметрычнага параметра ρ у дыяпазоне ад 0,1 да 0,5 пры λ = 2/3 вуглы ваганняў (паварота) каромысла істотна ўзрастаюць і павялічваецца асіметрыя ваганняў маятнікавага рычага (каромысла) [12].

Такім чынам, узнікае неабходнасць прааналізаваць уплыў змены адноснага геаметрычнага параметру ρ на кінематычныя характарыстыкі чатырохзвеннага механізма. Для гэтага пабудуем графікі ў адносных кінематычных характарыстыках: $\omega_{AB}^{\xi} = \omega_{AB} / \omega_{\kappa}$; $\omega_h^{\xi} = \omega_h / \omega_{\kappa}$; $\varepsilon_{AB}^{\xi} = \varepsilon_{AB} / \omega_{\kappa}^2$; $\varepsilon_h^{\xi} = \varepsilon_h / \omega_{\kappa}^2$.

Разлік і пабудову графікаў правядзем пры значэннях ρ = 0,1 і 0,5; λ = 2/3.


**Рысунак 5** – Графік змянення адноснай вуглавой скорасці шатуна $\omega_{AB}^{\xi}$ у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа $\varphi_к$ (пры ρ = 0,1)


**Рысунак 6** – Графік змянення адноснай вуглавой скорасці шатуна $\omega_{AB}^{\xi}$ у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа $\varphi_к$ (пры ρ = 0,5)

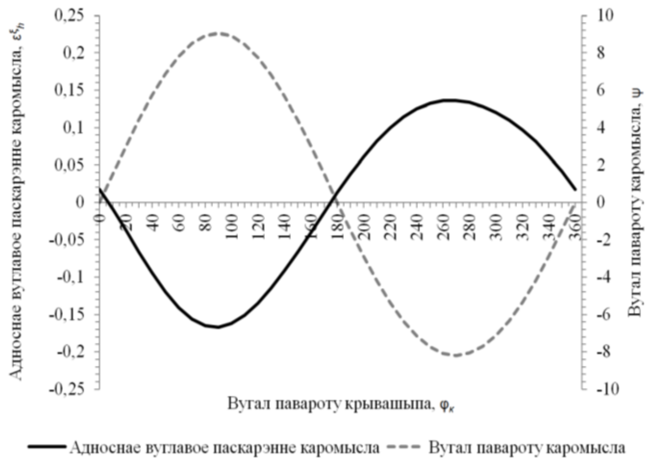

**Рысунак 7** – Графік змянення адноснай вуглавой скорасці каромысла $\omega_h^{\xi}$ у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа $\varphi_к$ (пры ρ = 0,1)


**Рысунак 8** – Графік змянення адноснай вуглавой скорасці каромысла $\omega_h^{\xi}$ у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа $\varphi_к$ (пры ρ = 0,5)

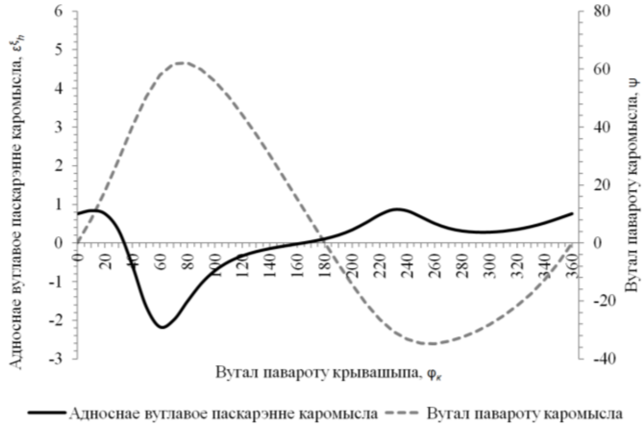

*doi.org/10.36773/1818-1112-2022-128-2-105-112*


**Рысунак 9** – Графік змянення адноснага вуглавога паскарэння шатуна $\varepsilon^{\xi}_{AB}$ у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа $\varphi_к$ (пры $\rho = 0{,}1$)


**Рысунак 10** – Графік змянення адноснага вуглавога паскарэння шатуна $\varepsilon^{\xi}_{AB}$ у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа $\varphi_к$ (пры $\rho = 0{,}5$)




**Рысунак 11** – Графік змянення адноснага вуглавога паскарэння каромысла $\varepsilon^{\xi}_{h}$ у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа $\varphi_к$ (пры $\rho = 0{,}1$)

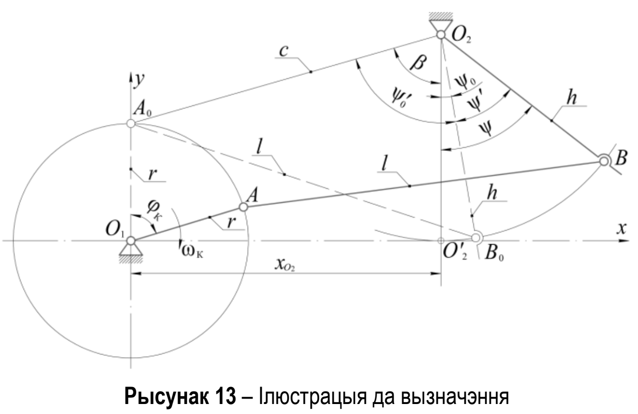



**Рысунак 12** – Графік змянення адноснага вуглавога паскарэння каромысла $\varepsilon^{\xi}_{h}$ у залежнасці ад вугла павароту крывашыпа $\varphi_к$ (пры $\rho = 0{,}5$)

Атрыманыя ў разліках адносныя кінематычныя характарыстыкі руху звенняў і пабудаваныя графікі іх змяненняў дазваляюць уявіць велічыню характарыстык у параўнанні з вядомымі характарыстакамі руху крывашыпа $\omega_к$ і $\omega_к^2 = a_A / r$ ($a_A$ – паскарэнне пункта *A*). З атрыманых графікаў відаць, што пры павелічэнні параметра $\rho$ значна ўзрастае як асіметрыя перамяшчэнняў звенняў, так і кінематычныя характарыстыкі іх руху. Так, пры $\rho = 0{,}1$ каэфіцыент асіметрыі $\eta$ вугла $\psi_h$ роўны $\eta = 0{,}9$, а пры $\rho = 0{,}5$ $\eta = 0{,}56$; пры гэтым абсалютнае значэнне амплітуднага вугла ўзрастае ў 6,88 разоў. Найбольшая вуглавая скорасць $\omega_h$ узрасла ад 0,151 да 1,145 (у 7,58 разоў).

Вышэй пры даследаванні чатырохзвенніка меркавалася, што яго рух пачынаецца са становішча, у якім каромысел паралельны да крывашыпа (рысункі 3, 4). Аднак у працэсе доследнага вывучэння тэхналагічных характарыстык ланцужнага агрэгата даводзіцца вар'іраваць геаметрычнымі параметрамі механізма, у прыватнасці, велічыней $\rho$. Пры гэтым, каб у пачатковым становішчы механізма захоўваць паралельнасць згаданых яго звенняў, давядзецца перасоўваць (змяняць каардынату $x_{O_2}$) вось вярчэння каромысла.

На практыцы пры правядзенні доследаў гэтая аперацыя стварае пэўныя нязручнасці. Каб іх пазбегнуць, разгледзім варыянт разліковай схемы механізма, пры якім каромысел у пачатковым становішчы не паралельны да крывашыпа (рысунак 13).




**Рысунак 13** – Ілюстрацыя да вызначэння вугла павароту ψ каромысла

У гэтым варыянце схемы механізма да трох яго незалежных геаметрычных параметраў *r*, *l*, *h* дадаецца чацвёрты – $x_{O_2}$. Цяпер у пачатковым становішчы механізма $O_1A_0B_0O_2$ каромысел $O_2B_0$ утварае з вертыкаллю $O_2O'_2$ (а, значыць, і з крывашыпам) вугла $\psi_0$.


*doi.org/10.36773/1818-1112-2022-128-2-105-112*

Як відаць на рысунку 13, $\psi_0 = \psi'_0 - \beta$, дзе $\beta = arctg\left(x_{O_2} / (h-r)\right)$. Вугал $\psi'_0$ знаходзім з трохвугольніка $A_0B_0O_2$, у якім старана $A_0O_2 = c = \sqrt{x_{O_2}^2 + (h-r)^2}$. Паводле тэарэмы косінусаў $l^2 = c^2 + h^2 - 2ch\cos\psi'_0$, адкуль $\cos\psi'_0 = (c^2 + h^2 - l^2) / 2ch = f_7$ і $\psi'_0 = \arccos f_7$.

Цяпер ураўненне руху каромысла прымае від:

$$\psi = \psi_0 + \psi'. \tag{23}$$

дзе $\psi'$ – вугал павароту каромысла, што адпавядае каардынаце $\varphi_к$ і вылічваецца па формуле (6). Як бачым, новае ўраўненне руху (23) каромысла адрозніваецца ад папярэдняга (6) толькі пастаяным складнікам $\psi_0$. Алгарытм вылічэння $\omega_h$, $\varepsilon_h$ па формуле (23) не змяняецца.

**Заключэнне**

У артыкуле выкладзена распрацоўка сродкамі тэарэтычнай механікі, аналітычнай геаметрыі і дыферэнцыяльнага вылічэння аналітычнага метаду кінематычнага аналізу чатырохзвеннага механізма. Аналітычны алгарытм значна спрашчае пошук аптымальнага варыянту руху выходнага звяна з рабочым органам. Вынікі работы могуць быць выкарыстаны не толькі пры праектаванні ланцужных агрэгатаў, але і пры праектаванні машын разнастайнага прызначэння, у склад якіх уваходзяць чатырохзвеннікі.

**Спіс цытаваных крыніц**


1. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / И. И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
2. Теория механизмов и механика машин: учеб. для втузов / К. Ф. Фролов [и др.] ; под. ред. К. В. Фролова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1998. – 496 с.
3. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин : учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов / В. К. Акулич [и др.] ; под общ. ред. Г. Н. Девойно. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 285 с.
4. Кожевников, С. Н. Теория механизмов и машин: учеб. пособие для машин. спец. вузов / С. Н. Кожевников. – 3-е изд., исправ. и доп. – М. : Машиностроение, 1969. – 584 с.
5. Краснов, А. А. Теория механизмов и машин. Кинематический анализ плоских механизмов с низшими кинематическими парами: учеб. пособие / А. А. Краснов. – Иваново, 2005. – 153 с.
6. Лачуга, Ю. Ф. Теория механизмов и машин. Кинематика, динамика и расчет: учеб. пособие для вузов / Ю. Ф. Лачуга, А. Н. Воскресенский, М. Ю. Чернов. – М. : Колос-с, 2007. – 304 с.
7. Прикладная механика : теория механизмов и машин : учеб. пособие / А. Д. Бардовский [и др.]. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2015. – 96 с.
8. Тимофеев, Г. А. Теория механизмов и машин : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Г. А. Тимофеев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2019. – 368 с.
9. Fundamentals of Machine Theory and Mechanisms / Antonio Simon Mata [et al.]. – Malaga : University of Malaga, 2016. – Volume 40. – 409 p.
10. Uicker, John. J. Theory of machines and mechanisms / John. J. Uicker, Gordon.R. Pennock, Joseph. E. Shigley. – New York ; Oxford : Oxford Univ. Press, 2017. – 5th edition. – 977 p.
11. Потапов, В. А. Исследование влияния режимов работы цепного агрегата на показатели процесса измельчения мела в технологии производства извести / В. А. Потапов, Л. А. Сиваченко, В. А. Дремук // Вестн. БарГУ. Сер. Технические науки. – 2021. – Вып. 9. – С. 37–43.
12. Патапаў, У. А. Даследаванне асіметрыі ваганняў выхаднога звяна прываднога механізма ланцужнага агрэгата / У. А. Патапаў, С. І. Русан, Л. А. Сівачэнка // Механіка. Даследаванні і інавацыі. – 2021. – Вып. 14. – С. 167–173.


**References**


1. Artobolevskij, I. I. Teoriya mekhanizmov i mashin : ucheb. dlya vtuzov / I. I. Artobolevskij. – 4-e izd., pererab. i dop. – M. : Nauka, 1988. – 640 s.
2. Teoriya mekhanizmov i mekhanika mashin: ucheb. dlya vtuzov / K. F. Frolov [i dr.] ; pod. red. K. V. Frolova. – 2-e izd., pererab. i dop. – M. : Vysshaya shkola, 1998. – 496 s.
3. Kursovoe proektirovanie po teorii mekhanizmov i mashin : ucheb. posobie dlya inzh.-tekhn. spec. vuzov / V. K. Akulich [i dr.] ; pod obshch. red. G. N. Devojno. – Minsk : Vyshejshaya shkola, 1986. – 285 s.
4. Kozhevnikov, S. N. Teoriya mekhanizmov i mashin: ucheb. posobie dlya mashin. spec. vuzov / S. N. Kozhevnikov. – 3-e izd., isprav. i dop. – M. : Mashinostroenie, 1969. – 584 s.
5. Krasnov, A. A. Teoriya mekhanizmov i mashin. Kinematicheskij analiz ploskih mekhanizmov s nizshimi kinematicheskimi parami: ucheb. posobie / A. A. Krasnov. – Ivanovo, 2005. – 153 s.
6. Lachuga, Yu. F. Teoriya mekhanizmov i mashin. Kinematika, dinamika i raschet: ucheb. posobie dlya vuzov / Yu. F. Lachuga, A. N. Voskresenskij, M. Yu. CHernov. – M. : Kolos-s, 2007. – 304 s.
7. Prikladnaya mekhanika : teoriya mekhanizmov i mashin : ucheb. posobie / A. D. Bardovskij [i dr.]. – M. : Izd. Dom MISiS, 2015. – 96 s.
8. Timofeev, G. A. Teoriya mekhanizmov i mashin : uchebnik i praktikum dlya prikladnogo bakalavriata / G. A. Timofeev. – 3-e izd., pererab. i dop. – M. : Yurajt, 2019. – 368 s.
9. Fundamentals of Machine Theory and Mechanisms / Antonio Simon Mata [et al.]. – Malaga : University of Malaga, 2016. – Volume 40. – 409 p.
10. Uicker, John. J. Theory of machines and mechanisms / John. J. Uicker, Gordon.R. Pennock, Joseph. E. Shigley. – New York ; Oxford : Oxford Univ. Press, 2017. – 5th edition. – 977 p.
11. Potapov, V. A. Issledovanie vliyaniya rezhimov raboty cepnogo agregata na pokazateli processa izmel'cheniya mela v tekhnologii proizvodstva izvesti / V. A. Potapov, L. A. Sivachenko, V. A. Dremuk // Vestn. BarGU. Ser. Tekhnicheskie nauki. – 2021. – Vyp. 9. – S. 37–43.
12. Patapaŭ, U. A. Dasledavanne asimetryi vagannyaŭ vyhadnoga zvyana pryvadnoga mekhanizma lancuzhnaga agregata / U. A. Patapaŭ, S. I. Rusan, L. A. Sivachenka // Mekhanika. Dasledavanni i inavacyi. – 2021. – Vyp. 14. – S. 167–173.


*Материал поступил в редакцию 06.05.2022*


*doi.org/10.36773/1818-1112-2022-128-2-105-112*