

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

## ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-графических работ  
по теоретической механике

### раздел «Статика»

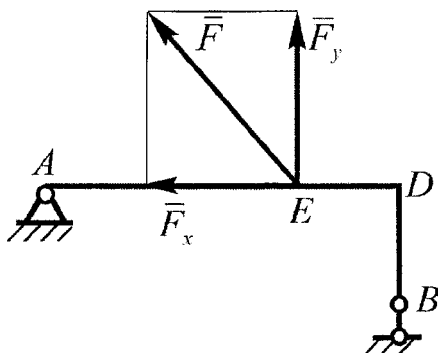
для студентов механических специальностей:

1 – 36 01 01 – «Технология машиностроения»,

1 – 36 01 03 – «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»,

1 – 37 01 07 – «Автосервис»,

1 – 37 01 06 – «Техническая эксплуатация автомобилей»



Брест 2010

УДК 620.10

Теоретическая механика является одной из основных общетехнических дисциплин, которая является базой для изучения специальных дисциплин при подготовке квалифицированных инженеров механических специальностей. Для приобретения навыков инженерных расчетов студенты выполняют расчетно-графические работы по основным разделам курса.

Настоящие методические указания содержат краткий теоретический материал по разделу «Статика», соответствующий программе курса, и условия заданий для выполнения расчетно-графических работ.

Составители: А.И. Веремейчик, доцент  
В.М. Хвисевич, доцент, к.т.н.  
Б.Г. Холодарь, доцент, к.т.н.

Рецензент: кафедра теоретической механики БНТУ

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Указания по оформлению расчетно-графических работ.....	3
1 Произвольная плоская система сил. Равновесие систем тел.....	4
1.1 Краткие теоретические сведения.....	4
1.2 Примеры расчета.....	5
2. Равновесие тела, находящегося под действием произвольной пространственной системы сил.....	11
2.1 Краткие теоретические сведения.....	11
2.2 Пример расчета.....	14
3 Равновесие тел с учетом сил трения.....	16
3.1 Основные положения.....	16
3.2 Пример расчета.....	17
4 Центр тяжести.....	20
4.1 Краткие теоретические сведения.....	20
4.2 Пример расчета.....	22
5 Условия заданий к расчетно-графическим работам.....	24
Контрольные вопросы.....	51
Список литературы.....	51

## ВВЕДЕНИЕ

Решение, оформление и защита расчетно-графических работ являются элементами самостоятельной работы студентов и призваны помочь им в усвоении соответствующего раздела курса. Перед выполнением работы необходимо изучить теоретический материал, проработать с помощью учебников и пособий практические способы решения задач по данной теме, проверить усвоение материала с помощью ответов на контрольные вопросы, научиться на конкретных примерах применять имеющиеся методики решения и выбирать оптимальные из них.

При защите расчетно-графической работы необходимо ответить на вопросы, связанные с ее выполнением, и решить контрольные задачи по ее тематике.

## УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Расчетно-графические работы выполняются на стандартных листах формата А4 (210 x 297мм) со штампом 15 мм и указанием нумерации страниц.

2. Порядок оформления: титульный лист с указанием варианта; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст решения с необходимыми пояснениями и схемами; выводы; перечень литературы.

3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов стандарта УО «БрГТУ».

4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Расчеты выполняются в общем виде, в полученные выражения подставляются значения входящих в них величин, записывается числовой результат с указанием размерности ответа. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до трех-четырех значащих цифр.

5. Для наглядности и удобства схемы и графики можно выполнять на миллиметровой бумаге соответствующего формата.

6. Все рисунки (схемы, графики и т.д.) должны быть пронумерованы, обозначены, упомянуты в тексте.

# 1 ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ. РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ

## 1.1 Краткие теоретические сведения

Под произвольной плоской системой сил понимают совокупность сил, расположенных в одной плоскости, линии действия которых не пересекаются в одной точке. Произвольную плоскую систему сил можно значительно упростить, приведя силы к одному центру приведения  $O$ , в результате чего в этом центре будет приложена сила  $\vec{R}$ , называемая главным вектором, и к телу в целом будет приложена пара сил с моментом  $M_O$ , называемым главным моментом относительно этого центра.

Главный вектор  $\vec{R}$  равен геометрической сумме сил, входящих в данную систему, а главный момент  $M_O$  – алгебраической сумме моментов сил относительно центра приведения, включая и алгебраическую сумму моментов пар сил:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k, \quad M_O = \sum m_O(\vec{F}_k)$$

Численное значение главного вектора определяется по его проекциям на координатные оси:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

где  $R_x = \sum F_{kx}$  и  $R_y = \sum F_{ky}$ .

Направление главного вектора находят по косинусам направляющих углов:

$$\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R},$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  – орты осей  $Ox$  и  $Oy$ .

Условиями равновесия тела под действием произвольной плоской системы сил являются равенство нулю главного вектора и главного момента относительно любого центра  $O$ :

$$\vec{R} = 0 \text{ и } M_O = 0.$$

Эти условия выполняются, если

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum m_O(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения (1) называются основными уравнениями равновесия. Существуют еще две формы уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum F_{ix} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum m_C(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В системе уравнений (2) ось  $x$  не должна быть перпендикулярной к прямой, проходящей через центры  $A$  и  $B$ , а центры  $A$ ,  $B$  и  $C$  в системе (3) не должны лежать на одной прямой.

**Системой тел** называется конструкция, состоящая из нескольких твердых тел, взаимодействующих между собой благодаря наличию внутренних связей (шарнирные связи, стержневые связи и т.д.).

Силы, действующие на тела системы, делятся на внешние и внутренние. Внешними называются силы, действующие на тела механической системы со стороны тел, не принадлежащих этой системе. Внутренними называются силы взаимодействия между телами рассматриваемой системы.

При равновесии системы тел каждое тело также находится в равновесии. В связи с этим имеется два способа решения задач, связанных с исследованием равновесия системы тел.

1. Поскольку каждое тело системы находится в равновесии, то составляются уравнения равновесия каждого из тел (тогда уравнения равновесия системы в целом могут быть использованы для проверки правильности решения).

2. Сначала записываются уравнения равновесия системы в целом, а затем уравнения равновесия отдельных тел системы (в этом случае нет необходимости в составлении уравнений равновесия по крайней мере одного из тел системы, но они могут быть применены для проверки).

При составлении уравнений равновесия для всей системы в целом она рассматривается как абсолютно твердое тело, поэтому в эти уравнения не войдут силы взаимодействия между отдельными телами системы. Силы, с которыми тела системы действуют друг на друга, называют реакциями внутренних связей и в соответствии с аксиомой о действии и противодействии (третий закон Ньютона), равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Если внешняя сила приложена к точке контакта исследуемых тел, ее следует прикладывать только к одному из тел системы, либо распределить между контактирующими телами так, чтобы сохранялась величина и направление данной силы.

Вид и направление реактивных силовых факторов соответствуют характеру запрещаемых связью движений.

## 1.2 Примеры расчета

### Пример 1

На рис. 1 показаны три способа закрепления бруса, ось которого является ломаной линией. Задаваемая нагрузка и размеры во всех случаях одинаковы. Составить уравнения равновесия для определения реакций опор для всех случаев закрепления. Для схемы (в) провести расчет реакций связей с проверкой полученных результатов.

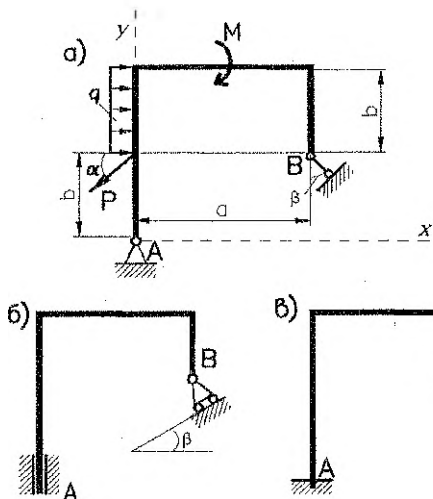


Рисунок 1 – Схемы закрепления  
ломаного стержня

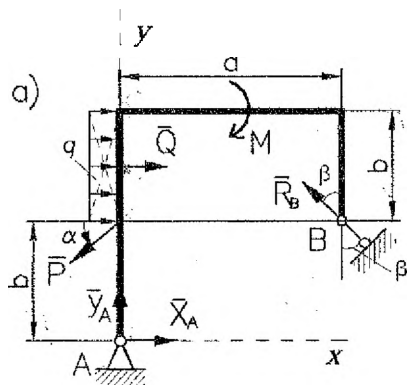
Дано:  $P=20$  кН;  $M=5$  кН·м;  $q=10$  кН/м;  $a=1,5$  м;  $b=2$  м;  $\alpha=45^\circ$ ;  $\beta=30^\circ$ .

Решение:

Рассмотрим решение каждой из схем в отдельности. Реакции связей в точках А и В заменим соответствующими силами. Равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q$  заменим сосредоточенной силой, равной по модулю  $Q=q \cdot b$ , проходящей через центр тяжести прямоугольника, ограничивающего распределенную нагрузку. Направление вектора  $\vec{Q}$  соответствует направлению распределенной нагрузки.

Схема а) Реакцию невесомого стержня в точке В направляем вдоль стержня. Шарнирно-неподвижную опору в точке А разложим на составляющие  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$  в направлении соответствующих координатных осей (рис. 2).

Рисунок 2 – Расчетная схема



Для определения трех неизвестных реакций связей составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad X_A - R_B \sin \beta + Q - P \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad Y_A + R_B \cos \beta - P \sin \alpha = 0;$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad R_B \cos \beta \cdot a + R_B \sin \beta \cdot b - Q \cdot 1,5b + P \cos \alpha \cdot b - M = 0.$$

**Схема б)** Реакцию шарнирно-подвижной опоры в точке В направляем по нормали к опорной поверхности. Скользящую заделку в точке А заменяем силой  $\bar{X}_A$ , направленной перпендикулярно оси стержня, и парой сил с моментом  $M_A$  (рис. 3).

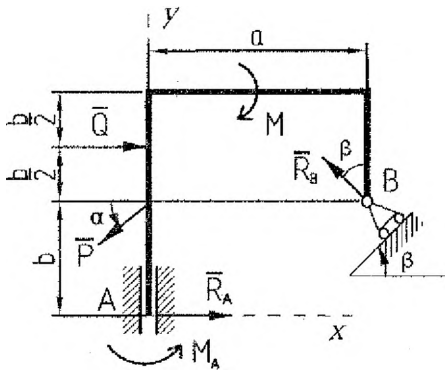


Рисунок 3. Расчетная схема

Для определения неизвестных реакций связей составляем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad R_A - R_B \sin \beta + Q - P \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad R_B \cos \beta - P \sin \alpha = 0;$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad R_B \cos \beta \cdot a + R_B \sin \beta \cdot b - Q \cdot 1,5b + P \cos \alpha \cdot b - M + M_A = 0.$$

**Схема в)** Реакция жесткой заделки в точке А включает силу  $\bar{R}_A$  и пару сил  $\bar{M}_A$ . Силу раскладываем на 2 составляющие (рис. 4).

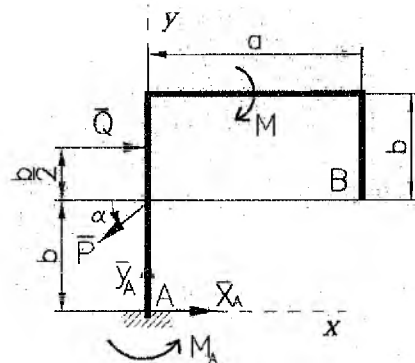


Рисунок 4 – Расчетная схема

Для определения неизвестных реакций связей составляем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; & X_A + Q - P \cos \alpha = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; & Y_A - P \sin \alpha = 0; \\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0; & M_A - Q \cdot 1,5b + P \cos \alpha \cdot b - M = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений, учитывая, что  $Q = q \cdot b = 10 \cdot 2 = 20$  кН:

$$X_A = P \cos \alpha - Q = 20 \cdot \cos 45^\circ - 20 = -5,86 \text{ кН};$$

$$Y_A = P \sin \alpha = 20 \cdot \sin 45^\circ = 14,14 \text{ кН};$$

$$M_A = Q \cdot 1,5b - P \cos \alpha \cdot b + M = 20 \cdot 3 - 20 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 + 5 = 36,72 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для проверки полученных результатов составим проверочное уравнение моментов относительно точки В:

$$\begin{aligned} \sum M_B(\vec{F}_k) = & M_A - Q \cdot 0,5b + P \sin \alpha \cdot a - M + X_A \cdot b - Y_A \cdot a = 36,72 - 20 \cdot 1 + \\ & + 20 \cdot \sin 45^\circ \cdot 1,5 - 5 - 5,86 \cdot 2 - 14,14 \cdot 1,5 = 57,93 - 57,93 = 0, \end{aligned}$$

что подтверждает правильность проведенных расчетов.

Ответ:  $X_A = -5,86$  кН;  $Y_A = 14,14$  кН;  $M_A = 36,72$  кН·м. Направление силы  $\vec{X}_A$  противоположно показанному на рисунке.

### Пример 2

Определить реакции связей в точках А и В, а также давление в шарнире С. Исходная схема представлена на рис. 5. На составную конструкцию наложены связи в точках А (подвижный шарнир) и В (жесткая заделка).

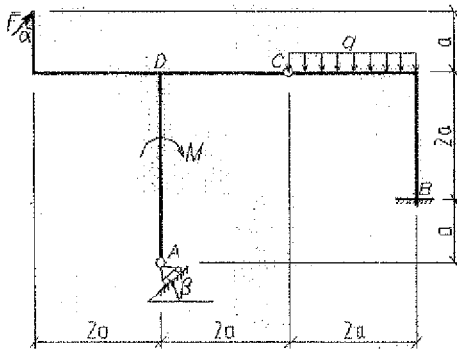


Рисунок 5 – Исходная схема составной рамы

Дано: схема составной рамы (рис. 5),  $F=20$  кН;  $q=6$  кН/м;  $M=18$  кН·м;  $\alpha=60^\circ$ ;  $\beta=30^\circ$ ;  $a=2$  м.

Решение:

Рассмотрим равновесие рамы под действием заданных сил и реакций опор. Для этого выберем оси координат  $xu$  и заменим связи в точках А и В соответствующими реакциями (рис. 6). Реакция  $\vec{R}_A$  шарнирно-подвижной опоры А приложена в точке А и направлена перпендикулярно опорной плоскости, реакцию жесткой заделки в точке В заменяем двумя ее составляющими  $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$  и реактивным



моментом  $M_B$ . Действующую на раму распределенную нагрузку интенсивностью  $q$  заменим равнодействующей  $\bar{Q}$ , модуль которой равен:

$$Q = q \cdot 2a = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ кН.}$$

Рама находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, для которой можно составить три уравнения равновесия, в то время как определению подлежат четыре неизвестные реакции. Расчленим раму на части и рассмотрим равновесие каждой из них. При этом действие частей рамы друг на друга заменим составляющими реакции внутренней связи в шарнире  $C$   $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  (рис. 7).

По аксиоме равенства действия и противодействия эти реакции противоположно направлены и равны по модулю:

$$\bar{X}_C = -\bar{X}'_C; \bar{Y}_C = -\bar{Y}'_C. \quad (4)$$

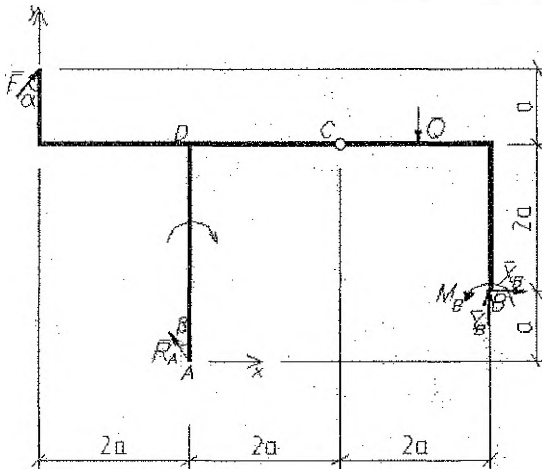
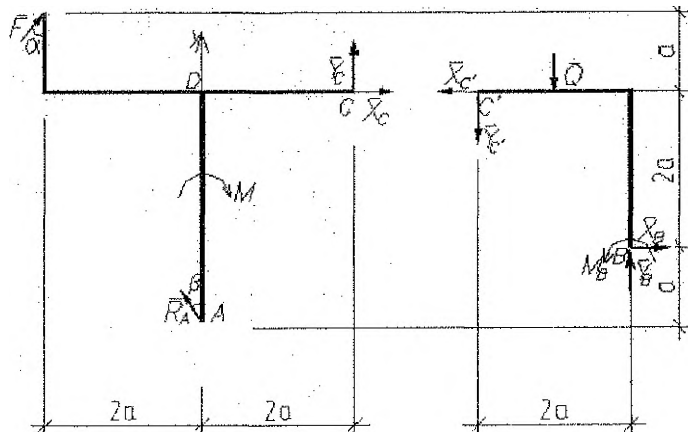


Рисунок 6 – Расчетная схема

Рисунок 7 –  
Расчетные схемы  
элементов  
составной рамы



Составим уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, приложенных к левой части рамы (рис. 7):

$$\begin{aligned}\sum F_{kx}^{acc} &= 0; F \sin \alpha + X_C - R_A \sin \beta = 0; \\ \sum F_{ky}^{acc} &= 0; F \cos \alpha + Y_C + R_A \cos \beta = 0; \\ \sum M_C^{acc} &= 0; -F \cos \alpha \cdot 4a - F \sin \alpha \cdot a - R_A \cos \beta \cdot 2a - R_A \sin \beta \cdot 3a - M = 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь при определении моментов сил  $\vec{F}$  и  $\vec{R}_A$  была применена теорема Вариньона (момент силы относительно точки равен сумме моментов составляющих этой силы относительно этой же точки).

Выразив из последнего уравнения  $R_A$  и подставив полученное значение в два предыдущих, получим:

$$R_A = -\frac{F \cos \alpha \cdot 4a + F \sin \alpha \cdot a + M}{a(2 \cos \beta + 3 \sin \beta)} = -\frac{20 \cdot \cos 60^\circ \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 + 18}{2(2 \cdot \cos 30^\circ + 3 \cdot \sin 30^\circ)} = -20,52 \text{ кН};$$

$$X_C = -F \sin \alpha + R_A \sin \beta = -20 \cdot \sin 60^\circ + (-20,52) \sin 30^\circ = -27,58 \text{ кН};$$

$$Y_C = -F \cos \alpha - R_A \cos \beta = -20 \cdot \cos 60^\circ - (-20,52) \cos 30^\circ = 7,77 \text{ кН}.$$

Составим теперь уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил, приложенных к правой части рамы (рис. 7). Учитывая равенства (4), получим:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx}^{прое} &= 0; -X_C + X_B = 0; \\ \sum F_{ky}^{прое} &= 0; -Y_C - Q + Y_B = 0; \\ \sum M_B^{прое} &= 0; X_C \cdot 2a + Y_C \cdot 2a + Q \cdot a + M_B = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Выражая из уравнений (6) неизвестные реакции и подставляя числовые значения, будем иметь:

$$X_B = X_C = -27,58 \text{ кН};$$

$$Y_B = Y_C + Q = 7,77 + 24 = 31,77 \text{ кН};$$

$$M_B = -X_C \cdot 2a - Y_C \cdot 2a - Q \cdot a = (-27,52) \cdot (-2) \cdot 2 - 7,77 \cdot 2 \cdot 2 - 24 \cdot 2 = 31 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для проверки правильности решения составим уравнение равновесия для системы сил, приложенных ко всей раме (уравнение моментов относительно точки D):

$$\begin{aligned}\sum M_D &= -F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot a - R_A \sin \beta \cdot 3a - Q \cdot 3a + X_B \cdot 2a + Y_B \cdot 4a - M + M_B = \\ &= 20 \cdot \cos 60^\circ \cdot (-2) \cdot 2 - 20 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 - (-20,52) \cdot \sin 30^\circ \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 24 \cdot 2 + \\ &+ (-27,58) \cdot 2 \cdot 2 + 31,77 \cdot 4 \cdot 2 - 18 + 31 = 346,72 - 346,96 = 0,24.\end{aligned}$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{0,24}{346,72} \cdot 100 \% = 0,07 \% < 3 \%$$

Проверка показала, что реакции определены верно.

Ответ:  $R_A = -20,52$  кН;  $X_B = -27,58$  кН;  $Y_B = 31,77$  кН;  $M_B = 31$  кН·м;

$X_C = -27,58$  кН;  $Y_C = 7,77$  кН. Знаки показывают, что реакции  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{X}_B$ ,  $\vec{X}_C$  имеют направление, противоположное показанному на рис. 6, 7.

## 2. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

### 2.1 Краткие теоретические сведения

Моментом силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$  называется приложенный в этом центре вектор  $\vec{m}_O(\vec{F})$ , модуль которого равен произведению модуля силы  $F$  на ее плечо  $h$  и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр  $O$  и линию действия силы в ту сторону, откуда вращение плеча силы вокруг точки  $O$  представляется происходящим против хода часовой стрелки (рис. 8):

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = F \cdot h.$$

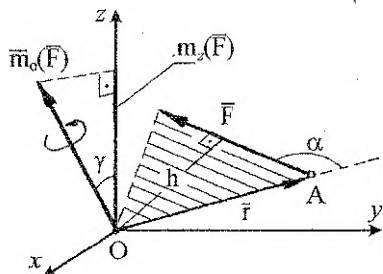


Рисунок 8

Момент силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$  может быть представлен в виде векторного произведения:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы.

Модуль векторного произведения равен

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot h.$$

Заметим также, что вектор  $\vec{m}_O(\vec{F})$  направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , в ту сторону, откуда крайчайший поворот вектора  $\vec{r}$  к направлению вектора  $\vec{F}$  представляется происходящим против хода часовой стрелки (по углу  $\alpha$ ).

Моментом силы  $\vec{F}$  относительно какой-либо оси  $z$ , проходящей через центр  $O$  (рис. 9), называется скалярная величина, равная проекции вектора  $\vec{m}_O(\vec{F})$  на эту ось:

$$m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_O(\vec{F})| \cdot \cos \gamma.$$

Механический смысл величины  $m_z(\vec{F})$  состоит в том, что она характеризует вращательный эффект силы, когда эта сила стремится повернуть тело вокруг оси  $z$ . В самом деле, если разложить силу  $\vec{F}$  на составляющие  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_z$ , где  $\vec{F}_z \parallel Oz$  (рис. 9), то поворот вокруг оси  $z$  будет совершать только составляющая  $\vec{F}_x$ , и вращательный эффект всей силы  $\vec{F}$  будет определяться величиной  $m_z(\vec{F}) = \pm F_x \cdot h$ . Составляющая же  $\vec{F}_z$  повернуть тело вокруг оси  $z$  не может (она лишь может сдвинуть тело вдоль оси  $z$ ).

Момент силы относительно оси  $z$  будет иметь знак «плюс», когда с положительного конца этой оси поворот тела, который стремится совершить сила  $\vec{F}_x$  вокруг этой оси, виден происходящим против хода часовой стрелки, и знак «минус» – когда по ходу часовой стрелки.

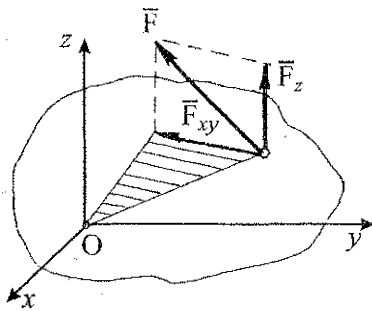


Рисунок 9

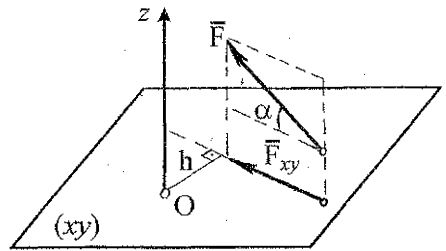


Рисунок 10

Для того, чтобы определить момент силы  $\vec{F}$  относительно какой-либо оси  $z$  (рис. 10), нужно провести любую плоскость  $(xy)$ , перпендикулярную к данной оси и, спроектировав силу на эту плоскость, найти алгебраическую величину момента полученной проекции  $\vec{F}_{xy}$  относительно точки  $O$  пересечения оси  $z$  с плоскостью  $xy$ :

$$m_z(\vec{F}) = m_o(\vec{F}_{xy}) = F \cdot \cos \alpha \cdot h.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, когда сила параллельна оси либо когда линия действия силы пересекает ось.

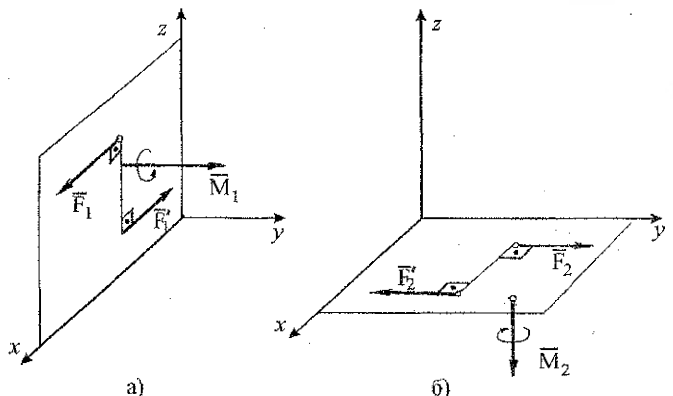
При рассмотрении равновесия произвольной пространственной системы сил приходится определять моменты пар сил относительно осей, для чего момент пары сил представляют в виде вектора.

Момент пары, как вектор, направлен по перпендикуляру к плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение тела парой сил представляется происходящим против направления вращения часовой стрелки.

Изображенные на рис. 11, а и 11, б векторы  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$  представляют собой соответственно моменты пар  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$  и  $(\vec{F}_2, \vec{F}'_2)$ .

Так как пару сил можно переносить в ее плоскости действия и в любую другую плоскость, ей параллельную, то ее момент  $\vec{M}$  не имеет определенной точки приложения и является свободным вектором. Такие векторы можно переносить параллельно самим себе в любую точку тела.

Рисунок 11



При определении момента пары сил относительно какой-либо оси достаточно найти проекцию вектора момента этой пары на данную ось. Так, на примере, изображенном на рис. 11, а и 11, б, будем иметь:

$$M_{1x} = 0; M_{1y} = M_1; M_{1z} = 0; \\ M_{2x} = 0; M_{2y} = 0; M_{2z} = -M_2.$$

Если требуется сложить пары сил, то достаточно сложить их моменты пар как свободные векторы, т. е. перенести эти векторы параллельно самим себе в общую точку и применить правило сложения векторов.

Так, на примере двух пар сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$  и  $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ , расположенных в плоскостях  $xVy$  и  $xVz$  соответственно (рис. 12), будем иметь:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Модуль  $M$  результирующего вектора  $\vec{M}$  находим как величину диагонали прямоугольника, построенного на векторах  $\vec{M}_1$  и  $\vec{M}_2$ :

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2},$$

или в проекциях на координатные оси:

$$M_x = M_{1x} + M_{2x} = 0; \\ M_y = M_{1y} + M_{2y} = M_1; \\ M_z = M_{1z} + M_{2z} = -M_2.$$

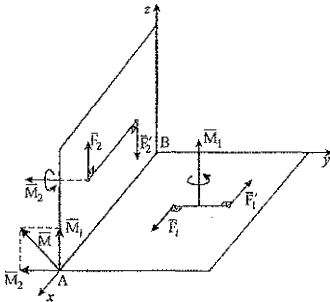


Рисунок 12

следовательно,  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-M_2)^2 + M_1^2}$ .

Любую пространственную систему сил можно привести к некоторому центру  $O$ , в результате чего будет получен главный вектор  $\vec{R}$ , приложенный в этом центре и главный момент  $\vec{M}_O$  относительно этого центра  $O$ . Как известно, главный вектор равен геометрической сумме всех сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k,$$

и не зависит от выбора центра приведения, а главный момент  $\vec{M}_O$  равен геометрической сумме векторов-моментов всех сил относительно этого центра (включая и векторы-моменты всех пар сил) и зависит от выбора центра приведения:

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k)$$

Условиями равновесия произвольной пространственной системы сил являются равенство нулю главного вектора этой системы сил и главного момента относительно любого центра, что выражается шестью уравнениями равновесия в проекциях на оси декартовой системы координат (основная система):

$$R_x = \sum F_{kx} = 0; \\ R_y = \sum F_{ky} = 0; \\ R_z = \sum F_{kz} = 0; \\ M_{Ox} = \sum m_x(\vec{F}_k) = 0; \\ M_{Oy} = \sum m_y(\vec{F}_k) = 0; \\ M_{Oz} = \sum m_z(\vec{F}_k) = 0.$$

## 2.2 Пример расчета

Горизонтальная прямоугольная плита весом  $P$  (рис. 13) закреплена сферическим шарниром в точке  $A$ , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке  $B$  и невесомым стержнем  $DD'$ . На плиту в плоскости, параллельной  $xz$ , действует сила  $\bar{F}$ , а в плоскости, параллельной  $yz$ , – пара сил с моментом  $M$ .

Дано:  $P = 3$  кН,  $F = 8$  кН,  $M = 4$  кН·м,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $AC = 0,8$  м,  $AB = 1,2$  м,  $BE = 0,4$  м,  $EH = 0,4$  м.

Определить реакции опор  $A$ ,  $B$  и стержня  $DD'$ .

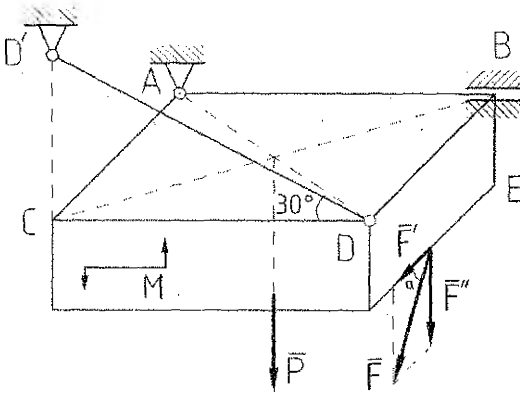


Рисунок 13

Решение.

1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы  $\bar{P}$ ,  $\bar{F}$  и пара с моментом  $\bar{M}$ , а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие:  $\bar{X}_A$ ,  $\bar{Y}_A$ ,  $\bar{Z}_A$ , цилиндрического (подшипника) – на две составляющие:  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Z}_B$  (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию  $\bar{N}$  стержня направляем вдоль стержня от  $D$  к  $D'$ , предполагая, что он растянут.

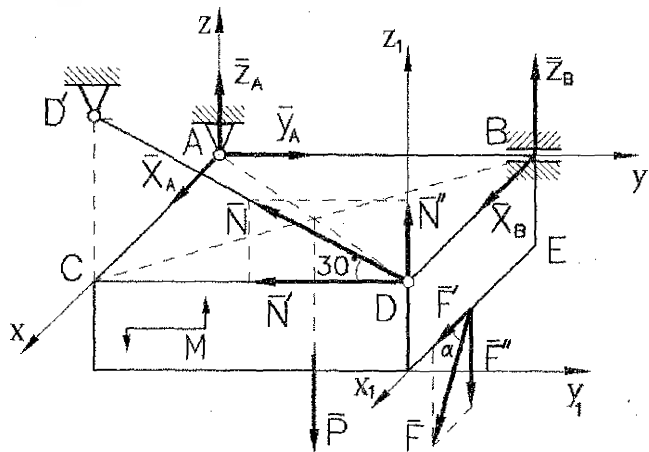


Рисунок 14 –  
Расчетная схема

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил. При этом для определения моментов силы  $\vec{F}$  относительно осей разлагаем ее на составляющие  $F'$  и  $F''$ , параллельные осям  $x$  и  $z$  ( $F' = F \cdot \cos \alpha$ ,  $F'' = F \cdot \sin \alpha$ ), и применяем теорему Вариньона. Аналогично поступаем с реакцией  $\vec{N}$  ( $N' = N \cdot \cos 30^\circ$ ;  $N'' = N \cdot \sin 30^\circ$ ).

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + X_B + F \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (7)$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A - N \cos 30^\circ = 0; \quad (8)$$

$$\sum F_{kz} = 0; Z_A + Z_B - P + N \sin 30^\circ - F \sin 60^\circ = 0; \quad (9)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 0; M - P \cdot 0,5AB + Z_B \cdot AB - F \sin 60^\circ \cdot AB + N \sin 30^\circ \cdot AB = 0; \quad (10)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0; P \cdot 0,5AC - N \sin 30^\circ \cdot AC + F \sin 60^\circ \cdot 0,5AC - F \cos 60^\circ \cdot BE = 0; \quad (11)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = 0; -F \cdot \cos 60^\circ \cdot AB - N \cos 30^\circ \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. \quad (12)$$

Из уравнения (11) находим:

$$N = \frac{P \cdot 0,5AC + F \sin 60^\circ \cdot 0,5 \cdot AC - F \cos 60^\circ \cdot BE}{AC \cdot \sin 30^\circ} =$$

$$= \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 0,8 + 8 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 \cdot 0,8 - 8 \cdot \cos 60^\circ \cdot 0,4}{0,8 \cdot \sin 30^\circ} = 5,928 \text{ кН.}$$

Из уравнения (12):

$$X_B = \frac{F \cos 60^\circ \cdot AB + N \cos 30^\circ \cdot AC}{AB} =$$

$$= \frac{8 \cdot \cos 60^\circ \cdot 1,2 + 5,928 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,8}{1,2} = -7,422 \text{ кН.}$$

Из уравнения (10):

$$Z_B = \frac{P \cdot 0,5AB - M + F \cdot \sin 60^\circ \cdot AB - N \sin 30^\circ \cdot AB}{AB} =$$

$$= \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 1,2 - 4 + 8 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,2 - 5,928 \cdot \sin 30^\circ \cdot 1,2}{1,2} = 2,13 \text{ кН.}$$

Из уравнения (7):

$$X_A = -X_B - F \cdot \cos 60^\circ = -(-7,422) - 8 \cdot \cos 60^\circ = 3,422 \text{ кН.}$$

Из уравнения (8):

$$Y_A = N \cdot \cos 30^\circ = 5,928 \cdot \cos 30^\circ = 5,133 \text{ кН.}$$

Из уравнения (9):

$$Z_A = -Z_B + P - N \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \sin 60^\circ = -2,13 + 3 - 5,928 \cdot \sin 30^\circ +$$

$$+ 8 \cdot \sin 60^\circ = 4,834 \text{ кН.}$$

Для проверки составим уравнения моментов относительно осей  $x_1, y_1, z_1$ :

$$\sum M_{x_1}(\vec{F}_k) = -Z_A \cdot AB - Y_A \cdot BE + N \cos 30^\circ \cdot BE + P \cdot 0,5AB + M = -4,834 \cdot 1,2 -$$

$$5,133 \cdot 0,4 + 5,928 \cos 30^\circ \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 + 4 = 0;$$

$$\sum M_{y_1}(\vec{F}_k) = -F \sin 60^\circ \cdot 0,5AC + X_B \cdot BE + X_A \cdot BE + Z_A \cdot AC + Z_B \cdot AC -$$

$$-P \cdot 0,5AC = -8 \cdot \sin 60^\circ \cdot 0,5 \cdot 0,8 - 7,422 \cdot 0,4 + 3,422 \cdot 0,4 + 4,834 \cdot 0,8 +$$

$$+ 2,13 \cdot 0,8 - 3 \cdot 0,5 \cdot 0,8 = 0;$$

$$\sum M_{z_1}(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot AC + X_A \cdot AB = -5,133 \cdot 0,8 + 3,422 \cdot 1,2 = 0.$$

Значит, опорные реакции найдены правильно.

Ответ:  $X_A = 3,422$  кН,  $Y_A = 5,133$  кН,  $Z_A = 4,834$  кН,  $X_B = -7,422$  кН,  $Z_B =$

$= 2,13$  кН,  $N = 5,928$  кН. Знак «минус» указывает, что реакция  $\vec{X}_B$  направлена противоположно показанной на рис. 14.

### 3 РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

#### 3.1 Основные положения

Сила взаимодействия двух тел с шероховатыми поверхностями включает две составляющие: нормальную  $\vec{N}$ , перпендикулярную поверхности контакта, и силу трения  $\vec{F}_{тр}$ , лежащую в плоскости контакта тел (рис. 15).

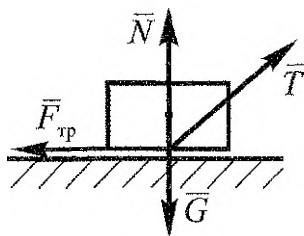


Рисунок 15

Сила трения препятствует скольжению одного тела по поверхности другого и направляется всегда в сторону, противоположную возможному относительному смещению взаимодействующих точек соприкасающихся тел. Поэтому для нахождения направления силы трения необходимо мысленно представить, куда будет двигаться тело при отсутствии силы трения, а затем направить вектор силы трения в сторону, противоположную этому возможному движению.

В соответствии с законом Кулона максимальное значение силы трения пропорционально нормальной силе взаимодействия между телами:

$$F_{тр}^{\max} = fN,$$

где  $\vec{N}$  - сила нормального давления, прижимающая тела друг к другу. Безразмерный коэффициент  $f$  называется коэффициентом трения скольжения. Его значение определяется физическими свойствами материалов тел и размерами неровностей их поверхностей, но не зависит от площади соприкосновения тел.



Значение силы трения равно произведению коэффициента трения на силу нормальной реакции только в том случае, если заранее известно, что при бесконечно малом изменении приложенных активных сил начнется движение тела. В общем же случае значение силы трения определяется неравенством:  $F_{тр} \leq fN$ .

При условии  $F < fN$  силу трения называют силой сцепления ( $F_{сц} \leq F_{тр}$ ).

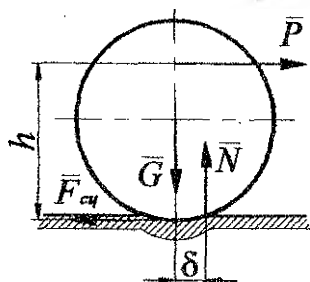


Рисунок 16

Трение качения возникает при перекатывании тела (катка) по поверхности другого тела и обусловлена их деформацией. Вследствие этого тела соприкасаются по некоторой площадке, а нормальная составляющая  $\bar{N}$  полной реакции опорной поверхности смещается от оси катка в сторону его движения. Величина смещения  $\delta$  в предельном положении покоя называется коэффициентом трения качения и имеет размерность длины. Сила  $\bar{N}$  и вес катка  $\bar{G}$  образуют пару сил с плечом  $\delta$ , момент которой  $M_T = \delta \cdot N$  называется моментом трения качения.

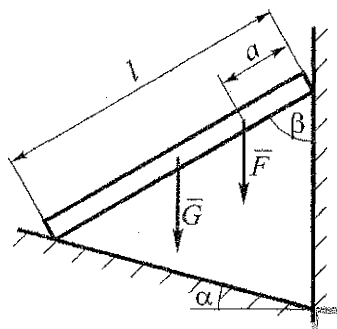
Качение катка без скольжения будет иметь место, если

$$F_{сц}^{\max} = P \geq \frac{\delta}{h} N.$$

Методика решения задач на равновесие с учетом сил трения – такая же, как и при отсутствии трения. Однако в этом случае рассматривается предельное положение равновесия тела. Это позволяет по вышеприведенным зависимостям определить наибольшую силу трения покоя и момент трения и с учетом этого составить необходимые уравнения равновесия, соответствующие системе сил реакций и активных сил, действующих на тело.

### 3.2 Пример расчета

Для стержня, находящегося в равновесии, определить максимальное значение силы  $\bar{F}$ , при котором сохраняется равновесие. Найти для этого случая равнодействующие реакций опорных поверхностей.



Дано:  $G = 100$  Н;  $f = 0,1$ ;  $\alpha = 15^\circ$ ;  
 $\beta = 60^\circ$ ;  $a = 20$  см;  $l = 80$  см.

Рисунок 17 – Схема опирания стержня

Решение:

1. Изображаем стержень с наложенными на него механическими связями: активными силами, действующими на тело, являются сила тяжести  $\vec{G}$  и сила  $\vec{F}$ , стремящаяся привести его в движение. Препятствуют движению тела опоры в точках  $A$  и  $B$ . Их нормальные реакции  $\vec{N}_A$  и  $\vec{N}_B$  направлены перпендикулярно опорным плоскостям. При отсутствии трения стержень под действием сил  $\vec{G}$  и  $\vec{F}$  начнет перемещаться. Силы трения  $\vec{F}_{трA}$  и  $\vec{F}_{трB}$  препятствуют этому его возможному движению (рис. 18).

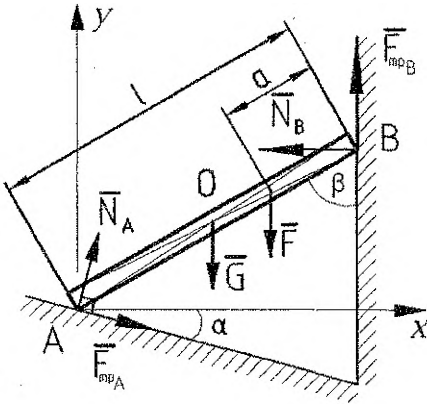


Рисунок 18 – Расчетная схема

2. Изображаем систему отсчета: ось  $Ax$  направляем горизонтально, ось  $Ay$  – перпендикулярно ей.

3. На тело действует система произвольно расположенных в плоскости сил, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0; & -N_B + F_{трA} \cos \alpha + N_A \sin \alpha = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; & -F - G + N_A \cos \alpha - F_{трA} \sin \alpha + F_{трB} = 0; \\ \sum M_A(\vec{F}_k) = 0; & -G \frac{l}{2} \sin \beta - F(l-a) \sin \beta + F_{трB} l \sin \beta + N_B l \cos \beta = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

При максимальном значении силы  $\vec{F}$ , соответствующем состоянию предельного равновесия тела, выполняются равенства:  $F_{трA} = fN_A$ ,  $F_{трB} = fN_B$ . Подставляя их в систему уравнений, после преобразований получим:

$$\begin{aligned} -N_B + N_A(f \cos \alpha + \sin \alpha) &= 0; \\ -F - G + N_A(\cos \alpha - f \sin \alpha) + fN_B &= 0; \\ -G \frac{l}{2} \sin \beta - F(l-a) \sin \beta + N_B l (f \sin \beta + \cos \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Подставляем числовые значения:

$$-N_B + 0,355N_A = 0;$$

$$-F + 0,94N_A + 0,1N_B = 100;$$

$$-0,52F + 0,469N_B = 34,641.$$

Таким образом, получена система трех уравнений с тремя неизвестными величинами:  $\vec{N}_A$ ,  $\vec{N}_B$ ,  $\vec{F}$ . Решаем ее:

$$N_A = \frac{N_B}{0,355},$$

$$F = \frac{0,469N_B - 34,641}{0,52},$$

$$\frac{0,469N_B - 34,641}{0,52} + 0,94 \cdot \frac{N_B}{0,355} + 0,1N_B = 100 \Rightarrow N_B = 18,08 \text{ Н},$$

$$N_A = \frac{N_B}{0,355} = \frac{18,08}{0,355} = 50,94 \text{ Н},$$

$$F = \frac{0,469N_B - 34,641}{0,52} = \frac{0,469 \cdot 18,08 - 34,641}{0,52} = -50,31 \text{ Н}.$$

Знак «-» показывает, что при данных условиях задачи равновесие возможно лишь при силе  $\vec{F}$ , направленной вверх (физически это связано с достаточно низким коэффициентом трения  $f$ ).

Действующие силы трения:

$$F_{mpA} = fN_A = 0,1 \cdot 50,94 = 5,09 \text{ Н},$$

$$F_{mpB} = fN_B = 0,1 \cdot 18,08 = 1,81 \text{ Н}.$$

4. Определяем равнодействующую сил реакций опорных поверхностей. Поскольку силы  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{mp}$  перпендикулярны, то их равнодействующую можно рассчитать, применяя теорему Пифагора. Тогда:

$$R_A = \sqrt{(N_A)^2 + (F_{mpA})^2} = \sqrt{50,94^2 + 5,09^2} = 51,19 \text{ Н},$$

$$R_B = \sqrt{(N_B)^2 + (F_{mpB})^2} = \sqrt{18,08^2 + 1,81^2} = 18,17 \text{ Н}.$$

**Замечание.** При выполнении расчетно-графической работы для решения систем уравнений можно применить вычислительную технику. В этом случае не следует подробно описывать ход решения системы, но к работе необходимо приложить распечатку исходных уравнений и результатов расчета.

### Решение системы уравнений методом Крамера в Mathcad:

$$-N_B + 0,355N_A = 0;$$

$$-F + 0,94N_A + 0,1N_B = 100;$$

$$-0,52F + 0,469N_B = 34,641.$$

Определяем матрицу системы A и матрицу правой части B:

$$A := \begin{pmatrix} 0,355 & -1 & 0 \\ 0,94 & 0,1 & -1 \\ 0 & 0,469 & -0,52 \end{pmatrix}$$
$$B := \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 34,641 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы системы A:

$$D := |A|$$

$$D = -0,341$$

Определитель отличен от нуля, система имеет единственное решение.

Вычисление решения по формулам Крамера:

$$D1 := \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 100 & 0,1 & -1 \\ 34,641 & 0,469 & -0,52 \end{vmatrix} \quad D2 := \begin{vmatrix} 0,355 & 0 & 0 \\ 0,94 & 100 & -1 \\ 0 & 34,641 & -0,52 \end{vmatrix} \quad D3 := \begin{vmatrix} 0,355 & -1 & 0 \\ 0,94 & 0,1 & 100 \\ 0 & 0,469 & 34,641 \end{vmatrix}$$
$$D1 = -17,359 \quad D2 = -6,162 \quad D3 = 17,143$$

$$N_A := \frac{D1}{D}$$

$$N_A = 50,941$$

$$N_B := \frac{D2}{D}$$

$$N_B = 18,084$$

$$F := \frac{D3}{D}$$

$$F = -50,307$$

Ответ:  $F_{\max} = 50,31 \text{ Н}$ ,  $R_A = 51,19 \text{ Н}$ ,  $R_B = 18,17 \text{ Н}$ .

## 4 ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

### 4.1 Краткие теоретические сведения

Центром тяжести тела называется точка приложения его силы тяжести. Для нахождения положения центра тяжести используют следующие способы:

1. Метод симметрии. У однородного тела, имеющего плоскость, ось или центр симметрии, центр тяжести находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

2. Метод разбиения на части. Если тело имеет сложную форму, его разбивают на части, положения центров тяжести которых известны (формулы для расчета площадей и координат центров тяжести некоторых плоских фигур приведены в таблице). В таком случае положения центров тяжести тела определяют с использованием следующих выражений.

Координаты центра тяжести объемного тела постоянной плотности находятся по формулам:

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{\sum V_k}, \quad y_C = \frac{\sum V_k y_k}{\sum V_k}, \quad z_C = \frac{\sum V_k z_k}{\sum V_k},$$

где  $x_k, y_k, z_k$  — координаты центров тяжести элементарных частей,  $V_k$  — объем  $k$ -й части.

Если тело представляет собой однородное тело постоянной толщины, то координаты ее центра тяжести:

$$x_c = \frac{\sum A_k x_k}{\sum A_k}, \quad y_c = \frac{\sum A_k y_k}{\sum A_k}, \quad z_c = \frac{\sum A_k z_k}{\sum A_k},$$

где  $A_k$  – площадь  $k$ -го элемента.

Для стержневых конструкций, образованных стержнями одинаковой плотности и постоянного поперечного сечения, координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum l_k x_k}{\sum l_k}, \quad y_c = \frac{\sum l_k y_k}{\sum l_k}, \quad z_c = \frac{\sum l_k z_k}{\sum l_k},$$

где  $l_k$  – длина элемента линии.

Сумма произведений элементарных площадей, входящих в состав площади фигуры, на алгебраические значения их расстояний до некоторой оси, называется статическим моментом площади плоской фигуры относительно этой оси.

3 Метод отрицательных площадей (масс). При нахождении положения центра тяжести тела, имеющего вырезы, полости, отверстия и т.п., используется метод разбиения на части, причем считается, что полости имеют отрицательный вес, т.е. их площади, объемы, массы принимаются отрицательными.

**Таблица 1 – Площади и координаты центров тяжести плоских фигур**

Название элемента	Схема	Площадь	Координаты центра тяжести
Круг		$A = \pi R^2$	$x_c = 0,$ $y_c = 0$
Прямоугольник		$A = ab$	$x_c = \frac{a}{2},$ $y_c = \frac{b}{2}$
Треугольник		$A = \frac{1}{2}ah$	$y_c = \frac{1}{3}h$
Круговой сектор		$A = \alpha R^2$	$x_c = \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha} = \frac{R^2 b}{3A}$

## 4.2 Пример расчета

Определить координаты центра тяжести составного сечения, приведенного на рисунке.

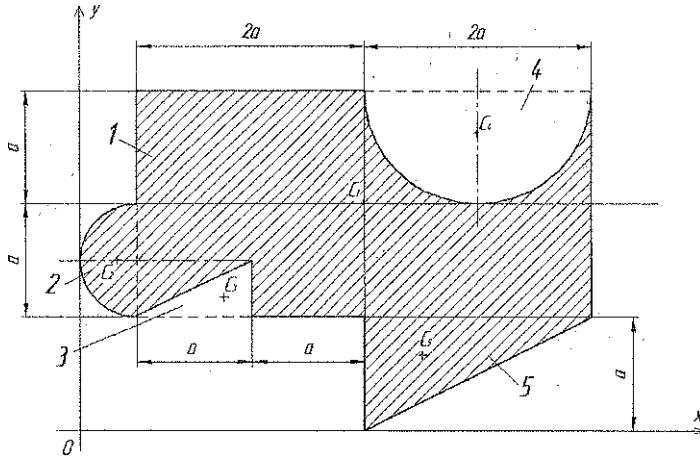


Рисунок 19 – Схема составного сечения

Решение:

1. Для решения задачи используем методы разбиения на части и отрицательных масс. Разбиваем фигуру на пять простых элементов: прямоугольник 1 размерами  $4a \times 2a$ ; полуокруг 2 радиуса  $R_2 = 0,5a$ ; треугольник 3 (вырез); полуокруг 4 радиуса  $R_4 = a$  (вырез); треугольник 5 (рис. 19). Вводим систему координат  $xu$  с началом в точке  $O$ .

2. Определяем площади  $A_k$  и координаты  $x_k; y_k$  центров тяжести  $C_1; C_2; C_3; C_4; C_5$  составных элементов.

Прямоугольник 1:

$$A_1 = 4a \cdot 2a = 8a^2;$$

$$x_1 = 2,5a;$$

$$y_1 = 2a.$$

Треугольник 3:

$$A_3 = \frac{1}{2}a \cdot 0,5a = -0,25a^2;$$

$$x_3 = 1,5a - \frac{1}{3}a = 1,17a;$$

$$y_3 = a + \frac{1}{3} \cdot 0,5a = 1,17a.$$

Полуокруг 2:

$$A_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = 0,39a^2;$$

$$x_2 = a - \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} \frac{a}{2} = 0,79a;$$

$$y_2 = a + 0,5a = 1,5a.$$

Полуокруг 4:

$$A_4 = \frac{\pi R_4^2}{2} = \frac{\pi \cdot (a)^2}{2} = -1,57a^2;$$

$$x_4 = 3,5a;$$

$$y_4 = 3a - \frac{4}{3} \frac{a}{\pi} = 2,58a.$$

Треугольник 5:

$$A_5 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2;$$

$$x_5 = 2,5a + \frac{1}{3} \cdot 2a = 3,17a;$$

$$y_5 = \frac{2}{3} \cdot a = 0,67a.$$

3. Находим статические моменты сечения относительно осей  $x, y$ :

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 + A_5 y_5 = 8a^2 \cdot 2a + 0,39a^2 \cdot 1,5a + (-0,25a^2) \times \\ \times 1,17a + (-1,57a^2) \cdot 2,58a + a^2 \cdot 0,67a = 12,91a^3;$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5 = 8a^2 \cdot 2,5a + 0,39a^2 \cdot 0,79a + (-0,25a^2) \times \\ \times 1,17a + (-1,57a^2) \cdot 3,5a + a^2 \cdot 3,17a = 17,69a^3.$$

Площадь сечения:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 8a^2 + 0,39a^2 + (-0,25a^2) + (-1,57a^2) + a^2 = 7,57a^2.$$

4. Находим координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{17,69a^3}{7,57a^2} = 2,34a;$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{12,91a^3}{7,57a^2} = 1,71a.$$

Наносим центр тяжести на чертеж (рис. 20).

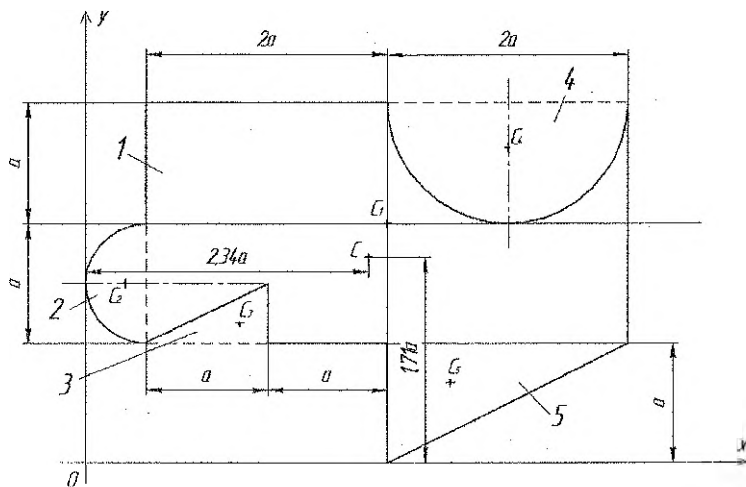


Рисунок 20

## 5 УСЛОВИЯ ЗАДАНИЙ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

### Задача 1. Определение реакций опор твердого тела

На схемах показаны три способа закрепления бруса, ось которого - ломаная линия. Задаваемая нагрузка и размеры во всех трех случаях одинаковы. Составить уравнения равновесия для определения реакций опор для всех трех случаев закрепления. Для одной из схем (по указанию преподавателя) провести расчет реакций связей с проверкой полученных результатов. Схемы бруса приведены на рис. 21, числовые данные – в таблице 2.

Таблица 2 – Числовые данные к задаче 1

№ варианта	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$M$ , кН·м	$a$ , м	$b$ , м	$\alpha$ , град	$\beta$ , град
1	20	2	11	1,2	1,3	26	15
2	25	6	14	1,6	2,3	31	31
3	10	9	12	2,1	1,7	43	44
4	12	3	9	1,9	1,8	37	62
5	6	5	18	2,5	2,1	24	71
6	18	4	15	1,4	2,5	21	23
7	14	11	12	1,1	1,0	15	54
8	8	6	10	1,5	1,7	19	18
9	11	8	8	2,5	2,0	47	35
10	15	7	16	1,7	1,1	67	39
11	23	10	18	1,6	1,5	49	27
12	17	6	15	1,8	1,3	51	45
13	11	5	14	2,3	1,3	35	32
14	15	9	18	1,7	1,8	39	40
15	18	8	21	1,1	2,1	55	21
16	12	11	9	2,6	1,9	61	46
17	7	7	13	1,4	1,6	78	38
18	11	4	16	1,7	1,5	54	61
19	9	10	15	1,9	1,8	32	45
20	11	5	19	2,0	2,3	14	47
21	23	6	10	2,3	1,4	21	34
22	5	11	9	1,6	1,8	66	23
23	9	8	14	1,8	1,9	22	54
24	16	9	18	1,5	2,2	19	39
25	13	12	11	1,9	2,4	34	44
26	14	6	16	1,0	2,5	50	35
27	22	3	17	2,3	1,7	46	42
28	17	9	12	2,2	1,5	59	19
29	14	7	13	1,9	2,1	76	37
30	18	8	10	1,3	1,8	63	51



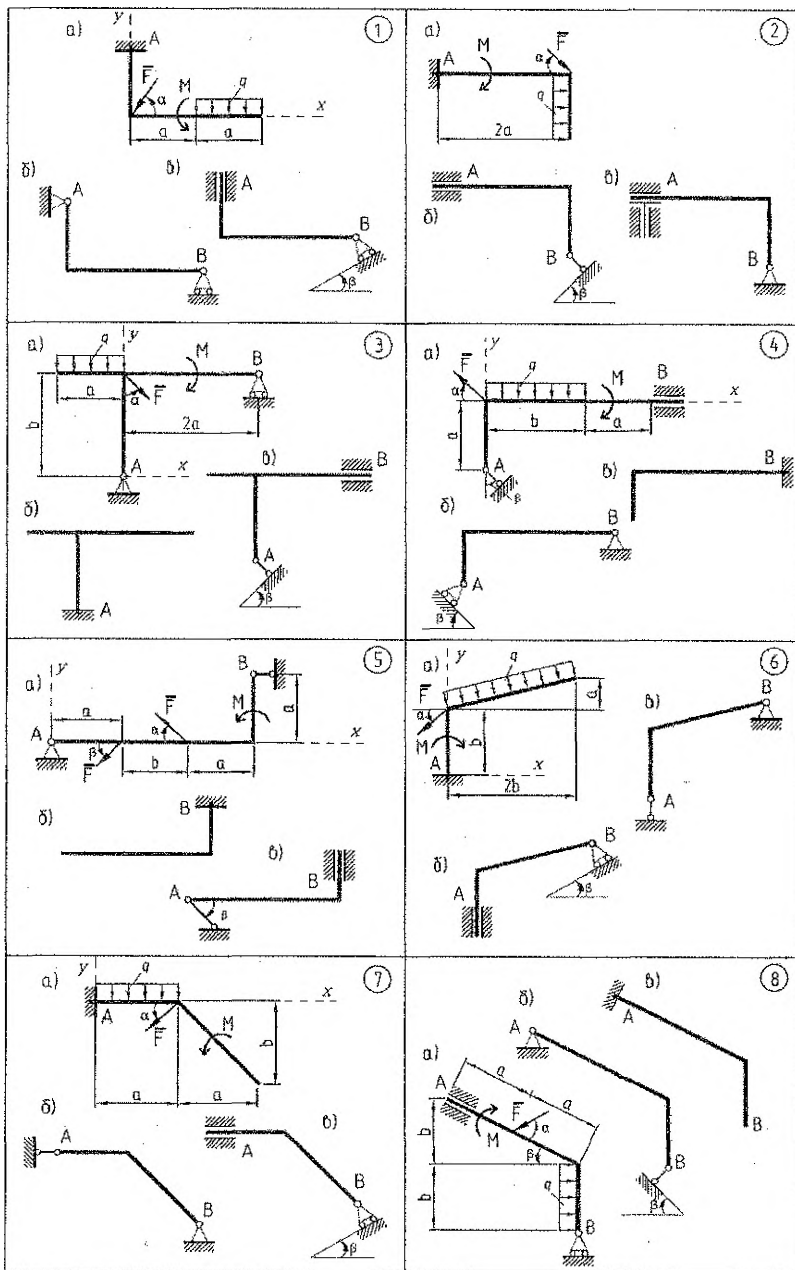
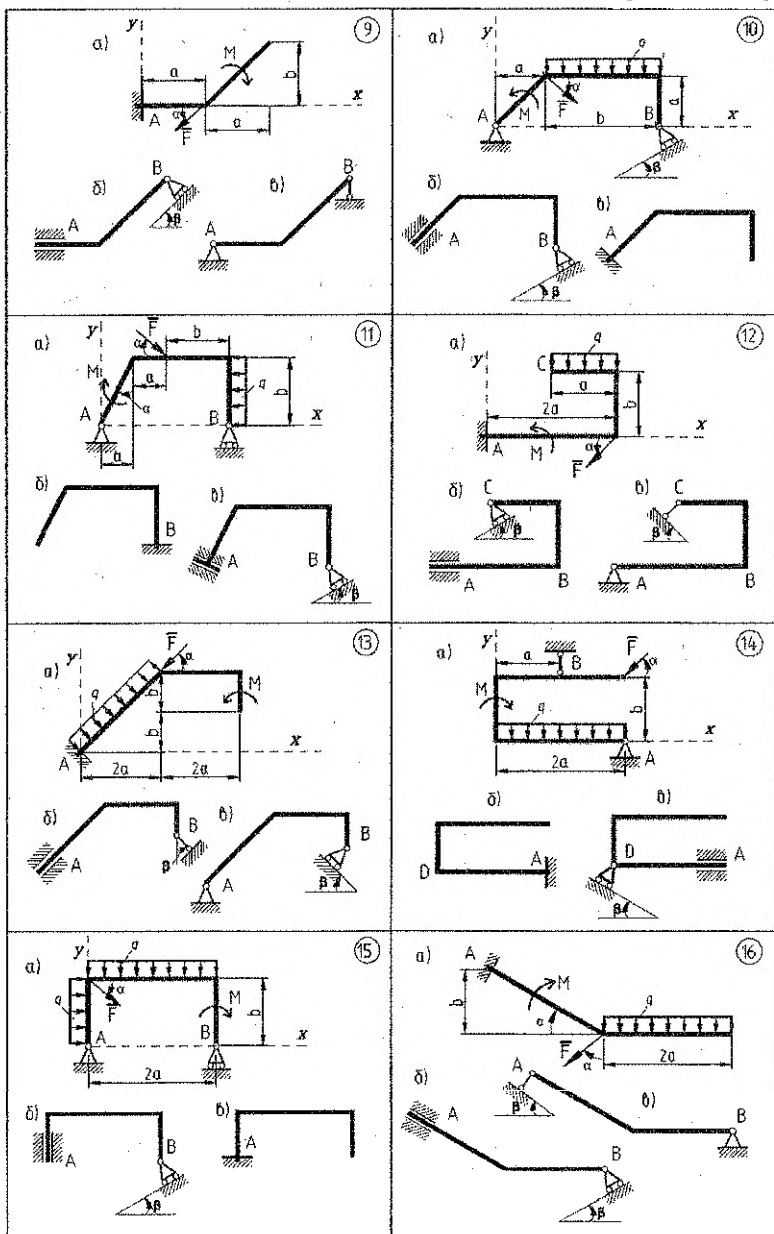
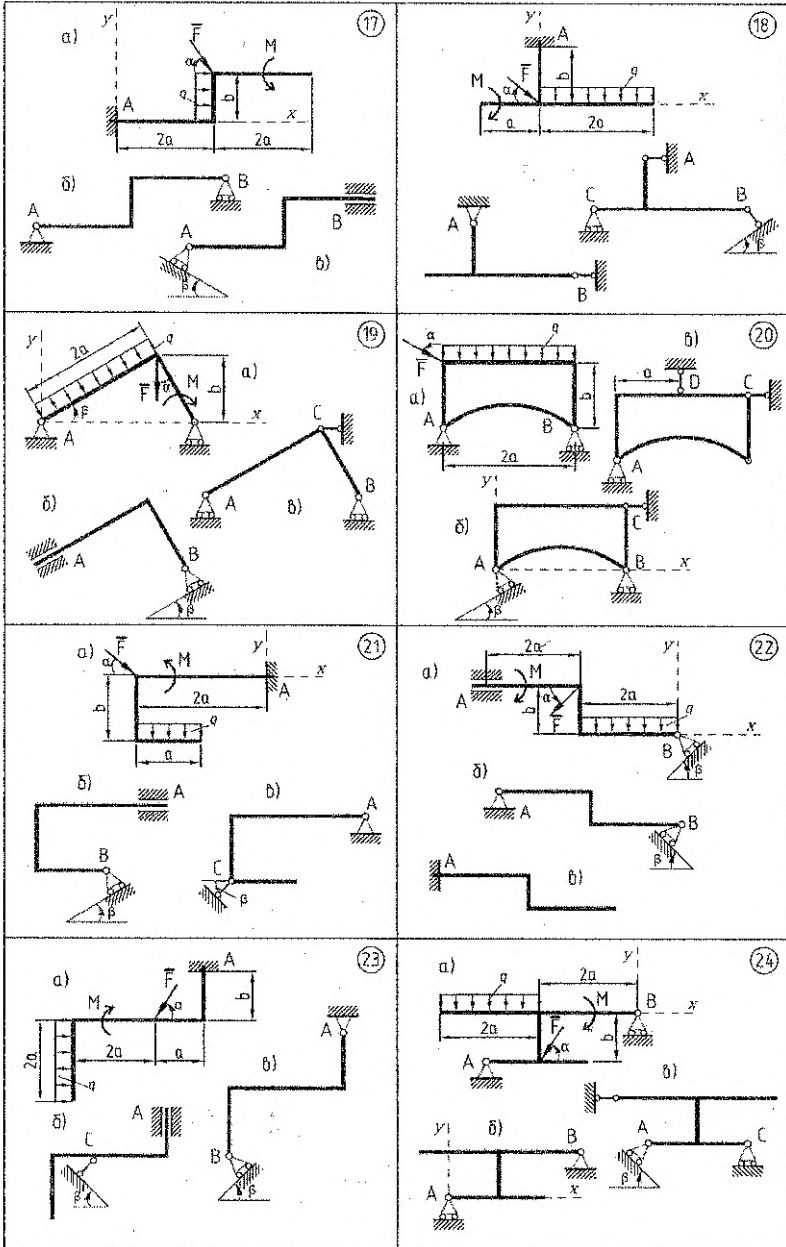
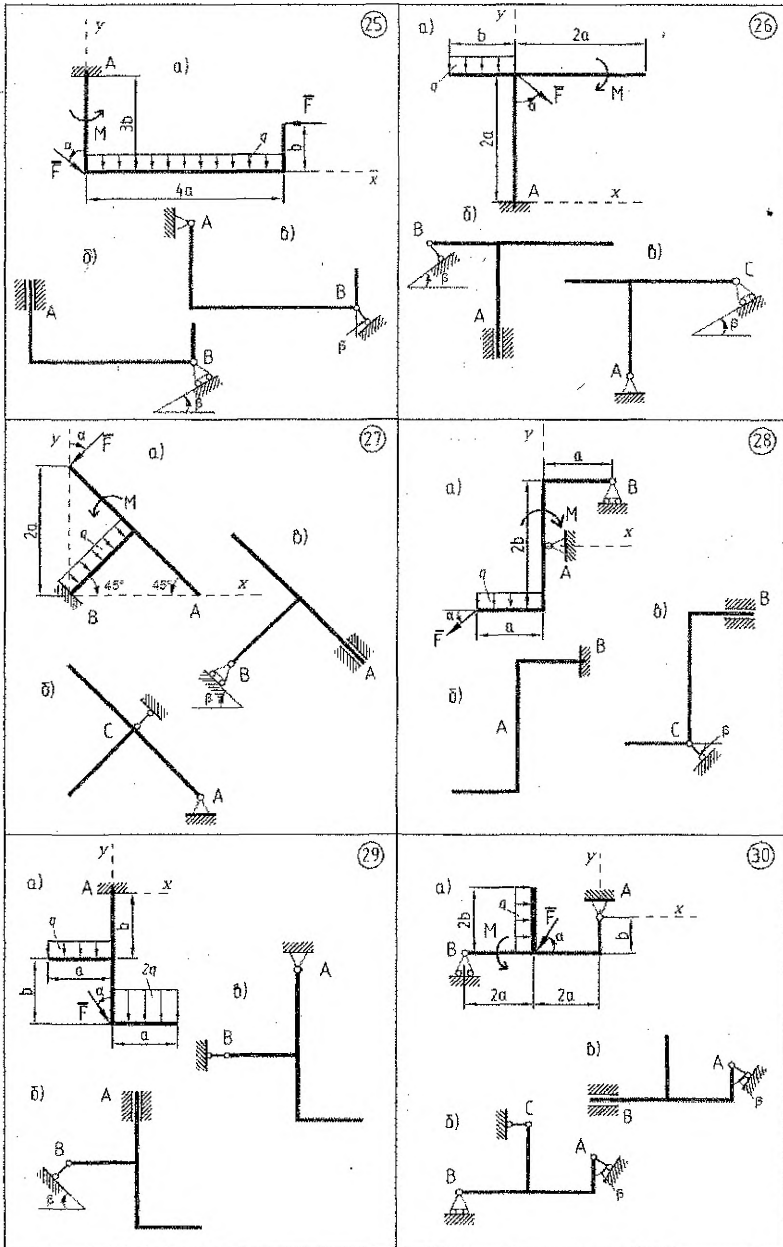


Рисунок 21 – Схемы к задаче 1







### Задача 2. Определение реакций опор составной конструкции

Составная рама состоит из 2-х жестких частей, соединенных между собой с помощью промежуточного шарнира или скользящей заделки. С помощью внешних связей (шарнирно-неподвижной, шарнирно-подвижной опор, невесомого стержня или жесткой заделки) рама крепится к неподвижному основанию. Рама загружена сосредоточенными силами  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ , равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , неравномерно распределенной нагрузкой и парой сил с моментом  $M$ .

Требуется:

1) определить реакции внешних и внутренних связей рамы для двух способов соединения частей;

2) проверить правильность решения, оценить погрешность расчета.

Исходные данные для расчета принять согласно схемам (рис. 22) и числовым данным (таблица 3). Способы закрепления для каждого из вариантов принимаются по таблице 4, 5. Схемы соединения с помощью скользящей заделки приведены в таблице 6.

Номера вариантов по таблице 2, номера строк в таблице 3, а также способ внутреннего соединения (по таблице 6) выдаются по указанию преподавателя. Эти данные могут выдаваться общими для всей группы.

Таблица 3 – Числовые данные к задаче 2

№ л/п	$F_1$ , кН	$\alpha_1$ , град	$F_2$ , кН	$\alpha_2$ , град	$M$ , кН·м	$q$ , кН/м	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$\beta$ , град
1	20	20	10	90	18	9	10	5	10
2	8	10	15	75	9	15	0	30	30
3	9	50	23	10	22	-	30	15	-50
4	21	35	6	25	17	21	8	0	25
5	7	25	15	45	11	20	7	14	35
6	5	70	11	15	20	7	0	18	-40
7	14	25	18	60	5	14	20	10	15
8	26	40	12	80	15	8	30	10	-20
9	18	60	7	30	10	19	5	20	60
10	12	75	8	25	6	14	20	0	55
11	23	15	19	65	14	18	12	6	-25
12	15	65	9	20	12	-	7	20	65
13	6	30	22	0	7	15	25	10	-45
14	22	45	11	70	24	12	30	0	15
15	17	0	21	30	16	24	15	20	-60

Таблица 4 – Способы закреплений в точках

№ варианта	№ строки	Закрепление в точках			№ варианта	№ строки	Закрепление в точках		
		A	B	D			A	B	D
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	I	II	III		1	IV	-	IV
	2	VII	-	II		2	VI	-	I
	3	III	-	III		3	IV	I	II
	4	I	VIII	-		4	-	III	IV
	5	III	I	II		5	-	II	VI
	6	II	-	VIII		6	II	III	I
7	III	III	-	7	I	I	IV		

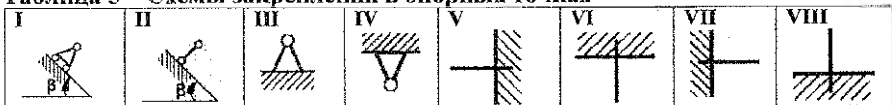
Продолжение таблицы 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	III	-	IV	17	1	VII	-	II
	2	VIII	I	-		2	VII	I	-
	3	II	-	VI		3	II	III	I
	4	II	I	IV		4	I	-	V
	5	III	-	III		5	III	III	-
	6	III	II	I		6	III	-	III
	7	II	VIII	-		7	II	VIII	-
3	1	VI	-	I	18	1	III	-	III
	2	IV	-	IV		2	-	VI	I
	3	I	II	IV		3	IV	-	IV
	4	IV	I	II		4	V	-	II
	5	II	V	-		5	III	I	I
	6	IV	-	III		6	V	-	II
	7	I	-	VI		7	I	II	III
4	1	III	-	IV	19	1	VIII	I	-
	2	VII	-	II		2	II	-	VI
	3	II	I	IV		3	II	II	IV
	4	-	V	I		4	III	-	IV
	5	III	II	I		5	III	II	I
	6	II	-	VI		6	II	VIII	-
	7	-	III	IV		7	III	-	III
5	1	-	III	IV	20	1	II	-	VIII
	2	I	III	II		2	III	II	II
	3	III	I	II		3	VIII	I	-
	4	VIII	I	-		4	I	I	III
	5	III	-	III		5	III	-	III
	6	II	VIII	-		6	II	V	-
	7	-	II	VI		7	III	-	IV
6	1	VIII	II	-	21	1	VII	-	II
	2	I	III	II		2	III	-	III
	3	I	V	-		3	II	VIII	-
	4	I	I	IV		4	VII	I	-
	5	-	V	II		5	I	III	II
	6	III	-	IV		6	I	-	V
	7	-	II	VII		7	III	III	-
7	1	III	III	-	22	1	III	IV	-
	2	I	-	V		2	I	IV	II
	3	VI	II	-		3	VII	II	-
	4	III	I	I		4	-	II	VI
	5	II	-	V		5	-	IV	IV
	6	I	III	II		6	-	VI	II
	7	IV	-	III		7	II	II	IV
8	1	II	-	VIII	23	1	VI	II	-
	2	II	V	-		2	IV	III	-
	3	III	II	II		3	-	I	VII
	4	VII	I	-		4	I	I	III
	5	I	I	III		5	I	III	I
	6	III	-	III		6	-	III	III
	7	III	-	IV		7	II	II	IV

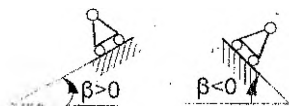
Продолжение таблицы 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	1	II	II	III	24	1	I	III	I
	2	I	-	V		2	VIII	II	-
	3	II	III	I		3	III	III	-
	4	IV	I	I		4	-	I	VIII
	5	II	VIII	-		5	-	III	III
	6	IV	-	III		6	II	VIII	-
	7	VI	-	I		7	II	I	III
10	1	III	-	III	25	1	III	II	I
	2	VII	-	II		2	VIII	I	-
	3	-	III	III		3	II	-	VI
	4	I	II	III		4	III	-	IV
	5	-	VII	I		5	III	-	III
	6	II	II	III		6	II	I	IV
	7	I	-	V		7	II	VIII	-
11	1	III	I	II	26	1	VI	II	-
	2	VIII	I	-		2	IV	III	-
	3	I	I	III		3	-	VIII	I
	4	III	-	III		4	II	V	-
	5	I	V	-		5	IV	II	II
	6	III	-	IV		6	-	III	III
	7	II	-	VIII		7	I	II	III
12	1	III	IV	-	27	1	I	I	III
	2	VII	I	-		2	III	II	I
	3	-	II	VI		3	VII	II	-
	4	-	IV	IV		4	II	-	V
	5	-	VI	II		5	III	-	III
	6	I	II	IV		6	I	VIII	-
	7	II	IV	I		7	II	III	I
13	1	III	III	-	28	1	II	-	VIII
	2	-	III	III		2	III	II	II
	3	VII	I	-		3	VIII	I	-
	4	II	V	-		4	I	I	III
	5	-	II	VIII		5	III	-	III
	6	I	III	II		6	II	V	-
	7	III	I	I		7	III	-	IV
14	1	V	II	-	29	1	III	III	-
	2	-	VIII	II		2	VIII	I	-
	3	II	III	I		3	-	II	VI
	4	I	VIII	-		4	-	III	IV
	5	III	III	-		5	I	III	II
	6	-	III	III		6	II	VII	-
	7	-	II	VII		7	II	II	IV
15	1	II	VIII	-	30	1	VII	II	-
	2	III	III	-		2	-	III	III
	3	III	I	II		3	I	III	II
	4	I	-	VI		4	-	I	VII
	5	III	-	IV		5	II	III	II
	6	I	III	II		6	III	III	-
	7	II	I	IV		7	I	V	-

Таблица 5 – Схемы закреплений в опорных точках



**Примечание** Отрицательный угол  $\beta$  показывает, что угол наклона опорной поверхности откладывается в другую сторону:



**Таблица 6 – Схемы соединения с помощью скользящей заделки**

№ варианта	Вид скользящей заделки	№ варианта	Вид скользящей заделки	№ варианта	Вид скользящей заделки
1		11		21	
2		12		22	
3		13		23	
4		14		24	
5		15		25	
6		16		26	
7		17		27	
8		18		28	
9		19		29	
10		20		30	



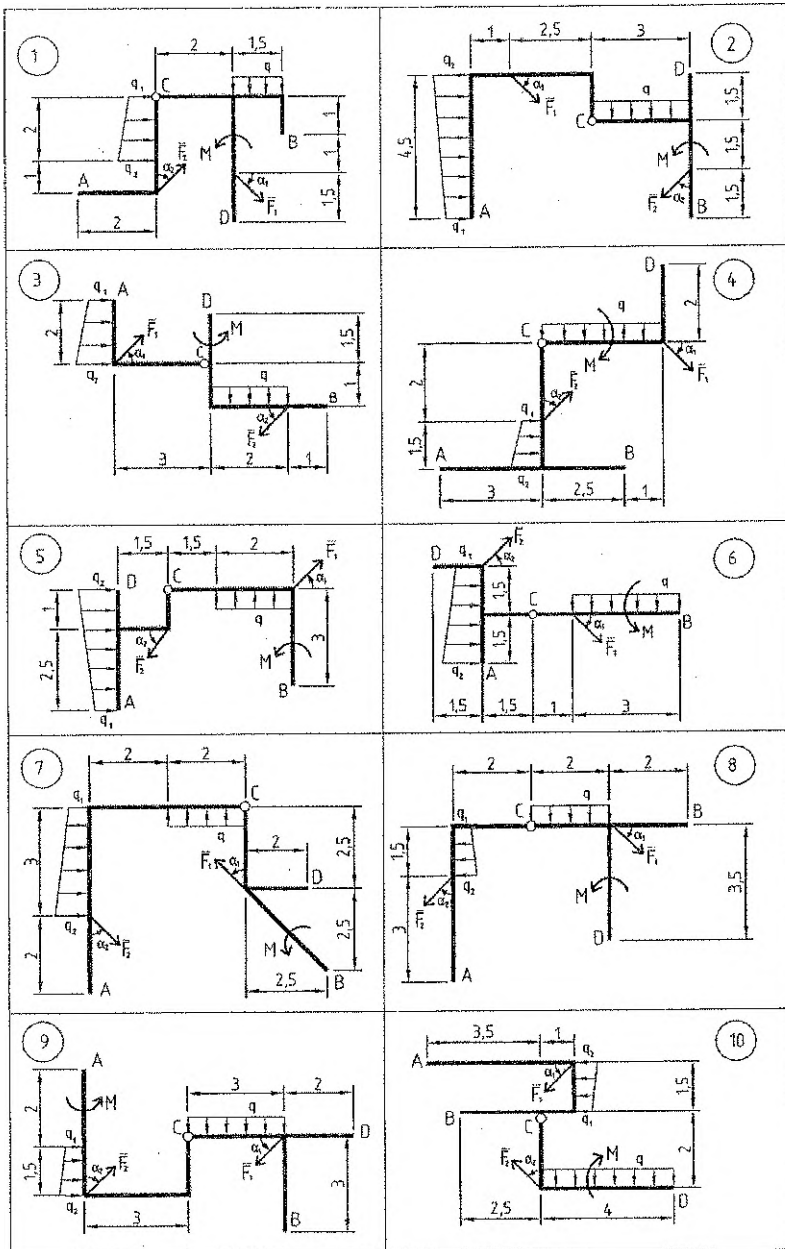
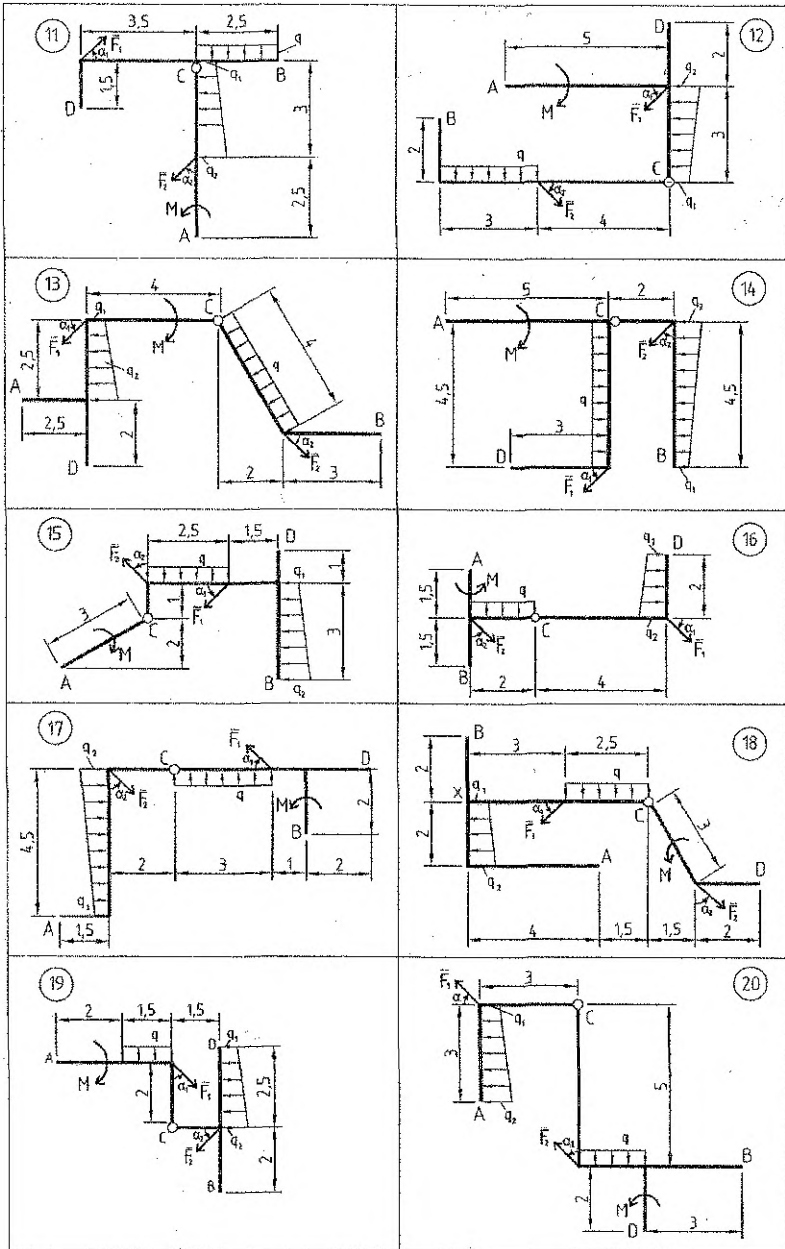
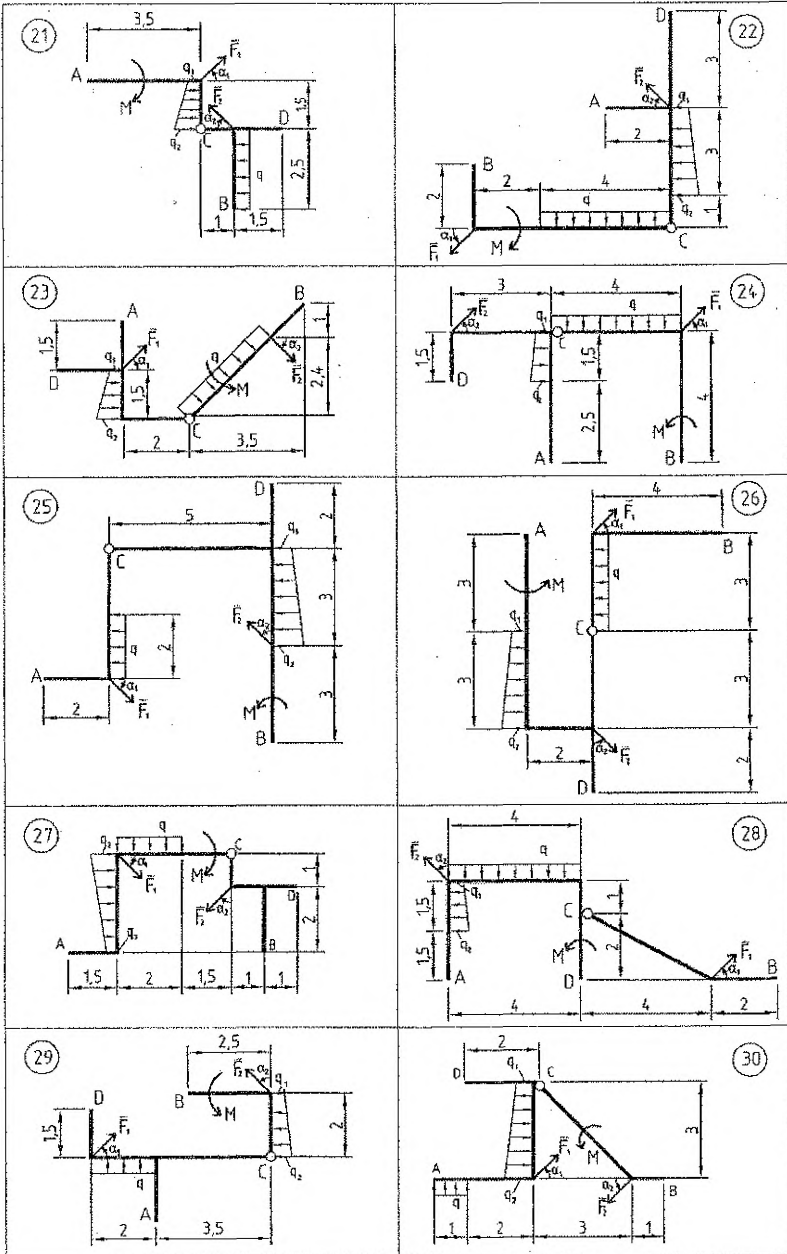


Рисунок 22 – Схемы составных конструкций





### Задача 3. Определение реакций опор твердого тела

Определить реакции опор пространственной конструкции в точках А и В. Выполнить проверку, составив не менее двух проверочных уравнений моментов. Оценить погрешность расчета. Схемы конструкций показаны на рис. 23, числовые данные приведены в таблице 7. Значения углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  выбираются по таблице 8. Прочерк в таблице 8 свидетельствует о том, что соответствующий угол необходимо рассчитать самостоятельно.

Таблица 7 – Числовые данные к задаче 3

№ варианта	Силы, кН		Момент пары M, кН·м	Размеры, см				
	P	G		a	b	c	R	r
1	25	-	-	20	25	35	30	20
2	55	20	-	20	30	-	-	-
3	50	100	-	20	30	10	15	5
4	20	-	-	10	20	15	-	20
5	20	35	-	20	40	30	25	-
6	80	20	-	40	30	50	-	-
7	20	-	35	30	40	20	40	30
8	60	95	45	30	20	5	20	10
9	30	-	85	35	25	40	20	35
10	85	-	100	40	20	15	30	20
11	85	25	-	70	30	20	-	-
12	30	-	90	20	35	45	-	20
13	35	-	-	30	20	40	30	10
14	80	10	-	60	40	30	-	-
15	70	80	45	25	20	15	-	20
16	50	-	-	25	20	30	50	20
17	75	-	-	100	30	50	30	10
18	20	-	35	10	40	25	20	15
19	85	30	-	30	40	40	-	-
20	80	-	-	30	20	30	20	15
21	-	45	-	50	40	30	-	-
22	55	30	-	30	40	30	30	15
23	25	-	-	20	45	25	-	30
24	80	35	-	50	40	40	-	-
25	75	50	-	40	30	30	20	30
26	70	45	-	30	15	5	25	15
27	35	-	60	20	35	25	30	20
28	20	55	-	50	30	30	-	-
29	45	-	-	20	30	40	60	40
30	90	65	-	20	25	10	15	10

Таблица 8 – Числовые данные к задаче 3

№ варианта	$\alpha$ , град	$\beta$ , град	$\gamma$ , град	№ варианта	$\alpha$ , град	$\beta$ , град	$\gamma$ , град
1	30	60	-	6	60	30	90
2	-	60	45	7	50	-	30
3	45	-	30	8	90	30	-
4	50	90	-	9	60	45	-
5	-	60	90	10	45	-	45

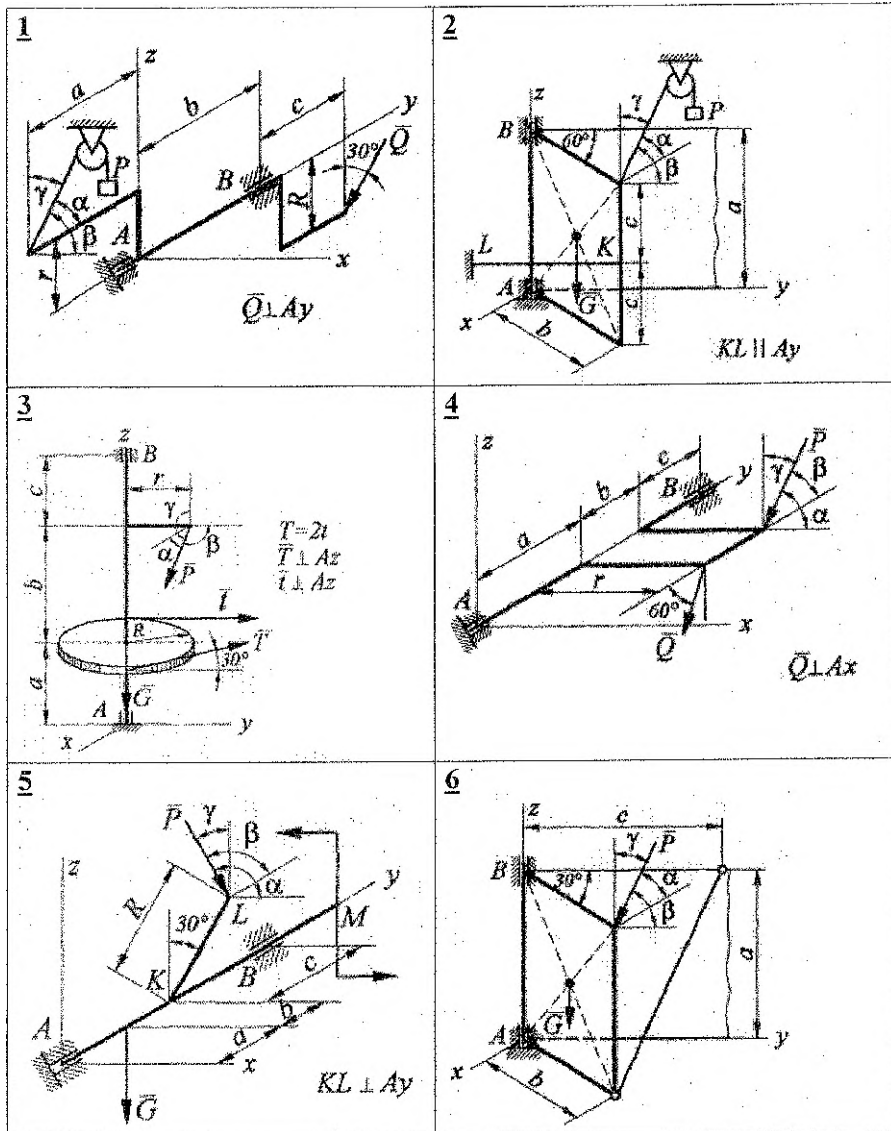
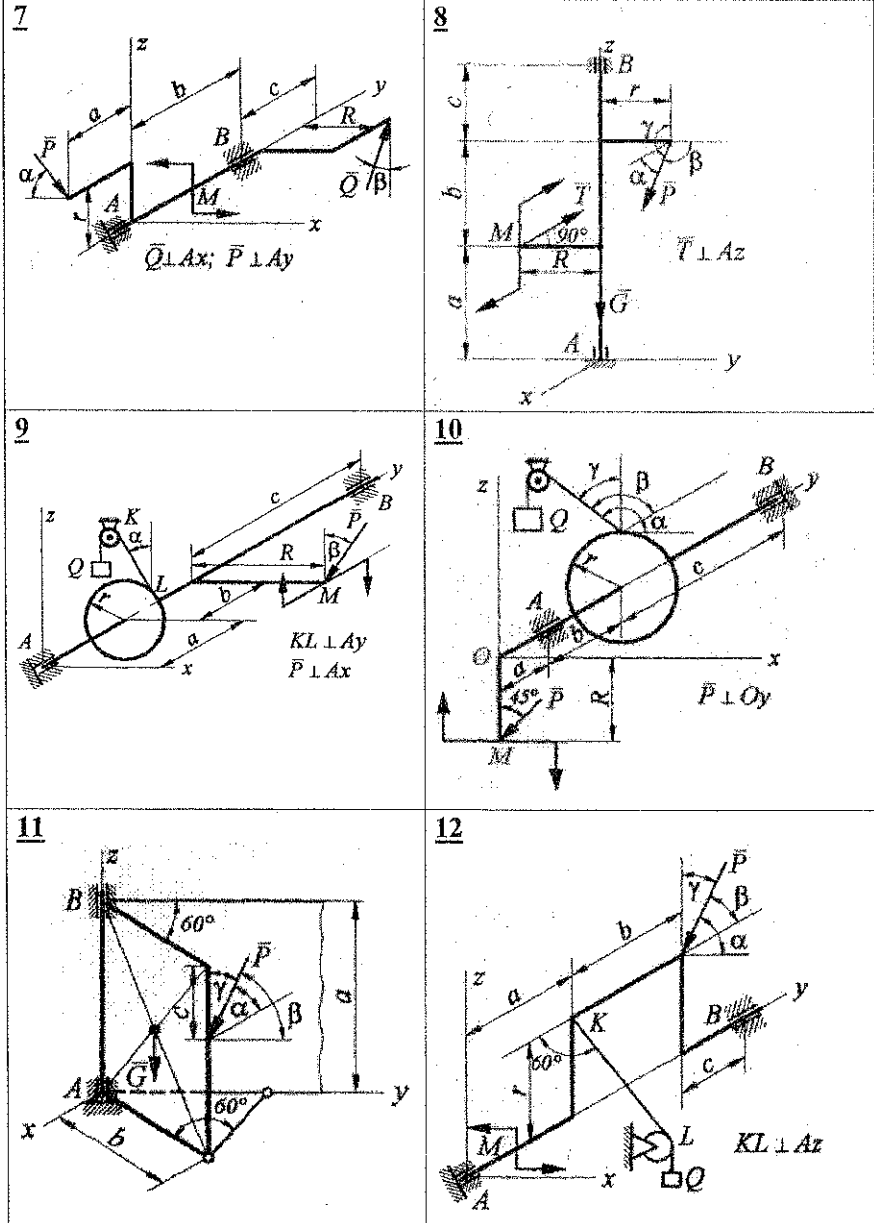
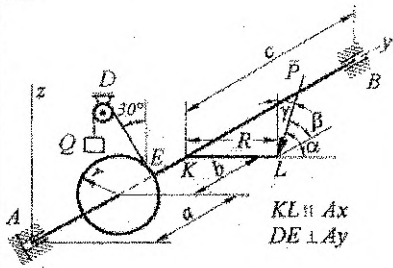


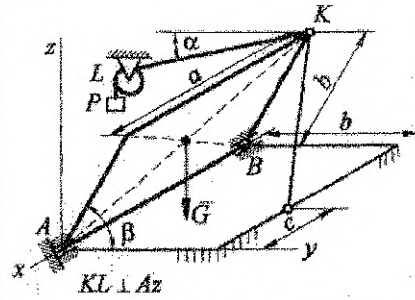
Рисунок 23. Схемы к задаче 3



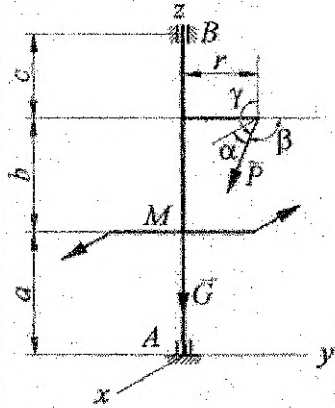
13



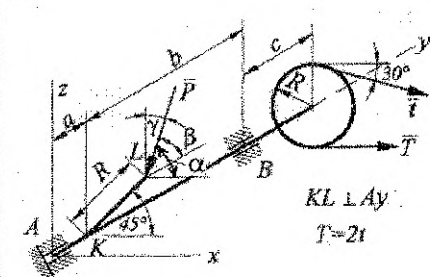
14



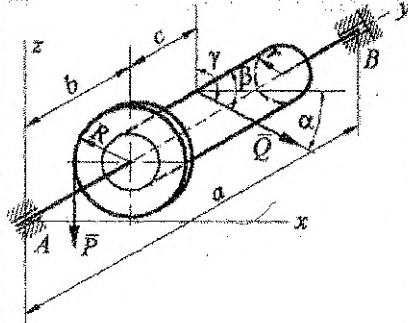
15



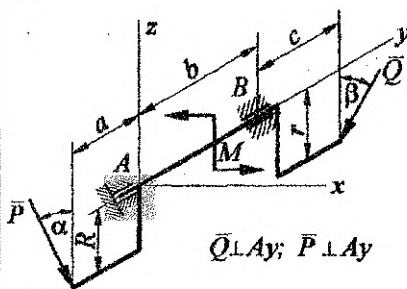
16



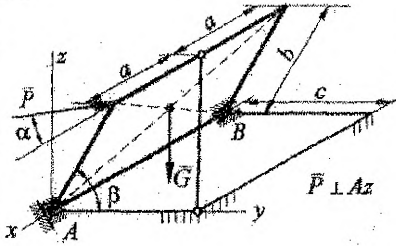
17



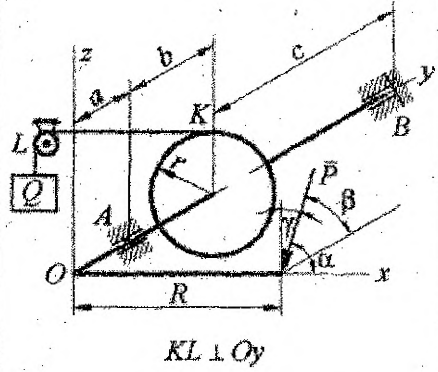
18



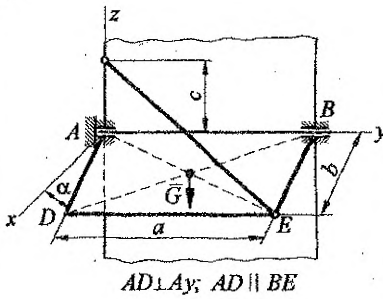
19



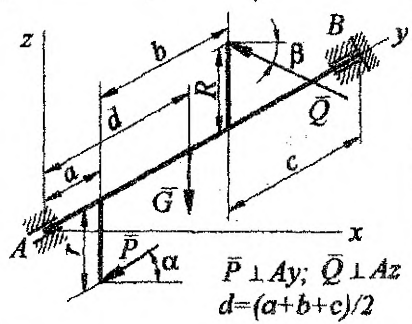
20



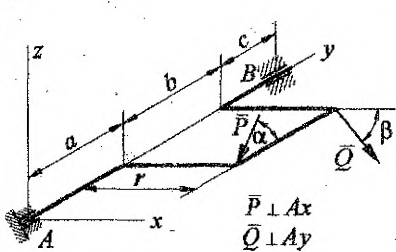
21



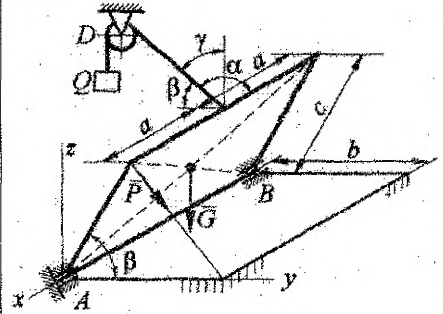
22



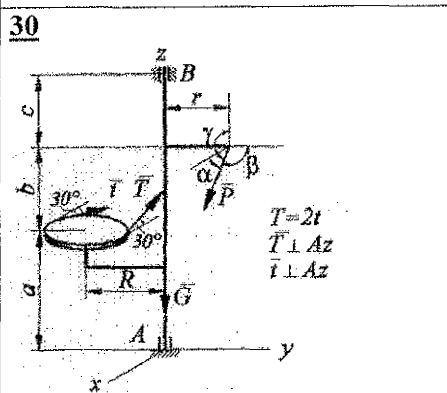
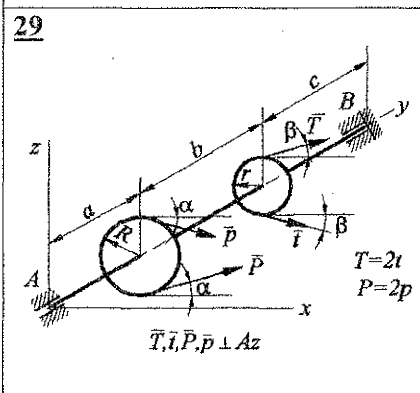
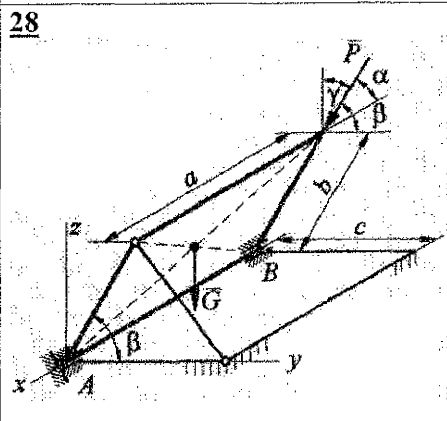
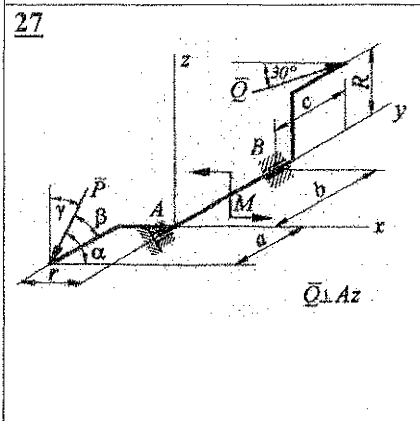
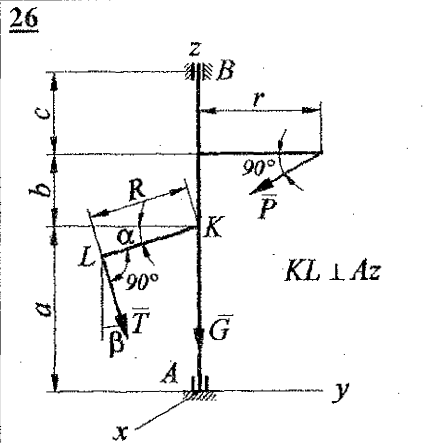
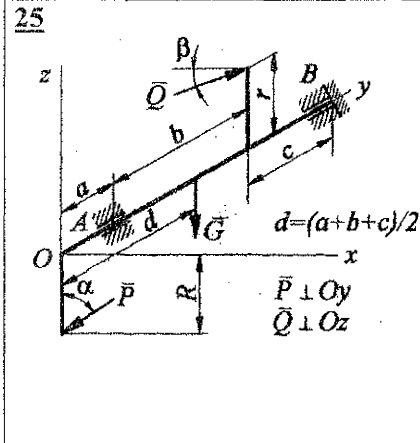
23



24







#### Задача 4. Равновесие тел с учетом трения

Тела, изображенные на рисунке, находятся в равновесии. Используя приведенные исходные данные, рассчитать максимальное значение силы  $F$ , при котором сохраняется равновесие. Найти для этого случая равнодействующие реакций опорных поверхностей.

В условии приняты следующие обозначения:  $G$  – сила тяжести;  $M$  – момент приложенной к телу пары сил;  $f$  – коэффициент трения между исследуемым телом и всеми опорными поверхностями.

Схемы приведены на рис. 24, числовые данные – в таблице 9.

Таблица 9 – Числовые данные к задаче 4

№ варианта	$G, Н$	$f$	$\alpha, \text{град}$	$\beta, \text{град}$	$a, \text{см}$	$b, \text{см}$	$r_1, \text{см}$	$r_2, \text{см}$	$r, \text{см}$	$l, \text{см}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	350	0,4	15	-	60	30	-	-	-	80
2	300	0,2	40	30	-	-	20	40	-	-
3	400	0,15	35	55	20	-	-	-	-	60
4	300	0,1	55	40	-	-	25	45	-	-
5	300	0,35	40	-	25	-	-	-	-	100
6	400	0,1	30	20	-	-	-	-	-	25
7	400	0,05	60	40	-	-	15	30	-	-
8	350	0,3	25	-	20	-	-	-	-	100
9	400	0,2	-	-	15	-	-	-	45	-
10	200	0,3	20	-	15	-	-	-	-	60
11	350	0,35	20	45	60	-	-	-	-	-
12	250	0,2	45	15	60	-	-	-	-	80
13	200	0,3	75	60	20	-	-	-	-	100
14	50	0,35	-	-	-	-	-	-	-	80
15	350	0,4	20	-	60	30	-	-	-	90
16	300	0,2	15	60	15	-	-	-	-	-
17	200	0,15	50	-	-	-	-	-	-	100
18	100	0,15	15	45	-	-	-	-	-	30
19	200	0,4	50	-	-	-	20	40	-	-
20	300	0,25	25	-	-	-	-	-	30	55
21	400	0,1	15	30	30	-	-	-	-	-
22	200	0,1	25	45	-	-	20	40	-	-
23	250	0,25	15	45	40	-	-	-	-	60
24	350	0,15	20	-	60	40	-	-	-	80
25	200	0,2	-	55	-	-	-	-	30	-
26	300	0,25	25	-	25	-	-	-	55	-
27	200	0,2	15	45	45	-	-	-	-	60
28	250	0,05	20	-	15	-	-	-	30	-
29	400	0,2	-	-	15	-	-	-	40	-
30	200	0,1	15	-	-	-	-	-	20	-

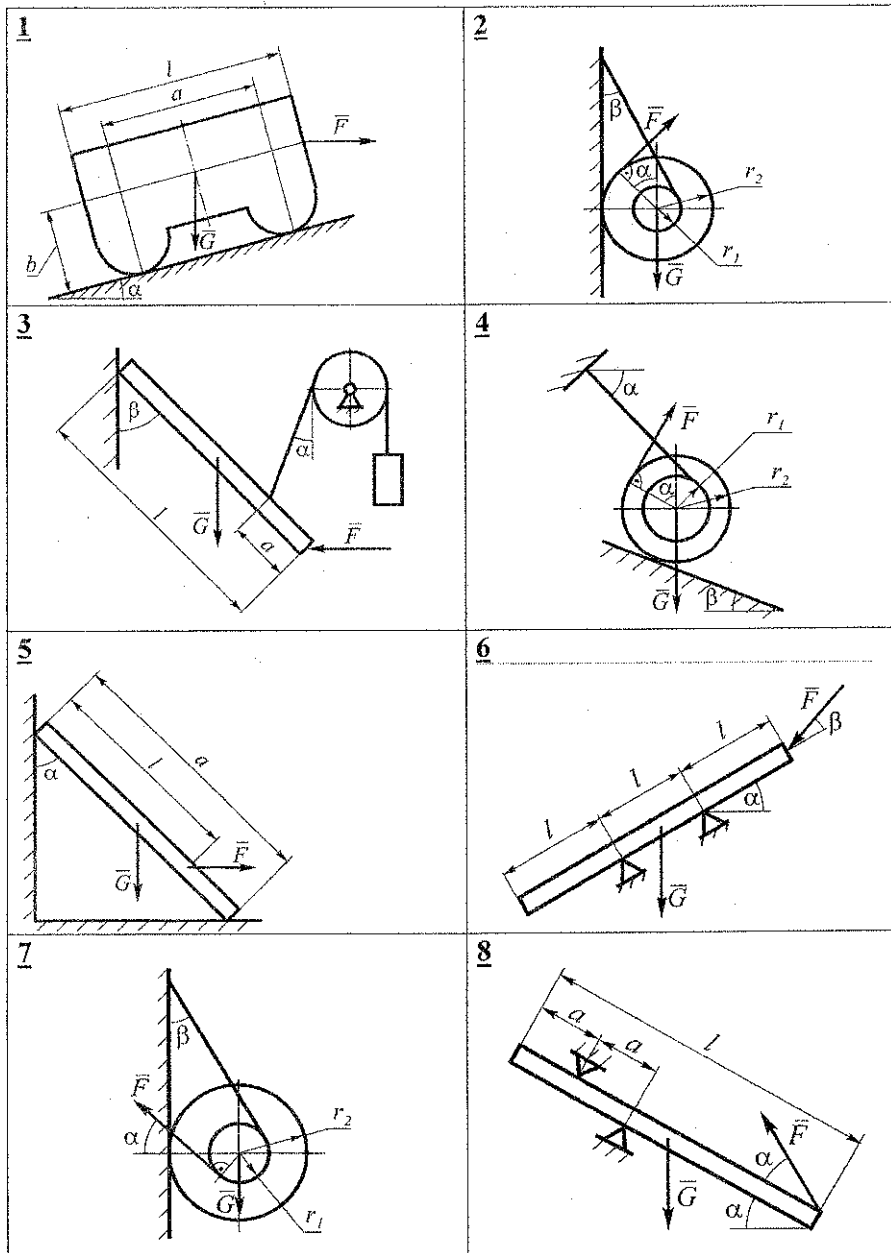
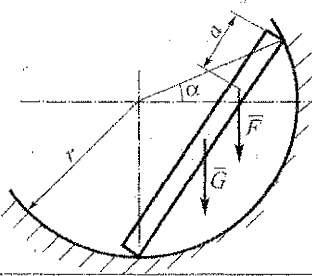
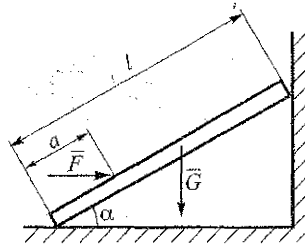


Рисунок 24 — Схемы к задаче 4

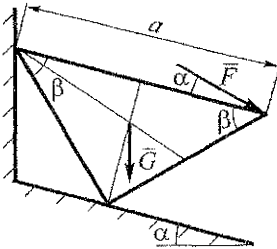
9



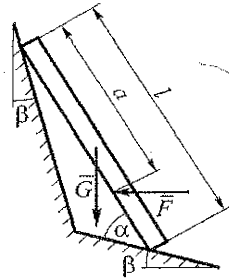
10



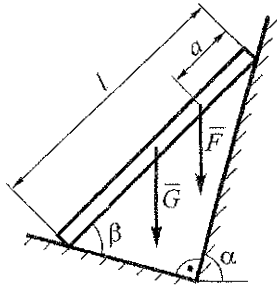
11



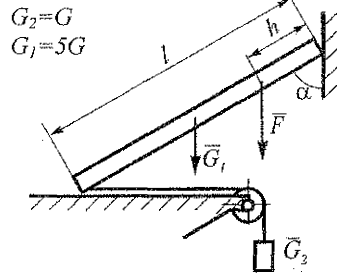
12



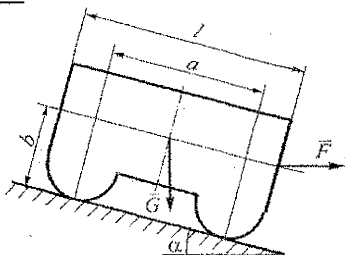
13



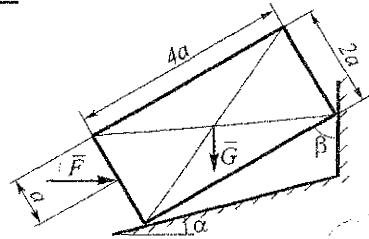
14



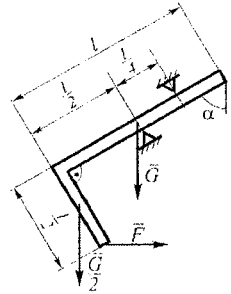
15



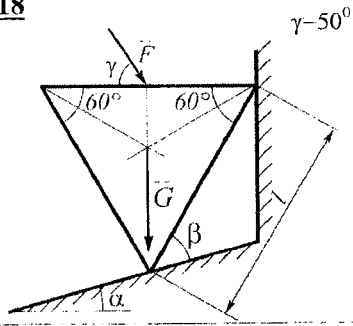
16



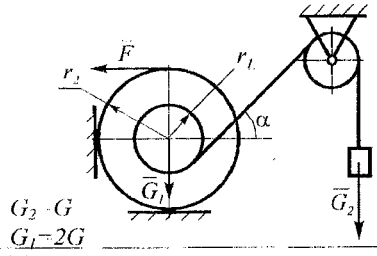
17



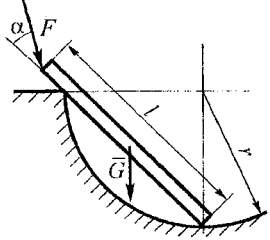
18



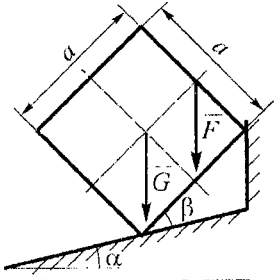
19



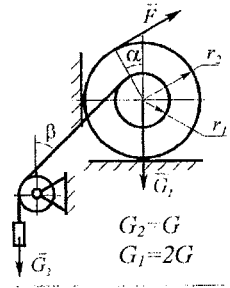
20



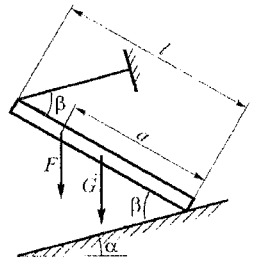
21



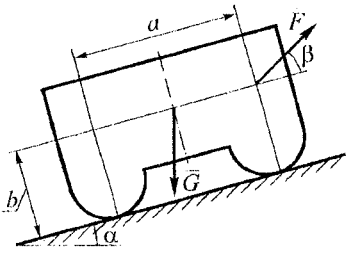
22



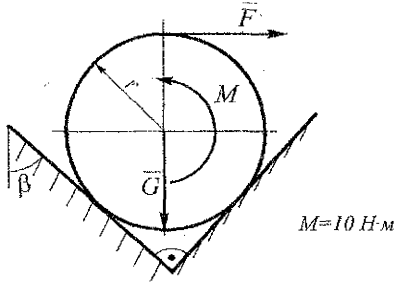
23



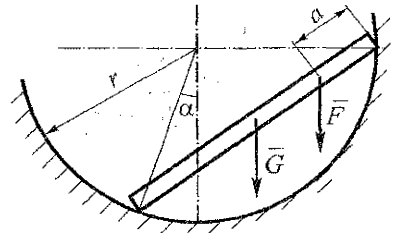
24



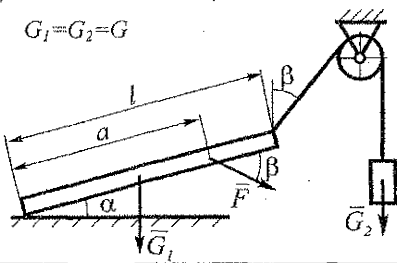
25



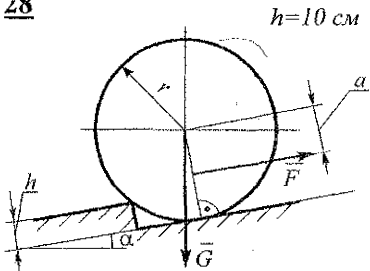
26



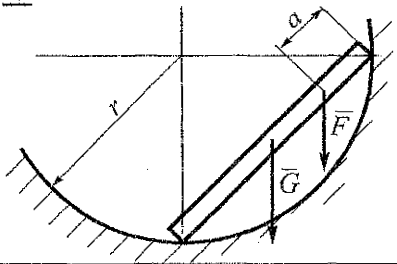
27



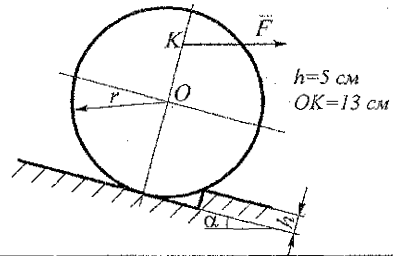
28



29



30



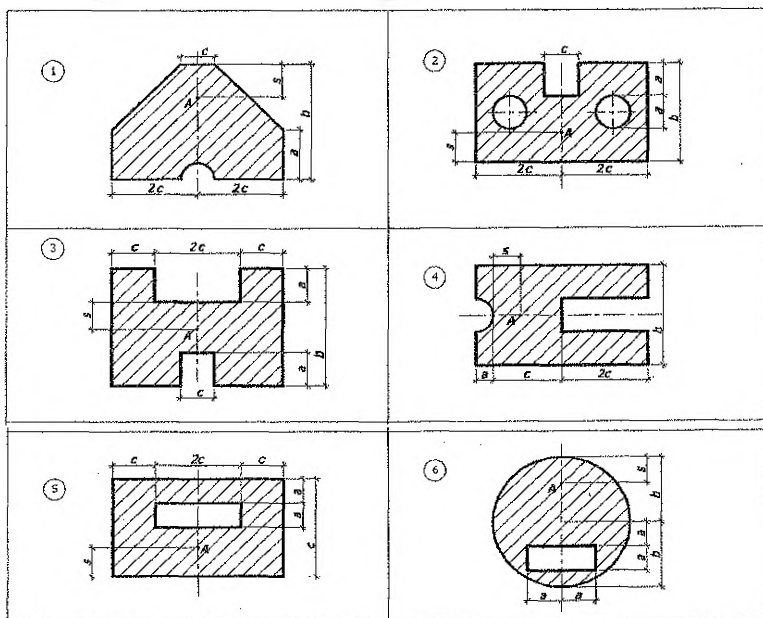
**Задача 5. Определение координат центра тяжести плоского сечения**

На рисунке 25 изображены плоские сечения. Вычертить сечение в масштабе (на миллиметровой бумаге). Определить координаты его центра тяжести. Показать на чертеже центр тяжести сечения. Числовые данные приведены в таблице 10.

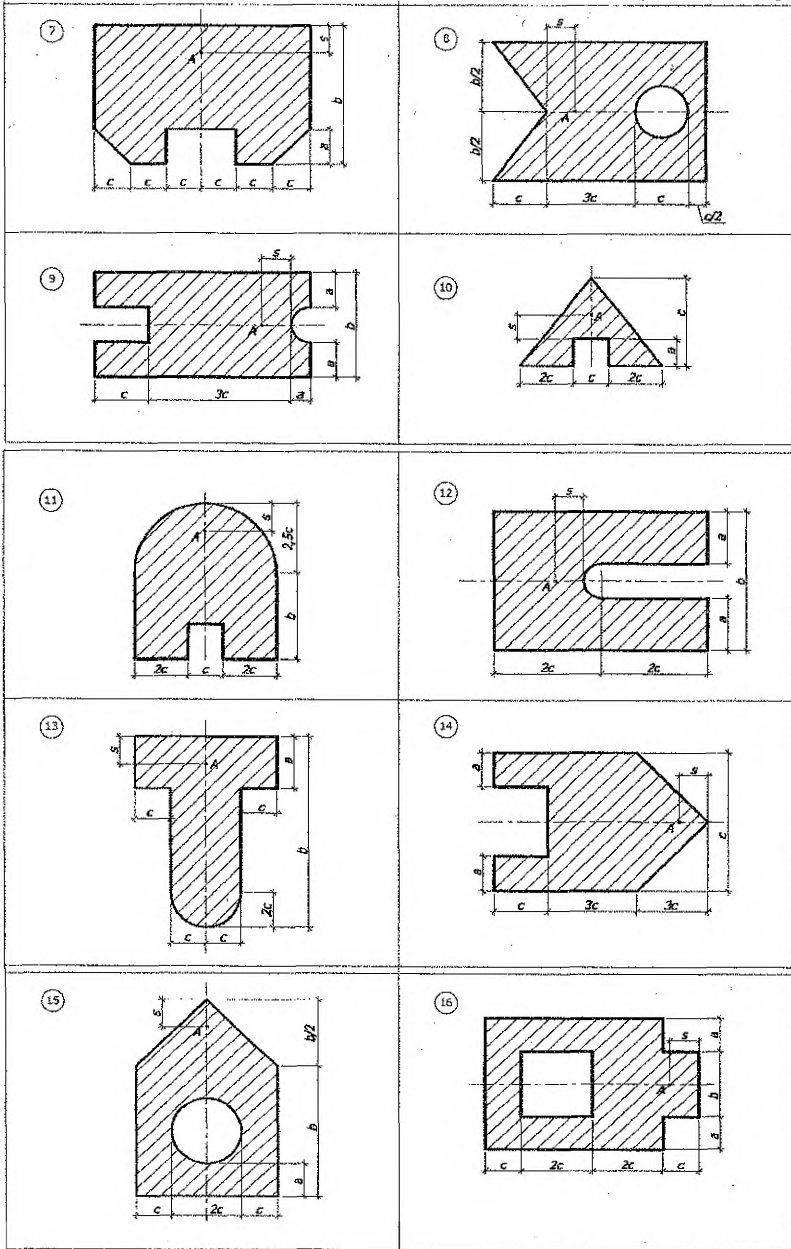
**Примечание.** По указанию преподавателя сечения могут иметь дополнительные отверстия. Формы отверстий выбираются по таблице 11. Привязка к сечению проводится по точке А, указанной на рисунках. Размеры  $b$ ,  $s$ ,  $d$ ,  $h$  выдаются преподавателем при выдаче задания.

**Таблица 10 – Числовые данные к задаче 5**

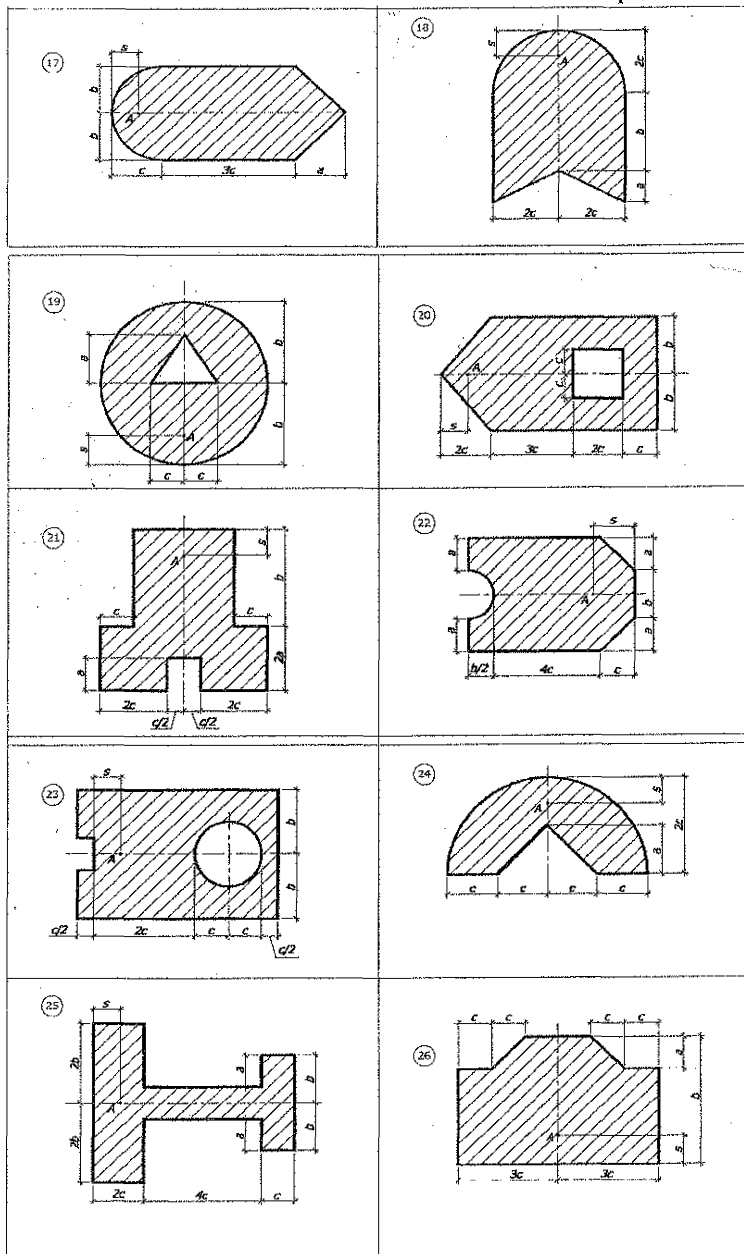
№ варианта	a, см	b, см	c, см	№ варианта	a, см	b, см	c, см
1	18	35	12	16	10	22	8
2	8	32	20	17	14	18	10
3	12	35	15	18	5	17	12
4	11	28	17	19	6	25	8
5	10	32	12	20	10	22	14
6	6	30	12	21	16	34	10
7	17	42	14	22	14	22	15
8	12	36	8	23	10	26	14
9	5	18	10	24	18	10	32
10	10	15	28	25	8	15	12
11	22	10	12	26	12	34	15
12	12	47	15	27	10	26	15
13	10	32	6	28	8	20	10
14	6	15	20	29	20	16	10
15	5	32	15	30	12	18	20



**Рисунок 25 – Схемы сечений к задаче 5**







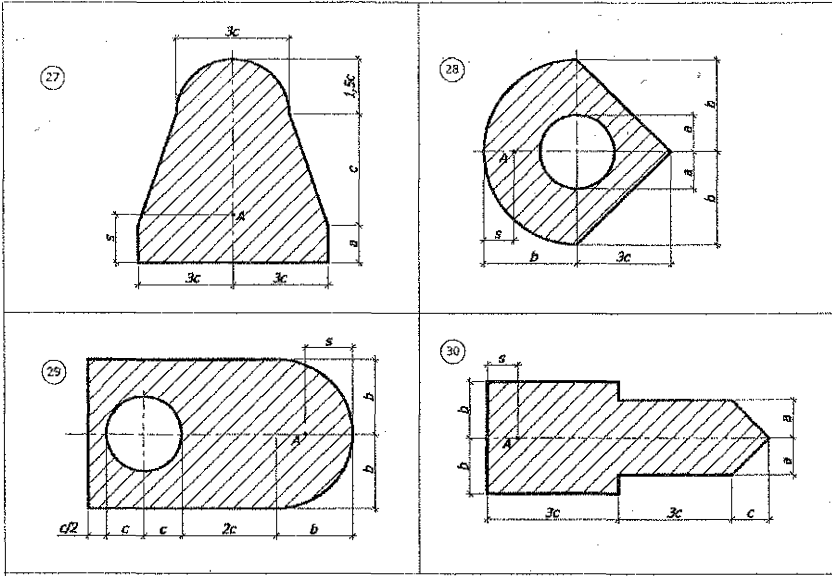


Таблица 11 – Формы отверстий и их расположение в сечении

<p><b>I</b></p>	<p><b>II</b></p>	<p><b>III</b></p>	<p><b>IV</b></p>
<p><b>V</b></p>	<p><b>VI</b></p>	<p><b>VII</b></p>	<p><b>VIII</b></p>

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется связью, наложенной на твердое тело?
2. Что называется силой реакции связи?
3. Перечислите основные виды связей и укажите их реакции.
4. Сформулируйте принцип освобождаемости от связей.
5. Что называется равнодействующей системы сил?
6. Как сложить силы:
  - а) геометрически,
  - б) аналитически?
7. Как разложить силу по двум заданным направлениям?
8. Что называется моментом силы относительно центра на плоскости?
9. Чему равен момент пары сил?
10. Чему равен главный вектор и главный момент произвольной плоской системы сил?
11. Сформулируйте три формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.
12. Какие задачи статики называют статически определимыми и какие статически неопределимыми?
13. В чем сущность решения задач на равновесие сочлененной системы тел?
14. Как определить момент силы относительно оси?
15. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
16. Как представить вектор момента пары сил, расположенной в пространстве?
17. Как складываются пары сил в пространстве?
18. Как вычислить главный вектор и главный момент пространственной произвольной системы сил?
19. Каковы условия и уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил?
20. Какие составляющие имеет реакция шероховатой поверхности при сцеплении двух тел?
21. Чему равен и как направлена сила трения скольжения?
22. Что такое угол и конус трения?
23. Чему равен коэффициент трения скольжения и какова его размерность?
24. Будет ли находиться в равновесии тело на шероховатой поверхности, если равнодействующая активных сил находится внутри конуса трения?
25. Что представляет собой коэффициент трения качения и какова его размерность? От чего зависит коэффициент трения качения?
26. Что такое момент сопротивления качения?
27. Почему система параллельных сил всегда приводится к равнодействующей, если главный вектор и главный момент не равны нулю?
28. Что называют статическим моментом системы параллельных сил относительно центра?
29. По каким скалярным формулам можно определить центр тяжести тела?
30. Каковы основные способы определения положения центра тяжести тел?
31. В чем заключается метод симметрии? Метод разбиения на части? Метод отрицательных площадей?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: Статика. Кинематика. Динамика. Учебное пособие для технических вузов. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова – 8-е изд., стереотип. – СПб: Ж. Лань, 2001. – 764 с.
2. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики: учебник для машиностроительных специальностей вузов / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1983. – 575 с.
3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. -12 изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.
4. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон – В 2-х т. - М.: Наука, 1975.
5. Айзенберг, Т.Б. Руководство к решению задач по теоретической механике / Т.Б. Айзенберг, И.М. Воронков, В.М. Осецкий – М.: Высшая школа, 1968. – 419 с.
6. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для вузов / Под ред. проф. А.А. Яблонского. – 3-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 1978. – 388 с.

## УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

*Вермейчик Андрей Иванович*  
*Хвисевич Виталий Михайлович*  
*Холодарь Борис Григорьевич*

## ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-графических работ  
по теоретической механике

### раздел «Статика»

*для студентов механических специальностей:*

*1 – 36 01 01 – «Технология машиностроения»,*

*1 – 36 01 03 – «Технологическое оборудование  
машиностроительного производства»,*

*1 – 37 01 07 – «Автосервис»,*

*1 – 37 01 06 – «Техническая эксплуатация автомобилей»*

Ответственный за выпуск: Хвисевич В.М.

Редактор: Строкач Т.В.

Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.

Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 19.03.2010 г. Бумага «Снегурочка». Гарнитура

Times New Roman. Усл. печ. л. 3,0. Уч.-пзд. л. 3,25.

Заказ № 359. Тираж **100** экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования  
«Брестский государственный технический университет».

224017, г.Брест, ул.Московская, 267.