

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛАМ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

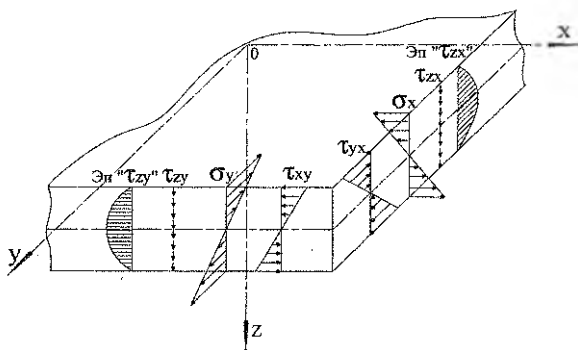
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

к выполнению контрольной работы

для студентов специальности

1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”

заочной формы обучения



Брест 2016

УДК 539.3 (075.8)

Методические указания направлены на приобретение студентами навыков самостоятельной работы при изучении курсов «Теория упругости и пластичности». В них приведены краткие теоретические сведения, примеры расчета некоторых задач теории упругости: исследование напряженно-деформированного состояния в точке тела, плоская задача теории упругости, расчет тонких пластин, а также условия задач контрольной работы.

Задания и методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения специальности 1- 70 02 01 – «Промышленное и гражданское строительство».

Составители: Веремейчик А.И., доцент
Хвисевич В.М., доцент, к.т.н.

СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения	3
Требования к оформлению контрольной работы	3
Краткие теоретические сведения.....	3
Примеры решения задач.....	17
Задания для выполнения контрольной работы.....	47
Литература.....	50

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Методические указания соответствуют базовым учебным планам специальности 1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство” и включают в себя краткие теоретические сведения, условия задания для выполнения контрольной работы и примеры расчетов по исследованию напряженно-деформированного состояния в точке упругого тела, решения плоской задачи теории упругости, расчета тонких пластин. Каждый студент-заочник по теории упругости и пластичности должен выполнить одну контрольную работу. При ее защите необходимо ответить на вопросы по теме работы и уметь решать тестовые задачи. Зачет по курсу принимается после того, как защищена контрольная работа.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа выполняется на отдельных листах формата А4 с рамкой для текстовых документов.
2. Порядок оформления: титульный лист; бланк задания, выданный преподавателем, с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; перечень литературы.
3. Чертежи, схемы и эпюры выполняются с соблюдением правил графики и масштабов согласно стандарту УО «Брестский государственный технический университет».
4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до сотых долей.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Теория упругости – раздел механики деформируемого твёрдого тела, рассматривающий деформацию упругих тел под действием внешних сил, изменения температуры и других причин. Теория упругости является научной основой для расчётов на прочность, жесткость и устойчивость частей машин и сооружений. Главная задача теории упругости — выяснить, каковы будут деформации тела и как они будут меняться со временем при заданных внешних воздействиях.

Теория пластичности — раздел механики сплошных сред, задачами которого является определение напряжений и перемещений в деформируемом теле за пределами упругости.

Теория напряженно-деформированного состояния в точке тела

В твердом теле, нагруженном системой уравновешенных сил, происходит взаимное перемещение точек, возникают линейные и угловые упругие деформации, что вызывает изменение сил взаимодействия между частицами тела. Эти изменения в силах взаимодействия называют внутренними силами, а их интенсивность на бесконечно малых площадках, проведенных внутри тела в той или иной точке, — напряжениями.

Выделим в некоторой точке нагруженного тела бесконечно близкими сечениями, параллельными координатным плоскостям, элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда (рисунок 1, а). Действие отброшенной части на параллелепипед будет выражаться девятью компонентами напряжений (рисунок 1 б, в). Совокупность этих девяти компонент полностью характеризует напряженное состояние в данной точке тела и образует тензор напряжений T_{σ} второго ранга, который записывается в виде матрицы:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Нормальные напряжения σ считаются положительными, если они вызывают растяжение. Для определения знака напряжений используется правило внешней нормали: если внешняя нормаль к площадке совпадает (противоположна) с направлением оси координат, то напряжение положительно, если оно также совпадает (противоположно) с осью координат.

Зная компоненты напряжений на трех взаимно ортогональных площадках в некоторой точке тела, можно найти нормальную и касательную составляющие на любой другой площадке, проведенной через данную точку тела (σ_v, τ_v) (рисунок 1, в).

Известно, что в любой точке тела всегда существуют по крайней мере три такие взаимно ортогональные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения достигают экстремума. Эти площадки и напряжения называют главными (рисунок 1, г). Главные напряжения обозначают индексами 1, 2, 3, которые нумеруются в соответствии с неравенством $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Площадки равнонаклоненные к главным, и напряжения, действующие на них, называются октаэдрическими $\sigma_{окт}, \tau_{окт}$ (рисунок 2).

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклонных под углом 45° к каждой паре главных площадок, и равны полуразности соответствующих главных напряжений. Их обозначают $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ (рисунок 3).

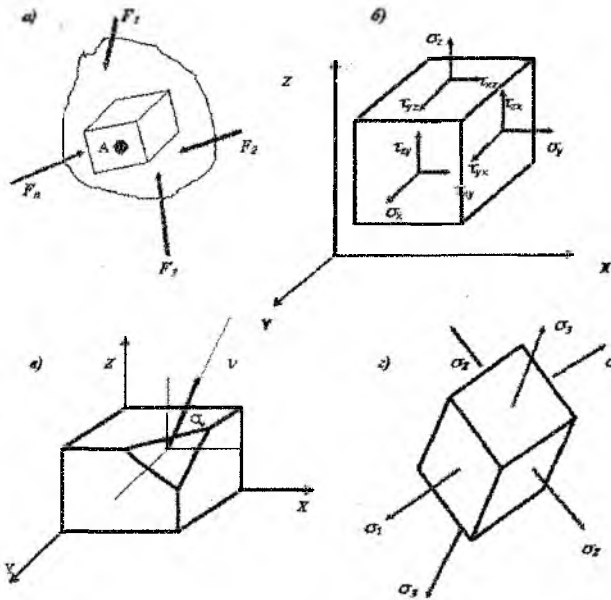


Рисунок 1 – Компоненты тензора напряжений, главные напряжения

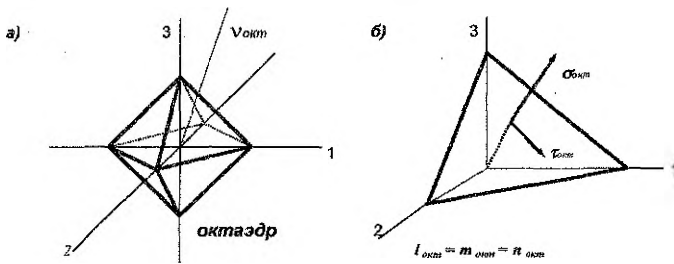


Рисунок 2 – Октаэдрические напряжения и площадки

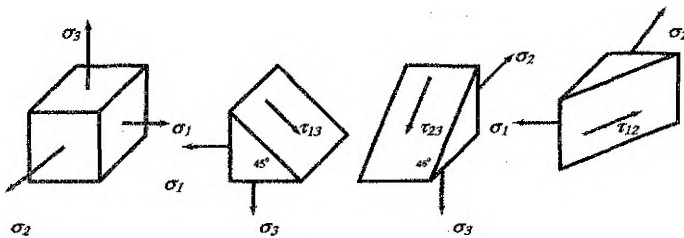


Рисунок 3 – Наибольшие касательные напряжения

Напряжения и поверхностные силы выражаются в МПа, сосредоточенные силы – в Н, объемные (массовые) нагрузки – в Н/м³.

Основные уравнения теории упругости:

I. Группа статических уравнений:

Дифференциальные уравнения равновесия (Навье - Коши):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \bar{Y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \bar{Z} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ - проекции объемных сил на оси координат.

II. Группа геометрических уравнений:

Формулы Коши:

$$\begin{aligned} \text{- линейные деформации: } \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \text{- угловые деформации: } \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{aligned} \quad (2)$$

где u, v, w - перемещения вдоль осей x, y, z соответственно.

Уравнения совместности деформаций (Сен-Венана):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (3)$$

III. Группа физических уравнений:

Обобщенный закон Гука:

- прямая форма:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \quad (4)$$

- обратная форма:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x; \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y; \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z; \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}; \end{aligned} \quad (5)$$

где E – модуль упругости первого рода (Юнга), ν – коэффициент Пуассона,
 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль упругости второго рода (сдвига), $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – относи-

тельное изменение объема, $\mu = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$; $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коэффициенты

Ляме.

Решение уравнений групп I, II, III должно удовлетворять условиям на поверхности (3). Система 15 уравнений (1), (2), (4) или (5) используется для определения 15 неизвестных ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, u, v, w$).

Способы решения задач теории упругости: решение в перемещениях, напряжениях или системной форме.

Методы решения:

1. Прямой метод. Интегрируется система 15-ти уравнений при выполнении условий на поверхности.
2. Обратный метод. Задаются функции напряжений или перемещений, удовлетворяющих системе уравнений, а затем из граничных условий определяются нагрузки, соответствующие такому решению.
3. Полуобратный метод (Сен-Венана). Часть неизвестных задается и представляется в систему уравнений, из которых определяются остальные неизвестные.

Формулы и уравнения, по которым можно вычислить σ_x, τ_{xy} , величины главных напряжений и положение главных площадок, $\tau_{окт}, \sigma_{окт}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$, а также другие необходимые зависимости, использующиеся в теории напряженно-деформированного состояния, будут приведены ниже в примере 1.

Плоская задача теории упругости

Плоской называется задача, в которой напряженное состояние тела определяется напряжениями, действующими только в одной плоскости. В теории упругости различают два вида плоских задач (в плоскости xOy):

I. Плоское деформированное состояние (плоская деформация), при котором перемещения точек тела происходят только в двух направлениях параллельно одной плоскости (xOy), а деформации из плоскости, т. е. в направлении оси z , равны нулю: $\varepsilon_z = 0, \gamma_{xz} = 0, \gamma_{zy} = 0$. К этой задаче относятся длинные цилиндрические или призматические тела, вытянутые вдоль оси z , под действием нагрузки, перпендикулярной этой оси и постоянной вдоль нее (длинные пластины, подпорные стенки, плотины).

Так как условия работы всех сечений одинаковы, то:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y); \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y); \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y).$$

Из формул закона Гука (4) получим:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0, \quad \text{откуда} \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$$

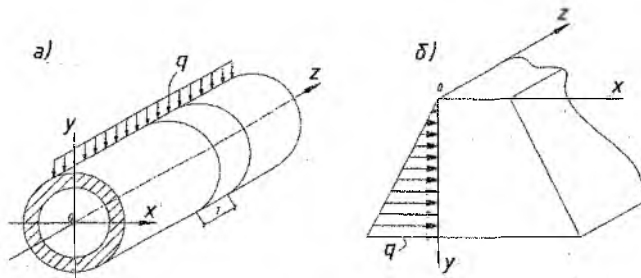


Рисунок 4 – Пример плоского деформированного состояния

2. Обобщенное плоское напряженное состояние, при котором напряжения σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} равны нулю. К этой группе задач относится расчет тонких пластин, нагруженных по боковым граням силами, параллельными плоскости пластин (рисунок 5).

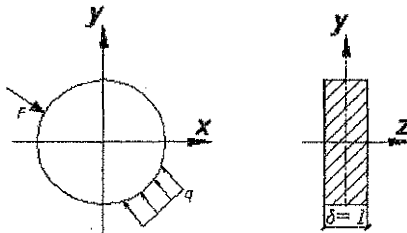


Рисунок 5 – Пример плоского напряженного состояния

Суть обобщения: для пластин конечной толщины δ принимается то, что выполняется в бесконечно тонкой пластине: равенство нулю напряжений из плоскости, а также равномерное распределение неизвестных напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} по толщине пластин.

Основные уравнения для плоской деформации.

1. Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

Условия на поверхности:

$$P_{x\nu} = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m, \quad P_{y\nu} = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m, \quad (7)$$

где $l = \cos(x, \nu)$, $m = \cos(y, \nu)$ - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности.

2. Формулы Коши:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8)$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (9)$$

3. Закон Гука:

а) в прямой форме:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \quad (10)$$

б) в обратной форме:

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu_1 \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E_1}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}; \quad (11)$$

$$\text{где } E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (12)$$

При плоском напряженном состоянии плоскости свободны от нагрузки:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0, \quad (13)$$

а) другие напряжения не зависят от координаты z:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \quad (14)$$

Из закона Гука $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$,

$$\text{а } \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy};$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}.$$

При плоском напряженном состоянии имеет место деформация ε_z , но нет напряжения σ_z , при плоской деформации – наоборот, имеется напряжение σ_z , но отсутствует деформация ε_z .

В итоге, для решения плоских задач имеем восемь уравнений: два дифференциальных уравнения Навье-Коши; три геометрических соотношения Коши и три уравнения обобщенного закона Гука, с восьмью неизвестными: σ_x , σ_y , τ_{xy} , u , v , ε_x , ε_y , γ_{xy} .

При решении задачи в напряжениях основными неизвестными будут σ_x , σ_y , τ_{xy} . Если объемные силы постоянны (например, собственный вес), то уравнения для обеих плоских задач совпадают. Решение упрощается, если все неизвестные напряжения выразить через одну функцию $\varphi(x, y)$ (функцию напряжений Эри) следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \bar{X}_y + \bar{Y}_x \right), \quad (15)$$

где \bar{X}, \bar{Y} – объемные силы в проекциях на оси x и y соответственно.

Функцию $\varphi(x, y)$ можно определить из решения бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (16)$$

при граничных условиях: $X_v = \sigma_x \ell + \tau_{xy} m$; $Y_v = \tau_{yx} \ell + \sigma_y m$.

Во многих случаях получить точное решение уравнения (16) оказывается сложным. Для приближенного решения этого уравнения применяют численные методы и в частности метод конечных разностей (МКР). Суть МКР состоит в том, чтобы решение плоской задачи с помощью функции напряжений φ свести к алгебраическим уравнениям. В этом методе частные производные уравнения (16) приближенно заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое. Это уравнение, как увидим далее, содержит значение функции напряжений в тринадцати точках, расположенных в определенном порядке на сетке вокруг центральной точки. Поэтому вместо одного бигармонического уравнения в частных производных приходится составлять и решать систему линейных алгебраических уравнений. Точность МКР прямо зависит от густоты сетки: чем гуще сетка, тем точнее будет решение задачи.

Рассмотрим некоторую функцию $\varphi(x)$, проходящую через точки 1, 2, 3 (рисунок 6). Представим приближенно эту функцию параболой $\varphi = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, тогда

$$\varphi_{лев} = a \cdot (\Delta x)^2 - b \cdot \Delta x + c; \quad \varphi_0 = c; \quad \varphi_{пр} = a \cdot (\Delta x)^2 + b \cdot \Delta x + c.$$

Находим коэффициенты a, b, c : $a = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2(\Delta x)^2}$, $b = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}$, $c = \varphi_0$.

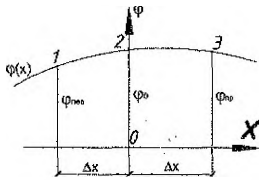


Рисунок 6 – Графическое представление функции φ

Уравнение параболы примет вид:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{2(\Delta x)^2} \cdot x^2 + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x} \cdot x + c.$$

Находим производные

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2} \cdot x + \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x},$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2}.$$

При $x=0$:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = \frac{\varphi_{пр} - \varphi_{лев}}{2\Delta x}; \quad (а);$$

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 = \frac{\varphi_{лев} - 2\varphi_0 + \varphi_{пр}}{(\Delta x)^2} \quad (б).$$

Воспользуемся этими формулами для решения плоской задачи. Нанесём на рассматриваемую область сетку с шагом Δx и Δy (рисунок 7).

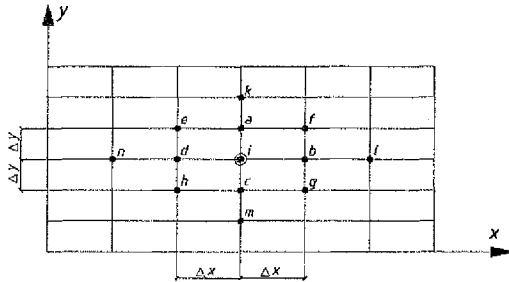


Рисунок 7 – Схема сетки

Выберем некоторую центральную точку “i”. На основании формул (а) и (б) для неё:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2 \cdot \Delta x}; \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\varphi_d - 2\varphi_i + \varphi_b}{(\Delta x)^2};$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_i = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2 \cdot \Delta y}; \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_i = \frac{\varphi_c - 2\varphi_i + \varphi_a}{(\Delta y)^2};$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_i = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_c}{2 \cdot \Delta y} =$$

$$= \frac{1}{2 \Delta y} \left(\frac{\varphi_f - \varphi_e}{2 \cdot \Delta x} - \frac{\varphi_g - \varphi_h}{2 \cdot \Delta x} \right) = \frac{\varphi_f - \varphi_e - \varphi_g + \varphi_h}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y}.$$

Используя (17), находим 4-ю производную:

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_i = \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_b + \varphi_d) + (\varphi_e + \varphi_n)}{(\Delta x)^4}; \quad \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_i = \frac{6\varphi_i - 4(\varphi_a + \varphi_c) + (\varphi_k + \varphi_m)}{(\Delta y)^4};$$

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_i = \frac{4\varphi_i - 2(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + (\varphi_f + \varphi_e + \varphi_g + \varphi_h)}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}.$$

Подставим (в) в (16) и после преобразования получим алгебраическое уравнение, заменяющее бигармоническое:

$$\left(6\alpha^2 + 8\alpha + 6\right)\varphi_i - 4(\alpha + 1) \cdot (\varphi_a + \alpha\varphi_b + \varphi_c + \alpha\varphi_d) + 2\alpha(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) +$$

$$+ (\varphi_k + \alpha^2\varphi_l + \varphi_m + \alpha^2\varphi_n) = 0,$$

где $\alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$. Тогда напряжения в точке “i” получим по формулам:

$$\sigma_x = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_i = \frac{\varphi_a - 2\varphi_i + \varphi_c}{(\Delta y)^2}; \quad \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\varphi_b - 2\varphi_i + \varphi_d}{(\Delta x)^2};$$

$$\tau_{xy} = - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_i = \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4 \cdot \Delta x \cdot \Delta y} \quad (19)$$

Уравнения (19) должны составляться для каждой внутриконтурной точки. Когда уравнения составляются для внутриконтурных точек, лежащих на ближайшей линии, параллельной контуру, то в них вынужденно входят и значения функции φ контурных и законтурных точек. Значения функции φ на контуре и вне контура находят из граничных условий (рисунок 8). Таким образом, неизвестных значений φ столько, сколько узлов внутри контура.

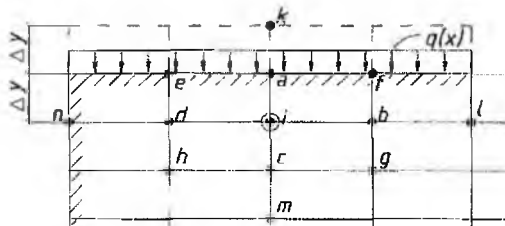


Рисунок 8 – Схема для определения φ на контуре и вне контура

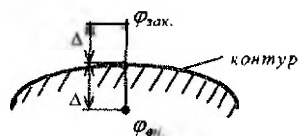


Рисунок 9 – Определение φ в законтурных точках

Для определения значений функции φ на контуре и вне его удобно воспользоваться так называемой рамной аналогией (идеи профессоров П.Л. Пастернака, П.М. Варвака, А.П. Сеницына). Если, например, на верхней грани прямоугольной области приложена нагрузка $q(x)$, направленная вниз, то для этой грани можно записать: $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q$. Сравнивая это выражение с известной зависимостью $\frac{d^2 M}{dx^2} = -q$, заключаем, что функцию напряжений на контуре пластинки можно принять за значение изгибающего момента в данной точке балки (рамы) с такой же нагрузкой, т.е. $\varphi_{кон} = M$, или в общем виде:

$$\varphi_{кон} = M. \quad (20)$$

Для отыскания φ в законтурной точке (рисунок 9) используется формула:

$$\varphi_{zak} = 2 \cdot \Delta \cdot N + \varphi_{кон}, \quad (21)$$

где N – значение продольной силы в контурной точке.

Из формул (20) и (21) следует, что для записи $\varphi_{кон}$ и φ_{zak} нужно построить эпюры изгибающих моментов M и продольных сил N для соответствующей ра-

мы. Под соответствующей рамой будем понимать такую раму, которая повторяет контур пластинки, геометрически неизменяемая и, желательно, статически определяемая.

На основании вышеизложенного следует придерживаться следующего порядка расчета балки-стенки (пластинки) методом конечных разностей:

1. На заданную балку-стенку наносится сетка с определенным шагом и нумеруются внутренние узлы сетки (с учетом симметрии).

2. В соответствии с методом рамных аналогий выбирается соответствующая рама и для нее строятся эпюры изгибающих моментов M и продольных сил N . Эюра M строится на растянутых волокнах, изгибающие моменты, оплощенные внутри контура рамы, считать положительными. Знак продольной силы: растяжение — плюс, сжатие — минус.

3. Выражаются значения функции φ в законтурных точках через внутриконтурные по формуле (21).

4. Записываются алгебраические уравнения по формулам (18) для каждой внутриконтурной точки, решается система уравнений и находятся значения функции φ в внутриконтурных точках.

5. Определяются напряжения в узлах сетки по формулам (19) и строятся их эпюры.

Расчет тонких пластин

а) прямоугольные пластины.

Пластинкой называется тело призматической или цилиндрической формы, у которого толщина мала по сравнению с размерами поверхности, т.е. $h \ll a-b$ (рисунок 10). Пластинки, которые будут рассматриваться далее, являются гонкими, жесткими, упругими и прямоугольными. Это значит, что толщина их h не превышает $1/5$ наименьшего размера в плане, а наибольший прогиб w не превышает $1/4$ толщины. Задача о расчете пластинок является трехмерной, однако вследствие некоторых гипотез она сводится к двумерной. Широкое практическое применение получила техническая теория изгиба на основе гипотез, предложенных немецким физиком Г. Кирхгофом [1-4].

Согласно этим допущениям, все напряжения и деформации можно выразить через функцию прогибов срединной поверхности пластинки $w(x, y)$. Считаем, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки, т.е. нормальная к срединной плоскости, а срединная плоскость совпадает с плоскостью xOy прямоугольной системы координат. Ось z направлена по вертикали вниз (рисунок 10).

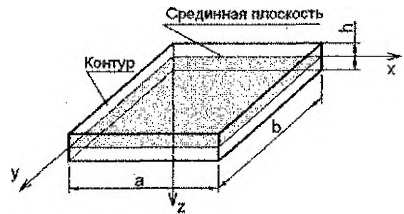


Рисунок 10 - Схема пластинки

Усилия в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости, выраженные через функцию прогибов $w(x, y)$ (погонные, т. е. приходящиеся на единицу длины сечения срединной плоскости) определяются по формулам:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (22)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right); \quad Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right).$$

где M_x, M_y - погонные изгибающие моменты в сечениях с нормалью x и y соответственно; $M_{xy} = M_{yx}$ - погонные крутящие моменты в тех же сечениях;

Q_x, Q_y - погонные перерезывающие (поперечные) силы; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость пластины.

Напряжения связаны с $M_x, M_y, M_{xy} = M_{yx}, Q_x, Q_y$ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy}}{I} z; \quad \tau_{zx} = \frac{Q_x \cdot S_x}{I}; \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_y}{I}; \quad (23)$$

где $I = \frac{1 \cdot h^3}{12}$ - погонный момент инерции сечения пластинки (осевой момент инерции полоски единичной ширины), $S_x = S_y = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$ - статический момент

отсеченной части площади сечения, находящейся выше или ниже уровня точки, в которой определяются напряжения. Эти формулы аналогичны формулам, используемым в сопротивлении материалов при изгибе балки прямоугольного сечения шириной, равной единице.

Действие силовых факторов и распределение напряжений в сечениях пластинки показаны на рисунках 11, 12, 13.

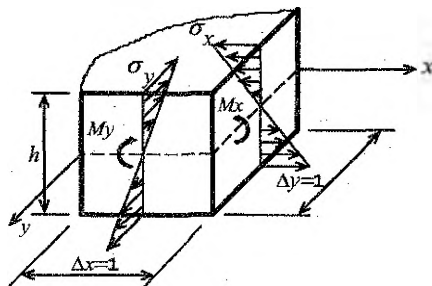


Рисунок 11 - Эпюры нормальных напряжений σ_x, σ_y

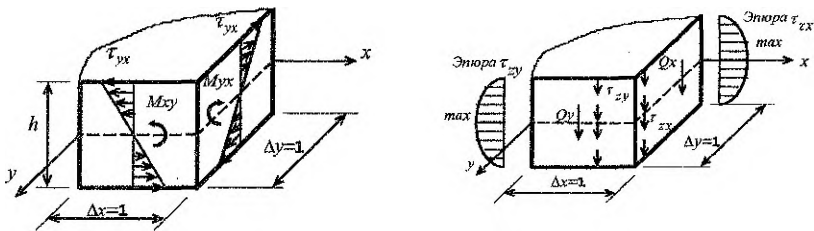


Рисунок 12 - Эпюры касательных напряжений τ_{yx} , τ_{xy} , τ_{zx} , τ_{xz}

Примечание. На рисунках 11, 12, 13 показаны положительные направления указанных усилий.

Из формул (22) и (23) следует, что для определения усилий и напряжений необходимо знать функцию прогибов $w(x, y)$, которая должна в каждой точке пластинки удовлетворять основному дифференциальному уравнению ее изогнутой поверхности (уравнению Софи Жермен) и условиям на опорном контуре (граничным условиям). Уравнение Софи Жермен имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad \text{или} \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (24)$$

где ∇ - оператор Лапласа, $q(x, y)$ — распределенная нормально к поверхности пластинки нагрузка.

Укажем, каковы должны быть граничные условия для функции $w(x, y)$ в различных случаях закрепления пластинки (рисунок 13).



Рисунок 13 - Варианты закрепления граней пластинки

Для каждого края пластинки должно быть два граничных условия.

1. Защемленный край:

при $x=0$: прогиб $w=0$, угол поворота $\frac{\partial w}{\partial x}=0$, изгибающий момент

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \neq 0.$$

2. Шарнирно опертый край:

при $y=0$: прогиб $w=0$, угол поворота $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$, изгибающий момент

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0.$$

3. Свободный край:

при $x=a$: прогиб $w \neq 0$, изгибающий момент

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \text{приведенная поперечная сила}$$

$$Q_x^{прив} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right).$$

Здесь рассмотрены три основных способа закрепления краев пластинки и показаны соответствующие граничные условия для функции w . На практике приходится встречаться и с другими способами закрепления. Например, встречается такое закрепление края пластинки, когда прогиб по краю невозможен, поворот же края возможен, но сопровождается появлением изгибающих моментов, пропорциональных повороту — упруго заделанный край ($w=0, \varphi \neq 0, M \neq 0$). Иногда край пластинки опирается не на жесткий контур, а на какую-либо балку — упруго опертый край ($w \neq 0, Q \neq 0$).

Задача об изгибе пластинки будет решена, если будет найдена функция $w(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (24) и граничным условиям. Эта задача в некоторых случаях решается обратным методом, т. е. задается вид функции прогибов $w(x, y)$, а затем определяются нагрузки и условия закрепления, которые соответствуют этой функции.

В тех случаях, когда не удовлетворяется уравнение (24), расчет производится приближенным методом Бубнова-Галеркина. Он состоит в том, что для заданной нагрузки $q(x, y)$ задается вид функции $w(x, y)$, удовлетворяющей только граничным условиям. При подстановке $w(x, y)$ и $q(x, y)$ в уравнение Софи Жермен последнее может тождественно не удовлетворяться. Поэтому уравнение удовлетворяют в среднем для всей площади пластинки, т. е. в интегральном смысле. Исходя из этого, получают следующее уравнение Бубнова-Галеркина: $\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS$, где S — плоская область, ограниченная контуром пластинки. Методика расчета рассмотрена в [1-5].

При определении толщины пластины, например, по энергетической теории прочности, условие прочности имеет вид:

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma].$$

Главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяются как корни кубического уравнения: $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$,

где I_1, I_2, I_3 — инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2.$$

При изгибе пластин напряжениями σ_z пренебрегают. В частном случае,

когда $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, инварианты примут вид:
$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y, \\ I_2 = \sigma_x \sigma_y, \\ I_3 = 0. \end{cases}$$
 а кубическое

уравнение - $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma = 0$. Отсюда $\sigma_z = 0$, $\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0$. Решение квадратного уравнения по определению σ_1 и σ_2 не представляет сложностей.

б) круглые пластины.

Задача об изгибе круглой пластины будет осесимметричной, если нагрузка и условия закрепления её краев не зависят от полярного угла θ . В этом случае прогибы также не зависят от угла θ , а являются функцией координаты r , т.е. $w = f(r)$. Тогда имеем:

а) дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D}. \quad (25)$$

б) внутренние силы:

изгибающие моменты: $M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right),$

поперечная сила: $Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right);$

в) граничные условия:

жесткое защемление - $w = 0; \varphi = \frac{dw}{dr} = 0; M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \neq 0,$

шарнирное закрепление - $w = 0; \varphi = \frac{dw}{dr} \neq 0; M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0,$

свободный край (в зависимости от действующих нагрузок) - $w \neq 0; M_r = 0$ или $M_r = m, Q_r = 0$ или $Q_r = F$.

Уравнение (25) можно решить в общем виде: $w = w_1 + w_2$, где w_1 - общее решение однородного уравнения, w_2 - частное решение неоднородного уравнения: $w_1 = C_1 + C_2 \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \ln r$.

Например, для равномерно распределённой нагрузки $q(r) = q = const$:

$w_2 = \frac{qr^4}{64D}$. Тогда $w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln r + C_3 \cdot r^2 + C_4 \cdot r^2 \ln r$. Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4

определяются из граничных условий.

Рассмотрим сплошную пластинку, шарнирно опёртую по контуру и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . Для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 имеем следующие условия: в центре пластинки при $r=0$ прогиб w должен иметь конечное значение. Т. к. $\ln 0 = \infty$, то

$$C_2 = C_4 = 0. \text{ Решение имеет вид: } w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_3r^2.$$

Определим C_1 и C_3 ; при $r=a$: $w=0$; $M_r=0$. Из первого условия ($w=0$):

$$\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3a^2 = 0. \quad \text{Из второго условия } (M_r=0):$$

$$2C_3 + \frac{3qa^2}{16D} + \frac{\nu}{a} \left(C_3 \cdot 2a + \frac{qa^3}{16D} \right) = 0, \text{ откуда } C_1 = \frac{5+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{qa^4}{64D}; \quad C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} + \frac{qa^2}{32D}.$$

Подставляем полученные величины в выражение для $w(r)$:

$$w(r) = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right).$$

Подставляем функцию $w(r)$ в выражения для M_r и M_θ , получим:

$$M_r = \frac{q}{16}(3+\nu)(a^2 - r^2); \quad M_\theta = \frac{q}{16}((3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2). \quad (26)$$

Эпюры M_r и M_θ построены при $\nu = 0,3$ (рисунок 14а).

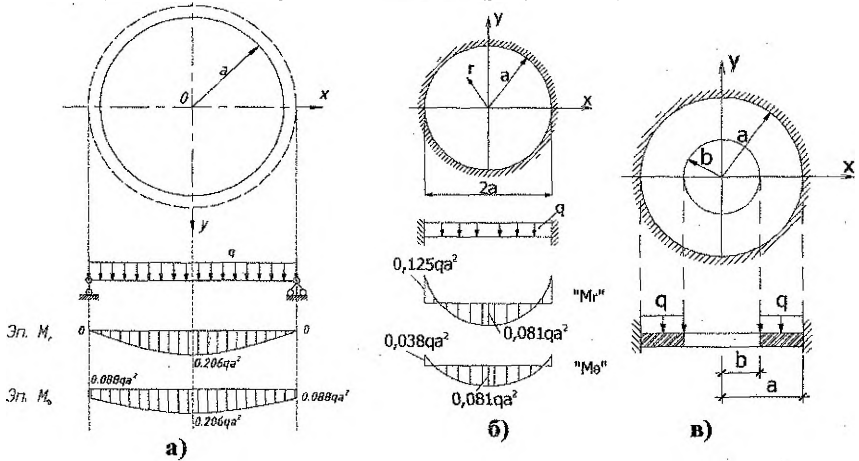


Рисунок 14 – Схемы пластин и эпюры M_r, M_θ

В случае сплошной защемлённой по контуру пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки (рисунок 14, б) для определения постоянных C_1 и C_3 имеем следующие граничные условия: на контуре пластинки должны отсутствовать прогибы и углы поворота сечений: при $r=a$: $w=0$; $\frac{dw}{dr} = 0$. Окончательно получим: $w(r) = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)^2$.

Для кольцевой пластинки с закреплённым наружным краем (рисунок 14, в) для определения постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 в функции $w(r)$ имеем следующие

граничные условия: при $r=a$: $w=0, \frac{dw}{dr}=0$, при $r=b$: $M_r=0, Q_r=0$. Подставляя в эти условия $w(r)$, получим четыре уравнения для определения C_1-C_4 .

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.

Заданы компоненты напряжения на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке нагруженного тела. Стрелки на рисунке соответствуют положительным направлениям компонент в выбранной системе координат.

$$\sigma_x = 100 \text{ МПа}; \sigma_y = -45 \text{ МПа}; \sigma_z = 50 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = 20 \text{ МПа}; \tau_{yz} = -30 \text{ МПа}; \tau_{zx} = 40 \text{ МПа}.$$

Элементарный параллелепипед с заданными компонентами напряжения представлен на рисунке 15.

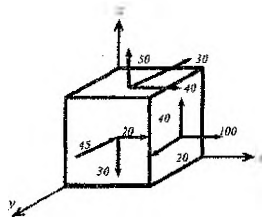


Рисунок 15 - Исходное напряженное состояние

Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Модуль продольной упругости $E = 200 \text{ ГПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Положение некоторой площадки, наклоненной к осям x, y, z и отсекающей от элементарного параллелепипеда тетраэдр (см. рисунок 1, в), задано направляющими косинусами нормали к этой площадке $l = \cos \alpha = 1/\sqrt{2} = 0,707$; $m = \cos \beta = 1/\sqrt{3} = 0,577$; $n = \cos \gamma = 1/\sqrt{6} = 0,408$. Как известно из математики, направляющие косинусы должны удовлетворять условию $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Требуется:

- 1) найти нормальную и касательную составляющие напряжений на площадке с заданной ориентацией (с заданными направляющими косинусами l, m, n);
- 2) определить величину и направление главных напряжений;
- 3) найти величину наибольших касательных напряжений в данной точке тела и указать площадки, по которым они действуют;
- 4) найти нормальные и касательные напряжения на октаэдрических площадках и указать их расположение;
- 5) построить для заданного напряженного состояния круги Мора и указать на них точки, изображающие напряженное состояние на площадках, на которых напряженное состояние задано или определилось в процессе решения задачи;
- 6) определить компоненты деформаций в заданных и главных осях;
- 7) разделить интенсивность напряжений и деформаций в рассматриваемой точке;
- 8) разложить заданный тензор напряжения на шаровой и девиатор;
- 9) приняв в исходном тензоре напряжений $\sigma_z=0, \tau_{xz}=0, \tau_{yz}=0$, вычислить величины главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$;
- 10) найти удельную потенциальную энергию деформации (полную, изменения объема, изменения формы);
- 11) определить расчетные напряжения по четырем классическим критериям прочности и пластичности.

Решение:

1. *Определение нормальной и касательной составляющих напряжений на площадке с заданной ориентацией.*

Напряжения на площадке, нормаль к которой имеет направляющие косинусы l, m, n , определяются из условий равновесия тетраэдра, отсекаемого этой площадкой с нормалью от элементарного параллелепипеда с гранями, нагруженными заданными компонентами напряжения (рисунок 16).

Составляющие вдоль осей x, y, z полного напряжения на площадке с нормалью V_n определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \quad (27)$$

Полное напряжение на площадке с нормалью V_n :

$$p_v = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2}. \quad (28)$$

Нормальное и касательное напряжение на площадке с нормалью V_n :

$$\begin{aligned} \sigma_v &= p_{xv}l + p_{yv}m + p_{zv}n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl; \\ p_v^2 &= \sigma_v^2 + \tau_v^2; \quad \tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

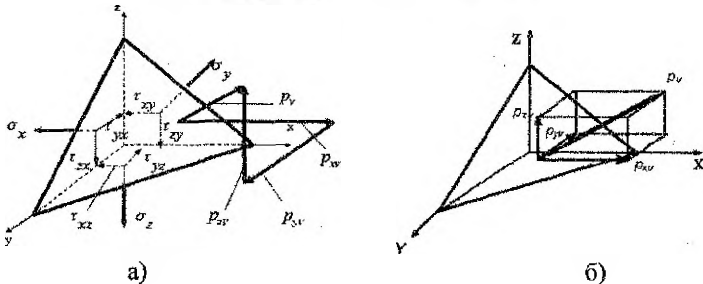


Рисунок 16 - Напряжения на наклонной площадке

Подставляя в зависимости (27) - (29) исходные данные, получаем составляющие вдоль осей x, y, z полного напряжения на площадке с нормалью V_n :

$$\begin{aligned} p_{xv} &= 100 \cdot 0,707 + 20 \cdot 0,577 + 40 \cdot 0,408 = 98,56 \text{ МПа}; \\ p_{yv} &= 20 \cdot 0,707 + 45 \cdot 0,577 + 30 \cdot 0,408 = -24,07 \text{ МПа}; \\ p_{zv} &= 40 \cdot 0,707 - 30 \cdot 0,577 + 50 \cdot 0,408 = 31,37 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Полное напряжение на той же площадке:

$$p_v = \sqrt{98,56^2 + (-24,07)^2 + 31,37^2} = 106,2 \text{ МПа}.$$

Нормальное и касательное напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_v &= 100 \cdot (1/\sqrt{2})^2 + (-45) \cdot (1/\sqrt{3})^2 + 50 \cdot (1/\sqrt{6})^2 + 20 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{3} + \\ &+ (-30) \cdot 1/\sqrt{3} \cdot 1/\sqrt{6} + 40 \cdot 1/\sqrt{6} \cdot 1/\sqrt{2} = 68,6 \text{ МПа}; \\ \tau_v &= \sqrt{106,2^2 - 68,6^2} = 81,07 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

2. Определение величины и направления главных напряжений.

Для отыскания величины главных напряжений необходимо решить кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0. \quad (30)$$

Вычисляем инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 100 - 45 + 50 = 105 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 100 \cdot (-45) + (-45) \cdot 50 + 50 \cdot 100 - 20^2 - (-30)^2 - 40^2 = 4650 \text{ (МПа)}^2, \quad (31)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 =$$

$$= 100 \cdot (-45) \cdot 50 + 2 \cdot 20 \cdot (-30) \cdot 40 - 100 \cdot (-30)^2 + 45 \cdot 40^2 - 50 \cdot 20^2 = -311000 \text{ (МПа)}^3.$$

Кубическое уравнение (5) принимает вид: $\sigma^3 - 105\sigma^2 - 4650\sigma + 311000 = 0$.

Кубическое уравнение (30) решаем с помощью формулы Кардано, относящейся к уравнению вида:

$$x^3 + cx + q = 0. \quad (32)$$

Это кубическое уравнение имеет три действительных корня, если выполняется неравенство:

$$D = (c/3)^3 + (q/2)^2 < 0. \quad (33)$$

Тогда решение кубического уравнения (32) запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2R \cos(\varphi/3), \\ x_2 &= -2R \cos(\varphi/3 + 2\pi/3), \\ x_3 &= -2R \cos(\varphi/3 + 4\pi/3), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{где } \cos \varphi = \frac{q}{2R^3}, \quad R = \pm \sqrt[3]{\frac{|c|}{3}}, \quad (35)$$

при этом знак R должен совпадать со знаком q , а $c \leq 0$.

Кубическое уравнение (30) можно привести к виду (32) посредством замены переменной

$$\sigma = x + I_1/3. \quad (36)$$

Тогда

$$c = -I_1^2/3 + I_2, \quad q = -(2I_1^3)/27 + I_1 I_2/3 - I_3. \quad (37)$$

Подставляя в (37) подсчитанные выше значения инвариантов напряжения I_1, I_2, I_3 , находим

$$\begin{aligned} c &= -\frac{105^2}{3} - 4650 = -8325 \text{ (МПа)}^2, \\ q &= -\frac{2}{27} \cdot 105^3 + \frac{105 \cdot (-4650)}{3} + 311000 = 62500 \text{ (МПа)}^3. \end{aligned}$$

Проверяем условия (10) и (12):

$$D = \left(\frac{-8325}{3}\right)^3 + \left(\frac{62500}{2}\right)^2 = -2,039 \cdot 10^{10} < 0, \quad C = -8325 < 0.$$

Оба условия выполнены. Следовательно, в данном случае можно воспользоваться решением Кардано:

$$R = +\sqrt{\frac{8325}{3}} = 52,678 \text{ МПа}, \quad \cos \varphi = \frac{62500}{2 \cdot (52,678)^3} = 0,214, \quad \text{откуда } \varphi = 1,355 \text{ рад.}$$

По формулам (34) находим корни уравнения кубического уравнения (32):

$$x_1 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355}{3}\right) = -94,791 \text{ МПа},$$

$$x_2 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355 + 2 \cdot 3,14}{3}\right) = +87,219 \text{ МПа},$$

$$x_3 = -2 \cdot 52,678 \cos\left(\frac{1,355 + 4 \cdot 3,14}{3}\right) = +7,572 \text{ МПа}.$$

Проверка: $x_1 + x_2 + x_3 = -94,791 + 87,219 + 7,572 = 0$.

Примечание. При ненулевом значении необходимо оценить погрешность расчета.

По формуле (36) найдем три корня уравнения (32), т.е. искомые значения главных напряжений:

$$\sigma_I = x_1 + \frac{I_1}{3} = -94,791 + \frac{105}{3} \approx -59,79 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{II} = x_2 + \frac{I_1}{3} = 87,219 + \frac{105}{3} \approx 122,22 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{III} = x_3 + \frac{I_1}{3} = 7,572 + \frac{105}{3} \approx 42,57 \text{ МПа}.$$

В соответствии с правилом $\sigma_I \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ наибольшему по алгебраической величине из этих напряжений присвоим индекс I и т. д. Тогда

$$\sigma_I = \sigma_{II} = 122,22 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \sigma_{III} = 42,57 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = \sigma_I = -59,79 \text{ МПа}.$$

Для проверки правильности полученного решения найдем инварианты напряженного состояния, выразив их через главные напряжения. Они должны быть такими же, как и вычисленные выше по заданным компонентам напряжений (31):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 122,22 + 42,57 - 59,79 = 105 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = 122,22 \cdot 42,57 + 42,57 \cdot (-59,79) + (-59,79) \cdot 122,22 \approx -4649,9 \text{ (МПа)}^2,$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 122,22 \cdot 42,57 \cdot (-59,79) \approx -311082 \text{ (МПа)}^3.$$

Оценим погрешность расчета:

$$\varepsilon_2 = \frac{4650 - 4649,9}{4649,9} \cdot 100\% = 0,0022\% < 3\%,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{311082 - 311000}{311000} \cdot 100\% = 0,026\% < 3\%.$$

Положение главных площадок определяется направляющими косинусами нормалей к главным площадкам. Для отыскания направляющих косинусов нормали к i -й главной площадке ($i=1,2,3$) используем систему уравнений, подставив в нее $\sigma = \sigma_i$. Тогда направляющие косинусы принимают значения l_i, m_i, n_i .

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i) l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{xz} n_i = 0, \\ \tau_{yx} l_i + (\sigma_y - \sigma_i) m_i + \tau_{yz} n_i = 0, \\ \tau_{zx} l_i + \tau_{xy} m_i + (\sigma_z - \sigma_i) n_i = 0, \end{cases} \quad (38)$$

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1. \quad (39)$$

Из трех уравнений (38) выберем любые два, например, первое и второе. Делим эти уравнения на n_i и вводим обозначения

$$a_i = l_i / n_i; \quad b_i = m_i / n_i. \quad (40)$$

Получаем

$$(\sigma_x - \sigma_i) a_i + \tau_{xy} b_i = -\tau_{xz}, \quad \tau_{yx} a_i + (\sigma_y - \sigma_i) b_i = -\tau_{yz}$$

отсюда

$$\begin{aligned} a_i &= [\tau_{yx} \tau_{xy} - \tau_{zx} (\sigma_y - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2], \\ b_i &= [\tau_{xy} \tau_{xz} - \tau_{zy} (\sigma_x - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2]. \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда из (39) и (40)

$$n_i = \sqrt{\frac{1}{1 + a_i^2 + b_i^2}}, \quad l_i = a_i \cdot n_i, \quad m_i = b_i \cdot n_i, \quad (42)$$

Примем сначала $\sigma_i = \sigma_1 = 122,22$ МПа, и из (41) и (42) найдем :

$$a_1 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 1,836,$$

$$b_1 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 0,040,$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + 1,836^2 + 0,040^2}} = \pm 0,478,$$

$$l_1 = a_1 \cdot n_1 = 1,836 \cdot (\pm 0,478) = \pm 0,878,$$

$$m_1 = b_1 \cdot n_1 = 0,040 \cdot (\pm 0,478) = \pm 0,019.$$

Проверка:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad 0,878^2 + 0,019^2 + 0,478^2 = 0,9998 \approx 1.$$

Относительная погрешность расчета:

$$\varepsilon = \frac{1 - 0,998}{0,998} \cdot 100\% = 0,2\% < 3\%, \text{ что допустимо.}$$

Равенство выполнено.

Теперь подставляем в (41) и (42) $\sigma_2 = 42,57$ МПа и находим

$$a_2 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,535,$$

$$b_2 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,465,$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{1}{1 + (-0,535)^2 + (-0,465)^2}} = \pm 0,816,$$

$$l_2 = a_2 \cdot n_2 = -0,535 \cdot (\pm 0,816) = \mp 0,437,$$

$$m_2 = b_2 \cdot n_2 = -0,465 \cdot (\pm 0,816) = \mp 0,379.$$

Проверка:

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1, \quad (-0,437)^2 + 0,816^2 + (-0,379)^2 = 1,00047 \approx 1.$$

Подставив в (41) и (42) $\sigma_3 = -59,79$ МПа, получаем:

$$a_3 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = -0,607,$$

$$b_3 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = 2,849,$$

$$n_3 = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,607^2 + 2,849^2}} = \pm 0,325,$$

$$l_3 = a_3 \cdot n_3 = -0,607 \cdot (\pm 0,325) = \mp 0,197,$$

$$m_3 = b_3 \cdot n_3 = 2,849 \cdot (\pm 0,325) = \pm 0,926.$$

Проверка:

$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \quad (-0,197)^2 + 0,926^2 + 0,325^2 = 1,002 \approx 1.$$

Сведем найденные значения в таблицу 1.

Таблица 1 – Направляющие косинусы нормалей к главным площадкам.

	1	2	3
l_i	$\pm 0,878$	$\mp 0,437$	$\mp 0,197$
m_i	$\pm 0,019$	$\mp 0,379$	$\pm 0,926$
n_i	$\pm 0,478$	$\pm 0,816$	$\pm 0,345$

Сделаем следующие три проверки, подтверждающие взаимную ортогональность главных площадок (в дальнейшем рассматриваем направляющие косинусы внешних нормалей, соответствующие верхним знакам в таблице 1):

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,437) + 0,019 \cdot (-0,379) + 0,478 \cdot 0,816 = 0,39088 - 0,390048 = -8,32 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

Относительная погрешность расчета:

$$\varepsilon = \frac{8,32 \cdot 10^{-4}}{0,390048} \cdot 100\% = 0,2\% < 3\%, \text{ что допустимо.}$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0;$$

$$(-0,437) \cdot (-0,197) + (-0,379) \cdot 0,926 + 0,816 \cdot 0,325 = 3,35 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,197) + 0,019 \cdot 0,926 + 0,478 \cdot 0,325 = 2,20 \cdot 10^{-4} \approx 0.$$

Относительная погрешность расчета не превышает 3%.

Взаимная ортогональность нормалей к главным площадкам этими проверками подтверждается.

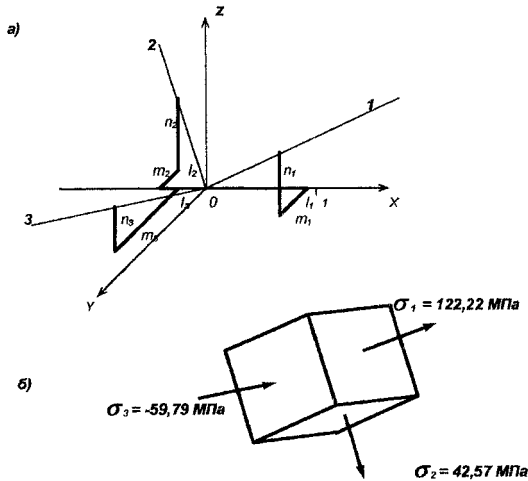


Рисунок 17 - Графическое построение главных площадок

Чтобы изобразить графически положение в пространстве параллелепипеда, гранями которого являются главные площадки, надо произвести следующее построение. В осях x, y, z по заданным направляющим косинусам (таблица 1) строим нормали к главным площадкам, взяв за исходную точку начало координат. Для построения i -й нормали достаточно вдоль осей x, y, z отложить в некотором масштабе отрезки, равные направляющим косинусам l_i, m_i, n_i и точку с такими координатами соединить с центром O (рисунок 17, а). Его грани и будут главными площадками с напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рисунок 17, б).

3. Определение максимальных касательных напряжений.

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклоненным под углом 45° между каждой парой главных площадок (рисунок 3). Величины наибольших касательных напряжений определяются по формулам:

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad (43)$$

$$\tau_{13} = [122,22 - (-59,79)] / 2 = 91,01 \text{ МПа}; \quad \tau_{12} = [122,22 - 42,57] / 2 = 39,83 \text{ МПа};$$

$$\tau_{23} = [42,57 - (-59,79)] / 2 = 51,18 \text{ МПа}; \quad \tau_{\max} = \tau_{13} = 91,01 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение действует по площадке, наклоненной под углом 45° к первой и третьей главным площадкам.

4. Определение октаэдрических площадок.

Площадки, равнонаклоненные к трем главным площадкам $l=m=n=1/\sqrt{3}$, называются октаэдрическими (рисунок 2). Нормальное и касательное напряжения на этих площадках определяются по формулам:

$$\sigma_{\text{окт}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3; \quad \tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}, \quad (44)$$

$$\text{или } \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}.$$

В данном случае:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(122,22 + 42,57 - 59,79) = 35 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{39,83^2 + 52,18^2 + 91,01^2} = 74,5 \text{ МПа}.$$

5. Построение кругов Мора.

В координатах σ и τ построим круги Мора для исследуемого объёмного напряжённого состояния. Отложим в осях σ и τ точки, изображающие напряжённое состояние на главных площадках: $K_1(\sigma_1, 0) = K_1(122,21; 0)$; $K_2(\sigma_2, 0) = K_2(42,57; 0)$; $K_3(\sigma_3, 0) = K_3(-59,79; 0)$ (рисунок 18).

На отрезках $\overline{K_1K_2}$, $\overline{K_1K_3}$, $\overline{K_2K_3}$, как на диаметрах строим окружности — это и есть круги Мора для заданного напряжённого состояния.

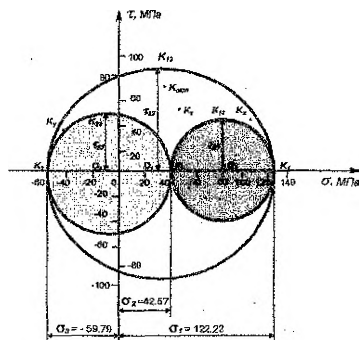


Рисунок 18 — Круги Мора

Напряжённое состояние на любой площадке, проходящей через заданную точку тела, изображается точками, которые лежат внутри заштрихованной области.

Нанесем на круги Мора точки, изображающие напряжённое состояние на площадках с нормальными x, y, z . Для этого на этих площадках найдем полные касательные напряжения:

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44,72 \text{ МПа};$$

$$\tau_y = \sqrt{\tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{20^2 + (-30)^2} = 36,06 \text{ МПа};$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{40^2 + (-30)^2} = 50 \text{ МПа}.$$

Координаты точек, изображающих напряжённое состояние на площадках, перпендикулярных осям x, y, z : $K_x(\sigma_x, \tau_x) = K_x(100; 44,72)$, $K_y(\sigma_y, \tau_y) = K_y(-45; 36,06)$, $K_z(\sigma_z, \tau_z) = K_z(50; 50)$.

Координаты точки, изображающей напряжённое состояние на октаэдрической площадке: $K_{\text{окт}}(\sigma_{\text{окт}}; \tau_{\text{окт}}) = K_{\text{окт}}(35; 74,5)$.

Точки, изображающие напряжённое состояние на площадках с наибольшими касательными напряжениями K_{12}, K_{23}, K_{13} , расположены на концах вертикальных диаметров кругов Мора (рисунок 18).

6. Определение компонент тензора деформации в заданных и главных осях и относительного изменения объема.

Тензор деформации в заданных осях имеет вид:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Его компоненты находим по формулам обобщённого закона Гука в произвольных осях (4):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G},$$

где G – модуль упругости при сдвиге: $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot (1 + 0,3)} = 7,69 \cdot 10^4 \text{ МПа}$.

В нашем случае:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [100 - 0,3 \cdot (-45 + 50)] = 49,25 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-45 - 0,3 \cdot (50 + 100)] = -45 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [50 - 0,3 \cdot (100 - 45)] = 16,75 \cdot 10^{-5};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{20}{7,69 \cdot 10^4} = 26 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_{yz} = \frac{-30}{7,69 \cdot 10^4} = -39 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma_{zx} = \frac{40}{7,69 \cdot 10^4} = 52 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 49,25 & 13 & 26 \\ 13 & -45 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 16,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}. \quad (46)$$

Тензор деформации в главных осях:

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные деформации, определяемые по формулам (48):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \quad (48)$$

В нашем случае:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79)] = 63,69 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [42,57 - 0,3 \cdot (-59,79 + 122,22)] = 11,92 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-59,79 - 0,3 \cdot (122,22 + 42,57)] = -54,61 \cdot 10^{-5}.$$

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 63,69 & 0 & 0 \\ 0 & 11,92 & 0 \\ 0 & 0 & -54,61 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Проверка: $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ — первый инвариант деформированного состояния.

$$(49,25 - 45 + 16,75) \cdot 10^{-5} = (63,69 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5}; \quad 21 \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}.$$

Относительное изменение объема определяется по формуле

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (63,19 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}. \quad (49)$$

Примечание. От деформаций по направлению осей x, y, z можно перейти к главным деформациям и определить их величины из кубического уравнения:

$$e^3 - E_1 e^2 + E_2 e - E_3 = 0;$$

где: инварианты тензора деформаций: $E_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$;

$$E_2 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2;$$

$$E_3 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z - \frac{1}{4} \gamma_{xy} \cdot \gamma_{yz} \cdot \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \cdot \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \cdot \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \cdot \gamma_{xy}^2.$$

Решение данного уравнения проводится аналогично методике, изложенной в п. 2 примера.

7. Определение интенсивности напряжений и деформаций.

Интенсивность касательных напряжений определяем по формуле:

$$\begin{aligned} \tau_H &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{(100 - (-45))^2 + (-45 - 50)^2 + (50 - 100)^2 + 6(20^2 + (-30)^2 + 40^2)} = 91,24 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Интенсивность нормальных напряжений определяем по формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sqrt{3} \cdot \tau_H = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3} \cdot \tau_H = 158,04 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Интенсивность деформаций сдвига:

$$\gamma_H = \sqrt{\frac{2}{3} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]} = 118,47 \cdot 10^{-5}.$$

Интенсивность продольных деформаций:

$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma_{II} = \frac{118,47 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{3}} = 68,4 \cdot 10^{-5}.$$

Строим направляющий тензор деформаций: $\bar{D}_\varepsilon = \frac{2}{\gamma_{II}} D_\varepsilon$, где D_ε - девиатор деформаций:

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{средняя деформация: } \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{(49,25 - 45 + 16,75) \cdot 10^{-5}}{3} = 7 \cdot 10^{-5},$$

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} 42,25 & 13 & 26 \\ 13 & -52 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 9,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5},$$

$$\bar{D}_\varepsilon = \frac{2}{\gamma_{II}} D_\varepsilon = \frac{2}{118,47 \cdot 10^{-5}} \cdot \begin{pmatrix} 42,25 & 13 & 26 \\ 13 & -52 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 9,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5} = \begin{pmatrix} 0,36 & 0,11 & 0,22 \\ 0,11 & -0,44 & -0,16 \\ 0,22 & -0,16 & 0,08 \end{pmatrix}.$$

8. Разложение заданного тензора напряжения на шаровой и девиатор.

Компоненты напряжённого состояния, действующие по граням элементарного параллелепипеда, выделенного в некоторой точке тела, вызывают изменение объёма и формы этого параллелепипеда. Относительное изменение объёма определяется зависимостью: $\theta = \frac{\sigma_0}{K}$, где $\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ - среднее гидростатическое напряжение, $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ - модуль объёмной упругости,

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}. \quad (50)$$

Изменение формы параллелепипеда характеризуется наличием относительных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, которые выражаются через компоненты напряжения по закону Гука (4).

Тензор напряжений T_σ можно представить в виде двух составляющих тензоров, один из которых — шаровой T_σ^0 — связан с изменением только объёма, а другой — D_σ — вызывает изменение только формы:

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma. \quad (51)$$

Эти тензоры имеют вид:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}; T_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}; D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $\sigma_0 = \frac{100 - 45 + 50}{3} = 35$ МПа, и следовательно,

$$\begin{pmatrix} 100 & 20 & 40 \\ 20 & -45 & -30 \\ 40 & -30 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 65 & 20 & 40 \\ 2 & -80 & -30 \\ 40 & -30 & 15 \end{pmatrix}.$$

T_{σ}

T_{σ}^0

D_{σ}

Графическое разложение на шаровой и девиатор представлено на рисунке 19.

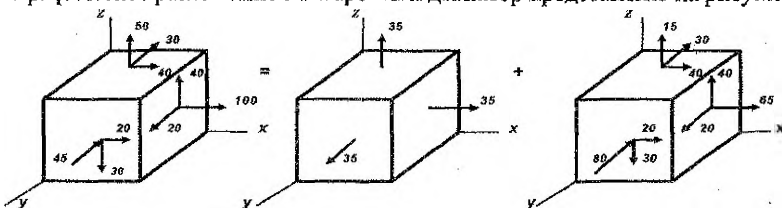


Рисунок 19 - Графическое разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор

Примечание. Тензор деформаций также можно разложить на шаровой и девиатор деформаций:

$$T_{\epsilon} = T_{\epsilon}^0 + D_{\epsilon}; \text{ где } T_{\epsilon}^0 = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}, D_{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x - \epsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_0 \end{pmatrix}, \epsilon_0 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3}.$$

9. Приняв в исходном тензоре напряжений $\sigma_z=0$, $\tau_{xz}=0$, $\tau_{yz}=0$. вычислить величины главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Для отыскания величины главных напряжений решаем кубическое уравнение (30). Вычисляем инварианты напряженного состояния по формулам (31):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 100 - 45 + 0 = 55 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 = 100 \cdot (-45) + (-45) \cdot 0 + 0 \cdot 100 - 20^2 - 0^2 - 0^2 = -4900 \text{ (МПа)}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 100 \cdot (-45) \cdot 0 + 2 \cdot 20 \cdot 0 \cdot 0 - 100 \cdot 0^2 + 45 \cdot 0^2 - 50 \cdot 0^2 = 0.$$

В этом случае третий инвариант равен нулю, поэтому одно из главных напряжений также равно нулю. Такое напряженное состояние называется плоско-

ским или двухосным (рисунок 20). Тензор напряжений примет вид:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

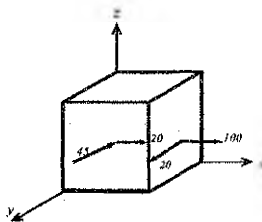


Рисунок 20 – Схема плоского напряженного состояния

Кубическое уравнение (30) представим в следующем виде:

$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma = 0$, или $\sigma(\sigma^2 - I_1 \cdot \sigma + I_2) = 0$. Решаем данное уравнение:

$$\sigma = 0 \text{ или } \sigma^2 - I_1 \cdot \sigma + I_2 = 0,$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma^2 - 55 \cdot \sigma - 4900 = 0,$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{55 \pm \sqrt{(-55)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4900)}}{2} = 27,5 \pm 75,21,$$

$$\sigma_1 = 27,5 + 75,21 = 102,71 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = 27,5 - 75,21 = -47,71 \text{ МПа}.$$

Выполним проверку:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 102,71 + 0 - 47,71 = 55 \text{ МПа},$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = 102,71 \cdot 0 + 0 \cdot (-47,71) + (-47,71) \cdot 102,71 \approx -4900,3 (\text{МПа})^2,$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 186,42 \cdot 0 \cdot (-131,42) = 0.$$

10. Определение удельной потенциальной энергии деформации (полной, изменения объема, изменения формы).

Полная удельная потенциальная энергия деформации определяется по формулам:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \text{ или } u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (52)$$

Полную удельную потенциальную энергию u можно представить в виде двух составляющих, одна из которых связана с изменением объема u_0 , а другая с изменением формы u_{ϕ} в окрестности некоторой точки тела:

$$u = u_0 + u_{\phi}. \quad (53)$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема и изменения формы выражается зависимостями:

$$u_0 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (54)$$

$$u_{\phi} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (55)$$

В нашем случае из (52):

$$u = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \{ 122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot [122,22 \cdot 42,57 + 42,57 \cdot (-59,79) + (-59,79) \cdot 122,22] \} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Джс}}{\text{см}^3}.$$

$$\text{Из (54): } u_o = \frac{(1-2 \cdot 0,3)}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot (122,22 + 42,57 - 59,79)^2 = 3,675 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Джс}}{\text{см}^3},$$

$$u_{\phi} = \frac{(1+0,3)}{3 \cdot 2 \cdot 10^5} [122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) -$$

из (55):

$$-(-59,79) \cdot 122,22] = 5,41 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Джс}}{\text{см}^3};$$

$$u = u_o + u_{\phi} = 0,368 \cdot 10^{-2} + 5,411 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Джс}}{\text{см}^3}.$$

Сравниваем полученные значения для u :

$$5,779 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2}.$$

11. *Определение расчётных напряжений по четырём классическим критериям прочности и пластичности.*

Первый критерий (прочности) — критерий наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma'_r = \sigma_1 = 122,22 \text{ МПа}. \quad (56)$$

Второй критерий (прочности) — критерий наибольших удлинений:

$$\sigma''_r = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79) = 127,39 \text{ МПа}. \quad (57)$$

Третий критерий (пластичности) — критерий наибольших касательных напряжений:

$$\sigma'''_r = \sigma_1 - \sigma_3 = 122,22 - (-59,79) = 182,01 \text{ МПа}. \quad (58)$$

Четвёртый критерий (пластичности) — энергетический:

$$\begin{aligned} \sigma''''_r &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \sqrt{122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) - (-59,79) \cdot 122,22} = \\ &= 158,03 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Пример 2.

Балка-стенка толщиной $\delta = 1$ м нагружена на верхней кромке и частично на нижней распределённой нагрузкой q и сверху сосредоточенной силой P . Пролёт балки-стенки l , а высота её h . Требуется определить напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} в балке-стенке и построить их эпюры в сечениях А-А и В-В; для сечения А-А построить также эпюру σ_x методом сопротивления материалов.

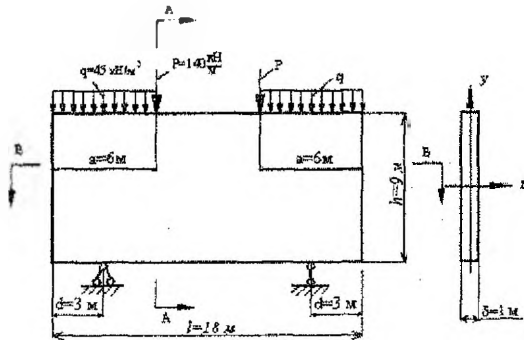


Рисунок 21 - Схема балки-стенки

Решение:

1. Нанесём на балку-стенку сетку (3x3) с шагом $\Delta x = 6 \text{ м}$, $\Delta y = 3 \text{ м}$. Затем пронумеруем внутренние точки (узлы сетки), соблюдая при этом симметрию системы (рисунок 22).

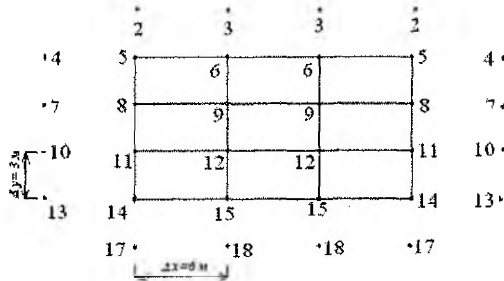


Рисунок 22 - Расположение узлов сетки

2. Выбираем статически определимую раму с учётом симметрии. Для этого разрежем нижний ригель (рисунок 23).

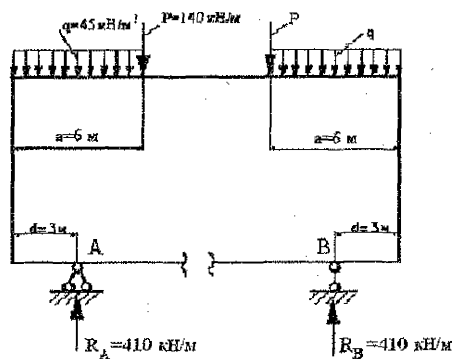


Рисунок 23 - Модель соответствующей рамы

Составляем уравнения равновесия:

$$\sum M_B = 0, \quad q \cdot a \cdot \left(l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2} - R_A \cdot (l - 2d) = 0,$$

$$R_A = \frac{q \cdot a \cdot \left(l - d - \frac{a}{2} \right) + P \cdot (l - d - a) + P \cdot \frac{a}{2}}{(l - 2d)} =$$

$$= \frac{45 \cdot 6 \cdot (18 - 3 - 3) + 140 \cdot (18 - 3 - 6) + 140 \cdot 3}{18 - 6} = 410 \text{ кН/м};$$

аналогично определяем: $R_B = 410 \text{ кН/м}$.

Строим эпюры изгибающих моментов M и продольных сил N (рисунок 24).

$$M_{14} = R_A \cdot d = 410 \cdot 3 = 1230 \text{ кН (растянуты волокна снизу);}$$

$$M_{11} = M_8 = M_5 = 1230 \text{ кН (растянуты волокна слева);}$$

$$M_6 = R_A \cdot \frac{a}{2} - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 410 \cdot 3 - 45 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} = 420 \text{ кН (растянуты волокна снизу).}$$

3. По формуле (20) находим функцию φ на контуре балки-стенки.

$$\varphi_{14} = \varphi_{11} = \varphi_8 = \varphi_5 = -1230 \text{ кН}; \quad \varphi_6 = 420 \text{ кН}; \quad \varphi_{15} = 0.$$

4. По формуле (21) выразим функцию φ в законтурных точках через внутриконтурные.

$$\varphi_2 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_8 = \varphi_8 = -1230 \text{ кН}, \quad \varphi_3 = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_6 = \varphi_6,$$

$$\varphi_4 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_6 = 420 - 4920 = -4500 \text{ кН},$$

$$\varphi_7 = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_6 = \varphi_6 - 4920, \quad \varphi_{10} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{12} = \varphi_{12} - 4920,$$

$$\varphi_{13} = 2 \cdot 6 \cdot (-410) + \varphi_{15} = -4920 \text{ кН}, \quad \varphi_{17} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{11} = \varphi_{11} = -1230 \text{ кН},$$

$$\varphi_{18} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + \varphi_{12} = \varphi_{12}.$$

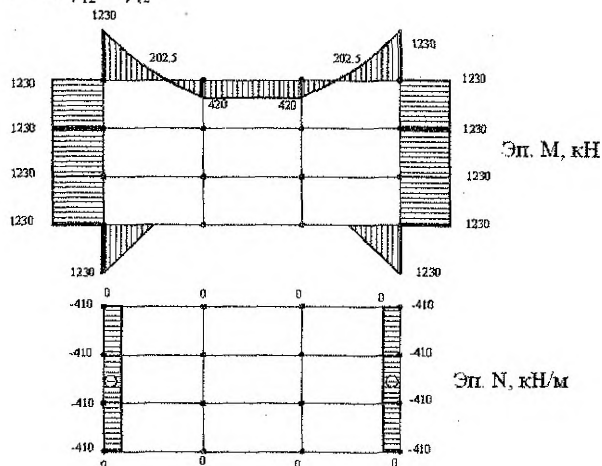


Рисунок 24 - Эпюры M и N для соответствующей рамы

5. Запишем уравнения для каждой контурной точки:

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_6 - 4(\alpha + 1)(\varphi_6 + \alpha\varphi_9 + \varphi_{12} + \alpha\varphi_8) + 2\alpha(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_{12} + \varphi_{11}) + (\varphi_3 + \alpha^2\varphi_8 + \varphi_{15} + \alpha^2\varphi_7) = 0,$$

$$(6\alpha^2 + 8\alpha + 6)\varphi_{12} - 4(\alpha + 1)(\varphi_9 + \alpha\varphi_{12} + \varphi_{15} + \alpha\varphi_{11}) + 2\alpha(\varphi_8 + \varphi_9 + \varphi_{15} + \varphi_{14}) + (\varphi_6 + \alpha^2\varphi_{11} + \varphi_{18} + \alpha^2\varphi_{10}) = 0,$$

$$\text{где } \alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \frac{9}{36} = 0,25,$$

$$8,375\varphi_9 - 5(420 + 0,25\varphi_9 + \varphi_{12} - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + 420 + \varphi_{12} - 1230) + (\varphi_3 - 0,0625 \cdot 1230 + 0 + 0,0625(\varphi_9 - 4920)) = 0,$$

$$8,375\varphi_{12} - 5(\varphi_9 + 0,25\varphi_{12} + 0 - 0,25 \cdot 1230) + 0,5(-1230 + \varphi_9 + 0 - 1230) + (420 - 0,0625 \cdot 1230 + \varphi_{12} + 0,0625(\varphi_{12} - 4920)) = 0.$$

Приведём подобные слагаемые и получим:

$$\begin{cases} 8,1875\varphi_9 - 4,5\varphi_{12} = 1966,875, \\ -4,5\varphi_9 + 8,1875\varphi_{12} = -343,125. \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$\varphi_9 = 311,204 \text{ кН}, \quad \varphi_{12} = 129,135 \text{ кН}.$$

Примечание. При решении задачи контрольной работы привести решение системы уравнений. Если для решения системы уравнений используется компьютер, необходимо приложить распечатку расчетов.

6. Напряжения в i -й точке сечения А-А определяются по формулам (19).

$$(\sigma_x)_6 = \frac{\varphi_9 - 2\varphi_6 + \varphi_3}{9} = \frac{311,204 - 2 \cdot 420 + 311,204}{9} = -24,17 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_9 = \frac{\varphi_{12} - 2\varphi_9 + \varphi_6}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 311,204 + 420}{9} = -8,14 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_{12} = \frac{\varphi_{15} - 2\varphi_{12} + \varphi_9}{9} = \frac{0 - 2 \cdot 129,135 + 311,204}{9} = 5,88 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_x)_{15} = \frac{\varphi_{18} - 2\varphi_{15} + \varphi_{12}}{9} = \frac{129,135 - 2 \cdot 0 + 129,135}{9} = 28,7 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_6 = \frac{\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_6}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 420 + 420}{36} = -45,83 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_9 = \frac{\varphi_6 - 2\varphi_9 + \varphi_9}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 311,204 + 311,204}{36} = -42,81 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_{12} = \frac{\varphi_{11} - 2\varphi_{12} + \varphi_{12}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 129,135 + 129,135}{36} = -37,75 \text{ кПа},$$

$$(\sigma_y)_{15} = \frac{\varphi_{14} - 2\varphi_{15} + \varphi_{15}}{36} = \frac{-1230 - 2 \cdot 0 + 0}{36} = -34,17 \text{ кПа},$$

$$\begin{aligned}
 (\tau_{xy})_6 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_6 - \varphi_8}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 311,204 + 1230}{72} = 0, \\
 (\tau_{xy})_9 &= \frac{\varphi_5 - \varphi_6 + \varphi_{12} - \varphi_{11}}{72} = \frac{-1230 - 420 + 129,135 + 1230}{72} = -4,04 \text{ кПа}, \\
 (\tau_{xy})_{12} &= \frac{\varphi_8 - \varphi_6 + \varphi_{15} - \varphi_{13}}{72} = \frac{-1230 - 311,204 + 0 + 1230}{72} = -4,32 \text{ кПа}, \\
 (\tau_{xy})_{15} &= \frac{\varphi_{11} - \varphi_{12} + \varphi_{18} - \varphi_{17}}{72} = \frac{-1230 - 129,135 + 129,135 + 1230}{72} = 0.
 \end{aligned}$$

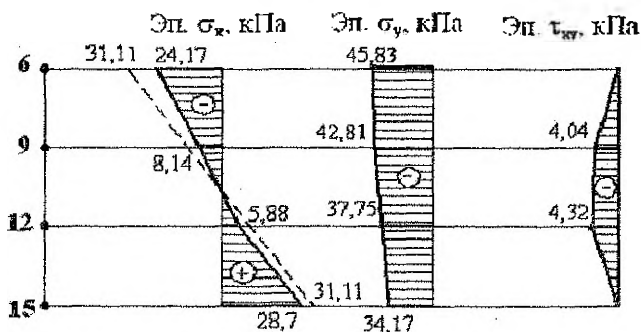


Рисунок 25 - Эпюры напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в сечении А-А

Построим эпюру σ_x в сечении А-А методом сопротивления материалов. Представим балку-стенку в виде обычной балки (рисунок 26).

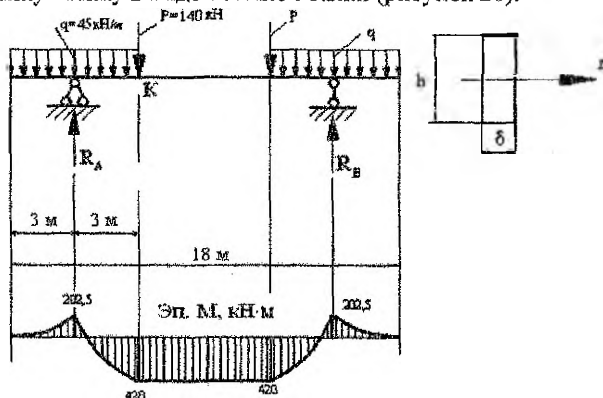


Рисунок 26 - К расчету балки-стенки по балочной схеме (метод сопротивления материалов)

$$\sigma_x = \frac{M_K}{W_{z1}};$$

изгибающий момент в сечении К: $M_K = R_A \cdot 3 - q \cdot 6 \cdot 3 = 420 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$$W_z = \frac{\delta \cdot a^3}{6} = \frac{1 \cdot 9^3}{6} = 13,5 \text{ м}^3; \quad \sigma_x = \frac{420}{13,5} = 31,11 \text{ кПа}.$$

Эпора σ_x показана на рисунке 24 пунктирной линией.

Пример 3.

Дана прямоугольная полоса-балка длиной l , высотой h и толщиной, равной 1 (рисунок 27). Начало координат O принято в середине торцового сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси Oy и Oz . Продольная ось Ox проходит посредине полосы-балки. Задано выражение для функции φ .

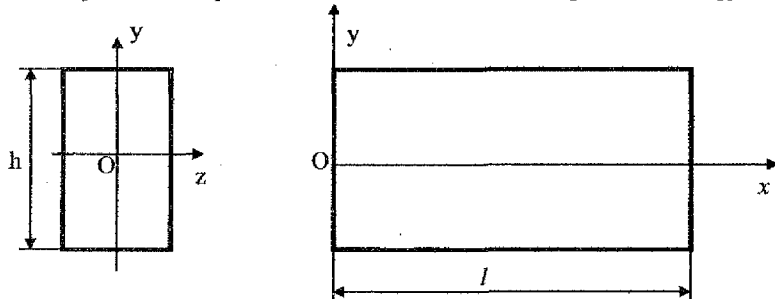


Рисунок 27 – Схема полосы-балки

Объемными силами пренебречь. Требуется:

- 1) проверить, можно ли предложенную функцию $\varphi(x,y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости;
- 2) найти выражения для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$;
- 3) построить эпюры напряжений для сечения $x=2 \text{ м}$, перпендикулярного оси x ;
- 4) определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры.

Дано: $\varphi(x,y) = 2x^4 - 9x^2y^2 + y^4, l = 6 \text{ м}, h = 1 \text{ м}, x = 2 \text{ м}$.

Решение:

1. Проверим, можно ли предложенную функцию $\varphi(x,y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости. В этих целях используем бигармоническое

уравнение:
$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Находим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 8x^3 - 18xy^2, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 24x^2 - 18y^2, & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} &= 48x, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= 48, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -18x^2y + 4y^3, & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -18x^2 + 12y^2, & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} &= 24y, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= 24, \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} &= -36y, & \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} &= -36. \end{aligned}$$

Подставляем найденные производные в бигармоническое уравнение:
 $48 + (-36) \cdot 2 + 24 = 0, \quad 0 = 0.$

Следовательно, заданное $\varphi(x,y)$ тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению плоской задачи теории упругости и может быть принято для решения этой задачи.

2. Находим выражения для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -18x^2 + 12y^2, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 24x^2 - 18y^2,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -36xy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 36xy.$$

Выполняем проверку выполнения уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0.$$

Для этого находим соответствующие производные:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -36x, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 36x, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -36y, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 36y,$$

$$\begin{cases} -36x + 36x = 0, \\ 36y - 36y = 0. \end{cases}$$

3. Строим эпюры напряжений в сечении $x = 2$ м. В данном случае:

$$\sigma_x = -72 + 12y^2, \quad \sigma_y = 96 - 18y^2, \quad \tau_{xy} = 72y.$$

По указанным выражениям для напряжений, изменяя y от $-\frac{h}{2} = -0,5$ м до

$\frac{h}{2} = 0,5$ м, строим их эпюры (рисунок 28).

Таблица 2 – Расчет значений напряжений в сечении $x = 2$ м.

	$-0,5$ м	0	$0,5$ м
σ_x	-69	-72	-69
σ_y	$91,5$	96	$91,5$
τ_{xy}	-36	0	36

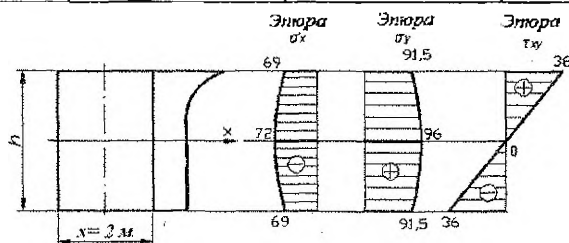


Рисунок 28 – Эпюры напряжений в сечении $x = 2$ м

4) Определяем внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки. Для этого воспользуемся условиями на поверхности тела (условиями на контуре или статическими граничными условиями):

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m, \quad p_{yv} = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m,$$

где p_{xv} , p_{yv} - проекции на оси Ox и Oy внешних сил, действующих на гранях полосы-балки; v_n - внешняя нормаль к грани; $l = \cos(x, v_n)$, $m = \cos(y, v_n)$ - направляющие косинусы нормали.

$$\text{Верхняя грань: } y = \frac{h}{2} = 0,5 \text{ м;}$$

$$\sigma_x = -18x^2 + 12 \cdot 0,5^2 = -18x^2 + 3, \quad \sigma_y = 24x^2 - 18 \cdot 0,5^2 = 24x^2 - 4,5,$$

$$\tau_{xy} = 36x \cdot 0,5 = 18x.$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, y) = 0,$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, y) = 1,$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = -18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 = \sigma_y = 24x^2 - 4,5.$$

$$p_{xy} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot 1 = \tau_{xy} = 18x,$$

$$p_{yv} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot 1 = \sigma_y = 24x^2 - 4,5.$$

Для сил, нормальных p_{yv} и касательных p_{xv} строим их эпюры, изменяя x от 0 до $l = 6$ м.

Таблица 3 -- Расчет нормальных и касательных сил для верхней грани

	0	3 м	6 м
p_{xv}	0	54	108
p_{yv}	-4,5	211,5	859,5

$$\text{Нижняя грань: } y = -\frac{h}{2} = -0,5 \text{ м;}$$

$$\sigma_x = -18x^2 + 12 \cdot (-0,5)^2 = -18x^2 + 3, \quad \sigma_y = 24x^2 - 18 \cdot (-0,5)^2 = 24x^2 - 4,5,$$

$$\tau_{xy} = 36x \cdot (-0,5) = -18x,$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, -y) = 0,$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, -y) = -1,$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot 0 + \tau_{xy} \cdot (-1) = -\tau_{xy} = 18x, \quad p_{yv} = \tau_{xy} \cdot 0 + \sigma_y \cdot (-1) = -\sigma_y = -24x^2 + 4,5.$$

Для сил, нормальных p_{yv} и касательных p_{xv} строим их эпюры, изменяя x от 0 до $l = 6$ м.

Таблица 4 -- Расчет нормальных и касательных сил для нижней грани

	0	3 м	6 м
p_{xv}	0	54	108
p_{yv}	4,5	-211,5	-859,5

$$\text{Левая грань: } x = 0;$$

$$\sigma_x = 12y^2, \quad \sigma_y = -18y^2, \quad \tau_{xy} = 0,$$

$$l = \cos(x, v_n) = \cos(x, -x) = -1;$$

$$m = \cos(y, v_n) = \cos(y, -x) = 0;$$

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot (-1) + \tau_{xy} \cdot 0 = -\sigma_x = -12y^2, \quad p_{yv} = \tau_{xy} \cdot (-1) + \sigma_y \cdot 0 = -\tau_{xy} = 0.$$

Для сил, нормальных p_{xv} и касательных p_{yv} строим их эпюры, изменяя y от

$$-\frac{h}{2} = -0,5 \text{ м до } \frac{h}{2} = 0,5 \text{ м.}$$

Таблица 5 – Расчет нормальных и касательных сил для левой грани

	-0,5 м	0	0,5 м
p_{xy}	-3	0	3
p_{yy}	0	0	0

Правая грань: $x = l = 6$ м;

$$\sigma_x = -18 \cdot 6^2 + 12y^2 = -648 + 12y^2,$$

$$\sigma_y = 24 \cdot 6^2 - 18y^2 = 864 - 18y^2,$$

$$\tau_{xy} = 36 \cdot 6 \cdot y = 216y,$$

$$l = \cos(x, v_x) = \cos(x, x) = 1;$$

$$m = \cos(y, v_y) = \cos(y, x) = 0;$$

$$p_{xy} = \sigma_x \cdot 1 + \tau_{xy} \cdot 0 = \sigma_x = -648 + 12y^2,$$

$$p_{yy} = \tau_{xy} \cdot 1 + \sigma_y \cdot 0 = \tau_{xy} = 216y.$$

Для сил, нормальных p_{xy} и касательных p_{yy} строим их эпюры, изменяя y от

$$-\frac{h}{2} = -0,5 \text{ м до } \frac{h}{2} = 0,5 \text{ м (таблица 6).}$$

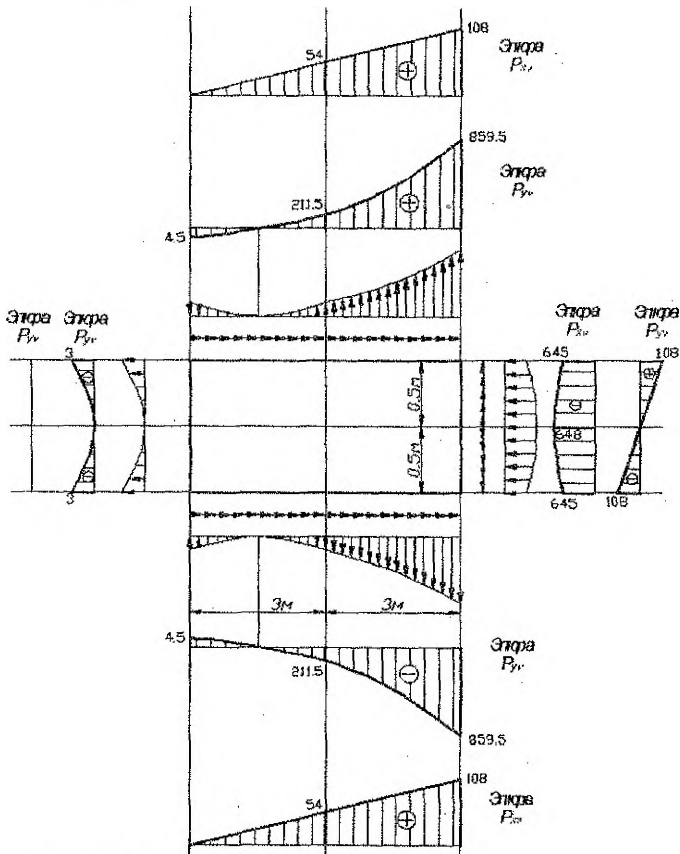


Рисунок 29 – Эпюры нормальных и касательных сил на гранях.

Таблица 6 – Расчет нормальных и касательных сил для правой грани

	-0,5 м	0	0,5 м
p_{xy}	-645	-648	-645
p_{yx}	-108	0	108

Эпюры сил, действующих на все четыре грани, приведены на рисунке 29

Пример 4.

Дана прямоугольная изгибаемая пластина.

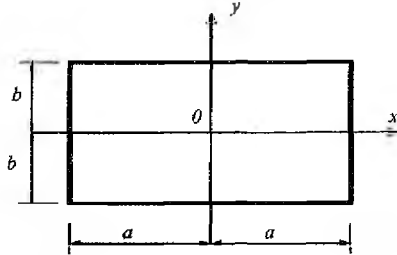


Рисунок 30 - Схема пластины

Требуется:

- 1) установить граничные условия, которым удовлетворяет функция прогибов $w(x, y)$;
- 2) проверить, удовлетворяет ли функция $w(x, y)$ уравнению Софи Жермен $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$, и если это не так, то использовать уравнение Бубнова-Галеркина: $\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS$. Из этих уравнений определить постоянную C и вычислить максимальный прогиб W_{max} ;
- 3) по формулам для $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ составить их выражения;
- 4) построить эпюры внутренних сил M_x, Q_y, M_{xy} в сечении $y=2$ м.

Дано: $q = q_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right)$, $w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right)$, $a=3$ м, $b=3$ м, $y=2$ м, $\nu=0,3$.

Решение:

1. Установим, каким граничным условиям удовлетворяет функция прогибов $w(x, y)$.

$$\text{При } x=\pm a, \quad w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot (\pm a)}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = C \cdot \cos\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = 0,$$

$$y=\pm b, \quad w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot (\pm b)}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = C \cdot \cos\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = 0.$$

Следовательно, пластинка опирается по всем четырем краям. Определим тип опирания. Углы поворота:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = -C \cdot \frac{3\pi}{2b} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

при $x = \pm a$,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot \sin\left(\frac{3\pi(\pm a)}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot \sin\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \neq 0,$$

$y = \pm b$,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -C \cdot \frac{3\pi}{2b} \cdot \sin\left(\frac{3\pi(\pm b)}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) = -C \cdot \frac{3\pi}{2a} \cdot b \cdot \sin\left(\pm \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \neq 0.$$

Значит, пластинка не закреплена. Проверим шарнирное опирание. Условие шарнирного опирания:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \text{цилиндрическая жесткость при изгибе.}$$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$M_x = -D \cdot \left[-C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) + \nu \cdot \left(-C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \right) \right] =$$

$$= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[\left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \right],$$

$$M_y = -D \cdot \left[-C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) + \nu \cdot \left(-C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \right) \right] =$$

$$= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[\left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \right],$$

$$\text{тогда при } x = \pm a, \quad M_x = DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi(\pm a)}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[\left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \right] = 0,$$

$$y = \pm b: \quad M_y = DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi(\pm b)}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \left[\left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \right] = 0.$$

Итак, пластинка шарнирно опирается по всем четырем краям (рисунок 31).

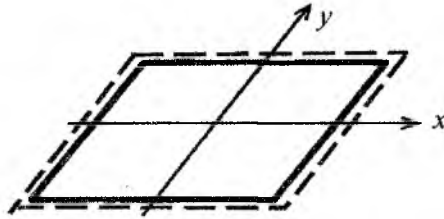


Рисунок 31 - Схема закрепления пластинки

2. Определим постоянный коэффициент C , используя основное дифференциальное уравнение изогнутой поверхности (уравнение Софи Жермен) (24):
Находим производные:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right).$$

Подставляем производные в бигармоническое уравнение:

$$C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) + 2 \cdot C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) +$$

$$+ C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^4 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = \frac{q_0 \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right)}{D},$$

$$C \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \pi^4 \left[\left(\frac{3}{2a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2b}\right)^2 + \left(\frac{3}{2b}\right)^4 \right] = \frac{q_0}{D} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right),$$

$$C = \frac{q_0}{D \pi^4 \left[\left(\frac{3}{2a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2b}\right)^2 + \left(\frac{3}{2b}\right)^4 \right]} = \frac{q_0}{81 \cdot D \cdot \pi^4 \left[\left(\frac{1}{2a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b}\right)^4 \right]}$$

Подставляем числовые значения:

$$C = \frac{q_0}{81 \cdot D \cdot 3,14^4 \left[\left(\frac{1}{2 \cdot 3} \right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3} \right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} \right)^4 \right]} = 0,0813 \frac{q_0}{D}.$$

Находим максимальный прогиб: при $x=0, y=0$:

$$w = C \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot 0}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi \cdot 0}{2b}\right) = C \cdot 1 \cdot 1 = 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot 1 \cdot 1 = 0,0813 \frac{q_0}{D}.$$

3. По формулам для $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ составим их выражения.

Изгибающие моменты:

$$\begin{aligned} M_x &= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[\left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \right] = \\ &= D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 + 0,3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 \right] = \\ &= 0,261 q_0 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right), \\ M_y &= DC \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[\left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 + \nu \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2 \right] = \\ &= D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 + 0,3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right)^2 \right] = \\ &= 0,261 q_0 \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right). \end{aligned}$$

Крутящие моменты:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= M_{yx} = -D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a}\right) \cdot \left(\frac{3\pi}{2b}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D \cdot (1 - 0,3) \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) = \\ &= -0,14 q_0 \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi y}{2b}\right). \end{aligned}$$

Поперечные силы:

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\
 &= -D \left(C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a} \right)^3 \cdot \sin \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi y}{2b} \right) + C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a} \right) \cdot \left(\frac{3\pi}{2b} \right)^2 \cdot \sin \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi y}{2b} \right) \right) = \\
 &= -DC \cdot \sin \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi y}{2b} \right) \cdot \left(\left(\frac{3\pi}{2a} \right)^3 + \left(\frac{3\pi}{2a} \right) \cdot \left(\frac{3\pi}{2b} \right)^2 \right) = \\
 &= -D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \sin \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi y}{2b} \right) \cdot \left(\left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 6} \right)^3 + \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right)^2 \right) = \\
 &= 0,21q_0 \cdot \sin \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi y}{2b} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = \\
 &= -D \left(C \cdot \left(\frac{3\pi}{2b} \right)^3 \cdot \cos \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi y}{2b} \right) + C \cdot \left(\frac{3\pi}{2a} \right)^2 \cdot \left(\frac{3\pi}{2b} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi y}{2b} \right) \right) = \\
 &= -D \cdot 0,0813 \frac{q_0}{D} \cdot \cos \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi y}{2b} \right) \cdot \left(\left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 6} \right)^3 + \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right) \cdot \left(\frac{3 \cdot 3,14}{2 \cdot 3} \right)^2 \right) = \\
 &= 0,21q_0 \cdot \cos \left(\frac{3\pi x}{2a} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi y}{2b} \right).
 \end{aligned}$$

4. Строим эпюры внутренних сил M_y, Q_y, M_{yx} в сечении $y=2$ м.

$$M_y = 0,261q_0 \cdot \cos \left(\frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \cos \left(\frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = -0,261q_0 \cdot \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right),$$

$$M_{yx} = -0,14q_0 \cdot \sin \left(\frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = -0,14q_0 \cdot \sin \left(\frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \sin(\pi) = 0,$$

$$Q_y = 0,21q_0 \cdot \cos \left(\frac{3\pi x}{2 \cdot 3} \right) \cdot \sin \left(\frac{3\pi \cdot 2}{2 \cdot 3} \right) = 0,21q_0 \cdot \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cdot \sin(\pi) = 0.$$

$$\text{При } x = \pm a = \pm 3 \text{ м: } M_y = -0,261q_0 \cdot \cos \left(\frac{\pi(\pm a)}{2} \right) = 0,$$

$$\text{при } x = \pm 0,5a = \pm 1,5 \text{ м: } M_y = -0,261q_0 \cdot \cos \left(\frac{\pi(\pm 0,5a)}{2} \right) = 0,185q_0,$$

$$\text{при } x = 0 \text{ м: } M_y = -0,261q_0 \cdot \cos(0) = -0,261q_0.$$

По полученным данным строим эпюру M_y (рисунок 32).

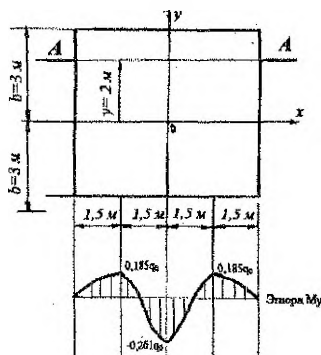


Рисунок 32 – Эпюра M_y в сечении А-А при $y=2\text{ м}$

Пример 5.

Кольцевая пластина (рисунок 33) жестко защемлена по наружному контуру и нагружена радиальными изгибающими моментами m , равномерно распределенными по внутреннему контуру.

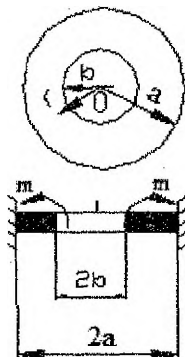


Рисунок 33 – Схема кольцевой пластины

Требуется:

1. Проверить граничные условия.
2. Определить постоянную C .
3. Составить выражения для внутренних сил.
4. В диаметральной сечении построить эпюры M_r, M_θ .

Дано: $w = C \left(2\ell n \frac{r}{a} + \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right)$, $a=8\text{ м}$, $b=4\text{ м}$, $\nu = 0,3$.

Решение:

1. Проверка граничных условий. Прогиб и угол поворота в радиальном направлении при $r=a$ должны быть равны нулю:

при $r=a$, прогиб $w=0$, угол поворота $\alpha_r = \frac{dw}{dr} = 0$, в нашем случае:

при $r=a$: $w(a) = C \left(2\ell n \frac{a}{a} + \frac{a^2 - a^2}{a^2} \right) = 0$;

$\alpha_r(r) = C \left(2 \frac{a}{r} \cdot \frac{1}{a} - \frac{2r}{a^2} \right) = 2C \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right)$; при $r=a$: $\alpha_r(a) = 2C \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{a^2} \right) = 0$.

Граничные условия жесткого защемления выполняются.

2. Определение постоянной С.

Для этого используем условие: при $r = b$, $M_r = m$. Находим производные:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = 2C \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$\frac{v}{r} \frac{dw}{dr} = 2Cv \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2} \right) = 2Cv \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$M_r = -2CD \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{v}{r^2} - \frac{v}{a^2} \right) = 2CD \frac{a^2(1-v) + r^2(1+v)}{a^2 r^2}.$$

при $r = b$:

$$m = 2CD \frac{a^2(1-v) + b^2(1+v)}{a^2 b^2}; \text{ откуда } C = \frac{ma^2 b^2}{2D [a^2(1-v) + b^2(1+v)]}.$$

Примечание. В некоторых случаях для определения постоянной С можно использовать дифференциальное уравнение (25).

2. Находим выражения для M_r, M_θ по формулам (26):

$$M_r = \frac{mb^2}{[a^2(1-v) + b^2(1+v)]} \left[(1+v) + (1-v) \frac{a^2}{r^2} \right],$$

$$\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 2C \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right); \quad v \frac{d^2 w}{dr^2} = 2Cv \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} \right);$$

$$M_\theta = -2CD \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{v}{a^2} \right) = \frac{mb^2}{[a^2(1-v) + b^2(1+v)]} \left[(1+v) + (-1+v) \frac{a^2}{r^2} \right].$$

3. Строим эпюры M_r, M_θ (рисунок 34). Вычислим:

$$\frac{b^2}{[a^2(1-v) + b^2(1+v)]} = \frac{4^2}{8^2(1-0,3) + 4^2(1+0,3)} = 0,244,$$

$$M_r = 0,244m \left(1,3 + \frac{44,8}{r^2} \right);$$

$$M_\theta = 0,244m \left(1,3 - \frac{44,8}{r^2} \right).$$

Находим значения изгибающих моментов:

при $r = 4$ м, $M_r = m$; $M_\theta = -0,366m$;

при $r = 6$ м, $M_r = 0,621m$; $M_\theta = 0,014m$;

при $r = 8$ м, $M_r = 0,488m$; $M_\theta = 0,146m$.

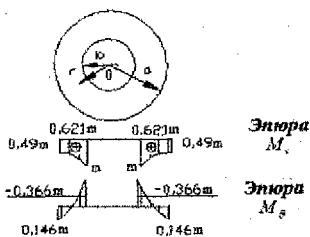


Рисунок 34 - Эпюры изгибающих моментов M_r, M_θ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Контрольная работа включает 2 задачи. Во время экзаменационной сессии студент получает бланк задания, приведенный ниже.

**Задание для выполнения контрольной работы по дисциплине
 «Теория упругости и пластичности»**

Студенту группы _____
 № группы _____ ФИО _____

**ЗАДАЧА 1. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
 СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ УПРУГОГО ТЕЛА**

Задан тензор напряжений на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке нагруженного тела.

$$\underline{\underline{T}}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \text{ МПа.}$$

Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Требуется:

1. Нанести исходные компоненты тензора напряжений на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности рассматриваемой точки.
2. Определить значения нормального и касательного напряжений на площадке с внешней нормалью ν , если заданы направляющие косинусы углов между нормалью и координатными осями: $l = \underline{\hspace{1cm}}$, $m = \underline{\hspace{1cm}}$, $n = \underline{\hspace{1cm}}$.
3. Разложить тензор напряжений на шаровой и девиатор и показать их на гранях элементарного параллелепипеда.
4. Вычислить компоненты тензора деформаций в заданных осях, построить тензор деформаций. Принять: $E = \underline{\hspace{1cm}} \text{ ГПа}$, $\nu = \underline{\hspace{1cm}}$.
5. Определить объемную деформацию, интенсивность напряжений и деформаций в рассматриваемой точке.
6. Приняв в исходном тензоре напряжений $\sigma_2 = 0$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, вычислить величины главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 , а также максимальные касательные напряжения τ_{\max} .

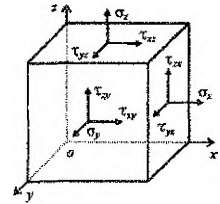


Рисунок 1

ЗАДАЧА 2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Дана прямоугольная полоса-балка длиной l , высотой h и толщиной, равной 1. Начало координат O принято в середине торцового сечения. Главными осями поперечного сечения являются оси Oy и Oz . Продольная ось Ox проходит по середине полосы-балки. Объемными силами пренебречь.

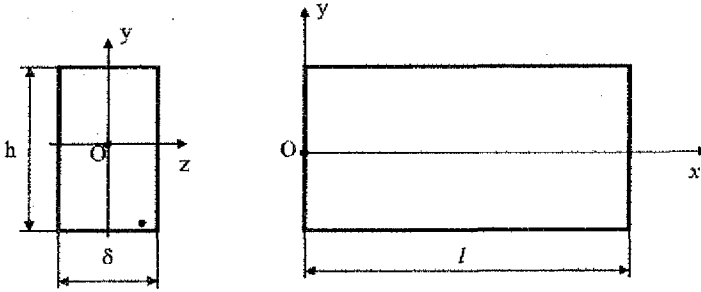


Рисунок 2 – Схема полосы - балки

Требуется:

1. Проверить, можно ли предложенную функцию $\varphi(x,y)$ принять для решения плоской задачи теории упругости:

$$\varphi(x,y) = \underline{\hspace{10em}} \quad l = \underline{\hspace{1em}} h, \quad h = \underline{\hspace{1em}} \text{ м.}$$

Если функция окажется непригодной, внести соответствующие изменения и записать ее окончательный вид.

2. Найти выражения для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.
3. Построить эпюры напряжений $\underline{\hspace{2em}}$ в сечении $\underline{\hspace{2em}}$.
4. Определить внешние силы (нормальные и касательные), приложенные ко всем четырем граням полосы-балки, дать их изображение на рисунке полосы-балки и привести соответствующие эпюры.

Принял студент
подпись ФИО

Преподаватель
подпись ФИО

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. - М.: Высшая школа, 1968.
2. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. - М.: Высшая школа, 1979.
3. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. - М.: Высшая школа, 1990.
4. Рочняк, О.А. Основы теории упругости / О.А. Рочняк, В.Г. Фёдоров, В.М. Хвиевич. - Брест: Изд-во БрГТУ, 2001.
5. Рекач, В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. — М., 1984.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

Веремейчик Андрей Иванович
Хвусевич Виталий Михайлович

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

к выполнению контрольной работы

для студентов специальности

1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”
заочной формы обучения

Ответственный за выпуск: Веремейчик А.И.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 13.01.2016 г. Формат 60x84¹/₁₆. Гарнитура «Times New Roman».
Бумага «Performer». Усл. п. л. 3,02. Уч. изд. 3,25. Заказ № 22. Тираж 80 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.