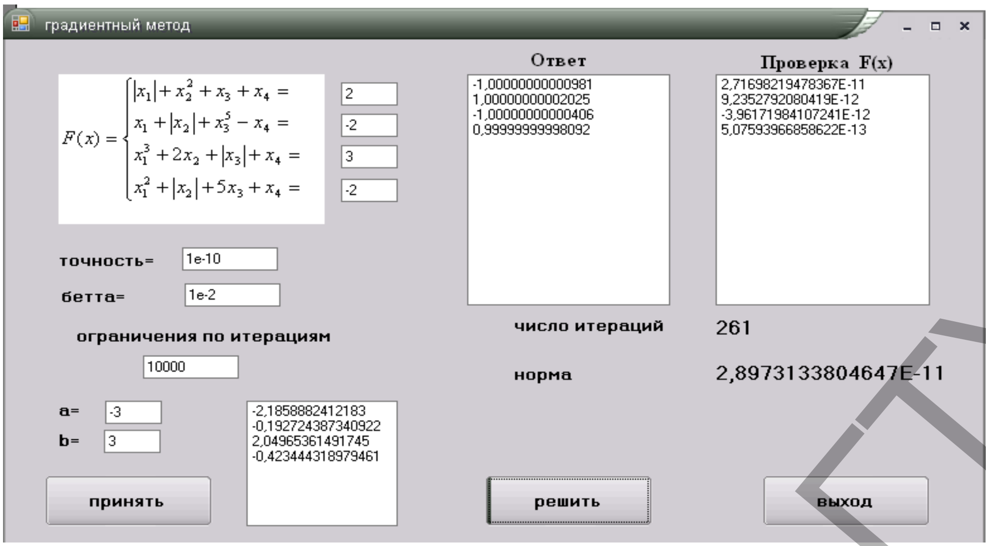

Рисунок 1

Таблица – Связь между начальным приближением и эффективностью итерационного процесса

Одно из точн. реш-й / [a;b]	Количество успешных запусков из 10			
	(-1; 1; 1; 1)	(-1; 1; -1; 1)	(-1; 1; -1;-1)	(-1; -1; -1; -1)
[0;1]	10	10	10	10
[-3;3]	10	10	10	10
[-10;10]	10	10	9	10
[-30;30]	8	8	7	8

Вывод: анализ таблицы показывает, что предложенный метод позволяет довольно успешно решать системы нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором и чем меньше отрезок, из которого берётся начальное приближение, тем эффективнее работает метод.

Заявленная точность 1E-10 являлась тестовой, однако, как показывает вычислительный эксперимент, точность решения может быть значительно повышена.

Список цитированных источников

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
2. Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

УДК 519.6+517.983

РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА ПРИ ПОМОЩИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕДУР С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

Зданевич М.В., Улезло Р.Ю.
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Матысик О.В., к. ф.- м. н., доцент

1. Правило останова по невязке. В гильбертовом пространстве H решается уравнение I рода $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением, но $0 \in Sp\, A$ (поэтому рассматриваемая задача некорректна). Используется итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \; \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения $Ax = y$ при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части $y_{\delta,}$ $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0,$$
$$\alpha_{2n+1} = \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \; \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Здесь $0 < \alpha < 2$, $\beta > 0$ и $|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1$. В случае, когда неизвестна истокопредставимость точного решения, т.е. что $x = A^s z,\ s > 0$, метод (1) можно сделать эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке [1-2]: зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного метода определим условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \ (n < m), \ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \ \varepsilon = b_1\delta, \ b_1 > 1. \tag{3}$$

Покажем возможность применения правила (3) к методу (2). Для простоты считаем, что $\|A\| = 1$. Справедливы

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le 1.$ *Тогда для* $\forall w \in H \quad (E - Ag_n(A))w \to 0,$ $n \to \infty.$

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le 1.$ *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s \|A^s(E - Ag_n(A))v\| \to 0,\ n \to \infty,\ 0 \le s \le \infty.$

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le 1.$ *Если для некоторого* $n_k \le \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0,$ *то* $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0.$

Имеют место

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le 1$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *(*m *– чётное) в методе* (2) *выбирается по правилу* (3). *Тогда* $x_{m(\delta),\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0.$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0,$ *тогда справедливы оценки* $m \le 2 + \dfrac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\dfrac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}},$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le [(b_1+1)\delta]^{\frac{s}{(s+1)}} \|z\|^{\frac{1}{(s+1)}} + \frac{\alpha+\beta}{2}\left\{2 + \frac{s+1}{\alpha+\beta}\left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta}\right]^{\frac{1}{(s+1)}}\right\}\delta. \tag{4}$$

Замечание 1. *Порядок оценки* (4) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{(s+1)}}\right)$, *и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* [1].

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы* 2 *предположение, что порядок истокопредставимости точного решения равен* $s>0$, *не требуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближённого решения. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (4) *как показывает теорема* 1, *обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.*

2. Правило останова по соседним приближениям. В действительном гильбертовом пространстве H для решения уравнения $Ax=y$ (здесь $A-$ ограниченный, положительный, несамосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, но нуль принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна) используем явную схему метода итераций

$$x_{n+1}=(E-\alpha A^*A)^2x_n+A^{-1}\left[E-(E-\alpha A^*A)^2\right]y,\ x_0\in H. \quad (5)$$

В случае, когда правая часть y уравнения $Ax=y$ известна приближенно, $\|y-y_\delta\|\le\delta$, метод (5) примет вид:

$$z_{n+1}=(E-\alpha A^*A)^2z_n+A^{-1}\left[E-(E-\alpha A^*A)^2\right]y_\delta+(E-\alpha A^*A)^2u_n,\ z_0\in H. \quad (6)$$

Здесь $0<\alpha\le\dfrac{5}{4\|A^*A\|}$, u_n- ошибки вычисления итераций, $\|u_n\|\le\beta$. Для простоты считаем, что $\|A\|=1$. Обозначим через $C=(E-\alpha A^*A)^2$, $B=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A^*A)^2\right]$. Тогда метод итераций (3) запишется в виде $z_{n+1}=Cz_n+By_\delta+Cu_n$. В дальнейшем будет использовано равенство $A^*Ax=A^*y$.

Воспользуемся правилом останова соседним приближениям [2-3]: зададим уровень останова $\varepsilon>0$ и момент m останова итерационного метода определим условиями

$$\left.\begin{aligned}&\|z_n-z_{n+1}\|>\varepsilon,\ (n<m)\\&\|z_m-z_{m+1}\|\le\varepsilon.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Покажем, что метод (6) с правилом останова (7) сходится. Получим оценку для момента останова. Справедливы

Лемма 3. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами* $w_0=z_0$, $w_{n+1}=Cw_n+By+Cu_n$, $n\ge0$, *тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|w_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 4. *При любом* $w_0\in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\|\le\beta$, *выполнено неравенство*

$$\varliminf_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}\|\le2\|C\|\beta.$$

Имеет место

Теорема 3. *Пусть уровень останова* $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y-y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *если* $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) *если* $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

в) *если, кроме того,* $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, где $d > 1$, $p \in (0,1)$, то $\lim\limits_{\delta,\beta \to 0} \|z_m - x\| = 0$, *т.е. метод* (6) *с правилом останова* (7) *сходится к точному решению операторного уравнения.*

Список цитированных источников

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.
2. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38-43.
3. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕАВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Каримова Т.И.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Одной из причин активного развития стохастического анализа и теории стохастических дифференциальных уравнений в последнее время является то, что большинство случайных процессов, встречающихся в приложениях, не являются дифференцируемыми. Задачи с недифференцируемыми функциями можно рассматривать при помощи теории распределений Л.Шварца, однако она применима лишь к линейным задачам, что не всегда удовлетворяет требованиям практики. Поэтому построение Ж.Коломбо (см., напр., [1]) алгебры новых обобщенных функций позволило изучать стохастические дифференциальные уравнения методами классического анализа. В работах многих авторов были предложены различные конструкции алгебр обобщенных случайных процессов. В дальнейшем будем использовать алгебру, введенную Н.В. Лазаковичем в статье [2]. В ней на основе аппарата алгебры обобщенных случайных процессов предложен единый подход к исследованию стохастических дифференциальных уравнений. Суть его состоит в замене исходного стохастического уравнения на уравнение в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. При этом возникает естественный вопрос о существовании и единственности решений уравнений в дифференциалах. В данной статье эта задача рассматривается для систем неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.