МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра информатики и прикладной математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

к контрольной работе по дисциплине

«Системный анализ и исследование операций»

для студентов специальности

53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»

заочной формы обучения

БРЕСТ 2009

УДК 519.816

Методические указания содержат материалы по выполнению контрольной работы по дисциплине «Системный анализ и исследование операций» для студентов специальности 53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» заочной формы обучения. В указаниях приводятся варианты заданий, основные теоретические сведения и примеры решения по темам:
- задачи линейного программирования;
- транспортные задачи;
- задача о рюкзаке;
- задача о замене оборудования.

Составители: В.М. Ракецкий, к.ф.-м.н., доцент
С.И. Парфомук, к.т.н.

Рецензент: В.Ф. Савчук, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики УО «БрГУ им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент

Содержание

Выбор варианта и требования к оформлению контрольной работы

Вариант задания выбирается студентом по двум последним цифрам номера зачетной книжки (студенческого билета). Если эти две цифры образуют число, большее 30, то в качестве варианта выбирается остаток от деления числа на 30. Например, две последние цифры номера зачетки образуют число 79. Остаток от деления числа 79 на 30 составляет 19 – это и есть номер варианта.

Студент должен выполнить контрольную работу, строго придерживаясь указанных ниже требований. Работа, выполненная без их соблюдения, к защите не допускается и возвращается студенту на доработку.

1. Контрольная работа должна быть выполнена строго по варианту. Контрольная работа, выполненная не по своему варианту, возвращается студенту без проверки и к защите не допускается.
2. Контрольная работа должна быть оформлена на отдельных листах формата А4 или в обычной ученической тетради в клетку.
3. Работа выполняется и оформляется **вручную**. Исключение составляют таблицы и рисунки, которые могут быть выполнены с использованием компьютерной и др. техники, распечатаны и приложены к каждому заданию. Работы, полностью выполненные на компьютерной технике, возвращаются студентам без проверки и к защите не допускаются.
4. Контрольная работа должна содержать:
   - **титульный лист**, содержащий название дисциплины, Фамилию, Имя, Отчество студента, номер группы, шифр и личную подпись студента;
   - **номер варианта**;
   - **полное условие каждого задания**;
   - **решение задания** с описанием всех производимых действий, промежуточных вычислений и построений;
   - **перечень** используемой литературы.
5. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку до начала сессии. Студент обязан учесть все замечания рецензента и, не переписывая работу, внести в нее необходимые исправления.

При условии правильности выполнения контрольная работа должна быть защищена студентом. Защита контрольной работы предполагает ответ на любой вопрос по ходу выполнения работы или выполнение аналогичного задания в присутствии преподавателя.

Студенты, защитившие контрольную работу и успешно выполнившие лабораторные работы в сессию, допускаются к сдаче экзамена по дисциплине.

Задание №1

Для приведенной ниже задачи:

а) составить математическую модель;

б) найти решение графическим методом;

в) найти решение симплекс-методом в форме исключения переменных;

г) найти решение табличным симплекс-методом.

Небольшое предприятие выпускает 2 типа продукции А и Б и реализует ее по ценам c_1 и c_2 рублей соответственно. Для ее производства предприятие использует три вида сырья. Запасы сырья на складах предприятия составляют b_1, b_2 и b_3 единиц, а приобретено сырье по ценам s_1, s_2 и s_3 рублей за единицу. Расход сырья i-го вида на изготовление единицы продукции j-го типа осуществляется в соответствии с утвержденными нормативами и составляет a_{ij} (ед. сырья на ед. продукции), i=1,2,3, j=1,2. Затраты, связанные с производством продукции А, составляют r_1 руб., Б – r_2 руб.

Найти план производства продукции А и Б, при котором прибыль предприятия максимальна (прибыль есть разница между выручкой от реализации продукции и затратами на ее производст во, включая затраты на приобретение сырья).

Варианты данных

Номер варианта	c_1	c_2			Номер варианта	c_1	c_2		
	a_{11}	a_{12}	b_1	s_1		a_{11}	a_{12}	b_1	s_1
	a_{21}	a_{22}	b_2	s_2		a_{21}	a_{22}	b_2	s_2
	a_{31}	a_{32}	b_3	s_3		a_{31}	a_{32}	b_3	s_3
	r_1	r_2				r_1	r_2		
1	47	40			2	35	32		
	2	3	54	2		1	3	54	1
	2	2	40	3		1	1	20	3
	3	2	57	3		3	2	51	2
	12	3				10	10		
3	22	20			4	30	37		
	1	3	45	2		3	2	60	1
	3/2	1	20	1		3/2	3	33	3
	3	1	36	2		1	4	40	2
	7	5				10	9		
5	35	30			6	28	30		
	1	2	56	2		3	2	43	4
	1	1	30	1		1	1	16	1
	2	1	46	2		2	4	56	2
	20	12				8	9		
7	29	28			8	25	23		
	1	3	56	2		2	1	52	1
	2	2	60	1		1	1	30	2
	2	1	56	2		1	3	72	2
	13	8				11	9		
9	35	33			10	35	40		
	3	1	42	3		3	2	81	3
	2	1	30	2		1	1	30	2
	1	2	40	4		1	2	48	1
	9	10				9	8		

	40	37				43	42		
	3	2	81	1		1	2	44	1
11	2	2	56	2	12	2	3	70	2
	1	3	60	1		2	1	58	2
	8	9				11	14		
	40	44				26	30		
	1	2	64	3		1	3	64	1
13	1	1	34	2	14	2	3	70	2
	2	1	58	1		2	1	58	2
	11	7				12	9		
	27	29				34	30		
	1	3	69	2		1	3	90	1
15	1	1	30	1	16	2	2	70	3
	2	1	52	2		2	1	58	2
	11	8				10	9		
	40	44				37	30		
	1	3	66	3		2	3	84	3
17	2	3	74	2	18	2	2	60	1
	2	1	60	1		3	2	87	3
	9	12				12	3		
	35	30				30	28		
	3	2	56	1		1	2	48	2
19	1	1	20	3	20	1	1	30	2
	2	4	70	2		2	1	54	1
	7	6				11	12		
	25	19				30	37		
	1	3	81	1		3	2	84	4
21	1,5	1	36	2	22	2	2	60	2
	3	1	60	3		1	3	75	3
	8	5				8	10		
	18	21				30	27		
	1	3	42	2		1	3	78	1
23	2	3	46	2	24	2	2	62	4
	2	1	40	3		2	1	56	2
	4	2				10	5		
	27	21				24	27		
	2	1	52	3		1	3	66	3
25	1	1	30	2	26	1	1,5	36	3
	1	3	78	1		3	1	82	1
	13	9				6	5		
	41	40				19	22		
	2	3	84	3		1	3	90	3
27	2	2	60	1	28	1,5	1	40	1
	3	2	81	2		3	1	78	1
	12	13				7	7		
	30	28				15	20		
	1	2	72	1		1	3	60	1
29	1	1	40	2	30	2	3	72	2
	2	1	64	2		2	1	63	1
	11	7				4	2		

Решение типового варианта задания № 1

Для приведенной ниже задачи:

c_1	c_2		
a_{11}	a_{12}	b_1	s_1
a_{21}	a_{22}	b_2	s_2
a_{31}	a_{32}	b_3	s_3
r_1	r_2		
16	18		
1/3	2/3	400	6
1/2	1/2	400	8
1/2	0	250	4
6	7		

А. Составить математическую модель.

Пусть x_1 – выпуск продукции типа А, x_2 – выпуск продукции типа Б.

Сформулируем ограничения, вытекающие из постановки задачи.

Во-первых, для производства продукции используется сырье, запасы которого небезграничны. Рассмотрим более подробно первый вид сырья. a_{11} – норма расхода этого сырья на производство единицы продукции А. Поэтому $a_{11}x_1$ – расход сырья 1-го вида на весь выпуск продукции А. Аналогично $a_{12}x_2$ – расход сырья 1-го вида на выпуск продукции Б. Для реализации всего плана x_1, x_2, выпуска продукции потребуется

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

единиц сырья 1-го вида. Эта величина не может превосходить b_1 – количества сырья 1-го вида, имеющегося в запасах у предприятия. Т.о. возникает ограничение

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1.$$

Рассуждая подобным образом для 2-го и 3-го видов сырья, получим ограничения

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2;$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3.$$

Во-вторых, необходимо учесть, что искомые переменные не могут принимать отрицательных значений, т.е.

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Составим целевую функцию.

Т. к. предприятие реализует продукцию А и Б и по ценам c_1 и c_2 рублей соответственно, то выручка от продажи составит

$$x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2$$

рублей..

Для производства предприятие использует три вида сырья, которое приобретено по ценам s_1, s_2 и s_3 рублей за единицу соответственно. Затраты на сырье 1-го вида для производства единицы продукции А составят $a_{11} \cdot s_1$ рублей, а на всю продукцию типа А – $x_1 \cdot a_{11} \cdot s_1$ рублей, на продукцию Б – $x_2 \cdot a_{12} \cdot s_1$ рублей. Аналогично определяются затраты на сырье 2-го и 3-го видов.

Затраты, связанные с производством продукции А, составляют r_1 руб., Б – r_2 рублей, поэтому общие прочие затраты составят $x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2$ рублей.

Рассмотрим вопрос о целевой функции. Прибыль – это разница между выручкой от реализации продукции и затратами на ее производство, включая затраты на приобретение сырья. Поэтому целевая функция будет иметь вид:

$$L(x)=x_1\cdot(c_1-r_1-a_{11}\cdot s_1-a_{21}\cdot s_2-a_{31}\cdot s_3)+x_2\cdot(c_2-r_2-a_{12}\cdot s_1-a_{22}\cdot s_2-a_{32}\cdot s_3)\to\max$$

Таким образом, окончательно математическая модель задачи принимает вид:

$$L(x)=x_1\cdot(c_1-r_1-a_{11}\cdot s_1-a_{21}\cdot s_2-a_{31}\cdot s_3)+x_2\cdot(c_2-r_2-a_{12}\cdot s_1-a_{22}\cdot s_2-a_{32}\cdot s_3)\to\max$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2\le b_3\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$$

Подставив значения переменных, получим математическую модель:

$$L(x)=x_1\cdot(16-6-1/3\cdot 6-1/2\cdot 8-1/2\cdot 4)+x_2\cdot(18-7-2/3\cdot 6-1/2\cdot 8-0\cdot 4)\to\max$$

$$\begin{cases}1/3\cdot x_1+2/3\cdot x_2\le 400\\ 1/2\cdot x_1+1/2\cdot x_2\le 400\\ 1/2\cdot x_1+0\cdot x_2\le 250\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$$

или:

$$L(x)=2x_1+3x_2\to\max$$

$$\begin{cases}1/3x_1+2/3x_2\le 400\\ 1/2x_1+1/2x_2\le 400\\ 1/2x_1\le 250\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}\qquad(1.1)$$

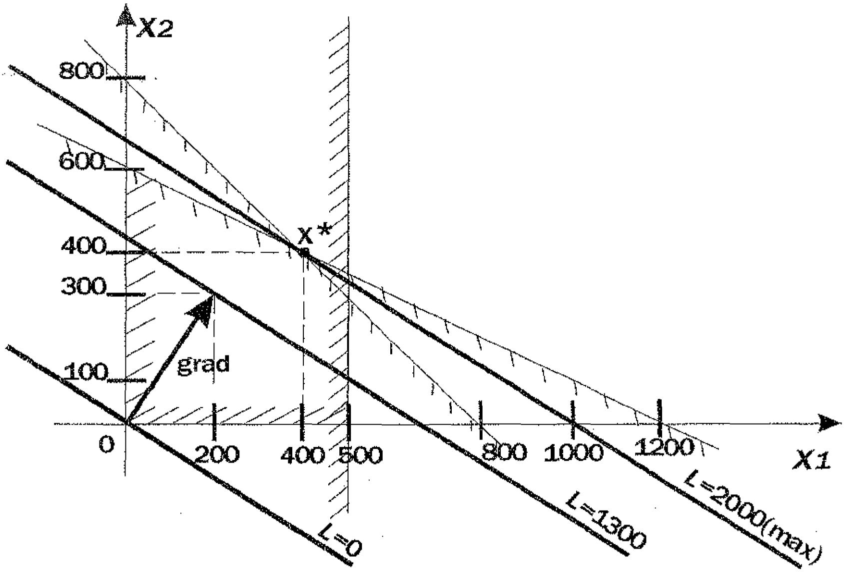
Б. Найти решение графическим методом.

Для решения задачи графическим способом необходимо на координатной плоскости с осями x_1 и x_2 построить многоугольник допустимых точек – планов задачи линейного программирования, который образуют пересечения полуплоскостей, соответствующих ограничениям задачи.

Например, ограничению $1/3x_1+2/3x_2\le 400$ соответствует прямая, проходящая через точки x_1=400/(1/3)=1200 на оси Ox_1 и x_2=400/(2/3)=600 на оси Ox_1. Она разбивает плоскость на две полуплоскости. Для нахождения требуемой полуплоскости необходимо подставить произвольные значения, например, x_1=300 и x_2=300, при которых $1/3x_1+2/3x_2=300\le 400$, поэтому ограничению $1/3x_1+2/3x_2\le 400$ соответствует нижняя полуплоскость, содержащая точку (300; 300).

Аналогично строятся полуплоскости для остальных ограничений. Ограничению $1/2x_1+1/2x_2\le 400$ соответствует нижняя полуплоскость, получаемая при разбиении плоскости прямой, проходящая через точки с координатами (800;0) и (0;800). Ограничению $1/2x_1\le 250$ соответствует левая полуплоскость, получаемая при разбиении плоскости прямой, проходящая через точку (500;0) параллельно оси ординат. Ограничению

$x_1 \geq 0$ соответствует полуплоскость, расположенная выше оси абсцисс. Ограничению $x_2 \geq 0$ соответствует полуплоскость, расположенная правее оси ординат.



Целевой функции $L(x) = 2x_1 + 3x_2$ соответствует семейство прямых, перпендикулярных ее градиенту — $grad\,L(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, который определяет направление возрастания функции. Для наглядности на координатной плоскости вместо градиента показан коллинеарный ему вектор $100\,grad\,L(x) = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$. Линии уровня, проходящей через точку с координатами (200;300), соответствует значение целевой функции $L(x) = 2 \cdot 200 + 3 \cdot 300 = 1300$. Перемещая линию уровня $L(x) = 2x_1 + 3x_2$ в направлении градиента в пределах построенного многоугольника допустимых планов задачи, получаем наибольшее значение целевой функции $L(x^*) = 2000$ при $x^* = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \end{pmatrix}$.

В. Найти решение симплекс-методом в форме исключения переменных.

Приведем задачу (4.1) к канонической форме. Условие задачи находится в канонической форме тогда и только тогда, когда все ограничения системы основных ограничений имеют тип равенства. Для того, чтобы преобразовать ограничения типа "<=" к типу "=", в левую часть каждого неравенства добавляют по свободной переменной. На введенные свободные переменные накладывается следующее ограничение: они, как и основные переменные, должны быть больше либо равны нулю. Таким образом, каноническая форма задачи (1.1) будет такой:

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} 1/3x_1 + 2/3x_2 + x_3 = 400 \\ 1/2x_1 + 1/2x_2 + x_4 = 400 \\ 1/2x_1 + x_5 = 250 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Разрешим задачу относительно свободных переменных:

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} x_3 = 400 - 1/3x_1 - 2/3x_2 \\ x_4 = 400 - 1/2x_1 - 1/2x_2 \\ x_5 = 250 - 1/2x_1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Любая задача линейного программирования перед решением ее симплекс-методом должна быть приведена к виду (1.3). Этот вид называется задачей линейного программирования в симплексной форме. Переменные x_3, x_4, x_5, относительно которых разрешена система основных ограничений, называются базисными переменными; переменные x_1, x_2 – небазисные. Множество индексов базисных переменных обозначим $J_б$: $J_б = \{3, 4, 5\}$. Аналогично $J_н = \{1, 2\}$ – множество индексов небазисных переменных.

С каждой задачей линейного программирования в симплексной форме связывают так называемый план. Небазисные компоненты базисного плана полагаются равными нулю, небазисные однозначно находятся из системы основных ограничений и равны значениям свободных членов в системе ограничений. В нашем случае

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 400 \\ 400 \\ 250 \end{pmatrix}, \; L(x^{(0)}) = 0.$$

Верхний индекс $^{(0)}$ соответствует начальному базисному плану, который затем будет преобразован в более лучший $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ и т.д.

Начальному базисному плану соответствует нулевое значение целевой функции. Поскольку среди коэффициентов целевой функции есть положительные, нетрудно видеть что план $x^{(0)}$ не является оптимальным. Его можно улучшить, незначительно увеличив любую небазисную переменную. В общем случае можно сделать следующий вывод (**достаточное условие оптимальности базисного плана**): если в задаче на максимум коэффициенты целевой функции неположительны, то базисный план, соответствующий симплексной форме задачи линейного программирования, является оптимальным, поскольку любое изменение небазисных переменных (их увеличение) будет приводить к ухудшению целевой функции. (В задаче на минимум по аналогичной причине достаточным условием оптимальности является неотрицательность коэффициентов целевой функции).

Если хотя бы один из коэффициентов целевой функции в задаче на минимум положителен, на максимум – отрицателен, то целевую функцию можно улучшить, увеличив значения соответствующих базисных переменных.

Попробуем улучшить план $x^{(0)}$. Для этого в симплекс-методе принято использовать только одну переменную. Обычно это переменная, которая обеспечивает наискорейшее возрастание целевой функции. В случае симплексной формы (1.3) – это переменная x_2. В дальнейшем эту переменную будем называть **<u>ведущей</u>**.

Положим $x_2 = \theta > 0$, $x_1 = 0$ и рассмотрим соотношения, вытекающие из системы ограничений:

$$x_3 = 400 - 2/3\theta \ge 0 \qquad \theta_3 = 600$$
$$x_4 = 400 - 1/2\theta \ge 0 \qquad \theta_4 = 800$$
$$x_5 = 250 + \cdot\theta \ge 0 \qquad \theta_5 = \infty$$

Найденные значения θ_3, θ_4 соответствуют значениям переменной x_2, при которых соответствующие базисные переменные x_3, x_4 обращаются в ноль (при увеличении значения x_2 они вообще принимают отрицательные значения). Равенство $\theta_5 = \infty$ означает, что переменная x_5 ни при каком положительном значении θ не может обратиться в ноль.

Таким образом, переменная x_2 не может принимать значения, большего

$$\theta^0 = \min \theta_i = 600 = \theta_3.$$

Величина θ^0 называется максимально допустимым шагом вдоль ведущей переменной.

Величина θ_3 приведена в записанном равенстве специально для того, чтобы подчеркнуть, что максимально допустимый шаг достигнут на базисной переменной x_3. Это она первой обратилась в ноль и стала препятствием на пути улучшения базисного плана. За это мы ее «накажем», а именно: выведем ее из базиса. Для этого используем уравнение из системы основных ограничений, соответствующее переменной x_3:

$$x_3=400-1/3x_1-2/3x_2.$$

Выразив из него x_2, получаем:

$$x_2 = 600 - 1/2x_1 - 3/2x_3.$$

Исключим теперь переменную x_3 из соотношения для x_4 и целевой функции:

$$x_4 = 400 - 1/2x_1 - 1/2\,(600 - 1/2x_1 - 3/2x_3) = 100 - 1/4x_1 + 3/4x_3;$$
$$L(x) = 2x_1 + 1800 - 3/2x_1 - 9/2x_3 = 1800 + 1/2x_1 - 9/2x_3.$$

После выполненных преобразований снова запишем задачу в симплексной форме:

$$L(x) = 1800 + 1/2x_1 - 9/2x_3$$
$$\begin{cases} x_2 = 600 - 1/2x_1 - 3/2x_3 \\ x_4 = 100 - 1/4x_1 + 3/4x_3 \\ x_5 = 250 - 1/2x_1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad (1.4)$$

Симплексной форме (1.4) соответствует новый базисный план

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}$$

с лучшим значением целевой функции $L(x^{(1)}) = 1800$.

Поскольку целевая функция симплексной формы (1.4) содержит положительный коэффициент, то базисный план $x^{(1)}$ не является оптимальным. Его можно улучшить с помощью ведущей переменной x_1. Как и на первой итерации, положим $x_1 = \theta > 0$, $x_3 = 0$. Тогда

$$\begin{cases} x_2 = 600 - 1/2\theta \ge 0, & \theta_2 = 1200 \\ x_4 = 100 - 1/4\theta \ge 0, & \theta_4 = 400 \\ x_5 = 250 - 1/2\theta \ge 0, & \theta_5 = 500 \end{cases}$$

$$\theta^0 = \min\theta_i = 400 = \theta_4$$

После исключения переменной x_4 из базиса получаем симплексную форму

$$L(x) = 2000 - 2x_1 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_2 = 400 + 2x_4 - 3x_3 \\ x_1 = 400 - 4x_4 + 3x_3 \\ x_5 = 50 + 2x_1 - 3/2x_3 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad (1.5)$$

с базисным планом $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$, $L(x^{(2)}) = 2000$.

Целевая функция симплексной формы (1.5) не содержит положительных коэффициентов. Следовательно, $x^{(2)}$ – оптимальный базисный план задачи (1.1). Ее решение завершено.

Подведем краткие итоги рассмотренного материала. Для решения задач симплекс-методом необходимо:

привести задачу к канонической форме;

преобразовать задачу линейного программирования к симплексной форме, т.е. разделить переменные задачи на две группы: ***базисные*** и ***небазисные***. Разрешить систему относительно базисных переменных и исключить базисные переменные из целевой функции;

выполнить одну или более итераций симплекс-метода, которые включают:

(1) проверку достаточных условий оптимальности и выбор ведущей переменной;

(2) вычисление максимально допустимого шага вдоль ведущей переменной и выбор разрешающего уравнения;

(3) преобразование симплексной формы, связанное с заменой в базисе: переменная, соответствующая разрешающему уравнению, покидает базис, на ее место вводится ведущая переменная.

Г. Найти решение табличным симплекс-методом.

Табличный симплекс-метод является формальной, более удобной для вычислений, процедурой симплекс-метода в форме последовательного исключения переменных. Его алгоритм для решения задачи линейного программирования в нормальной форме состоит из подготовительного этапа и последовательности итераций. Подготовительный этап включает:

1) приведение условия к канонической форме

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 1/3x_1 + 2/3x_2 + x_3 = 400 \\ 1/2x_1 + 1/2x_2 + x_4 = 400 \\ 1/2x_1 + x_5 = 250 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

2) приведение задачи к симплексной форме и построение симплексной таблицы

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_3 = 400 - 1/3x_1 - 2/3x_2 \\ x_4 = 400 - 1/2x_1 - 1/2x_2 \\ x_5 = 250 - 1/2x_1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Коэффициенты симплексной формы переносятся в специальную симплексную таблицу

$x_н$ \ $x_б$	b	x_1	x_2
L	0	2	3
x_3	400	-1/3	-2/3
x_4	400	-1/2	-1/2
x_5	250	-1/2	0

Этой таблице соответствует начальный базисный план:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 400 \\ 400 \\ 250 \end{pmatrix}, \quad L(x^{(0)}) = 0.$$

На этом подготовительный этап окончен. Переходим к итерациям табличного симплекс-метода. Каждая итерация симплекс-метода состоит из 3-х шагов:

1. *Проверка условий оптимальности, определение ведущего столбца.*

Условие оптимальности базисного плана выполняется в том случае, если в задаче на минимум все коэффициенты целевой функции положительны или если в задаче на максимум все коэффициенты целевой функции отрицательны. Если выполняется условие оптимальности, то решение задачи заканчивается.

Если условие оптимальности базисного плана не выполняется, то в качестве ведущего столбца выбирается столбец, которому соответствует максимальный по модулю коэффициент целевой функции. Для экстремума "максимум" просматриваются положительные коэффициенты целевой функции, для "минимум"- отрицательные.

В рассматриваемом примере ведущим столбцом будет являться столбец x_2.

2. Вычисление максимально допустимого шага и определение разрешающей строки.

В симплексную таблицу добавляется столбец, в который заносятся результаты расчета шага для каждой базисной переменной. Формально правило расчета можно сформулировать следующим образом: если коэффициент в ведущем столбце больше либо равен нулю, то соответствующий шаг равен бесконечности; иначе он равен отношению соответствующего значения в столбце b к значению в ведущем столбце, взятому с противоположным знаком.

Максимально допустимый шаг вдоль ведущей переменной равен наименьшему из найденных шагов.

Формально это правило можно записать с помощью следующих соотношений

$$\Theta^0 = \min_i \Theta_i, \quad \Theta_i = \begin{cases} \infty, & r_i \ge 0; \\ -b_i / r_i, & r_i < 0. \end{cases}$$

Здесь Θ^0 – максимально допустимый шаг, Θ_i – шаг, рассчитанный по i-ой строке таблицы; b_i, r_i – элементы i-ой строки таблицы, находящиеся соответственно в столбце b и ведущем столбце таблицы.

Если $\Theta^0=\infty$, то целевая функция неограниченно возрастает (или убывает) на множестве планов задачи. Ее решение в этом случае окончено.

Допустим, что $\Theta^0<\infty$. Строка, содержащая максимально допустимый шаг Θ^0 (т.е. содержащая наименьшее из найденных чисел), называется разрешающей.

Результаты вычисления максимально допустимого шага для рассматриваемого примера приведены ниже:

$x_н$ \ $x_б$	b	x_1	x_2	Θ
L	0	2	3	
x_3	400	-1/3	-2/3	600
x_4	400	-1/2	-1/2	800
x_5	250	-1/2	0	∞

Серым цветом в этой таблице выделены ведущий столбец и разрешающая строка. Элемент, находящийся на пересечении ведущего столбца и разрешающей строки, называется разрешающим.

3. Замена в базисе и пересчет симплексной таблицы.

После определения ведущего столбца и ведущей строки производим замену в базисе: базисная переменная, соответствующая разрешающей строке, покидает базис, вместо нее в базис вводится небазисная переменная, соответствующая ведущему столбцу. Эта замена сопровождается пересчетом симплексной таблицы, который осуществляется по по четырем правилам:

3.1) «новый» разрешающий элемент есть число, обратное к «старому» разрешающему элементу, т.е.

$$\tilde{r} = \frac{1}{r}.$$

Здесь $\tilde{r}$ – «новый» разрешающий элемент, r – «старый» разрешающий элемент;

3.2) «новые» элементы разрешающей строки получаются из «старых» элементов делением на «старый» разрешающий элемент, взятый с противоположным знаком, т.е.

$$\tilde{s} = -\frac{s}{r}.$$

Здесь $\tilde{s}$ – «новый» элемент разрешающей строки, s – «старый» элемент разрешающей строки;

3.3) «новые» элементы ведущего столбца получаются из «старых» элементов делением на «старый» разрешающий элемент, т.е.

$$\tilde{t} = \frac{t}{r}$$

Здесь $\tilde{t}$ – «новый» элемент ведущего столбца, t – «старый» элемент ведущего столбца;

3.4) рассмотрим произвольный элемент таблицы, не находящийся ни в ведущем столбце, ни в разрешающей строке. Обозначим его, например, q. Найдем его проекции на ведущий столбец и разрешающую строку. Обозначим их соответственно t и s (см. рисунок ниже).

	q		t	
	s		r	

Пусть $\tilde{q}$ – «новый» элемент таблицы. Тогда он находится по формуле:

$$\tilde{q} = q - \frac{s \cdot t}{r}$$

Эту формулу называют правилом прямоугольника. Словами его можно сформулировать так: «новый» элемент симплексной таблицы есть разность между его старым значением и произведением проекций, разделенным на разрешающий элемент.

Применим сформулированные выше правила к рассматриваемому примеру. В результате получим таблицу

$x_н$ / $x_б$	b	x_1	x_3
L	1800	1/2	-9/2
x_2	600	-1/2	-3/2
x_4	100	-1/4	3/4
x_5	250	-1/2	0

Новой симплексной таблице соответствует базисный план

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \\ 0 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}, \quad L(x^{(0)}) = 1800.$$

Напомним, что в базисном плане небазисные компоненты равны нулю, а значения базисных равны свободным членам симплексной формы. В симплексной таблице последние находятся в столбце b. Значение целевой функции можно получить, если подставить в нее найденные значения базисного плана. В таблице значение целевой функции находится на пересечении строки L и столбца b.

Шаги 1) – 3) составляют суть итерации симплекс-метода в табличной форме. Они циклически повторяются до тех пор, пока не будет построен оптимальный план задачи линейного программирования, или не возникнет ситуация неограниченного возрастания (убывания) целевой функции.

Продолжим рассмотрение примера. Так как задача на максимум, а в строке целевой функции есть положительные коэффициенты, то базисный план $x^{(2)}$ не является оптимальным. В качестве ведущего выбирается столбец x1. Результаты вычисления максимально допустимого шага и выбора разрешающей строки представлены в таблице

$x_н$ \ $x_б$	b	x_1	x_3	Θ
L	1800	1/2	-9/2	
x_2	600	-1/2	-3/2	1200
x_4	100	-1/4	3/4	400
x_5	250	-1/2	0	500

Таким образом, переменная x_4 покидает базис, вместо нее вводится переменная x_1. Замена в базисе и пересчет симплексной таблицы по правилам 3.1) – 3.4) приводят к следующему результату

$x_н$ \ $x_б$	b	x_4	x_3
L	2000	-2	-3
x_2	400	2	-3
x_1	400	-4	3
x_5	50	2	-3/2

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad L(x^{(2)}) = 2000.$$

Поскольку в строке целевой функции отсутствуют положительные коэффициенты, то полученный базисный план оптимален, решение задачи окончено.

Задание №2

Решить двухфазным симплекс-методом задачу линейного программирования.

Варианты данных

№ вар.	Задача	№ вар.	Задача
1	$3x_1+6x_2-2x_3 \to \max$ $x_1+x_2+x_3 \le 130$ $2x_1-x_2=10$ $-x_1+2x_2+x_3 \ge 5$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$	2	$x_1-2x_2-5x_3 \to \min$ $2x_1+x_2+x_3 \le 80$ $-x_1+2x_3 \ge 25$ $-x_1+x_2+x_3=20$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$
3	$-2x_1+4x_2-2x_3 \to \min$ $x_1+2x_2+x_3 \le 60$ $2x_1+x_2-x_3=40$ $x_2+2x_3 \ge 6$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$	4	$3x_1-x_2+2x_3 \to \max$ $x_1+x_2+x_3 \le 40$ $2x_1-x_3 \ge 8$ $-x_1+2x_2+x_3=40$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$
5	$x_1-2x_2+3x_3 \to \max$ $x_1+x_2+x_3 \le 50$ $-2x_2+x_3 \ge 40$ $-x_1+2x_2+x_3=40$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$	6	$-2x_1-4x_2-x_3 \to \min$ $x_2+x_3=40$ $2x_1+x_2+2x_3 \le 100$ $-x_1+2x_2+x_3 \ge 30$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$
7	$2x_1+-x_2+x_3 \to \max$ $x_1+2x_2+x_3 \le 90$ $2x_1-x_2+x_3=40$ $-x_1+x_2+2x_3 \ge 20$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$	8	$-3x_1+x_2-4x_3 \to \min$ $x_1+x_2+2x_3=80$ $x_1+x_2-x_3 \ge 10$ $x_1+x_3 \le 50$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$
9	$-x_1-5x_2-2x_3 \to \min$ $x_2-x_3 \ge 10$ $x_1+2x_2=70$ $x_1-x_2+2x_3 \le 40$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$	10	$5x_1-2x_2+3x_3 \to \max$ $x_1+x_2+x_3 \le 70$ $x_1-x_2+2x_3=30$ $2x_1-x_3 \ge 40$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$
11	$3x_1+3x_2+2x_3 \to \max$ $x_1+x_2+x_3 \le 70$ $2x_1+x_2-x_3=10$ $-x_1+x_2+2x_3 > 50$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$	12	$-2x_1-4x_2-5x_3 \to \min$ $x_1+2x_2-x_3 \le 80$ $x_1-x_2 \ge 5$ $x_1+x_2+x_3=60$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$
13	$-2x_1-x_2-3x_3 \to \min$ $2x_1+x_2+x_3=80$ $x_1-x_2+2x_3 \ge 30$ $-x_1+2x_2-x_3 \le 10$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$	14	$7x_1+x_2-x_3 \to \max$ $2x_1+x_2+x_3 \le 90$ $-x_1+x_2=10$ $x_1+x_2-2x_3 \ge 5$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$
15	$3x_1+4x_2-2x_3 \to \max$ $x_1+x_2+2x_3=80$ $2x_1-x_2 \ge 15$ $-x_1+2x_2+x_3 \le 50$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$	16	$3x_1-2x_2-7x_3 \to \min$ $2x_1+x_2+x_3 \le 60$ $-2x_1+x_2+x_3=10$ $x_1-2x_2+x_3 \ge 30$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$
17	$-4x_1+2x_2-x_3 \to \min$ $x_1+2x_2+x_3 \le 60$ $2x_1+x_2-x_3 \ge 10$ $-x_1+x_2+2x_3=40$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$	18	$x_1-2x_2+3x_3 \to \max$ $x_1+x_2+x_3 \le 70$ $2x_1-x_3=50$ $-x_1+2x_2+x_3 \ge 15$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$

19	$4x_1-2x_2+3x_3\to max$ $2x_1+x_2+x_3=70$ $-x_2+x_3\le 30$ $-x_1+2x_2+x_3\ge 20$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	20	$-2x_1-x_2-5x_3\to min$ $x_2+x_3=40$ $2x_1+x_3\le 70$ $-x_1+2x_2+x_3\ge 30$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
21	$3x_1+5x_2+2x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 90$ $2x_1+x_2-x_3=30$ $-x_1+2x_2+2x_3>40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	22	$-5x_1-x_2-3x_3\to min$ $2x_1+x_2-x_3\le 80$ $x_1+2x_3\ge 50$ $x_1-x_2+x_3=40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
23	$-x_1-4x_2-3x_3\to min$ $x_1+x_2+x_3=80$ $x_1-2x_2+x_3\ge 30$ $-x_1+x_2+x_3\le 20$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	24	$2x_1+x_2-3x_3\to max$ $2x_1+x_2+x_3\le 100$ $-x_1+2x_2=20$ $x_1+x_2-x_3\ge 5$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
25	$8x_1+4x_2-2x_3\to max$ $x_1+2x_2+x_3=70$ $2x_1-x_2\ge 20$ $x_2+2x_3\le 40$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	26	$x_1-4x_2-5x_3\to min$ $x_1+x_2+2x_3\le 100$ $-2x_1+x_2+x_3=15$ $x_1-x_2\ge 10$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
27	$-4x_1+3x_2-2x_3\to min$ $x_1+2x_2+x_3\le 90$ $2x_1+-x_2+x_3\ge 10$ $-x_1+x_2+2x_3=30$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	28	$5x_1-2x_2+3x_3\to max$ $x_1+x_2+x_3\le 100$ $2x_1+x_2=40$ $-x_1+2x_3\ge 20$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$
29	$3x_1+5x_2+x_3\to max$ $x_1+x_2+2x_3=80$ $-x_2+2x_3\le 50$ $-2x_1+x_2+x_3\ge 15$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$	30	$-2x_1-5x_2+x_3\to min$ $x_2+2x_3=50$ $2x_1+x_2+x_3\le 90$ $x_1+2x_2-x_3\ge 30$ $x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0$

Решение типового варианта задания № 2

Двухфазный симплекс-метод используется для решения задачи линейного программирования в общей форме:

$$L(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to extr(max,min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\oplus b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\oplus b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\oplus b_m, \\ x_1\ge0, x_2\ge0,\ldots,x_n\ge0, \end{cases}$$

$$\oplus\in\{\le,=\ge\}.$$

Он состоит из подготовительного этапа и двух фаз. Подготовительный этап включает:

А. Приведение условия к канонической форме.

Этот вопрос обсуждался в задании 1. Поэтому останавливаться на нем не будем.

Б. Проверку условия $b\ge0$.

Для двухфазного симлекс-метода необходимо, чтобы вектор свободных членов системы основных ограничений не содержал отрицательных членов. Поэтому, если система основных ограничений содержит уравнения с отрицательными свободными членами, то умножаем такие уравнения на -1.

В. Анализ системы основных ограничений на предпочтительность.

Будем говорить, что:

а) уравнение системы основных ограничений ***находится в предпочтительном виде***, если его свободный член неотрицателен и присутствует переменная с коэффициентом 1, отсутствующая в других ограничениях системы основных ограничений. Эту переменную (для краткости формулировок) также будем называть предпочтительной;

b) система основных ограничений находится в ***предпочтительном виде***, если все ее ограничения находятся в предпочтительном виде;

с) уравнение ***приводится к предпочтительному виду***, если в нем присутствует переменная с ненулевым коэффициентом, отсутствующая в других ограничениях системы, и ее коэффициент совпадает по знаку со свободным членом данного ограничения. Очевидно, для того чтобы привести такое уравнение к предпочтительному виду, необходимо разделить его на коэффициент при переменной, отсутствующей в других уравнениях системы.

Уравнения в предпочтительном виде «хороши» тем, что система основных ограничений легко разрешается относительно соответствующих предпочтительных переменных. Поэтому, если система основных ограничений находится в предпочтительном виде, она сразу же приводится к симплексной форме. При этом предпочтительные переменные становятся базисными, остальные – небазисными. Такая система решается обычным симплекс-методом.

Если же система основных ограничений не находится в предпочтительном виде, то для решения задачи используют двухфазный симплекс-метод.

Рассмотрим пример:

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 100, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 80, \\ x_1 \quad - \quad x_3 \ge 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Каноническая форма этой задачи будет следующей:

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 100, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad = 80, \\ x_1 \quad - \quad x_3 - x_5 = 20, \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Анализ системы основных ограничений говорит о том, что только первое уравнение находится в предпочтительном виде (предпочтительная переменная – x_4), т.е. система в целом в предпочтительном виде не находится.

Первая фаза двухфазного симплекс-метода содержит следующие шаги:

1. Построение вспомогательной задачи.

Для построения вспомогательной задачи в каждое уравнение системы основных ограничений, которое не находится в предпочтительном виде, введем вспомогательную переменную. Эту переменную в дальнейшем будем называть ***фиктивной***. Название подчеркивает характер такой переменной: она вводится временно для достижения определенных целей и после их достижения будет выведена из рассмотрения. Этим фиктивная переменная отличается от свободной переменной, которая сохраняется на протяжении всего решения задачи.

После введения фиктивных переменных составим вспомогательную целевую функцию. Она представляет собой сумму фиктивных переменных и подлежит минимизации (независимо от направления экстремума в исходной задаче).

Получившаяся в результате описанных выше действий задача и есть вспомогательная задача линейного программирования.

Построим вспомогательную задачу для рассматриваемого примера. Результаты анализа на предпочтительность запишем в следующем виде:

	Предп. перем.	Фикт. перем.
$x_1+2x_2+x_3+x_4=100,$	x_4	
$x_1-x_2+2x_3=80,$		x_6
$x_1-x_3-x_5=20,$		x_7

Такая запись подчеркивает, что первое уравнение находится в предпочтительном виде, а в два других уравнения необходимо ввести фиктивные переменные.

В результате проведенного анализа вспомогательная задача линейного программирования примет вид:

$$L_B(x)=x_6+x_7\to min,$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=100,\\ x_1-x_2+2x_3+x_6=80,\\ x_1-x_3-x_5+x_7=20,\\ x_i\ge 0, i=\overline{1,7}. \end{cases}$$

2. Решение вспомогательной задачи.

Разрешив вспомогательную задачу относительно предпочтительных и фиктивных переменных и исключив фиктивные переменные из вспомогательной целевой функции, получим симплексную форму вспомогательной задачи. После переноса коэффициентов в симплексную таблицу решаем вспомогательную задачу табличным симплекс-методом с одним дополнительным правилом: если фиктивная переменная покидает базис, то выводим ее из задачи вообще, удаляя соответствующий столбец из симплексной таблицы.

Продемонстрируем сказанное выше на примере. Система основных ограничений, разрешенная относительно предпочтительных и фиктивных переменных, примет вид:

$$\begin{cases} x_4=100-x_1-2x_2-x_3,\\ x_6=80-x_1+x_2-2x_3,\\ x_7=20-x_1+x_3+x_5. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x_6, x_7 в целевую вспомогательную функцию, получим:

$$x_6 + x_7 = 80 - x_1 + x_2 - 2x_3 + 20 - x_1 + \quad x_3 + x_5 =$$

$$= 100 - 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5$$

Таким образом, симплексная форма вспомогательной задачи будет такой:

$$100 - 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \to min,$$

$$\begin{cases} x_4 = 100 - x_1 - 2x_2 - x_3, \\ x_6 = \ 80 - x_1 + x_2 - 2x_3, \\ x_7 = \ 20 - x_1 \qquad + \ x_3 + x_5 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Перенесем коэффициенты в таблицу

$x_н$ \ $x_б$	b	x_1	x_2	x_3	x_5
L	100	-2	1	-1	1
x_4	100	-1	-2	-1	0
x_6	80	-1	1	-2	0
x_7	20	-1	0	1	1

Так как вспомогательная задача на минимум, а среди коэффициентов целевой функции есть отрицательные, то достаточное условие не выполняется и x_1 – ведущая переменная. Рассчитав максимально допустимый шаг, получаем, что разрешающей будет строка с переменной x_7:

$x_н$ \ $x_б$	b	x_1	x_2	x_3	x_5	Θ
L	100	-2	1	-1	1	
x_4	100	-1	-2	-1	0	100
x_6	80	-1	1	-2	0	80
x_7	20	-1	0	1	1	20

Выводим фиктивную переменную x_7 из базиса, заменяя ее переменной x_1, и пересчитываем симплексную таблицу:

$x_н$ \ $x_б$	b	x_7	x_2	x_3	x_5
L	60		1	-3	-1
x_4	80		-2	-2	-1
x_6	60		1	-3	-1
x_1	20		0	1	1

Так как x_7 – фиктивная переменная, то она выводится из таблицы вообще, т.е. таблица принимает вид:

$x_б$ \ $x_н$	b	x_2	x_3	x_5
L	60	1	-3	-1
x_4	80	-2	-2	-1
x_6	60	1	-3	-1
x_1	20	0	1	1

По-прежнему она не удовлетворяет достаточному условию оптимальности. Поэтому выполняем еще одну итерацию симплекс-метода:

$x_б$ \ $x_н$	b	x_2	x_3	x_5	Θ
L	60	1	-3	-1	
x_4	80	-2	-2	-1	40
x_6	60	1	-3	-1	20
x_1	20	0	1	1	∞

В результате замены в базисе и пересчета симплексной таблицы получим (фиктивная переменная x_6 покинула базис и таблицу вообще):

$x_б$ \ $x_н$	b	x_2	x_5
L	0	0	0
x_4	40	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	20	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_1	40	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Для последней таблицы выполнено достаточное условие оптимальности. Решение вспомогательной задачи окончено. Построен начальный базисный план исходной задачи:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 20 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На этом первая фаза симплекс-метода окончена. Переходим ко второй фазе.

На первой фазе решалась вспомогательная задача линейного программирования. От исходной задачи ее отличали следующие элементы:

1) наличие фиктивных переменных в системе основных ограничений;

2) искусственная целевая функция.

В ходе первой фазы все фиктивные переменные покинули задачу. Поэтому система основных ограничений вспомогательной задачи совпадает с исходной системой основных ограничений.

Искусственная целевая функция с исчезновением фиктивных переменных трансформировалась в нулевую. Поэтому для перехода ко второй фазе симплекс-метода необходимо вернуться к исходной целевой функции. Поскольку исходная целевая функция содержит базисные переменные, их необходимо исключить, выразив через небазисные. С этой целью из последней симплексной таблицы выпишем соотношения, связывающие базисные переменные с небазисными:

$$x_4 = 40 - 2\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5$$

$$x_3 = 20 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5 \quad .$$

$$x_1 = 40 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_5$$

Подставляя в исходную целевую функцию вместо переменных x_1, x_3 соответствующие выражения, получим:

$$L(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2(40 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_5) + 3x_2 -$$

$$-(20 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5) = 60 + 3\frac{1}{3}x_2 + 1\frac{2}{3}x_5$$

В результате симплексная таблица примет вид:

$x_б$ \ $x_н$	b	x_2	x_5
L	60	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$
x_4	40	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_3	20	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_1	40	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Вторая фаза симплекс-метода состоит в решении исходной задачи на основании результатов, полученных в ходе первой фазы. Поскольку целевая функция на максимум, то начальный базисный план не оптимален. Требуется его улучшение. Приведем без комментариев последовательность симплексных таблиц, которая приводит к оптимальному базисному плану.

$x_б$ \ $x_н$	b	x_2	x_5	Θ
L	60	$3\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	
x_4	40	$-2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	15
x_3	20	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	∞
x_1	40	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	∞

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 20 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(x^{(0)}) = 60.$$

$x_б$ \ $x_н$	b	x_4	x_5	Θ
L	110	$-1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$	
x_2	15	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	120
x_3	25	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$66\frac{2}{3}$
x_1	45	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	∞

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 45 \\ 15 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(x^{(1)}) = 110.$$

$x_б$ \ $x_н$	b	x_4	x_3
L	$193\frac{1}{3}$	$-1\frac{2}{3}$	$-3\frac{1}{3}$
x_2	$6\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	$66\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-2\frac{2}{3}$
x_1	$86\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-1\frac{2}{3}$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 86\frac{2}{3} \\ 6\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 66\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad L(x^{(2)}) = 193\frac{1}{3}.$$

Последний полученный план является оптимальным.

Задание №3

Решить распределительным методом транспортную задачу. Начальный базисный план перевозок построить методом северо-западного угла.

Варианты данных

№ вар.	Задача				№ вар.	Задача			
1	Пост \ Потр	20	30	60	2	Пост \ Потр	30	25	20
	30	7	10	2		15	9	5	1
	25	1	8	5		40	7	10	3
	40	3	2	9		35	2	1	8
3	Пост \ Потр	70	50	30	4	Пост \ Потр	50	30	30
	50	9	1	3		50	8	1	2
	50	7	10	2		40	2	9	5
	40	2	4	8		30	4	1	7
5	Пост \ Потр	50	50	40	6	Пост \ Потр	30	40	20
	20	7	1	3		35	9	5	1
	50	9	8	2		45	2	8	7
	30	2	6	2		30	3	1	9
7	Пост \ Потр	30	10	40	8	Пост \ Потр	50	30	30
	40	9	4	1		50	8	2	3
	30	2	1	8		20	1	7	2
	30	4	3	10		30	4	10	9
9	Пост \ Потр	40	30	50	10	Пост \ Потр	60	30	40
	50	9	7	2		30	10	1	4
	25	1	10	3		55	8	9	3
	35	2	5	10		35	2	5	8
11	Пост \ Потр	50	40	50	12	Пост \ Потр	15	25	20
	20	8	1	3		20	10	9	3
	80	9	10	2		15	2	8	2
	50	4	1	7		30	1	3	9
13	Пост \ Потр	20	40	25	14	Пост \ Потр	20	30	15
	30	9	5	2		25	11	6	3
	25	1	10	3		15	2	9	1
	25	2	4	1		10	1	8	4
15	Пост \ Потр	30	40	30	16	Пост \ Потр	20	25	30
	40	8	6	1		35	10	4	2
	15	1	11	3		20	1	10	7
	35	3	9	2		25	2	1	10

17	Пост \ Потр	40	40	50	18	Пост \ Потр	40	30	50
	40	9	1	3		20	10	3	1
	50	2	10	5		60	9	10	5
	60	3	2	7		50	4	2	9
19	Пост \ Потр	35	40	25	20	Пост \ Потр	30	25	30
	40	10	3	1		40	9	5	2
	35	2	9	3		35	1	11	7
	25	2	1	9		30	3	2	8
21	Пост \ Потр	30	40	60	22	Пост \ Потр	30	30	50
	60	7	10	1		40	11	5	2
	25	2	8	3		30	3	9	5
	55	2	9	6		50	1	2	9
23	Пост \ Потр	40	30	35	24	Пост \ Потр	35	50	30
	40	8	2	1		45	8	2	3
	25	1	9	3		40	5	10	2
	30	2	6	10		30	4	1	9
25	Пост \ Потр	30	40	30	26	Пост \ Потр	50	40	30
	40	9	6	2		40	8	2	1
	35	1	11	7		45	6	9	3
	35	3	1	9		25	3	5	12
27	Пост \ Потр	15	40	45	28	Пост \ Потр	30	40	35
	36	7	10	3		20	9	6	1
	24	1	9	5		40	6	10	3
	30	2	2	9		35	1	5	9
29	Пост \ Потр	30	45	25	30	Пост \ Потр	40	40	30
	35	10	6	2		40	9	3	1
	30	1	11	3		25	1	10	3
	55	2	5	9		35	3	6	8

Решение типового варианта задания № 3

Решение транспортной задачи начинается с проверки условия баланса: совпадают ли запасы продукции на складах поставщиков с потребностями в ней. Задача, в которой суммы по поставщикам и потребителям совпадают, называется транспортной задачей закрытого типа, в отличие от задач открытого типа, в которых условие баланса не выполняется. Если транспортная задача является открытой, то она обычно сводится к закрытой посредством введения фиктивного поставщика, если спрос превышает предложение, или фиктивного потребителя в противном случае.

Фиктивному поставщику в качестве объема его поставки приписывается разница между суммарным спросом и суммарным предложением. Затраты на доставку продукции принимаются нулевыми.

Аналогичным образом вводится и фиктивный потребитель, если суммарное предложение превышает спрос. В таблице фиктивный поставщик отображается с помощью дополнительной строки, фиктивный потребитель – с помощью дополнительного столбца.

Для примера рассмотрим транспортную задачу со следующими данными

Потр / Пост	30	20	50
40	1	7	1
30	4	8	2
20	1	2	3

Запасы продукции на складах поставщиков равняются 40+30+20=90, а потребности в продукции потребителей – 30+20+50=100, т.е. задача является открытой. Для приведения задачи к закрытому типу введем фиктивного поставщика с объемом поставки 100-90=10 и нулевыми затратами на доставку:

Потр / Пост	30	20	50
40	1	7	1
30	4	8	2
20	1	2	3
10	0	0	0

Дальнейшее рассмотрение процедуры решения проведем для транспортной задачи, условие которой имеет вид:

Потр / Пост	40	50	30	20	
30	9	1	1	7	(1)
60	5	1	2	6	(2)
50	4	2	1	5	(3)
	(1)	(2)	(3)	(4)	

(цифры в скобках справа от таблицы обозначают номера ее строк, цифры под таблицей – номера ее столбцов). Эта задача является закрытой и не требует введения фиктивного поставщика (или потребителя). Поэтому процесс ее решения сразу начинается с построения начального базисного плана перевозок.

Рассмотрим **алгоритм построения начального базисного плана перевозок методом северо-западного угла**.

Выберем в таблице северо-западную клетку (в соответствии с географической терминологией – это клетка в левом верхнем углу таблицы, что объясняет название метода). В начале работы алгоритма – это всегда клетка (1,1). Первый поставщик предлагает 30 единиц продукции, первому потребителю требуется 40 единиц. Поэтому объем поставки от первого поставщика первому потребителю примем равным 30 единицам: $x_{11}=min\{30,40\}=30$. Запасы первого поставщика $a_1=30$ и потребности первого потребителя $b_1=40$ уменьшим на величину только что рассчитанной поставки $x_{11}=30$. Поскольку при этом откорректированный объем поставки $\overline{a_1}=a_1-x_{11}=30-30=0$, то первую строку вычеркнем из таблицы:

		10			
	Потр / Пост	~~40~~	50	30	20
0	~~30~~	9 30	1	1	7
	60	5	1	2	6
	50	4	2	1	5

В оставшейся части таблицы опять выберем северо-западную клетку. Теперь это будет клетка (2,1). Объем поставки для этой клетки составит $x_{21}=min\{60,10\}=10$ единиц. После корректировки a_2 и b_1 и вычеркивания первого столбца таблица примет вид:

		0 ~~10~~			
	Потр / Пост	~~40~~	50	30	20
0	~~30~~	9 30	1	1	7
50	~~60~~	5 10	1	2	6
	50	4	2	1	5

Снова в оставшейся части таблицы выбираем северо-западную клетку – (2,2). Для нее объем поставки составит $x_{22}=min\{50,50\}=50$. После корректировки запасов и потребностей получим: $\overline{a_2}=a_2-x_{22}=50-50=0$, $\overline{b_2}=b_2-x_{22}=50-50=0$. Это означает, что из таблицы одновременно вычеркиваются и строка, и столбец:

		0	0		
		~~10~~			
	Потр / Пост	~~40~~	~~50~~	30	20
0	~~30~~	9 30	1	1	7
0 ~~50~~	~~60~~	5 10	1 50	2	6
	50	4	2	1	5

Аналогичным образом выполняются последующие итерации, после чего таблица примет вид:

		0			
		~~10~~	0	0	0
	Потр / Пост	~~40~~	~~50~~	~~30~~	~~20~~
0	~~30~~	9 30	1	1	7
0 ~~50~~	~~60~~	5 10	1 50	2	6
0 ~~20~~	~~50~~	4	2	1 30	5 20

Таким образом, в результате работы алгоритма построен план перевозок:

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 30	1	1	7
60	5 10	1 50	2	6
50	4	2	1 30	5 20

Поскольку на каждой итерации алгоритма после заполнения клетки вычеркивались строка или столбец (или и строка и столбец вместе), то заполненные клетки не образуют между собой циклов (циклом называются соединенные между собой клетки вертикальными и горизонтальными звеньями замкнутой ломаной линии, при этом в клетках цикла ломаная обязательно должна менять направление). Для того, чтобы заполненные клетки образовывали базис транспортной таблицы, их должно быть n+m-1, где m – количество поставщиков, а n – количество потребителей (в нашем случае имеем 3+4-1=6). Следовательно, построенный план не является базисным, т.к. количество заполненных клеток составляет 5.

Для того чтобы он стал базисным, необходимо дополнить его фиктивно заполненной (нулем) клеткой. Главное условие к фиктивно заполненной клетке – она не должна образовывать циклов с ранее заполненными клетками. Если таблица небольшая, то ее несложно найти простым подбором. Однако в методе северо-западного угла место расположения фиктивной базисной клетки можно безошибочно указать, если проанализировать траекторию заполнения клеток. Для этого соединим заполненные клетки ломаной линией в порядке их заполнения (см. таблицу выше). То место, где переход от одной клетки к другой осуществляется по диагонали, и является местом возможного расположения фиктивной базисной клетки – это одна из пустых клеток расположенных рядом с диагональным переходом. Рекомендуется заполнять нулем клетку с меньшими транспортными затратами.

В нашем примере годится любая из клеток (3,2) и (2,3). Для определенности выберем клетку (2,3). В результате получим начальный базисный план перевозок:

Пост \ Потр	40	50	30	20
30	9 30	1	1	7
60	5 10	1 50	2 0	6
50	4	2	1 30	5 20

Рассмотрим **алгоритм распределительного метода** решения транспортных задач.

1. Проверка достаточного условия оптимальности базисного плана.

Если

$$\Delta_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in U_{\text{н}}, \tag{3.1}$$

где Δ_{ij} – оценка небазисной клетки, $U_{н}$ – множество небазисных клеток транспортной задачи, то базисный план перевозок оптимален.

Для вычисления оценки Δ_{ij} небазисной клетки необходимо построить цикл, который небазисная клетка образует с базисными. Далее нужно обойти клетки цикла, начиная с небазисной клетки, в определенном направлении, например, против часовой стрелки, и пометить клетки по очереди знаками «+» и «-» (начиная с небазисной клетки, которую помечают знаком «+»). Введем следующие обозначения: U_{ij}^{+} – множество клеток цикла, помеченных знаком «+», U_{ij}^{-} – множество клеток цикла, помеченных знаком «-». Тогда

$$\Delta_{ij} = \sum_{(k,l)\in U_{ij}^{+}} c_{kl} - \sum_{(k,l)\in U_{ij}^{-}} c_{kl}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим построение цикла и вычисление оценки на примере клетки (1,2).

Пост \ Потр	40	50	30	20
30	9 – 30	1 +	1	7
60	5 + 10	1 – 50	2 0	6
50	4	2	1 30	5 20

Небазисную клетку (1,2) помечаем знаком «+». Далее строим цикл против часовой стрелки: клетку (1,1) помечаем знаком «-», (2,1) – «+» и (2,2) – «-».

Помеченные клетки образуют цикл, т. к. они соединены между собой вертикальными и горизонтальными звеньями замкнутой ломаной линии, при этом в клетках цикла ломаная меняет направление.

После построения цикла находм оценку небазисной клетки (1,2) по формуле (3.2):

$$\Delta_{12}=c_{12}-c_{11}+c_{21}-c_{22}=1-9+5-1=-4$$

Значение полученной оценки меньше 0, значит, базисный план не оптимален и его можно улучшить. Но перед этим вычислим оценки всех оставшихся небазисных клеток:

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 30	1	1	7
60	5 10	1 50	2 0	6
50	4	2	1 30	5 20

$\Delta_{13}=c_{13}-c_{11}+c_{21}-c_{23}=1-9+5-2=-5<0$

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 30	1	1	7
60	5 10	1 50	2 0	6
50	4	2	1 30	5 20

$\Delta_{14}=c_{14}-c_{11}+c_{21}-c_{23}+c_{33}-c_{34}=7-9+5-2+1-5=-3<0$

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 30	1	1	7
60	5 10	1 50	2 0	6
50	4	2	1 30	5 20

$\Delta_{24}=c_{24}-c_{23}+c_{33}-c_{34}=6-2+1-5=0\geq 0$

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 30	1	1	7
60	5 10	1 50	2 0	6
50	4	2	1 30	5 20

$\Delta_{31}=c_{31}-c_{21}+c_{23}-c_{33}=4-5+2-1=0\geq 0$

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 30	1	1	7
60	5 10	1 50	2 0	6
50	4	2	1 30	5 20

$\Delta_{32}=c_{32}-c_{22}+c_{23}-c_{33}=2-1+2-1=2\geq 0$

Оценки трех клеток из первой строки являются отрицательными и не удовлетворяют достаточному условию оптимальности (3.1). Следовательно, представленный в таблице план является неоптимальным и его можно улучшить. По аналогии с симплекс-методом выберем из отрицательных оценок максимальную по модулю. В нашем примере это оценка -5, которая находится в клетке (1,3). Клетку (1,3) в дальнейшем будем называть **ведущей**.

2. Вычисление максимально допустимой циркуляции.

Введем в рассмотрение величину Θ, на которую циклически изменяются объемы поставок в транспортной задаче, и назовем ее циркуляцией.

Построим цикл $U_{i^*j^*}$, который образует ведущая клетка (i^*j^*) с базисными клетками таблицы, и разметим его знаками «+» и «-».

Обозначим максимально допустимую циркуляцию через Θ^0. Тогда

$$\Theta^0=\min_{(i,j)\in U^-_{i^*j^*}} x_{ij}. \qquad (3.3)$$

Таким образом, для вычисления максимально допустимой циркуляции необходимо найти минимальное из чисел x_{ij}, находящихся в клетках цикла, помеченных знаком «-».

Применим проведенные рассуждения к рассматриваемому примеру. Максимальную по модулю отрицательную оценку имеет ведущая клетка (1,3). Построим и разметим для этой клетки цикл:

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 – 30	1	1 +	7
60	5 + 10	1 50	2 – 0	6
50	4	2	1 30	5 20

Для приведенного цикла знаком «-» помечены клетки (1,1) и (2,3) со значениями продукции 30 и 0 единиц соответственно. Тогда, максимально допустимая циркуляция согласно (3.3) составит:

$$\Theta^0 = min\{30,0\} = 0$$

В данном случае проявилась специфика рассматриваемого примера: базисный план вырожден, т.е. содержит фиктивно заполненную клетку. Именно эта клетка вошла в цикл и оказалась помеченной знаком «-». Поэтому максимально допустимая циркуляция оказалась равной 0. Следует отметить, что подобная ситуация на практике встречается достаточно редко.

3. Построение нового базисного плана. Допустим, что в результате расчета максимально допустимой циркуляции оказалось, что

$$\Theta^0 = \min_{(i,j)\in U^-_{i^*j^*}} x_{ij} = x_{i_0 j_0}.$$

Здесь (i_0,j_0) – координаты клетки, которая «обусловила» величину максимально допустимой циркуляции. Будем называть эту клетку **разрешающей** (это клетка (2,3)).

Построение нового базисного плана перевозок включает:

1) пересчет плана перевозок. Изменения коснутся только тех клеток транспортной таблицы, которые составили вместе с ведущей клеткой цикл $U_{i^*j^*}$: в клетках цикла, помеченных знаком «+», объемы перевозок нужно увеличить на величину Θ^0; в клетках цикла, помеченных знаком «-», объемы перевозок нужно уменьшить на Θ^0. Обозначив через $\tilde{x}_{ij}$ измененные объемы поставок, формально это правило записывается так:

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & (i,j) \notin U_{i^*j^*}; \\ x_{ij} + \Theta^0, & (i,j) \in U^+_{i^*j^*}; \\ x_{ij} - \Theta^0, & (i,j) \in U^-_{i^*j^*}. \end{cases}$$

2) преобразование базиса. Так же, как и в симплекс-методе, разрешающая клетка покидает базис, вместо нее вводится ведущая:

$$\tilde{U}_H = U_H \setminus (i_0, j_0) \cup (i_*, j_*).$$

Применение этих правил к нашему примеру означает, что план перевозок фактически не изменится ($\Theta^0 = 0$). Клетка (2,3) выводится из базиса (освобождаем ее от фиктивного нуля), клетка (1,3) – вводится в базис (ее заполняем фиктивным нулем):

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 / 30	1	1 / 0	7
60	5 / 10	1 / 50	2	6
50	4	2	1 / 30	5 / 20

Дальнейшее решение проводится по описанной выше схеме.

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 − / 30	1	1 + / 0	7
60	5 / 10	1 / 50	2	6
50	4 +	2	1 − / 30	5 / 20

$\Delta_{12}=1-9+5-1= -4<0$
$\Delta_{14}=7-1+1-5= 2\geq 0$
$\Delta_{23}=2-1+9-5= 5\geq 0$
$\Delta_{24}=6-5+9-1+1-5= 5\geq 0$
$\underline{\Delta_{31}=4-9+1-1= -5<0}$, клетка (3,1) – ведущая
$\Delta_{32}=2-1+5-9+1-1= -3<0$
$\Theta^0=\min\{30,30\}=30$
клетка (3,3) – разрешающая

Если максимально допустимая циркуляция соответствует нескольким базисным клеткам, то в качестве разрешающей выбирается и выводится из базиса любая из них.

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9 − / 0	1 +	1 / 30	7
60	5 + / 10	1 − / 50	2	6
50	4 / 30	2	1	5 / 20

$\underline{\Delta_{12}=1-9+5-1= -4<0}$, клетка (1,2) – ведущая
$\Delta_{14}=7-9+5-6= -3<0$
$\Delta_{23}=2-1+9-5= 5\geq 0$
$\Delta_{24}=6-5+4-5= 0\geq 0$
$\Delta_{32}=2-1+5-4= 2\geq 0$
$\Delta_{33}=1-1+9-4= 5\geq 0$
$\Theta^0=\min\{0,50\}=0$
клетка (1,1) – разрешающая

Потр / Пост	40	50	30	20
30	9	1 / 0	1 / 30	7
60	5 / 10	1 / 50	2	6
50	4 / 30	2	1	5 / 20

$\Delta_{11}=9-5+1-1= 4\geq 0$
$\Delta_{14}=7-1+1-5+4-5= 1\geq 0$
$\Delta_{23}=2-1+1-1= 1\geq 0$
$\Delta_{24}=6-5+4-5= 0\geq 0$
$\Delta_{32}=2-1+5-4= 2\geq 0$
$\Delta_{33}=1-1+1-1+5-4= 1\geq 0$

Все оценки небазисных клеток неотрицательны, следовательно, выполняется достаточное условие оптимальности базисного плана перевозок. Решение задачи окончено.

Задание №4

У туриста, который собирается в поход есть рюкзак с вместительностью **b** кг и набор из **n** неделимых вещей, которые он хотел бы взять с собой. Каждая вещь обладает весом a_i кг. и стоимостью c_i руб. Найти такой набор вещей, который не превышает вместимости рюкзака по весу и будет обладать максимальной стоимостью.

Варианты данных

Для всех вариантов **n**=5.

№ варианта	c_1 / a_1	c_2 / a_2	c_3 / a_3	c_4 / a_4	c_5 / a_5	b
1	49	9	2	27	36	50
	21	14	4	18	10	
2	26	10	29	25	28	64
	18	8	29	12	19	
3	6	16	19	10	15	73
	21	25	24	8	19	
4	19	6	15	22	10	49
	12	10	25	8	10	
5	16	29	38	25	4	70
	30	26	23	13	1	
6	21	8	6	30	17	45
	1	27	10	9	13	
7	12	26	19	2	2	41
	15	4	23	12	1	
8	13	10	11	22	19	92
	23	27	29	23	20	
9	7	16	13	24	28	41
	13	5	5	12	20	
10	5	8	22	6	22	43
	8	20	3	11	15	
11	15	21	26	21	1	56
	14	12	16	17	16	
12	11	13	3	4	5	37
	25	4	3	11	6	
13	30	29	28	3	1	86
	16	25	21	26	26	
14	7	11	15	16	15	47
	11	30	8	1	13	
15	8	1	5	23	20	69
	6	22	11	25	28	
16	9	14	25	17	1	63
	23	22	20	18	1	
17	6	28	18	19	19	59
	17	14	18	14	16	
18	6	5	14	19	20	48
	14	12	4	13	21	
19	12	18	9	3	11	53
	12	23	5	1	30	

20	1	26	19	27	22	57
	2	30	13	16	15	
21	9	17	30	30	27	95
	18	30	21	29	29	
22	29	5	29	29	4	70
	5	16	22	30	20	
23	27	27	16	18	28	93
	29	26	12	27	30	
24	9	1	13	6	18	59
	29	6	5	18	21	
25	5	25	8	19	13	68
	9	16	22	22	22	
26	13	24	28	20	15	64
	14	19	22	18	13	
27	14	28	1	5	30	49
	6	19	11	10	19	
28	17	4	10	16	12	47
	13	7	17	4	22	
29	10	28	14	12	4	88
	25	29	22	24	17	
30	11	8	3	30	24	77
	23	11	25	18	26	

Решение типового варианта задания № 4

Рассмотрим задачу о рюкзаке со следующими параметрами

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	b
18	30	25	42	24	
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	50
24	15	20	14	10	

В этом случае математическая модель задачи будет иметь вид:

$$18x_1 + 30x_2 + 25x_3 + 42x_4 + 24x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 24x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 14x_4 + 10x_5 \le 50, \\ x_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad (4.1)$$

Набор значений переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 из множества $\{0,1\}$, который удовлетворяет единственному ограничению задачи (4.1), называется допустимым решением. Множество всех допустимых решений обозначим X^1 (верхний индекс **1** пока никакой роли не играет; это просто порядковый номер множества, который понадобится при последующем описании метода решения). Отметим, что количество допустимых решений, из которых состоит множество X^1, конечно и не превышает 2^5=32. Поэтому задачу (4.1), в принципе, можно решить простым перебором различных вариантов. Однако, если вещей не 5, а например 100, то количество вариантов становится необозримым (2^{100}) и их сложно перебрать даже с помощью компьютера.

Для решения задачи (4.1) используем метод ветвей и границ [...]. Этот метод состоит из последовательности шагов, каждый из которых может включать следующие действия:

а) разбиение исходного множества решений или его подмножеств на еще более мелкие подмножества;

б) вычисление оценок полученных подмножеств;

в) исключение из дальнейшего рассмотрения неперспективных подмножеств.

Шаг 1. На 1-ом шаге необходимо найти оценку оптимальной стоимости вещей для всего множества допустимых решений X^1 (или, более кратко, – оценку множества X^1). С этой целью откажемся от требования неделимости, т. е. предположим, что вещи стали делимыми, «сыпучими» (как, например, сахар, мука и т.д.). В математической модели это предположение отражается следующим образом:

$$18x_1 + 30x_2 + 25x_3 + 42x_4 + 24x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 24x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 14x_4 + 10x_5 \le 50, \\ 0 \le x_i \le 1, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Записанная выше задача – задача линейного программирования, и ее можно решать с помощью симплекс-метода. Однако содержательный смысл задачи позволяет предложить более простую процедуру. Поскольку вещи стали «сыпучими» и можно вложить в рюкзак любую часть любой из них, то в первую очередь необходимо вкладывать в рюкзак те вещи, которые обладают наибольшей удельной стоимостью (удельная стоимость – это отношение стоимости вещи к ее весу). Для удобства дальнейших вычислений проделаем следующие действия. Рассчитаем для каждой вещи ее удельную стоимость $p_i=c_i/a_i$:

i	1	2	3	4	5
p_i	0,75	2	1,25	3	2,4

Упорядочим вещи в соответствии с убыванием удельной стоимости

i	4	5	2	3	1
p_i	3	2,4	2	1,25	2,4

Перепишем математическую модель задачи в соответствии с новым порядком:

$$42x_4 + 24x_5 + 30x_2 + 25x_3 + 18x_1 \to \max,$$

$$\begin{cases} 14x_4 + 10x_5 + 15x_2 + 20x_3 + 24x_1 \le 50, \\ 0 \le x_i \le 1, i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad (4.2)$$

Теперь очевидно, что целиком в рюкзак входят вещи №4, 5, 2. Их общий вес 39 кг. Вещь № 3 входит частично, точнее, в рюкзак вмещается (50-39)/20= 11/20 вещи №3. Таким образом, имеет место следующее оптимальное решение задачи (4.2), которое обозначим как X^{1*}:

X^{1*}	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1
	1	1	1	11/20	0

Стоимость этого набора вещей составляет $\boldsymbol{42+24+30+25\cdot0,55=109,75}$ руб. Полученное число и является оценкой первоначального множества решений: $\boldsymbol{\varphi(X^1)=109,75}$. Поскольку оценка получена без учета неделимости вещей, она несколько больше, чем стоимость реального оптимального набора вещей, однако дает важную информацию: стоимость оптимального набора вещей не превышает 109 рублей.

Запомним это важное свойство оценки: она всегда лучше (оптимистичнее) реального результата. В задачах на максимум не меньше, а в задачах на минимум не больше оптимального значения целевой функции. Оценка – своеобразная граница для оптимального значения целевой функции, которую оно не может пересечь. Отсюда слово «*границ*» в названии метода ветвей и границ.

Шаг 2. Разобьем исходное множество решений X^1 на два подмножества X^2 и X^3. В множество X^2 включим все возможные наборы (решения), которые содержат вещь №4 ($x_4=1$):

$$X^2 = \{x \in X^1 : x_4 = 1\};$$

в множество X^3 – все возможные решения, которые не содержат вещь №4 ($x_4=1$):

$$X^3 = \{x \in X^1 : x_4 = 0\}.$$

Оценка множества X^2 будет совпадать с оценкой множества X^1, поскольку оптимальное нецелочисленное решение, соответствующее множеству X^1, содержит компоненту $x_4=1$. А вот оценка множества X^3 будет совершенно другой. «Наполним» рюкзак вещами без вещи №4:

X^{3*}	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1
	0	1	1	1	1/24

Оценка $\varphi(X^3)=24+30+25+18\cdot(1/24)=82.75$.

Проведенные вычисления проиллюстрируем графически с помощью так называемого дерева решения

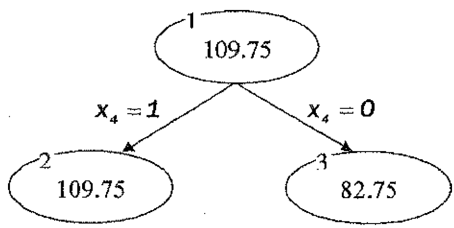


Рисунок 4.1 – Начальный фрагмент дерева решения задачи о рюкзаке

Дерево решения включает корневую вершину, которая соответствует исходному множеству X^1 и две ветви, ведущие к вершинам, соответствующим подмножествам X^2 и X^3 (отсюда слово «*ветвей*» в названии метода ветвей и границ). В вершины дерева будем записывать оценки соответствующих множеств. Цифра, размещенная на овале вершины, соответствует порядковому номеру подмножества, связанного с вершиной, в общем процессе решения. Надписи рядом с ветвями, очевидно, представляют собой условия, с помощью которых следующее подмножество получается из предыдущего.

Шаг 3. Из двух концевых (или висячих) вершин дерева, из которых еще нет ветвей, лучший «прогноз» дает вершина 2 (можно надеяться получить решение со стоимостью вещей 109 руб). На множестве X^3 (вершина 3) наилучший результат не превысит 82 руб. Поэтому будем работать с вершиной 2, т.е. будем разбивать на подмножества множество X^2. Проведенные рассуждения лежат в основе одного из основных правил метода ветвей и границ: *для продолжения решения из всех возможных вершин выбирается та, которая дает наилучший прогноз* (назовем его правилом выбора).

Напомним, что множество X^2 состоит из решений, каждое из которых содержит вещь

№4. Поэтому для разбиения его на подмножества будем использовать вещь №5 (следующую в порядке убывания удельной стоимости). В результате получим очередные подмножества

$$X^4 = \{x \in X^2 : x_4 = 1\} \text{ и } X^5 = \{x \in X^2 : x_4 = 0\}.$$

Поскольку оптимальное решение x^{1*} содержит вещь №5, то $x^{4*}=x^{1*}$ и, следовательно, $\varphi(X^4)= \varphi(X^3)= \varphi(X^1)=109.75$.

Вычислим оценку множества X^5. Так как

x^{5*}	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1
	1	0	1	3/4	0

то $\varphi(X^5)=42+30+25 \cdot (3/4)= 97{,}75$ и дерево решения принимает вид:

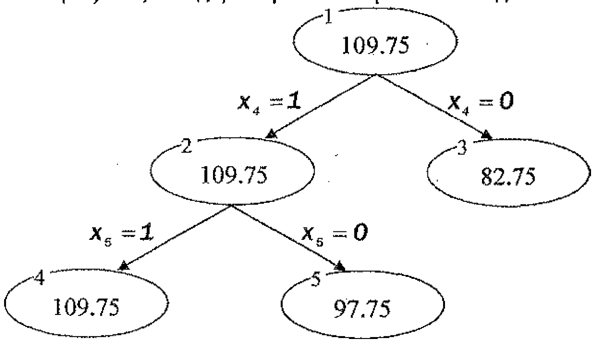


Рисунок 4.2 – Дерево решения после анализа множеств X^4, X^5

Шаг 4. В соответствии с правилом выбора работаем с вершиной 4. По множеству X^5 построим подмножества

$$X^6 = \{x \in X^4 : x_2 = 1\} \text{ и } X^7 = \{x \in X^4 : x_2 = 0\}$$

(разбиение ведем по вещи №2). Для множества X^6 оптимальное решение $x^{6*}=x^{1*}$ и $\varphi(X^6)=\varphi(X^1)=109.75$. Для множества X^7 нецелочисленный оптимальный набор вещей будет таким:

x^{7*}	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1
	1	1	0	1	1/4

$\varphi(X^7)=42+24+25+18 \cdot (1/4)= 95{,}5$. Изменения в дереве решения, связанные с текущим и последующими шагами, смотрите на рис. 4.3.

Шаг 5. Продолжая работу с вершиной 6, получим:

$$X^8 = \{x \in X^6 : x_3 = 1\} \text{ и } X^9 = \{x \in X^6 : x_3 = 0\}$$

Множество $X^8 = \varnothing$ (если вложить в рюкзак вещи №4,5,2 и 3, то их суммарный вес превысит вместимость рюкзака).Соответствующую вершину в дереве решения отображаем, но сразу же вычеркиваем (в принципе, ее можно было бы и не показывать). Анализ только множества X^9 дает следующее:

x^{9*}	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1
	1	1	1	0	11/24

$\varphi(X^9)=42+24+30+18 \cdot (11/24)= 104{,}25$.

Шаг 6. Из всех доступных вершин после шага 5 наилучший прогноз дает вершина 9. На основании множества X^9 получаем

$$X^{10} = \{ x \in X^9 : x_1 = 1 \} \text{ и } X^{11} = \{ x \in X^9 : x_1 = 0 \}.$$

Подмножество $X^{10} = \varnothing$, а подмножество X^{11} состоит из одного единственного элемента:

X^{11*}	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1
	1	1	1	0	0

φ(X¹¹)=42+24+30= 96.

На этом шаге в ходе решения задачи (4.1) возник существенно новый момент: решение x^{11*} принципиально отличается от ранее полученных – оно не содержит дробных элементов, включает вещи целиком и является допустимым решением со стоимостью 96 руб. Это ценная информация. На ее основании можно делать очень важные выводы. Возьмем для примера вершину 3. Оценка ***φ(X³)= 82.75.*** Следовательно, все решения из множества X^3 имеют стоимость меньше 83 руб. Какой тогда смысл его анализировать – ведь найдено допустимое решение со стоимостью 96 руб? Ответ очевиден: никакого смысла. Поэтому вершину 3 просто вычеркнем из дерева решения, а множество X^3 исключим из дальнейшего рассмотрения как неперспективное. По той же причине из дерева вычеркнем и вершину 7.

Таким образом, стоимость решения x^{11*} стала своеобразной *границей* (еще раз вспомним название метода!) для отсеивания неперспективных множеств, т.е. множеств, которые заведомо не содержат оптимального решения. В методе ветвей и границ такое решение получило специальное название: ***рекорд***. Соответствующую вершину в дереве решения называют рекордной и каким-либо образом выделяют (например, с помощью двойного овала).

Множество, в котором был найден рекорд, никогда не подвергается дальнейшему дроблению, т. к. оптимальное решение в нем уже найдено. Рекордная вершина в дереве решения остается висячей до конца решения или до тех пор, пока не будет найден новый рекорд (допустимое решение с лучшей стоимостью). В последнем случае старая рекордная вершина вычеркивается из дерева.

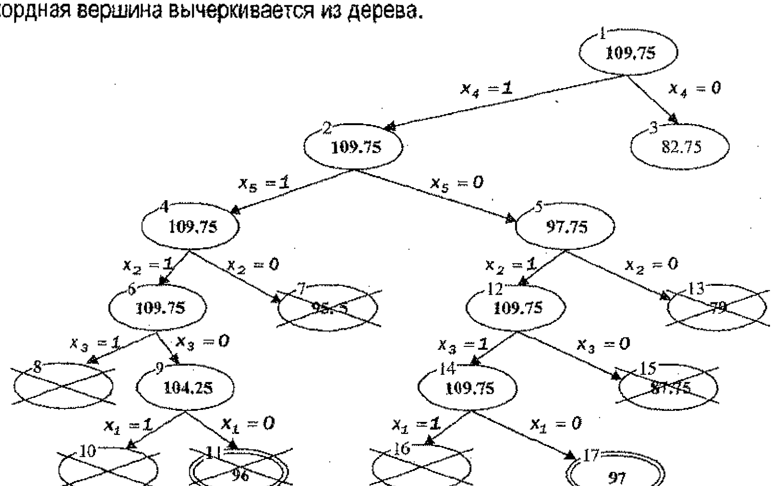


Рисунок 4.3 – Полное дерево решения задачи.

Шаг 7. В дереве решения после шага 5 присутствует висячая невычеркнутая нерекордная вершина 5. Ее оценка составляет 97,75 руб., и есть надежда получить допустимое решение со стоимостью 97 руб. Продолжим решение. Поскольку основные моменты, связанные с описанием метода, уже изложены, дальнейшие комментарии будем приводить только в случае необходимости.

$$X^{12} = \{x \in X^5 : x_2 = 1\}, \quad x^{12*} = x^{5*}, \quad \varphi(X^{12}) = \varphi(X^5) = 97,75;$$

$X^{13} = \{x \in X^5 : x_2 = 0\}$,

x^{13*}	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1
	1	0	0	1	1

$\varphi(X^{12}) = 79.$

В ходе вычисления оценки множества X^{13} снова получено допустимое решение, однако его стоимость меньше рекорда, и вершину 13 вычеркиваем из дерева решения.

Шаг 8. Работаем с вершиной 12:

$$X^{14} = \{x \in X^{12} : x_3 = 1\}, \quad x^{14*} = x^{12*}, \quad \varphi(X^{14}) = \varphi(X^{12}) = 97,75;$$

$X^{15} = \{x \in X^{12} : x_3 = 0\}$,

x^{15*}	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1
	1	0	1	0	7/8

$\varphi(X^{12}) = 87,75.$

Вершина 15 неперспективна и вычеркивается из дерева.

Шаг 9. Работаем с вершиной 14:

$$X^{16} = \{x \in X^{14} : x_1 = 1\} = \varnothing;$$

$X^{17} = \{x \in X^{14} : x_1 = 0\}$,

x^{17*}	x_4	x_5	x_2	x_3	x_1
	1	0	1	1	0

$\varphi(x^{17*}) = 97.$

Решение x^{17*} является допустимым, и поскольку его стоимость больше, чем у рекорда, то меняем рекорд: вершину 11 вычеркиваем, вершину 17 отмечаем двойным овалом.

После шага 9 в дереве не осталось невычеркнутых концевых вершин за исключением рекордной. Это означает, что решение задачи окончено. Оптимальный набор вещей включает вещи №2,3,4, его стоимость составляет 97 руб.

В заключение кратко изложим алгоритм метода ветвей и границ для решения задачи о рюкзаке.

Шаг 1. Упорядочим вещи по убыванию их удельной стоимости, перепишем математическую модель задачи в соответствии с новым порядком следования вещей и вычислим оценку множества всех допустимых решений X^1. Если решение x^{1*} не содержит дробных компонент, то оно и есть искомое решение задачи о рюкзаке. Работа алгоритма окончена.

Шаг 2. Используя вещь с самой высокой удельной стоимостью, разобьем исходное множество X^1 на два подмножества, одно из которых (X^2) содержит эту вещь, а другое (X^3) не содержит, и найдем оценки построенных множеств.

На шаге 2 возможен вариант, что найденное при оценке множества X^3 решение x^{1*} будет целочисленным. В этом случае объявляем его рекордом. Правда, вычеркнуть с помощью полученного рекорда вершину 2 не удастся (подумайте, почему?).

3-ий и последующие шаги метода ветвей и границ совершенно идентичны. Поэтому опишем произвольный *k*-ый шаг.

Шаг k. 1. Из всех концевых невычеркнутых и нерекордных вершин дерева решения выберем вершину с наилучшей (максимальной) оценкой.

2. Соответствующее множество решений разобьем на два подмножества $X^{2(k-1)}$ и X^{2k-1}, используя для этого следующую по порядку убывания удельных стоимостей вещь, и

произведем их оценку (если одно из подмножеств оказалось пустым – оцениваем только непустое множество).

Пусть, для определенности, множество X^{2k-1} – это множество, не содержащее вещи, по которой производилось разбиение, $x^{(2k-1)*}$ – решение, полученное в ходе вычисления его оценки. Возможны следующие варианты:

а) решение $x^{(2k-1)*}$ не является допустимым (содержит дробную компоненту), и в дереве решения нет рекорда. В этом случае переходим к следующему шагу;

б) решение $x^{(2k-1)*}$ не является допустимым, но в дереве решения есть рекорд. Сравним оценку множества X^{2k-1} со стоимостью рекорда. Если она меньше стоимости рекорда, то вершину ***2k-1*** вычеркнем из дерева решения. Затем перейдем к 3;

в) решение $x^{(2k-1)*}$ является допустимым, в дереве решения нет рекорда. Решение $x^{(2k-1)*}$ объявим рекордом и произведем вычеркивание из дерева всех неперспективных вершин. Затем перейдем к 3;

г) решение $x^{(2k-1)*}$ является допустимым и в дереве решения есть рекорд. Если стоимость набора $x^{(2k-1)*}$ больше стоимости рекорда, то меняем рекорд и вычеркнем из дерева все неперспективные вершины. В противном случае вычеркнем вершину ***2k-1***. Перейдем к 3.

3. Если в дереве решения осталась невычеркнутой только рекордная концевая вершина, то решение задачи окончено. Рекорд есть оптимальное решение задачи о рюкзаке. В противном случае прейдем к следующему шагу.

Задание №5

Предприятие производит однотипную продукцию и планирует свою деятельность на промежутке T лет. Его экономическое состояние зависит от возраста используемого оборудования (предполагается, что все оборудование имеет один и тот же возраст) и определяется следующими показателями: $r(t)$ – выручка от реализации продукции, произведенной в течение года на оборудовании, возраст которого составляет t лет; $u(t)$ – затраты на эксплуатацию и ремонт того же оборудования в течение года.

В начале каждого года руководство предприятия принимает решение о том, продолжить ли выпуск продукции на старом оборудовании или же полностью заменить его новым. При этом оно учитывает, что на приобретение нового оборудования требуется p денежных единиц, а от реализации старого оборудования можно получить s денежных единиц.

Найти оптимальную стратегию по замене оборудования на плановом промежутке T лет, если в начале этого промежутка возраст оборудования составляет t_0 лет.

Использовать полученные результаты для нахождения дополнительного решения задачи при условии, что плановый промежуток составляет T_1 лет, возраст оборудования в его начале – t_1 лет.

Варианты данных

Для всех вариантов продолжительность планового промежутка времени одинакова и составляет T=7 лет.

№ варианта	t	0	1	2	3	4	5	6	7
1	$r(t)$	30	27	25	20	18	16	13	10
	$u(t)$	1	2	3	5	7	8	9	10
	p=25, s=7, t_0=2; T_1=5, t_1=3								
2	$r(t)$	25	24	22	19	16	14	11	9
	$u(t)$	1	1	2	3	5	7	8	9
	p=19 s=6 t_0=3; T_1=6, t_1=1								
3	$r(t)$	35	33	30	27	25	20	18	15
	$u(t)$	2	3	5	7	9	11	13	15
	p=26, s=5, t_0=1; T_1=5, t_1=2								
4	$r(t)$	16	17	15	13	12	10		8
	$u(t)$	1	1	2	2	4	5	7	8
	p=23 s=7, t_0=4; T_1=6, t_1=3								
5	$r(t)$	20	18	17	15	13	12	11	10
	$u(t)$	1	2	2	4	6	7	9	10
	p=14, s=4, t_0=1; T_1=5, t_1=2								
6	$r(t)$	22	22	20	17	15	13	11	10
	$u(t)$	2	2	3	5	7	8	9	10
	p=16, s=5, t_0=3; T_1=6, t_1=4								
7	$r(t)$	25	24	22	19	17	15	13	10
	$u(t)$	1	1	2	4	6	7	8	10
	p=15, s=3, t_0=2; T_1=5, t_1=4								
8	$r(t)$	35	33	30	25	28	23	20	15
	$u(t)$	3	5	8	10	12	14	14	15
	p=25, s=4, t_0=1; T_1=6, t_1=2								

9	$r(t)$	12	12	11	10	8	8	7	7
	$u(t)$	1	1	2	3	4	5	6	7
	p=8, s=1, t_0=3; T_1=5, t_1=3								
10	$r(t)$	23	22	20	18	15	12	11	10
	$u(t)$	1	2	2	4	6	8	9	10
	p=19, s=2, t_0=5; T_1=6, t_1=1								
11	$r(t)$	25	23	20	17	15	13	11	10
	$u(t)$	1	1	3	5	6	7	8	10
	p=20, s=3, t_0=2; T_1=5, t_1=3								
12	$r(t)$	17	16	16	13	11	9	8	8
	$u(t)$	1	1	3	5	6	7	7	8
	p=14, s=3, t_0=1; T_1=6, t_1=2								
13	$r(t)$	28	27	26	23	19	15	13	12
	$u(t)$	1	2	4	7	9	10	11	12
	p=22, s=1, t_0=2; T_1=5, t_1=1								
14	$r(t)$	20	19	19	16	14	13	11	10
	$u(t)$	1	1	3	5	7	8	9	10
	p=18, s=5, t_0=3; T_1=6, t_1=2								
15	$r(t)$	15	15	13	11	9	8	7	7
	$u(t)$	1	2	2	2	4	5	6	7
	p=12, s=4, t_0=4; T_1=5, t_1=3								
16	$r(t)$	30	29	26	22	18	16	15	15
	$u(t)$	1	2	4	7	10	13	14	15
	p=23, s=2, t_0=3; T_1=6, t_1=4								
17	$r(t)$	35	33	30	25	20	17	15	13
	$u(t)$	1	2	3	6	9	12	12	13
	p=30, s=6, t_0=2; T_1=5, t_1=1								
18	$r(t)$	10	10	8	8	7	6	6	5
	$u(t)$	1	2	2	2	3	4	4	5
	p=7, s=2, t_0=1; T_1=6, t_1=2								
19	$r(t)$	24	23	23	20	16	14	13	13
	$u(t)$	2	2	5	8	9	11	12	13
	p=19, s=3, t_0=2; T_1=5, t_1=3								
20	$r(t)$	18	17	16	14	11	9	8	8
	$u(t)$	1	1	2	4	6	7	7	8
	p=15, s=1, t_0=3; T_1=6, t_1=4								
21	$r(t)$	30	28	25	21	18	16	14	12
	$u(t)$	1	3	5	7	9	11	11	12
	p=26, s=2, t_0=4; T_1=5, t_1=1								
22	$r(t)$	25	24	22	19	16	14	13	13
	$u(t)$	1	1	3	6	9	11	12	13
	p=20, s=3, t_0=5; T_1=6, t_1=2								
23	$r(t)$	19	18	17	15	13	11	10	10
	$u(t)$	1	2	4	7	9	9	9	10
	p=16, s=2, t_0=4; T_1=5, t_1=3								
24	$r(t)$	13	13	12	10	8	7	6	6
	$u(t)$	1	2	2	3	3	3	5	6
	p=11, s=3, t_0=3; T_1=6, t_1=4								

25	$r(t)$	15	14	12	10	9	8	8	7
	$u(t)$	1	1	2	4	5	6	7	7
	p=12, s=1, t_0=2; T_1=5, t_1=1								
26	$r(t)$	23	22	20	17	15	13	12	11
	$u(t)$	1	2	5	8	9	10	10	11
	p=17, s=5, t_0=1; T_1=6, t_1=2								
27	$r(t)$	20	18	15	13	12	11	10	9
	$u(t)$	1	2	3	5	7	8	9	9
	p=14, s=4, t_0=2; T_1=5, t_1=3								
28	$r(t)$	27	25	22	19	17	15	14	13
	$u(t)$	2	2	4	6	9	11	12	13
	p=22, s=2, t_0=3; T_1=6, t_1=4								
29	$r(t)$	33	31	28	24	21	19	17	15
	$u(t)$	3	5	7	9	11	13	14	15
	p=26, s=5, t_0=4; T_1=5, t_1=1								
30	$r(t)$	17	15	14	12	10	9	8	8
	$u(t)$	2	2	4	5	6	6	7	8
	p=14, s=3, t_0=3; T_1=6, t_1=2								

Решение типового варианта задания № 5

T	0	1	2	3	4	5	6	7
$r(t)$	20	19	17	15	14	13	12	10
$u(t)$	1	2	4	5	6	8	9	10
p=12, s=5, t_0=4; T_1=6, t_1=0								

Задача поиска оптимальной стратегии по замене оборудования является многошаговой, а ее решение состоит из двух этапов: прямого хода и обратного.

На первом этапе вводят функцию $F_k(t)$ – прибыль предприятия, получаемую за k лет на оборудовании, возраст которого в начале этого периода составлял t лет.

Для решения задачи используются соотношения Беллмана:

При k=1:

$$F_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) & \text{, если оставим} \\ s(t) - p + r(0) - u(0) & \text{, если заменим} \end{cases} \tag{5.1}$$

При k>1:

$$F_k(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + F_{k-1}(t+1) & \text{, если оставим} \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_{k-1}(1) & \text{, если заменим} \end{cases} \tag{5.2}$$

На основании формул (5.1) и (5.2) производятся расчеты, которые заносятся в таблицу.

Рассмотрим расчет по формуле (5.1). На приобретение нового оборудования требуется p=12 денежных единиц, а от реализации старого оборудования можно получить s=5 денежных единиц, поэтому

$$s(t) - p + r(0) - u(0) = 5 - 12 + 20 - 1 = 12 = const$$

Полученное значение является пороговым на первом шаге, т. е. если прибыль предприятия меньше данного значения, то оборудование заменяем, в противном случае оборудование оставляем. Т. о. порог представляет собой значение прибыли, при котором происходит смена политики предприятия.

Результаты (значение порога и функции прибыли) заносят в таблицу:

порог	t	0	1	2	3	4	5	6	7
	r(t)-u(t)	19	17	13	10	8	5	3	0
12	$F_1(t)$	19	17	13	12	12	12	12	12

Первые две строки таблицы являются фиксированными: первая строка содержит возраст оборудования *t*, вторая – разность между выручкой от реализации продукции *r(t)* и затратами на эксплуатацию и ремонт оборудования *u(t)*. В третьей строке таблицы в первом столбце находится пороговое значение. Далее в таблицу заносятся значения, полученные по формуле (5.1) для $F_1(t)$. Если значения *r(t)-u(t)* >= 12, то в строку заносятся соответствующие числа. Как только разность *r(t)-u(t)* становится меньше порогового значения 12, то в таблице отображается вертикальная черта, обозначающая границу перехода через порог, после которой до окончания строки заносятся пороговые значения, равные 12.

Рассмотрим расчет по формуле (5.2) для $F_2(t)$. Значение порога равно

$$s(t)-p+r(0)-u(0)+F_1(1)=12+17=29=const$$

порог	t	0	1	2	3	4	5	6	7
	r(t)-u(t)	19	17	13	10	8	5	3	0
12	$F_1(t)$	19	17	13	12	12	12	12	12
29	$F_2(t)$	36	30	29	29	29	29	29	29

Если значения $r(t)-u(t)+F_1(t+1)$ >= 29, то в таблицу заносятся соответствующие числа. Например, для *t*=0 значение $r(0)-u(0)+F_1(1)$=19+17=36, для *t*=1 – $r(1)-u(1)+F_1(2)$=17+13=30. Для *t*=2 значение $r(2)-u(2)+F_1(3)$=13+12=25 меньше порогового значения 29, поэтому в таблице отображается вертикальная черта, обозначающая границу перехода через порог, после которой до окончания строки заносятся пороговые значения, равные 29.

Далее расчеты производятся по формуле (5.2), а итоговая таблица примет вид:

порог	t	0	1	2	3	4	5	6	7
	r(t)-u(t)	19	17	13	10	8	5	3	0
12	F1	19	17	13	12	12	12	12	12
29	F2	36	30	29	29	29	29	29	29
42	F3	49	46	42	42	42	42	42	42
58	F4	65	59	58	58	58	58	58	58
71	F5	78	75	71	71	71	71	71	71
87	F6	94	88	87	87	87	87	87	87
100	F7	107	104	100	100	100	100	100	100

После построения таблицы необходимо выполнить обратный ход по следующим правилам:

1) если значение прибыли оказалось справа от границы перехода через порог, то оборудование заменяем, а на следующем шаге возраст оборудования равен 1;

2) если значение прибыли оказалось слева от границы перехода через порог, то оборудование оставляем, а на следующем шаге возраст оборудования увеличиваем на 1.

По условию задачи t_0=4, поэтому начинаем для $F_7(t)$ с t=4. Значение 100 находится справа от границы порога, поэтому оборудование заменяем, а для $F_6(t)$ возраст оборудования t=1. Для $F_6(t)$ и t=1 значение 88 находится слева от границы порога, поэтому оборудование оставляем, а на следующем шаге возраст оборудования увеличиваем на 1, т. е. для $F_5(t)$ возраст оборудования t=2 и т. д.

порог	t	0	1	2	3	4	5	6	7
	r(t)-u(t)	19	17	13	10	8	5	3	0
12	$F_1(t)$	19	17	13	12	12	12	12	12
29	$F_2(t)$	36	30	29	29	29	29	29	29
42	$F_3(t)$	49	46	42	42	42	42	42	42
58	$F_4(t)$	65	59	58	58	58	58	58	58
71	$F_5(t)$	78	75	71	71	71	71	71	71
87	$F_6(t)$	94	88	87	87	87	87	87	87
100	$F_7(t)$	107	104	100	100	100	100	100	100

Результаты заносим в таблицу:

T	7	6	5	4	3	2	1
F_k	100	88	71	58	46	29	17
Политика	замена	оставим	оставим	замена	оставим	замена	оставим

Для нахождения дополнительного решения задачи при условии, что плановый промежуток составляет T_1 = 6 лет, возраст оборудования в его начале – t_1 = 0 лет, используем ту же таблицу, только обратный ход начинается с $F_6(t)$ и t=0:

T	6	5	4	3	2	1
F_k	94	75	58	46	29	17
Политика	оставим	оставим	замена	оставим	замена	оставим

Литература

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
2. Альсевич, В.В. Оптимизация линейных экономических моделей: статические задачи / В.В. Альсевич, Р. Габасов, В.С. Глушенков. – Мн.: БГУ, 2000. – 210 с.
3. Балашевич, В.А. Основы математического программирования. – Мн.: Высш. шк., 1985. – 173 с.
4. Банди, Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.
5. Вагнер, Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1973.- Тт. 1-3.
6. Вентцель, Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – Дрофа, 2006. – 208 с.
7. Дегтярев, Ю.И. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1986. – 320 с.
8. Карданская, Н.Л. Принятие управленческого решения. – М.: ЮНИТИ, 1999.
9. Кузнецов, А.В. Высшая математика: Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – Мн.: Высш. шк., 1994. – 286 с.
10. Ларичев, О.И. Наука и искусство принятия решений. – М.: Наука, 1979. – 200 с.
11. Минюк, С.А. Математические методы и модели в экономике / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 432 с.
12. Моисеев, Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
13. Перегудов, Ф.И. Введение в системный анализ / Ф.И. Перегудов, Ф.П. Тарасенко. – М.: Высшая школа, 1989. – 367 с.
14. Таха, Х.А. Введение в исследование операций. – М: Вильямс, 2005. – 912 с.
15. Шварц, М. Сети ЭВМ. Анализ и проектирование. – М.: Радио и связь, 1981. – 336 с.
16. Экономико-математические методы и модели: учебн. пособие / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар [и др.]; под общ. ред. А.В. Кузнецова. – Мн.: БГЭУ, 1999.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:
Ракецкий Валерий Михайлович
Парфомук Сергей Иванович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

к контрольной работе по дисциплине
«Системный анализ и исследование операций»
для студентов специальности
53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»
заочной формы обучения

Ответственный за выпуск:	Ракецкий В.М.
Редактор:	Строкач Т.В.
Компьютерная вёрстка:	Кармаш Е.Л.
Корректор:	Никитчик Е.В.

Подписано к печати 21.12.2009 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Усл. печ. л. 2,79. Уч. изд. л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ № 1177. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.