Рассмотренные примеры не исчерпывают возможности пакета. Подробное описание Maxima на русском языке можно найти в [1, 2].

Грамотное использование Maxima в учебном процессе позволит снять психологический барьер при изучении курса высшей математики, делая его более интересным. Maxima не только позволяет решать учебные задачи из курса высшей математики, но и проводить сложные аналитические вычисления при решении реальных научно-технических задач. Уже сегодня систему Maxima можно рекомендовать использовать в университетах, а её бурное развитие, как свободного проекта, позволяет авторам предположить, что через несколько лет Maxima составит реальную конкуренцию таким мощным проприетарным программам, как Mathematica, Maple.

Список цитированных источников

1. Чичкарёв, Е.А. Компьютерная математика с Maxima. Руководство для школьников и студентов. – Режим доступа: http://www.altlinux.org/Books:Maxima – Дата доступа: 1.10.2011).

2. Губина, Т.Н. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики Maxima: учебное пособие [Текст] / Т.Н. Губина, Е.В. Андропова. – Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, 2009. – 99 с.

3. http://maxima.sourceforge.net/ru/Maxima. URL: http://andrejv.github.com/wxmaxima/help.html – Дата доступа: 1.10.2011.

УДК 517.958

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ШАРА В $\mathbf{R}^3$

Осоприлко О.Н.

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

Научный руководитель – Басик А.И.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу нахождения функции $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяющей в области Ω уравнению

$$\Delta^2 u = f(x), \tag{1}$$

и граничным условиям

$$u\,|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \psi(x). \tag{2}$$

Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \dfrac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ – оператор Лапласа в $\mathbf{R}^d$, $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$, $f : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ – заданная в области Ω функция, $\varphi, \psi : \partial\Omega \mapsto \mathbf{R}$ – заданные на поверхности $\partial\Omega$ функции, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_d)$ – единичное поле внешних нормалей на поверхности $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ – оператор дифференцирования по нормали к $\partial\Omega$.

Сформулированная задача (1), (2) называется задачей Дирихле для бигармонического уравнения и встречается в математической теории упругости. В случае функций двух переменных ($d = 2$) эта задача решена в книге [1]. Используя представление бигармонической функции двух переменных с помощью гармонических, авторами книги [1, с. 402] указывается явная формула решения задачи (1), (2) для круга на плоскости.

Отметим также, что приведенное в [1, с. 400] доказательство теоремы единственности решения задачи (1), (2) для функций класса $C^4(\overline{\Omega})$, дословно переносится на случай произвольной размерности пространства.

Следуя [2, с. 82], мы построим решение задачи Дирихле для шара в трехмерном пространстве ($d=3$) методом функций Грина.

Пусть функция $u\in C^4(\overline{\Omega})$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (2), тогда в каждой точке $y\in\Omega$ выполняется равенство (см. в работе [3] интегральное представление решений (1))

$$u(y)=\int_{\Omega}E(x;y)f(x)dx+\int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial\Delta E(x;y)}{\partial\nu}-\Delta E(x;y)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)dS(x)+ \qquad (3)$$
$$+\int_{\partial\Omega}\left(\Delta u(x)\frac{\partial E(x;y)}{\partial\nu}-E(x;y)\frac{\partial\Delta u(x)}{\partial\nu}\right)dS(x),$$

где $E(x,y)=-\dfrac{1}{8\pi}r$ – фундаментальное решение оператора Δ^2 в $\mathbf{R}^3$,

$$r=|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

Предположим, что существует функция $g(x;y)$, в каждой точке $y\in\Omega$ обладающая свойствами

(*i*) $g(\cdot;y)\in C^4(\overline{\Omega})$;

(*ii*) $\Delta_x^2 g(x;y)=0$ в области Ω;

(*iii*) $g|_{x\in\partial\Omega}=-E(x;y)$, $\left.\dfrac{\partial g}{\partial\nu}\right|_{x\in\partial\Omega}=-\dfrac{\partial E(x;y)}{\partial\nu}$.

Для функций $u(x)$ и $g(x;y)$ запишем аналог второй формулы Грина [3] для оператора Δ^2

$$0=\int_{\Omega}g(x;y)f(x)dx+\int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial\Delta g(x;y)}{\partial\nu}-\Delta g(x;y)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)dS(x)+ \qquad (4)$$
$$+\int_{\partial\Omega}\left(\Delta u(x)\frac{\partial g(x;y)}{\partial\nu}-g(x;y)\frac{\partial\Delta u(x)}{\partial\nu}\right)dS(x).$$

Складывая равенства (3) и (4) и пользуясь свойствами (*ii*)-(*iii*) функции $g(x;y)$, окончательно получим

$$u(y)=\int_{\Omega}(E(x;y)+g(x;y))f(x)dx+ \qquad (5)$$
$$+\int_{\partial\Omega}\left(\varphi(x)\frac{\partial\Delta(E(x;y)+g(x;y))}{\partial\nu}-\psi(x)\Delta(E(x;y)+g(x;y))\right)dS(x).$$

Определение 1. *Функция* $G(x;y):=E(x;y)+g(x;y)$ *называется функцией Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения.*

Из теоремы единственности решения задачи (1),(2) следует, что функция Грина определяется однозначно условиями (*i*)-(*iii*).

Таким образом, если существует решение $u \in C^4(\overline{\Omega})$ задачи (1), (2) и для области Ω существует функция Грина, то в каждой точке $y \in \Omega$ выполняется равенство

$$u(y) = \int_{\Omega} G(x;y) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left(\varphi(x) \frac{\partial \Delta G(x;y)}{\partial \nu} - \psi(x) \Delta G(x;y) \right) dS(x). \qquad (6)$$

Формула (6) позволяет получить явную формулу решения задачи Дирихле, если удается построить функцию Грина.

Построим функцию Грина для шара $B(0;R)$ в $\mathbf{R}^3$. Зафиксируем произвольную точку $y \in B(0;R)$. Через z обозначим точку, лежащую на луче $0y$ и такую, что $|y| \cdot |z| = R^2$ (точка z – инверсия точки y относительно сферы $S(0;R)$). Пусть также

$$\rho = |y|, \ \rho_1 = |z|, \ r = |x - y|, \ r_1 = |x - z|.$$

Нетрудно видеть, что при $|x| = R$ треугольники $\Delta 0xy$ и $\Delta 0xz$ подобны, и, следовательно, выполняются соотношения

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1} = \frac{r}{r_1}.$$

Рассмотрим функцию

$$g(x;y) := -E\left(\frac{\rho}{R} x; \frac{\rho}{R} z \right) + C\,|x - z|^{-1} \left(1 - \left| \frac{y}{R} \right|^2 \right) \left(1 - \left| \frac{x}{R} \right|^2 \right),$$

где C – некоторая постоянная.

Непосредственный подсчет показывает, что при каждом $y \in B(0;R)$ функция $g(x;y)$ является бигармонической и при $|x| = R$ удовлетворяет равенству

$$g(x;y) = -E(x;y).$$

Далее, при $|x| = R$ имеем

$$\frac{\partial g(x;y)}{\partial \nu} = -\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{rR} - C \cdot \frac{2\rho}{R^3} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{rR}.$$

Положим $C = \dfrac{R^3}{16\pi\rho}$, тогда функция $g(x;y)$ удовлетворяет условиям (*i*)-(*iii*).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Функция Грина задачи Дирихле* (1),(2) *для бигармонического уравнения в шаре* $B(0;R)$ *имеет вид*

$$G(x;y) := -\frac{1}{8\pi} \cdot |x - y| + \frac{\rho}{8\pi\rho} \cdot |x - z| - \frac{R^3}{16\pi\rho} |x - z|^{-1} \left(1 - \left| \frac{y}{R} \right|^2 \right) \left(1 - \left| \frac{x}{R} \right|^2 \right),$$

где z *инверсия точки* y *относительно сферы* $S(0;R)$.

Список цитированных источников

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

2. Олейник, О.А. Лекции об уравнениях с частными производными / О.А. Олейник. – М.: БИНОМ, 2005. – 264 с.

3. Савчук, Л.А. О фундаментальном решении оператора Δ^2 в R^3 // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике: материалы Республиканской научно-практической конференции. – 22-23 апреля 2009. – С.144-146.