

УДК 519.63

## ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В МОДИФИЦИРОВАННЫХ ИНВАРИАНТАХ РИМАНА ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

**Поляков Д.Б.**

*Институт математики НАНБ, г. Минск*

*Научный руководитель – Матус П.П., д. ф.-м. н., профессор*

### 1. Введение

Уравнения газовой динамики играют ключевую роль в математическом описании газовых процессов. Нелинейность этих уравнений в зависимости от гладкости входных данных может повлечь возникновение различных физических эффектов, таких как ударные волны или пограничные слои.

Целью этой работы является получение необходимых условий для существования глобального гладкого решения начально-краевых задач на примере одномерного изэнтропического течения газа. Для записи уравнений газовой динамики будут выбраны переменные Лагранжа. При этом будет использована методика из работы [1] и идея дифференцирования по временной переменной. Будут предложены разностные схемы, для которых эти же условия являются необходимыми для классической устойчивости. Полученные условия проиллюстрированы вычислительным экспериментом.

### 2. Постановка задачи

В области  $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ ,  $\Omega = \{x : 0 < x < l\}$  рассмотрим следующую начально-краевую задачу для системы уравнений газовой динамики, записанную в переменных Лагранжа [2]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(v)}{\partial t} = 0, (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$p(v) = K^2 v^{-\gamma}, \gamma = 1 + 2\varepsilon, \varepsilon = \text{const} > 0, K = \text{const} > 0,$$

$$v(x, 0) = v_0(x), u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) + c_1 (v(0, t)^{-\varepsilon} - 1) = \mu_1(t), t \geq 0, \quad (3)$$

$$-u(l, t) + c_1 (v(l, t)^{-\varepsilon} - 1) = \mu_2(t), t \geq 0.$$

Здесь  $v = v(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$  обозначают соответственно удельный объем, скорость и давление соответственно,  $c_1 = \frac{K\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}$ . Здесь и далее  $c_i$  обозначают произвольные положительные постоянные.

### 3. Запись системы в инвариантах Римана

Дифференциальная задача (1) – (3) в инвариантах Римана [2]

$$r = u + c_1 (v^{-\varepsilon} - 1), s = -u + c_1 (v^{-\varepsilon} - 1),$$

примет вид:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + a(s+r) \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \frac{\partial s}{\partial t} - a(s+r) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, (x, t) \in Q, \quad (4)$$

$$r(x, 0) = r_0(x) = u_0(x) + c_1 (v_0(x)^{-\varepsilon} - 1), 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$s(x, 0) = s_0(x) = -u_0(x) + c_1 (v_0(x)^{-\varepsilon} - 1), 0 \leq x \leq l,$$

$$r(0, t) = \mu_1(t), s(l, t) = \mu_2(t), t \geq 0, \quad (6)$$

$$\text{где } a(s+r) = \frac{\varepsilon}{2(2c_1)^{\frac{1}{\varepsilon}}} (s+r+2c_1)^{1+\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Таким образом, мы вместо системы (1) – (3) будем рассматривать эквивалентную ей (на гладких решениях) систему (4) – (6).

#### 4. Основная теорема

Сформулируем необходимые для формулировки теоремы условия на входные данные:

$$0 \leq r_0(x) \leq c_2, 0 \leq s_0(x) \leq c_2, 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

$$-c_3 \leq s'_0(x) \leq 0 \leq r'_0(x) \leq c_3, 0 \leq x \leq l, \quad (8)$$

$$0 \leq \mu_1(t) \leq c_2, 0 \leq \mu_2(t) \leq c_2, t \geq 0, \quad (9)$$

$$-c_3 a_{\max} \leq \mu'_1(t) \leq 0, -c_3 a_{\max} \leq \mu'_2(t) \leq 0, t \geq 0, \quad (10)$$

$$r_0(0) = \mu_1(0), s_0(l) = \mu_2(0), \quad (11)$$

$$\mu'_1(0) + a(r_0(0) + s_0(0))r'_0(0) = 0, \mu'_2(0) - a(r_0(l) + s_0(l))s'_0(l) = 0, \quad (12)$$

$$\text{где } a_{\max} = \frac{\varepsilon}{2(2c_1)^{\frac{1}{\varepsilon}}} (2c_2 + 2c_1)^{1+\frac{1}{\varepsilon}}.$$

В области  $\bar{Q}$  введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_{ht} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau : \bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{l}{N} \right\}, \bar{\omega}_\tau = \{ t_n = n\tau, n \in N_0 \}.$$

На этой сетке аппроксимируем задачу (4) – (6) линеаризованной разностной схемой

$$r_{ht,i} + a_{h,i} \hat{r}_{hx,i} = 0, i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

$$s_{ht,i} - a_{h,i} \hat{s}_{hx,i} = 0, i = \overline{0, N-1},$$

$$r_{h,i}^0 = r_{0i}, i = \overline{1, N}, s_{h,i}^0 = s_{0i}, i = \overline{0, N}, \quad (14)$$

$$\hat{r}_{h,0} = \mu_1^{n+1}, \hat{s}_{h,N} = \mu_2^{n+1}, n \in N_0. \quad (15)$$

Имеет место

**Теорема.** Пусть выполнены неравенства (7), (9) и (11). Тогда условия (8), (10) и (12) необходимы для существования глобального гладкого решения задачи (1) – (3). При выполнении условий (7)-(12) разностная схема (13)-(15) безусловно устойчива по начальным и граничным данным и имеет место оценка

$$\max \{ \|\delta r^n\|_{\bar{c}}, \|\delta s^n\|_{\bar{c}} \} \leq \max \{ \|\delta r^0\|_{\bar{c}}, \|\delta s^0\|_{\bar{c}}, \|\delta \mu_1\|_{\bar{c}(T)}, \|\delta \mu_2\|_{\bar{c}(T)} \} \quad (16)$$

#### 5. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим задачу (1) со следующими входными данными:

$$\begin{aligned} v_0(x) &\equiv 1, u_0(x) \equiv 0, 0 \leq x \leq l, \\ \mu_1(t) &= \mu_2(t) = 1 - \cos t, t \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В эксперименте были выбраны следующие значения параметров:

$$c_1 = 1, \varepsilon = \frac{1}{3}, l = 1, N = 1000, \tau = h.$$

Отметим, что выбранное значение параметра  $\varepsilon$  соответствует одноатомному газу. Легко проверить, что выполнены все условия, кроме условия (10). Результаты вычислительного эксперимента представлены на рисунке 1.

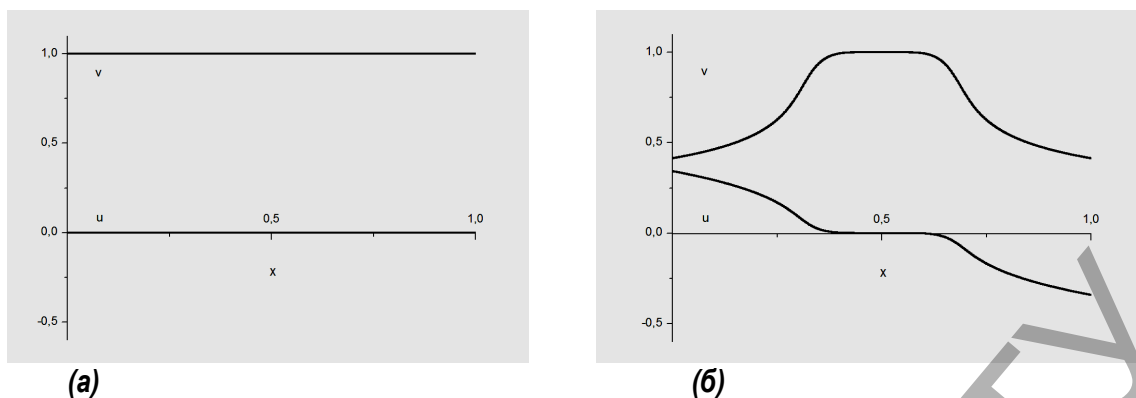


Рисунок 1 – Профили удельного объема и скорости в начальный момент  $t = 0$  (а); решение разностной схемы (13) – (15) с входными данными (16) в момент времени  $t = 1,25$  (б)

Таким образом, вычислительный эксперимент проиллюстрировал необходимость условия (10) для существования глобального гладкого решения.

## 6. Выводы

В этой работе были сформулированы необходимые условия для существования глобального гладкого решения для начально-краевой задачи для системы уравнений газовой динамики. Построены разностные схемы, для которых эти же условия являются необходимыми для классической устойчивости. При этом полученные ограничения на граничные условия проиллюстрированы вычислительным экспериментом.

### Список цитированных источников

1. Lax, P.D. Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations / P.D. Lax // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5, № 5. – P. 611–613.
2. Nishida, T. Mixed problems for nonlinear conservation laws / T. Nishida, J. Smoller // Journal of Differential Equations – 1977. – Vol. 23, № 2. – P. 244–269.

УДК 330.43(075.8)

## ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ИНФЕРЕНЦИИ, ПОЛУЧЕННОЙ МЕТОДОМ БУТСТРАПИРОВАНИЯ

*Пролиско Е.Е.*

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест*

Точная инференция<sup>1</sup> в современном эконометрическом анализе практически недостижима, если модель хоть сколь-нибудь замысловатая, а вовлеченные распределения не являются гауссовскими. Обычно используют асимптотический подход, когда при инференции используются приближения, свойственные теории больших выборок. Но асимптотическая теория часто разочаровывает неточностью предоставляемых приближений или трудностью аналитического вывода асимптотических результатов [1]. В этих случаях используют метод бутстрапирования, предоставляющий альтернативные асимптотическим приближения или возможность обходиться без сложных аналитических выводов.

<sup>1</sup> Инференция включает в себя построение доверительных областей и проверку статистических гипотез.