$A_2)$ существует вещественное отображение $k_0(t)$, удовлетворяющее при каждом $a \in \mathbb{R}_+$ условию $\int_0^a k_0(t)dt < \infty$, такое, что при любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$ выполняется неравенство

$$\|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)\|^2 + \|g(t, x_1, y) - g(t, x_2, y)\|^2 \leq k_0(t)\|x_1 - x_2\|^2\|y\|^2;$$

$A_3)$ существует вещественное отображение $k_1(t)$, удовлетворяющее при каждом $a \in \mathbb{R}_+$ условию $\int_0^a k_1^2(t)\,dt < \infty$ такое, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и любых $x \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^r$ выполняется неравенство

$$\|f(t, x, y)\| + \|g(t, x, y)\| \leqslant k_1(t)(1 + \|x\| + \|y\|).$$

Условие $A_3)$ означает, что функции f и g имеют линейный порядок роста по x и по y.

Теорема. *Если отображения f и g удовлетворяют условию $A)$, то для любого $(\mathcal{F}_0)$-измеримого случайного вектора $\eta(\omega)$ и любого непрерывного $(\mathcal{F}_0)$-согласованного случайного процесса $z(t, \omega)$, $t \in [0, 1)$, удовлетворяющих условиям*

$$E\big(\|\eta(\omega)\|^2\big) < \infty, \quad E\Big(\int_0^1 \|z(t, \omega)\|^2\,dt\Big) < \infty,$$

система (1)-(2) имеет единственное решение с начальными условиями (3).

Литература

1. Леваков А. А., Васьковский М. М. *Стохастические дифференциальные уравнения и включения.* Минск: БГУ, 2019.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

А.И. Жук, Е.Н. Защук

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1,p}, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, – некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)]$, а $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$, – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^i(t)$, $i = \overline{1,q}$, непрерывны справа, $L^i(0) = L^i(0^-) = 0$ и $L^i(a^-) = L^i(a)$, $i = \overline{1,q}$.

Задаче (1) поставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу с осреднением

$$x_n^i(t + h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t, x_n(t))[L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

с начальным условием $x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t)$. Здесь

$$L_n^j(t) = (L^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} L^j(t+s)\rho_n^j(s)\,ds,$$

где

$$\rho_n^j(t) = \gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t),$$

$$\gamma^j(n)h_n \to \infty \quad \text{для} \quad j = \overline{1,b}, \quad \gamma^j(n)h_n \to 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{b+1,q};$$

$$\rho^j \geqslant 0, \quad \operatorname{supp}\rho^j \subseteq [0,1], \quad \int_0^1 \rho^j(s)\,ds = 1;$$

$$f_n = f * \widetilde{\rho}_n, \quad \widetilde{\rho}_n(x_0, x_1, ..., x_p) = n^p\widetilde{\rho}(nx_0, nx_1, ..., nx_p), \quad \widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1}), \quad \widetilde{\rho} \geqslant 0,$$

$$\int_{[0;1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0, x_1, ..., x_p)\,dx_0dx_1...dx_p = 1, \quad \operatorname{supp}\widetilde{\rho} \subset [0;1]^{p+1}.$$

Для описания предельного поведения решения задачи (2) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(s, x(s))\,dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leqslant t} S^i(\mu_r, x(\mu_r^-), \Delta L(\mu_r)), \quad i = \overline{1,p}, \qquad (3)$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющая функции $L^j(t)$, μ_r^j, $r = 1, 2, \ldots$ – точки разрыва функции $L^j(t)$, $\Delta L^j(\mu_r) = L^{jd}(\mu_r^+) - L^{jd}(\mu_r^-)$ – величина скачка, $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^b u^j \int_0^t f^{ij}\big(\mu, \varphi(s^-, \mu, x, u)\big)\,dH(s-1) +$$

$$+ \sum_{j=b+1}^q u^j \int_0^t f^{ij}\big(\mu, \varphi(s, \mu, x, u)\big)\,ds, \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,q}.$$

Теорема. *Пусть f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$, удовлетворяют условию линейного роста и ограничены. $L^j(t)$, $j = \overline{1,b}$, – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$, $\gamma^j(n) \to \infty$ так, что для $j = \overline{1,b}$ справедливо $\gamma^j(n)h_n \to \infty$, и для $j = \overline{b+1,q}$ выполняется $\gamma^j(n)h_n \to 0$, решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы уравнений (3) в $L^p(T)$, если $\int |x_{n0}(\tau_t) - x_0|^p\,dt \to 0$.*

Аналогичная теорема с другими условиями для функций f^{ij} была получена в [1].

Литература

1. Жук А. И., Яблонский О. Л., Спасков С. А. *Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай* // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка, матэматыка, інфарматыка, біялогія. геаграфія. 2019. № 4. С. 16–22.