ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина, Е.Г. Шагова

В приложениях дифференциальные уравнения используются для моделирования процессов, происходящих в физических объектах. При классическом подходе считается, что состояние объекта описываются функциями, являющимися решениями рассматриваемых уравнений. Понятие состояния не абсолютное, так как оно зависит от множества измерений, доступных при рассматривамых экспериментах. Считается, что могут быть проведены измерения заданной системы только с помощью некоторого множества приборов (наблюдаемых величин), которое обозначим $\mathcal{D}$.

Множество Z называется *пространством состояний заданной системы, соответствующим заданному множеству наблюдаемых* $\mathcal{D}$, если каждой наблюдаемой величине прибора $\varphi \in \mathcal{D}$ соответствует однозначно определенный результат наблюдения $< z, \varphi >$.

С этой точки зрения при описании состояний с помощью функций считается, что возможны измерения значений таких функций во всех точках. Однако не существует приборов, измеряющих значения физических величин в заданной точке, а результаты реальных измерений всегда представляют собой только некоторые усредненные величины. Это учитывается при описании состояний с помощью обобщенных функций, где считается, что каждая основная функция φ из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ соответствует измерительному прибору (такие функции часто называют *приборными*), а распределение ставит в соответствие каждому φ определенное число, т.е. задает состояние в описанном выше смысле [1].

Сказанное означает, что описание состояний с помощью обобщенных функций является уточнением математической модели и в такой модели нужны решения рассматриваемых уравнений, являющиеся обобщенными функциями. Поэтому возникает задача о построении обобщенных решений дифференциальных уравнений. Если состояние в первоначальном смысле задавалось обычной локально интегрируемой функцией u, то ему соответствует однозначно определенное *регулярное распределение*

$$\langle U, \varphi\rangle = \int u(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Однако классические решения уравнений могут быть сингулярными функциями, имеющими неинтегрируемые особенности, такая функция не задает однозначно определенное распределение и не задает состояние объекта. Например, функция $u(x) = \dfrac{1}{x}$ не является локально интегрируемой и формула (1) не ставит с соответствие этой функции непрерывный линейный функционал, так как интеграл может расходиться. При этом, если φ принадлежит подпространству

$$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\},$$

то интегралы в (1) существуют и задают на этом подпространстве непрерывный линейный функционал. Поэтому функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует семейство распределений, полученных продолжениями этого функционала на все пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Это распределения вида

$$Q_M = P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta, \tag{2}$$

где M – произвольная постоянная, $\langle \delta_\tau, \varphi \rangle = \varphi(\tau)$ – дельта-функция Дирака, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ – обобщенная функция, заданная с помощью интеграла в смысле главного значения по Коши.

Возникает вопрос о том, какую из обобщенных функций, соответствующих классическому решению, можно считать обобщенным решением.

Обычно решением уравнения называется функция или обобщенная функция, которая при подстановке в уравнение дает тождественное равенство. Ввиду того, что решения с особенностями могут иметь линейные уравнения с сингулярными коэффициентами, либо нелинейные уравнения, при подстановке обобщенной функции в такое уравнение возникают произведения или другие выражения, которые не определены в теории обобщенных функций. Таким образом, для рассматриваемых уравнений стандартное определение решения не имеет смысла и построению обобщенных решений предшествует вопрос о том, что можно считать обобщенным решением.

Общая идея введения обобщенных решений основана на построении вспомогательных семейств функций $u_\varepsilon(x)$, зависящих от малого параметра ε, таких, что предел такого семейства в пространстве распределений естественно считать обобщенным решением.

В случае линейных уравнений с сингулярными или обобщенными коэффициентами рассматриваются аппроксимации коэффициентов семействами гладких функций и тогда $u_\varepsilon(x)$ задаются как решения соответствующих аппроксимирующих уравнений.

Существование предела семейства $u_\varepsilon(x)$ не является общим фактом, и при разных аппроксимациях пределы могут быть разными. Две аппроксимации коэффициента считаются *эквивалентными*, если указанные пределы существуют и совпадают.

Поэтому в множестве аппроксимаций коэффициентов возникают классы эквивалентных и для однозначного нахождения обобщенного решения требуется задать класс аппроксимаций. В приложениях коэффициенты уравнения обычно описывают свойства среды, в которой происходит рассматривамый процесс.

Но из сказанного следует, что описание свойств среды с помощью функций или даже обобщенных функций не позволяет получить однозначное описание состояния объекта, а корректная математическая модель должна включать описание состояний среды с помощью классов эквивалентных аппроксимаций коэффициентов.

С технической точки зрения задача сводится к описанию асимптотического поведения решений уравнения с малым параметром при стремлении малого параметра к нулю. Ответ на вопрос о том, при каких аппроксимациях коэффициента $\dfrac{s}{x}$ существует предел решений аппроксимирующих уравнений, неизвестен даже для простешего скалярного линейного дифференциального уравнения

$$u'(x) + \frac{s}{x}u(x) = 0. \tag{3}$$

В работах [2–4] рассмотрены обобщенные решения уравнения (3), порожденные аналитическими продолжениями коэффициента на комплексную плоскость.

Решения задачи Коши для нелинейного уравнения на прямой (это второе уравнение из иерархии Риккати)

$$u''(x) + \gamma^2 u^3(x) + 3\gamma u(x)u'(x) = 0 \tag{4}$$

имеют неинтегрируемые особенности. Для них в качестве аппроксимаций $u_\varepsilon(x)$ рассматриваются решения задачи Коши с такими начальными условиями, при которых они являются гладкими функциями.

Литература

1. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.
2. Антоневич А.Б., Шагова Т.Г. *Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом* // Таврический Вестник Информатики и Математики. 2019. № 3. С. 23–36.
3. Антоневич А.Б., Шагова Т.Г. *Умножение распределений и алгебры мнемофункций* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2019. Т. 65. № 3. С. 339–389.
4. Антоневич А.Б., Кузьмина Е.В. *Решения дифференциального уравнения* $u' + \frac{s}{x}u = 0$ *в пространстве распределений* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2020. Т. 10. № 2. С. 56—66.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И РАЗНОСТНОЙ ТРАКТОВКАХ РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

З.В. Бештокова

1. Постановка задачи и априорная оценка в дифференциальной форме. В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int\limits_0^t K(x,t,\tau)u(x,\tau)\,d\tau = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}u - \mu_{-\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\alpha(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}u - \mu_{+\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ x \in \overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q_\alpha(x,t)u,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \ |r_\alpha(x,t)|, \ |k_{x_\alpha}(x,t)|, \ |r_{x_\alpha}(x,t)|, \ |q_\alpha(x,t)|, \ |\beta_{\pm\alpha}(x,t)| \leqslant c_2,$$

$$k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}\left(\overline{Q}_T\right), \ r_\alpha(x,t), \ q_\alpha(x,t), \ K(x,t,\tau), \ f(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right), \ 0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{4}$$

$$c_0, c_1, c_2 - \text{положительные постоянные}, \quad \alpha = 1, 2, ..., p, \quad Q_T = G \times (0 < t \leqslant T].$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий (1)–(3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре $\overline{Q}_T$.