Теорема 2. *Если в уравнении (4)* $\mu = 0$ *и* $w(z) = Q'_{n-1}(z)/Q_{n-1}(z) - Q'_n(z)/Q_n(z)$ *– рациональное решение уравнения (1) при* $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$, *где* Q_n *– полиномы Яблонского-Воробьева, то общее решение уравнения (4) имеет вид* $u(z) = (C_1 Q_n + C_2 Q_{n-2})/Q_{n-1}$ *при* $\varepsilon_2 = 1$ *и* $u(z) = (C_1 Q_{n-1}(z) + C_2 Q_{n+1}(z))/Q_n(z)$ *при* $\varepsilon_2 = -1$.

Литература

1. Голубев В. В. *К теории уравнений Пенлеве* // Мат. сборник. 1912. Т. 28. С. 323–349.
2. Hinkkonen A., Laine I. *Solutions of the first and second Painleve equations are meromorphic* // J. Anal Math. 79(1999). P. 345–377.
3. Gromak V. I. *The Backlund transformations of the higher order Painleve Equations* // Centre de Recherches Mathematiques, CRM Proceeding and Lecture Notes. 2001. V. 29. P. 3–28.
4. Яблонский А. И. *О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве* // Изв. БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1959. Т. 3. С. 30–35.
5. Воробьев А. Р. *О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве* // Диффереинциальные уравнения. 1965. Т. 1. С. 79–81.
6. Гурса Э. *Курс математического анализа.* ГТТИ: М-Л., Том 3, Часть 2, 1933.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ИЕРАРХИИ РИККАТИ

Е.В. Кузьмина

В работе [1] была построена иерархия уравнений, порожденная уравнением Риккати

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0.$$

Это уравнения вида

$$D_R^n w = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где D_R есть преобразование дифференциальных выражений, действующее по формуле

$$D_R = \frac{d}{dz} + \gamma w, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

При $n = 2$ получаем второе уравнение из иерархии Риккати

$$w''(z) + \gamma^2 w^3(z) + 3\gamma w(z) w'(z) = 0, \tag{1}$$

которое и будет предметом исследования.

Лемма. *Решение задачи Коши для уравнения (1) с условиями* $w(z_0) = C_1$, $w'(z_0) = C_2$ *является рациональной функцией и имеет следующий вид:*

1) если $C_2 \neq -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, $C_2 \neq -\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b}\right], \quad \text{где} \tag{2}$$

$$a = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} + \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2}, \; b = z_0 - \frac{C_1}{\gamma C_1^2 + C_2} - \frac{\sqrt{-2\gamma C_2 - \gamma^2 C_1^2}}{\gamma^2 C_1^2 + \gamma C_2},$$

а знаком $\sqrt{\ }$ *обозначена одна из ветвей многозначной аналитической функции;*

2) если $C_2 = -\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}, \quad \text{где} \quad a = z_0 - \frac{1}{\gamma C_1};$$

3) если $C_2 = -\frac{1}{2}\gamma C_1^2$, *то*

$$w(z) = \frac{2}{\gamma(z-a)}, \quad \text{где} \quad a = z_0 - \frac{2}{\gamma C_1}.$$

При другом выборе ветви a и b меняются местами.

Рассмотрим уравнение (1) на прямой, т.е. уравнение вида

$$u''(x) + \gamma^2 u^3(x) + 3\gamma u(x) u'(x) = 0, \tag{3}$$

и задачу Коши для этого уравнения с начальными условиями в точке x_0 на прямой и вещественными C_1, C_2. По начальным условиям Коши решение этого уравнения однозначно определяется только на части прямой. Но формула (2) задает функцию, однозначно определенную на всей прямой, которую будем называть *формальным решением задачи Коши.*

Если $C_1^2 > -\frac{2}{\gamma}C_2$, то формальное решение является гладким и единственным обобщенным решением.

Если один или два полюса лежат на вещественной оси, то формальное решение имеет особенности. Такое решение будем называть *сингулярным.* Ему соответствует семейство обобщенных функций [2]. Подставить распределение в уравнение нельзя, так как не определено произведение обобщенных функций. Поэтому требуется выяснить, какие из распределений, соответствующих формальному решению, и в каком смысле можно считать решениями уравнения (1) на прямой.

Пусть $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, $C_1(\varepsilon) \to C_1$, $C_2(\varepsilon) \to C_2$ при $\varepsilon \to 0$ и $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ таковы, что решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (1) с условиями $w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon)$, $w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$ не имеют особенностей на вещественной оси.

Определение. Распределение W будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (3) с условиями $u(x_0) = C_1$, $u'(x_0) = C_2$ при заданном способе аппроксимации начальных условий, если $w_\varepsilon(x)$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ к W в смысле сходимости в пространстве $D'(\mathbb{R})$.

Теорема. *Если* $C_1^2 < -\frac{2}{\gamma}C_2$, $C_2 \neq -\gamma C_1^2$, *то решения задачи Коши для уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям* $w_\varepsilon(x_0) = C_1(\varepsilon)$, $w'_\varepsilon(x_0) = C_2(\varepsilon)$, *где* $C_1(\varepsilon) \to C_1$, $C_2(\varepsilon) \to C_2$ *при* $\varepsilon \to 0$, *имеют вид*

$$w_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{1}{x - a_\varepsilon} + \frac{1}{x - b_\varepsilon}\right],$$

где полюса

$$a_\varepsilon = x_0 - \frac{C_1(\varepsilon)}{\gamma C_1^2(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)} + q_\varepsilon, \quad b_\varepsilon = x_0 - \frac{C_1(\varepsilon)}{\gamma C_1^2(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)} - q_\varepsilon$$

не лежат на вещественной прямой и $a_\varepsilon \to a$, $b_\varepsilon \to b$ *при* $\varepsilon \to 0$,

$$q_\varepsilon^2 = -\frac{2C_2(\varepsilon) + \gamma C_1^2(\varepsilon)}{\gamma\big(\gamma C_1^2(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)\big)^2}.$$

Семейство $w_\varepsilon(x)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *почти всюду сходится к формальному решению, заданному формулой (2) на прямой.*

В пространстве $D'(\mathbb{R})$ семейство $w_\varepsilon(x)$ сходится тогда и только тогда, когда знаки $\operatorname{Im} a(\varepsilon)$ и $\operatorname{Im} b(\varepsilon)$ постоянны при достаточно малых ε и, в зависимости от этих знаков, обобщенным решением является одно из четырех распределений

$$W^{\pm,\pm} = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-b}\right) \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_b.$$

Возможны два вырожденных случая.

1. Если $C_2 = -\gamma C_1^2$, то $b = \infty$, $a = x_0 - \dfrac{1}{\gamma C_1}$ и, в зависимости от способа аппроксимации начальных условий, имеется два обобщенных решения

$$W^{\pm} = \frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi\frac{1}{\gamma}\delta_a.$$

2. Если $C_2 = -\dfrac{1}{2}\gamma C_1^2$, то точки a и b совпадают на вещественной прямой. В зависимости от способа аппроксимации начальных условий существуют три обобщенных решения

$$W^{\pm} = \frac{2}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) \pm i\pi\frac{2}{\gamma}\delta_a,\ W = \frac{2}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

Таким образом, в зависимости от начальных условий второе уравнение иерархии Риккати может иметь одно, два, три или четыре обобщенных решения.

Литература

1. Грицук Е. В., Кузьмина Е. В. *Исследование обобщенной иерархии уравнения Риккати на свойство Пенлеве* // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. 2017. № 2. С. 64–72.

2. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.

О НЕКОТОРЫХ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г.Т. Можджер

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2} + a_3yy'' + a_4y'^2 + a_5y^2y', \quad a_5 \neq 0, \tag{1}$$

где a_i, $i = \overline{1,5}$, – постоянные коэффициенты.

Упрощенным уравнением к уравнению (1) является уравнение

$$y''' = a_1\frac{y'y''}{y} + a_2\frac{y'^3}{y^2},$$

которое имеет характеристический многочлен $\varphi(\lambda) = 2\lambda^2 + (a_1+1)\lambda - a_2$.

Отсюда, согласно [1], имеем, что $a_1 + 1 = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$, $a_2 = -2\lambda_1\lambda_2$, где λ_1, λ_2 – корни характеристического многочлена.