А. И. ЖУК, Е. Н. ЗАЩУК, Т. В. КОПАЙЦЕВА
УО БрГТУ (г. Брест, Беларусь)

О СХОДИМОСТИ АППРОКСИМИРУЮЩИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ. СМЕШАННЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t),\quad i=\overline{1,p} \tag{1}$$

где $x(0)=x_0$ и f^{ij} – функции, удовлетворяющие условию линейного роста, $L^j(t)$ – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$ непрерывны справа, $L^j(0)=L^j(0-)=0$ и $L^j(a-)=L^j(a)$.

Уравнение (1) содержит произведение обобщенных функций. Решим это уравнение, используя концепцию новых обобщенных функций.

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций (см., [1])

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{x}^i(\widetilde{t})=\sum_{j=1}^{q}\widetilde{f}^{ij}(\widetilde{t},\widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t}),\ i=\overline{1,p} \tag{2}$$

где $\widetilde{x}\big|_{[\widetilde{0},\widetilde{h})}=\widetilde{x}^0$, $\widetilde{h}=[\{h_n\}]\in H$, $\widetilde{a}=[\{a\}]\in T$ и $\widetilde{t}=[\{t_n\}]\in\widetilde{T}$, $\widetilde{x}=[\{x_n(t)\}]$, $\widetilde{f}=[\{f_n(x)\}]$, $\widetilde{x}^0=[\{x_n^0(t)\}]$, $\widetilde{L}=[\{L_n(t)\}]$ и $x_{n0}\to x(0)$.

Заменим в (2) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим

$$x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)],\ i=\overline{1,p} \tag{3}$$

где $x_n(t)\big|_{[0,h_n)}=x_{n0}(t)$. В качестве представителей для уравнения (3) рассмотрим следующие функции:

$$L_n^j(t)=(L^j*\rho_n^j)(t)=\int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} L^j(t+s)\rho_n^j(s)ds,$$

где $\rho_n^j(t)=\gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t),\ \rho^j\geq 0,\ su\rho\rho(\rho^j)\subseteq[0,1],\ \int\limits_0^1\rho^j(s)ds=1,$

а $f_n=f*\tilde{\rho}_n,\quad \tilde{\rho}\geq 0,\quad \tilde{\rho}\in C^\infty(R^{p+1}),\quad \tilde{\rho}_n(x_0,x_1,\ldots,x_p)=n^{p+1}\tilde{\rho}(nx_0,nx_1,\ldots,nx_p),$
$\int\limits_{[0,1]^{p+1}}\tilde{\rho}(x_0,x_1,\ldots,x_p)dx_0dx_1\ldots dx_p=1,\ su\rho\rho(\tilde{\rho})\subseteq[0,1]^{p+1}.$

Здесь $\gamma^j(n)-$ некоторая монотонная функция такая, что $\gamma^j(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, $h_n\to 0,$ причем для $j=\overline{1,b},\ \gamma^j(n)h_n\to\infty$, а для $j=\overline{b+1,q}\ \ \gamma^j(n)h_n\to 0.$

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t=\tau_t+m_th_n$, где $\tau_t\in[0,h_n),\ \ m_t\in N$. Несложно видеть, что решение системы (3) можно записать в виде

$$x_n^i(t)=x_{n0}^i(\tau_t)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{ij}(\tau_t+kh_n,x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^j(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^j(\tau_t+kh_n)],$$

где $i=\overline{1,p}$. В одномерном случае в работах [2; 3] показано, что предел последней последовательности зависит от связи между $\gamma^j(n)$ и h_n. Данная работа посвящена изучению общей ситуации.

Для описания предельного поведения решения задачи Коши (3) рассмотрим систему

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int\limits_0^t f^{ij}(s,x(s))dL^{jc}(s)+\sum_{\mu_r\leq t}S^i(\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)),\quad i=\overline{1,p}, \qquad (4)$$

где $L^{jc}(t)-$ непрерывная, а $L^{jd}(t)-$ разрывная составляющая функции $L^j(t)$, $\mu_r^j,\ r=1,2,\ldots-$ точки разрыва функции $L^j(t)$, $\Delta L^{jd}(\mu_r+)-\Delta L^{jd}(\mu_r-),\quad i=\overline{1,p}\,-$ величина скачка, $S^i(\mu,x,u)=\varphi^i(1,\mu,x,u)-\varphi^i(0,\mu,x,u)$, где $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из уравнения:

$$\varphi^i(t,\mu,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{b}u^j\int\limits_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s-,\mu,x,u))dH(s-1)+$$
$$+\sum_{j=b+1}^{q}u^j\int\limits_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s,\mu,x,u))ds,$$

где $x\in R^p,\ \ u\in R^q,\ \ \mu\in T,\ \ H(s)$ – функция Хевисайда, т. е. $H(s)=1,$ при $s\geq 0$ и $H(s)=0,$ при $s<0.$

Теорема. Пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию линейного роста и ограничены. $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$ $h_n\to 0$ $\gamma^j(n)\to\infty$ так, что для $j=\overline{1,b}$, $\gamma^j(n)h_n\to\infty$ и для $j=\overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n\to 0$ решение $x_n(t)$ задачи Коши (3) сводится к решению системы уравнения (4) в пространстве $L^1(T)$, если $\int\limits_T |x_{n0}(\tau_t)-x_0|dt\to 0$.

Аналогичные теоремы в других пространствах и с другими условиями для функций f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ были рассмотрены в работах [4; 5; 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазакович, Н. В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н. В. Лазакович // Докл. НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 23–27.

2. Жук, А. И. Оценки скорости сходимости к ассоциированным решениям дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 2. – С. 17–22.

3. Жук, А. И. Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. Фіз.-мат. навук. – 2011. – № 1. – С. 12–16.

4. Жук, А. И. Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай / А. И. Жук, О. Л. Яблонский, С. А. Спасков // Весці БДПУ. Сер. 3, Фізіка, матэматыка, інфарматыка, біялогія, геаграфія. – 2019. – № 4. – С. 16–22.

5. Жук, А. И. Дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций / А. И. Жук, Т. И. Каримова // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2018. – № 5 (112). – С. 59–62.

6. Жук, А. И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 6. – С. 20–23.