МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра информатики и прикладной математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

и варианты заданий к контрольной работе №1 по дисциплине
«Математические модели информационных процессов и управления»
для студентов специальности
53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»
дневной и заочной форм обучения

БРЕСТ 2009

УДК 510.22

Методические указания содержат материалы по выполнению контрольной работы № 1 по дисциплине «Математические модели информационных процессов и управления» для студентов специальности 53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» дневной и заочной форм обучения. В указаниях приводятся варианты заданий, основные теоретические сведения и примеры решения задач по трем темам:

множества, векторы, соответствия, отношения;

графы;

логические функции.

Составители: И.В. Тузик, ст. преподаватель
С.И. Парфомук, к.т.н., доцент

Требования к выполнению и оформлению контрольной работы

Контрольная работа состоит из трех заданий. Вариант, по которому выполняется контрольная работа, выдается преподавателем. Контрольная работа выполняется студентом самостоятельно и оформляется **от руки** в тонкой тетради или на листах формата А4. Допускается использование компьютерных математических систем для проверки выполняемых расчетов. Распечатки полученных документов могут быть приложены к контрольной работе.

Для каждого пункта заданий 1, 2, 3 оформление выполняется по образцу:

- *№ задания. № пункта. Постановка задачи* (*переписывается с указанием конкретных данных своего варианта*).
- *Решение* (*записывается в произвольной форме, но аккуратно, логически последовательно и достаточно подробно*).
- *Ответ* (*записывается отдельно или выделяется в тексте решения*).

Оформленная контрольная работа отсылается на проверку не позже, чем за две недели до начала сессии. Работа, выполненная не по своему варианту, возвращается студенту без проверки. Если в выполненной контрольной работе преподаватель обнаруживает ошибки, то контрольная работа возвращается студенту для их исправления. Работа над ошибками прилагается к ранее выполненной работе. Не удаляйте листы с ошибками, а также записи с замечаниями рецензента!

Правильно выполненная контрольная работа получает отметку «допуск», остается у преподавателя и является одним из условий допуска студента к экзамену по соответствующей дисциплине.

Задание 1. Множества, векторы, соответствия, отношения.

Дано:

- универсум $U = \{x \mid x$ – целое, $0 \le x \le 9\}$;
- множества A, B, C, D из U, заданные описанием или перечислением своих элементов (см. таблицу I);
- множество M, определяемое так, как указано в таблице II.
- множества M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, заданные выражениями (см. табл. III).

1. Определить, из каких элементов состоят множества U, B, D и M, и записать их перечислением, приведя письменное обоснование полученных результатов.
2. Представить выражение, задающее множество M_5, диаграммой Эйлера (на диаграмме кругами изобразить те из множеств A, B, C, D, чьи обозначения имеются в исходном выражении для M_5, и заштриховать соответствующую область).
3. Используя свойства операций над множествами, привести выражение, задающее множество M_6, к виду «объединение пересечений элементарных множеств», максимально упростив при этом получаемое выражение.

Примечание. Под «элементарными» здесь понимаются множества A, B, C, D, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$.

4. Записать предложенные выражения (см. табл. IV), подставив в них данные своего варианта. Найти значения получившихся выражений.
5. Даны множества X = Y = {1,2,3,4,5} и соответствия $Q_i \subseteq X \times Y$, i=1,2,3,4 (см. таблицу V). Определить, какими свойствами обладает каждое из соответствий Q_i (i=1,...,4) (всюду определенное, сюръективное, функциональное, инъективное, биективное).
В зависимости от этого выполнить следующее:
   - 5.1. Если соответствие Q_i всюду определено, функционально, но не инъективно, то построить разбиение области определения соответствия на классы эквивалентности по отношению: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».
   - 5.2. Если соответствие Q_i сюръективно, инъективно, но не функционально, то построить разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению: «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».
   - 5.3. Если соответствие Q_i не инъективно и не функционально, то найти нижнюю и верхнюю грани множества Q_i, введя на этом множестве отношению порядка, по которому сравниваются векторы одинаковой размерности (если $a=(a_1,a_2)$ и $b=(b_1,b_2)$, то $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a_i \le b_i$, i=1,2).
   - 5.4. Если соответствие Q_i является биекцией, то построить соответствующую ему перестановку на множестве X и разложить ее на циклы.

Таблица I. Множества A,B,C,D:

№	A	B	C	D
1	{3, 2, 5, 6}	$\{x \in U \mid x$ - четное$\}$	{3, 6, 4, 7, 8, 9}	$\{x \in N \mid 5 < x \le 9\}$
2	{8, 6, 0, 2, 3}	$\{x \in N \mid x=2k-3,\ k=2,3,4\}$	{5, 3, 6, 1, 0, 2}	$\{x \in N \mid (x-3)(x^2-4)=0\}$
3	{1, 0, 3, 8, 7, 5}	$\{x \in U \mid x$ - четное$\}$	{3, 6, 4, 7, 8, 9}	$\{x \in N \mid \lvert x-5\rvert<5\}$
4	{7, 0, 4, 3, 6, 8}	$\{x \in N \mid x=2(k-2),\ k=2,3,5\}$	{0, 3, 4, 2, 8, 5}	$\{x \in N \mid x^2-4=0$ или $x^2=1\}$
5	{8, 1, 7, 5}	$\{x \in N \mid \lvert x-3\rvert<4\}$	{1, 8, 7, 3, 2, 6}	$\{x \in U \mid x<3$ и $x \ge 6\}$
6	{6, 7, 0, 4, 1}	$\{x \in N \mid (x-5)(x-7)=0\}$	{5, 7, 3, 6, 1, 0}	$\{x \in U \mid x$ - четное$\}$

№	A	B	C	D
7	$\{2, 6, 0, 9, 8\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid 2 \le x \le 6\}$	$\{6, 9, 0, 1, 2, 3\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid \lvert x-2\rvert<3\}$
8	$\{5, 8, 2, 3\}$	$\{x\in U \mid x$ - нечётное$\}$	$\{1, 6, 7, 9, 3\}$	$\{x\in U \mid x<5$ и $x>7\}$
9	$\{5, 2, 1, 8, 3, 6\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid (x-4)(x^2-25)=0\}$	$\{5, 9, 2, 3, 1\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid x=3k+3,\ k=0,1,2\}$
10	$\{2, 1, 5, 6, 7\}$	$\{x\in U \mid x>1$ и $x\le 6\}$	$\{1, 5, 0, 7, 3\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid (x^2-9)(x-1)=0\}$
11	$\{4, 7, 3, 2\}$	$\{x\in U \mid x<4$ и $x>8\}$	$\{8, 2, 6, 3, 0\}$	$\{x\in U \mid x$ - нечетное$\}$
12	$\{7, 1, 6, 8, 4, 5\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid x=3k+1,\ k=0,1,2\}$	$\{0, 3, 5\}$	$\{x\in U \mid 2<\lvert x-3\rvert<9\}$
13	$\{4, 0, 2, 1, 5, 8\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid 0 < x < 4\}$	$\{8, 4, 5, 2, 0\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid \lvert x-2\rvert<4\}$
14	$\{1, 3, 6, 4, 2\}$	$\{x\in U \mid x = 2^k,\ k=0,1,3\}$	$\{7, 2, 5, 6, 1, 0\}$	$\{x\in U \mid (x^2-25)(x-2)x=0\}$
15	$\{9, 0, 1, 2, 3\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid 2<\lvert x-4\rvert<5\}$	$\{7, 6, 1, 0, 8, 5\}$	$\{x\in U \mid x=3(k-2),\ k=2,3,4\}$
16	$\{4, 0, 6, 2, 8, 3\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid x=4(k+1),\ k=0,1\}$	$\{2, 7, 3, 6\}$	$\{x\in U \mid x$ - нечетное$\}$
17	$\{1, 5, 6\}$	$\{x\in U \mid 2 < x \le 7\}$	$\{6, 0, 7, 3, 8, 1\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid (x-7)(x-8)x=0\}$
18	$\{0, 7, 3, 8, 1\}$	$\{x\in U \mid x>3,\ x$ - четное$\}$	$\{1, 7, 3, 0\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid x$ кратно трем, $x<10\}$
19	$\{7, 9, 2, 3\}$	$\{x\in U \mid 3 \le x \le 7\}$	$\{4, 5, 0, 1, 3, 9\}$	$\{x\in U \mid x < 5$ и $x > 7\}$
20	$\{0, 8, 5\}$	$\{x\in \mathbb{N} \mid 2 \le \lvert x-3\rvert < 7\}$	$\{4, 1, 6, 3, 5, 2\}$	$\{x\in U \mid x^2-9x+20=0\}$

Таблица II. Множество M:

№	Условия, определяющие множество M	№	Условия, определяющие множество M
1	$D\subseteq \overline{M}$, $C\cap M=\varnothing$, $0\notin M$, $\lvert M\rvert=2$, $M\setminus B=\{5\}$	11	$M\subseteq \overline{A}$, $B\cap C\cap M\neq\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $6\notin M$, $\lvert\overline{M\cap C}\rvert=2$
2	$A\cap B\subseteq M$, $\lvert M\rvert=3$, $M\setminus C=\varnothing$, $0\in M$, $(D\Delta B)\setminus M=\{2,5\}$	12	$\lvert M\rvert=2$, $(D\setminus A)\cap M\neq\varnothing$, $M\subseteq\overline{A}$, $0\notin M$, $\overline{B\cup C\cup D}\cap M\neq\varnothing$
3	$(B\setminus A)\cap M\neq\varnothing$, $M\cap(D\setminus C)=\varnothing$, $M\subseteq B$, $\lvert M\rvert=2$, $6\notin M$, $A\cap B\cap D\subseteq M$	13	$M\subseteq A\cap C$, $\lvert M\rvert=2$, $M\cap B=\varnothing$, $8\notin M$, $M\setminus D\neq\varnothing$, $\lvert M\setminus\{2,4,6,8\}\rvert=1$
4	$\lvert M\rvert=2$, $M\subseteq A$, $\overline{B\cup C\cup D}\cap M\neq\varnothing$, $4\in M$	14	$\lvert M\rvert=3$, $M\subseteq C$, $D\cap B\cap M\neq\varnothing$, $\overline{M}\cap A=\{3,6,4\}$, $0\in M$
5	$M\subseteq D$, $\lvert M\rvert=3$, $7\in M$, $(B\setminus A)\cap M=\varnothing$, $M\cap\overline{C\cap D}=\varnothing$	15	$C\setminus(M\cup D)=\{7,8,5\}$, $M\subseteq B\cup D$, $6\notin M$, $\lvert M\rvert=3$, $(A\setminus B)\cap M\neq\varnothing$
6	$0\in M$, $M\setminus\overline{B}=\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $\lvert(A\cap C)\setminus M\rvert=2$, $M\subseteq C\setminus B$, $6\notin M$	16	$M\subseteq A$, $B\cap M=\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $(C\setminus D)\cap M=\{2\}$, $0\notin M$
7	$(A\cap B)\setminus M=\{6\}$, $\lvert M\rvert=3$, $M\subseteq C$, $\{7,8,9\}\subseteq\overline{M}$, $1\notin M$, $(D\setminus\{2\})\cap M\neq\varnothing$	17	$M\subseteq\overline{D}$, $\lvert M\rvert=2$, $A\cap B\cap C\subseteq M$, $9\notin M$, $(C\setminus B)\cap M=\varnothing$, $\{2,3,4\}\subseteq\overline{M}$
8	$B\setminus C\subseteq M$, $M\cap C=\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $M\subseteq A$, $2\notin M$	18	$M\subseteq\overline{B}$, $D\setminus(C\cup B)\subseteq M$, $5\notin M$, $\lvert M\rvert=2$, $M\cap\{0,1,2,3\}=\varnothing$
9	$\lvert M\rvert=3$, $M\subseteq\overline{D}$, $B\setminus M=\{4\}$, $0\notin M$, $M\cap C=\varnothing$	19	$M\cap A=\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $M\subseteq D\cap C$, $0\notin M$
10	$M\cap\overline{B}=\varnothing$, $\lvert M\rvert=2$, $C\setminus M=\{1,0,7,3\}$, $4\notin M$, $C\cap\overline{D}\not\subset M$	20	$M\subseteq\overline{B}$, $M\setminus C=\varnothing$, $\lvert M\rvert=3$, $2\in M$, $M\cap\{0,1\}=\varnothing$

Таблица III. Множества M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6:

№	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
1	A	$\overline{B}$	$\overline{A}\setminus\overline{D}$	$A\cap\overline{C}$	$\overline{M_3}\,\Delta\, M_1$	$\overline{M_2\cup\overline{M_4}}$
2	$\overline{D}$	C	$A\cup B$	$\overline{C}\setminus\overline{B}$	$(M_3)\cup M_1$	$\overline{M_2\,\Delta\,\overline{M_4}}$
3	B	$\overline{D}$	$C\setminus A$	$D\Delta\overline{C}$	$\overline{M_1}\cap\overline{M_3}$	$\overline{M_2\cup(M_4)}$
4	D	$\overline{A}$	$B\cup D$	$C\cap B$	$M_1\,\Delta\,\overline{M_3}$	$\overline{\overline{M_4}\setminus M_2}$
5	C	$\overline{D}$	$\overline{C}\cap B$	$C\Delta\overline{A}$	$M_1\setminus(M_3)$	$\overline{M_2\cup\overline{M_4}}$
6	$\overline{C}$	A	$\overline{D}\cup B$	$D\setminus\overline{A}$	$\overline{\overline{M_1}\,\Delta\, M_3}$	$(M_2)\cap M_4$
7	D	$\overline{C}$	$A\cap C$	$\overline{A}\setminus\overline{B}$	$\overline{M_3\,\Delta\,\overline{M_1}}$	$M_4\cup\overline{M_2}$
8	$\overline{C}$	B	$\overline{B}\setminus\overline{D}$	$A\Delta B$	$\overline{\overline{M_1}\cap\overline{M_3}}$	$\overline{\overline{M_2}\cup M_4}$
9	A	$\overline{D}$	$\overline{A}\cap\overline{B}$	$B\cup\overline{C}$	$M_1\setminus\overline{M_3}$	$\overline{(M_2)\,\Delta\, M_4}$
10	$\overline{B}$	C	$D\cup B$	$\overline{D}\setminus\overline{A}$	$(M_3)\,\Delta\, M_1$	$\overline{M_4\cap\overline{M_2}}$
11	$\overline{A}$	D	$\overline{C}\,\Delta\,\overline{D}$	$B\cap D$	$(M_3)\setminus M_1$	$\overline{M_4\cup(M_2)}$
12	B	$\overline{A}$	$\overline{A}\,\Delta\,\overline{D}$	$C\setminus\overline{D}$	$\overline{\overline{M_1}\cup M_3}$	$M_4\cap(M_2)$
13	$\overline{C}$	D	$\overline{B}\cap A$	$B\Delta\overline{D}$	$\overline{M_1}\cup\overline{M_3}$	$\overline{(M_2)\setminus M_4}$
14	$\overline{D}$	A	$\overline{C\cup B}$	$\overline{A}\cap C$	$\overline{M_1}\setminus M_3$	$\overline{\overline{M_2}\,\Delta\,\overline{M_4}}$
15	C	$\overline{B}$	$\overline{C}\,\Delta\, D$	$A\setminus D$	$\overline{M_3}\cap\overline{M_1}$	$\overline{(M_2)\cup M_4}$
16	A	$\overline{C}$	$B\setminus\overline{D}$	$C\cup\overline{A}$	$\overline{\overline{M_1}\,\Delta\, M_3}$	$M_4\cap\overline{M_2}$
17	$\overline{A}$	B	$\overline{B}\setminus C$	$C\cup\overline{D}$	$\overline{\overline{M_3}\cap\overline{M_1}}$	$M_4\,\Delta\,(M_2)$
18	$\overline{B}$	A	$D\cap\overline{A}$	$A\Delta C$	$\overline{M_3}\cup\overline{M_1}$	$\overline{M_4\setminus(M_2)}$
19	D	$\overline{B}$	$B\setminus\overline{C}$	$B\cap\overline{A}$	$M_3\cup\overline{M_1}$	$\overline{\overline{M_4}\,\Delta\,\overline{M_2}}$
20	$\overline{A}$	C	$A\Delta D$	$\overline{D}\cup\overline{B}$	$M_3\cap\overline{M_1}$	$\overline{M_4\setminus\overline{M_2}}$

Таблица IV. Выражения для составления прямого произведения множеств:

1	а) $(M_5\times M) \setminus \text{Пр}_{2,3}(M_1\times M_5\times M_3)$	б) $\text{Пр}_{2,3} M^3 \cap (\text{Пр}_3(M_2\times M_4\times M_6) \times \text{Пр}_1(M_3\times M))$
2	а) $(\text{Пр}_1 M^2)\times M_5 \cap \text{Пр}_{1,3}(M_5\times M_1\times M_3)$	б) $(\text{Пр}_1(M_5\times M_2\times M_4) \times \text{Пр}_1(M_3\times M)) \setminus ((\text{Пр}_2 M^2)\times M_4)$
3	а) $\text{Пр}_{2,3} M^3 \cap \text{Пр}_{1,3}(M_6\times M_2\times M_5)$	б) $(M_6\times M) \setminus (\text{Пр}_2(M\times M_3) \times \text{Пр}_3(M_4\times M_1\times M_6))$
4	а) $\text{Пр}_{1,2}(M_5\times M_4\times M_1) \cap (M_5\times M)$	б) $(\text{Пр}_2(M_2\times M_6\times M_5) \times \text{Пр}_1(M_3\times M)) \setminus \text{Пр}_{1,3} M^3$
5	а) $\text{Пр}_{1,2}(M_5\times M_4\times M_3) \setminus \text{Пр}_{2,3} M^3$	б) $(M_4\times M) \cap (\text{Пр}_1(M_5\times M) \times \text{Пр}_2(M_2\times M_6\times M_1))$
6	а) $((\text{Пр}_2 M^2)\times M_6) \setminus \text{Пр}_{1,3}(M_4\times M_1\times M_6)$	б) $(\text{Пр}_1(M_6\times M_2\times M_3) \times \text{Пр}_2(M\times M_5)) \cap \text{Пр}_{2,3} M^3$
7	а) $\text{Пр}_{1,3}(M_4\times M_2\times M_5) \setminus ((\text{Пр}_1 M^2)\times M_3)$	б) $(\text{Пр}_2(M_5\times M_6\times M_1) \times \text{Пр}_1(M_4\times M)) \cap (M_6\times M)$
8	а) $\text{Пр}_{1,2}(M_5\times M_3\times M_4) \cap \text{Пр}_{2,3} M^3$	б) $(\text{Пр}_3(M_1\times M_2\times M_6)\times \text{Пр}_1(M_4\times M)) \setminus \text{Пр}_{2,3}(M_2\times M_2\times M_6)$
9	а) $\text{Пр}_{1,3} M^3 \setminus \text{Пр}_{2,3}(M_3\times M_6\times M_5)$	б) $\text{Пр}_{1,2}(M_4\times M_5\times M_2) \cap (\text{Пр}_2(M_1\times M)\times \text{Пр}_2(M_6\times M_4\times M_5))$
10	а) $(\text{Пр}_2 M^2)\times M_5 \cap \text{Пр}_{1,3}(M_3\times M_2\times M_6)$	б) $(\text{Пр}_3(M_1\times M_4\times M_5) \times \text{Пр}_2(M_5\times M)) \setminus (M_6\times M)$
11	в) $(M_5\times M) \cap \text{Пр}_{1,3}(M_5\times M_2\times M_3)$	б) $\text{Пр}_{1,3} M^3 \setminus (\text{Пр}_1(M_6\times M_1\times M_4) \times \text{Пр}_2(M_3\times M))$
12	а) $(M_5\times M) \setminus \text{Пр}_{2,3}(M_1\times M_5\times M_4)$	б) $(\text{Пр}_2(M_4\times M_6\times M_3) \times \text{Пр}_2(M_2\times M)) \cap ((\text{Пр}_1 M^2)\times M_6)$
13	а) $\text{Пр}_{1,2}(M_6\times M_4\times M_1) \cap (M_6\times M)$	б) $(\text{Пр}_2(M\times M_5) \times \text{Пр}_3(M_2\times M_6\times M_5)) \setminus ((\text{Пр}_1 M^2)\times M_3)$
14	а) $\text{Пр}_{2,3}(M_2\times M_3\times M_5) \setminus (M_6\times M)$	б) $\text{Пр}_{1,2} M^3 \cap (\text{Пр}_1(M_6\times M) \times \text{Пр}_3(M_1\times M_4\times M_5))$
15	а) $\text{Пр}_{1,2}(M_5\times M_3\times M_6) \setminus \text{Пр}_{2,3} M^3$	б) $(\text{Пр}_1(M_6\times M) \times \text{Пр}_2(M_1\times M_4\times M_2)) \cap (M_5\times M)$
16	а) $(M_5\times M) \cap \text{Пр}_{1,3}(M_5\times M_1\times M_4)$	б) $(\text{Пр}_1(M_6\times M_3\times M_2)\times \text{Пр}_2(M_2\times M)) \setminus \text{Пр}_{1,2} M^3$
17	а) $\text{Пр}_{1,3} M^3 \cap \text{Пр}_{2,3}(M_1\times M_6\times M_3)$	б) $(\text{Пр}_2(M_2\times M_5\times M_4)\times \text{Пр}_1(M_6\times M)) \setminus \text{Пр}_{1,3}(M_3\times M_3\times M_6)$
18	а) $\text{Пр}_{1,2}(M_5\times M_3\times M_1) \cap ((\text{Пр}_1 M^2)\times M_5)$	б) $(M_6\times M) \setminus (\text{Пр}_3(M_4\times M_2\times M_6) \times \text{Пр}_1(M_1\times M))$
19	а) $\text{Пр}_{2,3}(M_1\times M_4\times M_6) \setminus (M_5\times M)$	б) $(\text{Пр}_1(M_5\times M_3\times M_1) \times \text{Пр}_2(M\times M_6)) \cap \text{Пр}_{1,3} M^3$
20	а) $\text{Пр}_{1,3}(M_6\times M_3\times M_4) \cap \text{Пр}_{2,3} M^3$	б) $\text{Пр}_{1,2}(M_2\times M_6\times M_1) \setminus (\text{Пр}_2(M_6\times M_5\times M_6) \times \text{Пр}_2(M_4\times M))$

Таблица V. Соответствия

№	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
1	(1,2), (3,1), (4,1), (5,1), (2,3)	(1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2)	(1,2), (2,3), (4,1), (5,4), (3,5)	(2,3), (4,5), (5,5), (3,2), (3,4)
2	(3,2), (1,3), (1,4), (2,1), (5,5)	(2,2), (2,5), (1,4), (3,4), (3,3)	(5,2), (3,4), (4,5), (2,4), (1,5)	(2,5), (5,1), (4,4), (3,2), (1,3)
3	(2,2), (4,3), (5,4), (1,1), (3,5)	(1,3), (3,4), (2,5), (5,3), (4,4)	(1,2), (1,4), (1,5), (2,1), (3,3)	(1,3), (2,2), (5,3), (4,5), (2,3)
4	(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (3,1)	(1,2), (4,4), (5,5), (2,3), (3,1)	(1,2), (1,4), (4,3), (3,5), (2,2)	(1,3), (2,4), (5,5), (3,4), (4,5)
5	(1,2), (2,3), (4,4), (5,5), (3,5)	(5,1), (3,4), (1,2), (2,3), (4,5)	(2,2), (1,4), (1,5), (2,1), (4,3)	(3,2), (2,4), (2,5), (3,5), (1,5)
6	(1,2), (2,3), (3,4), (5,1), (4,5)	(4,2), (3,3), (1,4), (5,2), (1,3)	(1,2), (2,4), (1,5), (3,3), (3,1)	(1,3), (2,4), (3,4), (5,5), (4,5)
7	(2,3), (4,3), (2,1), (3,5), (1,4)	(2,1), (1,2), (3,3), (5,4), (4,5)	(2,2), (1,4), (5,5), (3,4), (4,5)	(1,3), (2,5), (3,4), (3,1), (4,2)
8	(1,2), (4,2), (3,1), (2,5), (4,4)	(1,3), (5,2), (5,5), (2,4), (3,1)	(1,2), (2,4), (5,5), (3,5), (4,5)	(2,4), (1,5), (3,3), (4,2), (5,1)
9	(5,2), (5,5), (4,1), (2,4), (1,3)	(1,3), (3,4), (4,5), (5,2), (2,1)	(4,3), (1,3), (5,4), (2,5), (3,3)	(1,4), (4,3), (3,5), (2,2), (2,3)
10	(2,4), (1,4), (3,2), (4,5), (5,4)	(2,2), (5,2), (4,2), (1,3), (2,3)	(2,3), (3,2), (1,4), (3,1), (4,5)	(5,2), (1,3), (2,5), (4,1), (3,4)
11	(2,5), (5,1), (3,4), (4,2), (1,3)	(5,4), (1,3), (4,2), (2,3), (3,3)	(1,2), (1,5), (3,4), (5,1), (2,3)	(5,3), (2,3), (4,1), (3,1), (2,2)
12	(5,3), (3,5), (4,3), (2,1), (1,4)	(2,3), (5,4), (4,5), (1,5), (3,5)	(1,4), (2,5), (3,1), (4,4), (5,3)	(1,4), (1,2), (1,1), (2,5), (3,3)
13	(1,1), (1,2), (1,4), (2,3), (3,5)	(5,2), (2,5), (4,1), (3,4), (1,2)	(5,2), (3,3), (2,3), (1,4), (1,3)	(3,4), (2,5), (5,3), (1,5), (4,5)
14	(1,2), (5,3), (2,4), (4,4), (3,5)	(1,2), (1,1), (1,5), (3,3), (4,4)	(4,2), (5,1), (1,4), (3,3), (2,5)	(2,2), (4,2), (1,4), (3,2), (5,1)
15	(4,3), (1,1), (5,4), (2,5), (3,2)	(4,3), (1,4), (3,5), (5,5), (2,5)	(4,3), (2,4), (4,5), (4,1), (1,4)	(1,5), (1,3), (2,4), (3,1), (3,2)
16	(1,4), (4,1), (3,5), (2,2), (5,3)	(1,2), (1,1), (2,3), (2,5), (2,4)	(2,2), (4,4), (5,3), (3,4), (1,5)	(3,1), (2,4), (3,5), (4,2), (5,3)
17	(1,4), (1,2), (1,5), (2,1), (3,3)	(1,1), (2,4), (3,2), (1,5), (4,1)	(2,3), (5,2), (1,4), (3,1), (4,5)	(3,4), (5,5), (4,3), (2,5, (1,5)
18	(5,2), (4,3), (3,4), (1,5), (2,5)	(2,1), (1,4), (3,2), (4,5), (5,3)	(1,1), (1,3), (2,2), (3,5), (4,4)	(2,3), (4,1), (5,2), (3,4), (3,3)
19	(3,5), (4,2), (1,5), (4,3), (2,2)	(4,3), (1,4), (2,3), (5,4), (3,5)	(1,3), (1,4), (2,1), (2,5), (3,2)	(5,4), (1,3), (4,2), (2,5), (3,1)
20	(5,2), (1,3), (4,4), (2,4), (3,5)	(2,4), (5,1), (4,3), (2,4), (5,2)	(5,2), (1,5), (3,4), (4,1), (2,3)	(1,4), (1,1), (2,2), (2,5), (4,3)

Теоретические сведения и примеры выполнения Задания 1

Множества

Множество – одно из основных понятий современной математики, используемое почти во всех ее разделах. Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия множества. Во многих вопросах приходится рассматривать некоторую совокупность элементов как единое целое. Для математического описания таких совокупностей было введено понятие множества. «Множество есть многое, мыслимое нами как единое». Строгого определения множества не существует (так же, как не существует определения точки в геометрии). Будем говорить, что

Множество – это любая определенная совокупность объектов, которые мы рассматриваем как единое целое. Объекты, составляющие множество, различны и отделены друг от друга.

Пояснения к определению множества:

- совокупность объектов. Как предметы рассматриваются уже не отдельные объекты, а их совокупности. Свойства отдельного объекта не важны. Сравнение: множество – это «мешок с элементами».
- объекты различны и отделены друг от друга. Нельзя, например, говорить о множестве капель в стакане воды, так как не возможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю. В множестве не должно быть одинаковых (неразличимых) элементов.

Синонимы слова «множество»: «класс», «область», «совокупность».

Объекты, составляющие множество, могут быть самой различной природы.

Примеры. Множество может состоять из всех:

а) натуральных чисел 1, 2, 3, ...;

б) студентов некоторой группы;

в) студенческих групп 2-го курса машиностроительного факультета.

Объекты, составляющие множество, называются его **элементами**.

Пример. Число 3 – элемент множества натуральных чисел; буква б – элемент множества букв русского алфавита.

Множества как объекты могут быть элементами других множеств.

Множество, элементами которого в свою очередь являются множества, называется **системой множеств.**

Общее обозначение множества – эта пара фигурных скобок { }, внутри которых перечисляются или описываются элементы множества. Элементы множества обозначаются строчными буквами x, y, ..., или строчными буквами с индексами a_1, a_2, ...

Пример. Если множество состоит из элементов a, b, c, то пишут: {a, b, c }.

Чтобы ссылаться на множества, не перечисляя их элементы, сами множества обозначаются прописными буквами A, S, X, ... или X_1, X_2, ...

Пример. Если из элементов a, b, c состоит множество S, то пишут: S={a, b, c}.

Принадлежность элемента множеству обозначают символом $\in$.

Примеры.

1) $a\in S$ – элемент a принадлежит множеству S (является элементом этого множества), $x\notin S$ – элемент x не принадлежит множеству S (не является его элементом).

2) Рассмотрим три множества: A={0,1}, B={{0, 1}, 2} и C={{{0, 1}, 2}, 3}. Верны следующие соотношения $A\in B$, $B\in C$, но $A\notin C$.

Множества делятся на конечные и бесконечные.

Множество называется **конечным**, если оно состоит из конечного числа элементов, т.е. если существует натуральное число n, являющиеся числом элементов множества.

Бесконечное множество содержит бесконечное число элементов.

Пустое множество – это множество, не содержащее ни одного элемента.

Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество относят к конечным множествам. Это единственное множество, при обозначении которого никогда не используются фигурные скобки. ($\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ - это разные множества.)

Пример. Примеры конечных, бесконечных и пустых множеств:

1) приведенные на предыдущей странице множества S, A, B, C – конечные.

2) множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, множество целых чисел $\mathbb{Z}$, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ (множество всех точек числовой прямой) – бесконечные.

3) множество нечетных чисел, нацело делящихся на 2 – пустое.

Пустое множество введено в математике для удобства. Так, без понятия пустого множества мы не могли бы говорить о множестве отличников в группе или о множестве вещественных корней уравнения, не убедившись предварительно, есть ли в данной группе отличники и имеет ли данное уравнение вещественные корни. Введение пустого множества позволяет спокойно оперировать, например, с множеством отличников группы, не заботясь о том, есть ли в данной группе отличники.

Одной из основных характеристик конечного множества является число его элементов. Число элементов в конечном множестве M называется **мощностью** множества M и обозначается $|M|$.

Пример. Множество M={1, 4, 2, 10, 3} имеет мощность 5 ($|M|=5$), $|\varnothing|=0$, но $|\{\varnothing\}|=1$.

Чтобы оперировать с конкретными множествами, надо уметь задавать эти множества. Чтобы задать множество, нужно указать, какие элементы ему принадлежат. Это можно сделать следующими способами:

- перечислением элементов: $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$;
- описанием: $M=\{x\in U \mid P(x)\}$.

Перечисление – это задание списка элементов множества или списка их обозначений, разделенных запятыми.

Список обычно заключается в фигурные скобки. Перечислением можно задавать только конечные множества. Для сокращения записи $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ иногда вводят множество индексов $I=\{1, 2, ..., n\}$: $X=\{x_i\}$, $i\in I$.

Описание состоит в том, что указывается свойство (или проверяется некоторое условие). Если данный элемент обладает этим свойством (или для него выполняется данное условие), то он принадлежит определяемому множеству, иначе – не принадлежит.

Описанием можно задавать и бесконечные, и конечные множества.

Пусть P(x) – сокращенное обозначение предложения «элемент x обладает свойством P». Тогда множество всех элементов, имеющих свойство P, обозначают так: $\{x \mid P(x)\}$ («множество всех x таких, что P(x) истинно»). Если x выбирается из множества U, и это нужно отразить в описании, то пишут: $\{x\in U \mid P(x)\}$.

Описание свойств должно быть точным и недвусмысленным. Например, множество всех хороших фильмов 2005 года разные люди зададут разными списками, быть может, пустыми. Сами критерии отбора при этом будут различны. Такое множество нельзя считать строго заданным.

Примеры.

1) Множество отличников группы можно задать:

перечислением: {Иванов, Петров, Сидоров};

описанием: $\{x\in M \mid x$ – отличник группы$\}$, где M – мн-во студентов конкретной группы.

2) $\{x \mid x$ – четное$\}$ – множество четных чисел (задано описанием).

3) $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-1=0\}$, $\{+1,-1\}$ –одно и то же множество задано описанием и перечислением.

4) $\{x\in\mathbb{N} \mid 2\leq x\leq 2^{10}\}$ – множество всех натуральных чисел от 2 до 2^{10}.

Существует несколько видов отношений между множествами.

1. Отношение равенства.

Два конечных множества M и N называются **равными** (M=N), если они состоят из одних и тех же элементов.

$M\neq N$, если в M есть элементы, не принадлежащие N, либо наоборот.

Следствия:

1) Порядок элементов в множестве не важен.

2) Все пустые множества равны (существует только одно пустое множество).

Примеры.

1) $\{2, 4, 5,6\}=\{4, 5, 6, 2\}$

2) Множества $\{0, 1\}$ и $\{\{0, 1\}\}$ не равны, так как первое – двухэлементное, а второе – одноэлементное.

2. Отношение включения.

Множества A **включено** в множество B (или содержится в множестве B), если любой элемент множества A принадлежит множеству B. В этом случае говорят, что множество A является **подмножеством** множества B. Обозначается: $A\subseteq B$, $\subseteq$ – знак включения.

Запись $A\subset B$ равносильна тому, что $A\subset B$ и $A\neq B$. Используется, если нужно подчеркнуть, что B содержит и другие элементы, кроме элементов из A (разница между $\subset$ и $\subseteq$ равносильно разнице между $<$ и $\leq$).

Если $A\subset B$, то A называется **собственным** подмножеством множества B.

Примеры.

1) Множество четных чисел есть подмножество множества Z целых чисел.

2) $\{1, 2\}\subseteq\{1, 2, 3, 4\}$.

Некоторые свойства отношения включения:

- $A\subseteq A$ (рефлексивность).
- Если $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, то $A\subseteq C$ (транзитивность).
- Если $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$, то A=B (два мн-ва равны, если они - подмножества друг друга).
- $\forall A$: $\varnothing\subset A$ (пустое множество есть подмножество любого множества).

Из свойств 1) $A\subseteq A$ и 4) $\varnothing\subset A$ следует, что подмножества A и $\varnothing$ являются несобственными подмножествами множества A. Значит, $\varnothing$ и каждое одноэлементное множество обладают только несобственными подмножествами.

Пример. Все возможные подмножества множества {a, b} (их всего 4):

$\varnothing$, {a}, {b}, {a, b}, из которых {a} и {b} – собственные.

<u>Замечание.</u> Нельзя смешивать отношения принадлежности ($\in$) и включения ($\subseteq$). Хотя $1\in\{1, 2\}$, но $\{1\}\notin\{1, 2\}$, зато $\{1\}\subset\{1, 2\}$.

Множество всех подмножеств множества M называется **множеством-степенью** или **булеаном** (обозначается 2^M или P(M)). Булеан существует для любого множества M.

Теорема. Число всех подмножеств конечного множества M равно $2^{|M|}$.

Примеры. 1) Если A={a, b}, то $|P(A)|= 2^{|A|}= 2^2= 4$, P(A)={∅, {a}, {b}, {a, b}}.

2) Если B={1, 2, 3}, то $|P(B)|= 2^3 = 8$, P(B)={∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}.

Теперь определим способы конструирования новых множеств из уже существующих, т.е. определим операции над множествами.

Если все множества, рассматриваемые при решении определенной задачи, являются подмножествами некоторого множества U, то множество U называется универсальным для данной задачи, или **универсумом**.

Для каждого множества M существует множество всех его подмножеств P(M). По отношению к системе всех своих подмножеств любое множество является универсумом.

Операции над множествами

1) **объединением** множеств M и N называется множество, каждый элемент которого принадлежит либо M, либо N, либо M и N одновременно: $M\cup N = \{a\in U \mid a\in M \text{ или } a\in N\}$.

2) **пересечением** множеств M и N называется множество, каждый элемент которого принадлежит и множеству M, и множеству N: $M\cap N = \{a\in U \mid a\in M \text{ и } a\in N\}$. Множества называются непересекающимися, если они не имеют общих элементов: $M\cap N =\varnothing$.

3) **разностью** множеств M и N называется множество, все элементы которого принадлежат M и не принадлежат N: $M \setminus N = \{a\in U \mid a\in M \text{ и } a\notin N \}$.

4) **симметрической разностью** множеств M и N называется множество, все элементы которого принадлежат объединению множеств M и N и не принадлежат их пересечению:

$$M\Delta N = (M\cup N) \setminus (M\cap N) = \{ a\in U \mid a\in M\cup N \text{ и } a\notin M\cap N \} \text{ или}$$

$$M\Delta N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)=\{ a\in U \mid (a\in M \text{ и } a\notin N) \text{ или } (a\in N \text{ и } a\notin M)\}.$$

5) **дополнением** множества M до универсума называется множество $\overline{M}$, состоящее из всех тех элементов универсума U, которые не принадлежат M: $\overline{M}=U\setminus M=\{ a\in U \mid a\notin M\}$.

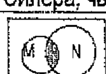
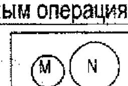
Пример. Пусть задан универсум U и его подмножества X и Y.

U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, X={1, 2, 3, 4, 5}, Y={2, 4, 5, 6, 7}.

Объединение:	$X\cup Y$	=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
Пересечение:	$X\cap Y$	=	{2, 4, 5}
Разность:	$X\setminus Y$	=	{1, 3}
Симметрическая разность:	$X\Delta Y$	=	{1, 3, 6, 7}
Дополнение:	$\overline{X}$	=	{6, 7, 8, 9}

Операции над множествами можно изображать графически с помощью **диаграмм Эйлера**. Внешняя прямоугольная область каждой диаграммы соответствует универсуму.

Диаграммы Эйлера, чьи закрашенные области соответствуют указанным операциям:

					
объединение мн-в M и N	пересечение мн-в M и N	разность мн-в M и N	симметрическая разность M и N	дополнение мн-ва M	мн-ва M и N не пересекаются

Операции объединения и пересечения определяются для произвольной, в том числе и бесконечной совокупности множеств.

Обозначение $A\cup B\cup C\cup D$ используется, если совокупность содержит небольшое количество множеств. Объединение всех множеств совокупности S может записываться так: $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ – когда $S=\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$; $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – когда S является бесконечной совокупностью, и ее множества занумерованы подряд натуральными числами.

Используя операции над множествами, можно выражать одни множества через другие, при этом сначала выполняется одноместная операция дополнения, затем пересечения, только затем объединения. Для изменения этого порядка используют скобки.

Пусть U – универсум, и F_1, F_2, F_3 - любые его подмножества, заданные сколь угодно сложными выражениями. Тогда справедливы следующие

Свойства операций над множествами:

1. Идемпотентность:	$F_1\cup F_1=F_1$	$F_1\cap F_1=F_1$
2. Коммутативность:	$F_1\cup F_2=F_2\cup F_1$	$F_1\cap F_2=F_2\cap F_1$
3. Ассоциативность:	$F_1\cup(F_2\cup F_3)=(F_1\cup F_2)\cup F_3$	$F_1\cap(F_2\cap F_3)=(F_1\cap F_2)\cap F_3$
4. Дистрибутивность:	$F_1\cup(F_2\cap F_3)=(F_1\cup F_2)\cap(F_1\cup F_3)$	$F_1\cap(F_2\cup F_3)=(F_1\cap F_2)\cup(F_1\cap F_3)$
5. Свойства нуля:	$F_1\cup\varnothing=F_1$	$F_1\cap\varnothing=\varnothing$
6. Свойства единицы:	$F_1\cup U=U$	$F_1\cap U=F_1$
7. Свойства дополнения:	$F_1\cup\overline{F}_1=U$	$F_1\cap\overline{F}_1=\varnothing$
8. Поглощение:	$F_1\cup(F_1\cap F_2)=F_1$	$F_1\cap(F_1\cup F_2)=F_1$
9. Законы де Моргана:	$\overline{F_1\cup F_2}=\overline{F}_1\cap\overline{F}_2$	$\overline{F_1\cap F_2}=\overline{F}_1\cup\overline{F}_2$
10. Инволютивность:	$\overline{\overline{F}}_1=F_1$	
11. Свойство разности:	$F_1\setminus F_2=F_1\cap\overline{F}_2$	

Замечание. Свойства 1-10 справедливы **только** для операций объединения, пересечения и дополнения.

Пример. Докажем с помощью свойств операций над множествами, что

$$(M\setminus N)\cup(N\setminus M)=(M\cup N)\setminus(M\cap N).$$

$(M\setminus N)\cup(N\setminus M)$ =[избавляемся от знака разности по свойству 11]= $(M\cap\overline{N})\cup(N\cap\overline{M})$ = =[по свойству 4 раскрываем вторую пару скобок, принимая первую пару скобок за одно множество]= $((M\cap\overline{N})\cup N)\cap((M\cap\overline{N})\cup\overline{M})$ =[в пределах каждой большой скобки опять применяем свойство 4, стремясь к тому, чтобы множество и его дополнение оказались рядом]= $((M\cup N)\cap(\overline{N}\cup N))\cap((M\cup\overline{M})\cap(\overline{N}\cup\overline{M}))$ =[по свойству 7 получаем, что объединение множества и его дополнения дает универсум U]= $((M\cup N)\cap U)\cap(U\cap(\overline{N}\cup\overline{M}))$ =[по свойству 6 пересечение универсума с множеством дает это же множество]= $(M\cup N)\cap(\overline{N}\cup\overline{M})$ =[по закону де Моргана]= $(M\cup N)\cap\overline{M\cap N}$ =[по свойству 11]= $=(M\cup N)\setminus(M\cap N)$.

Векторы

Вектор – это упорядоченный набор элементов. Место каждого элемента в векторе является вполне определенным и не может быть произвольно изменено.

Элементы, образующие вектор, называются **координатами** или **компонентами** вектора. Координаты нумеруются слева направо. Число координат вектора называется его **размерностью**.

В отличие от элементов множества, координаты вектора могут иметь одинаковые значения. Для обозначения вектора используются круглые скобки.

Запись $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ означает вектор a размерности n с компонентами $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Векторы размерности 2 часто называются **парами** (или упорядоченными парами), векторы размерности 3 – тройками и т.п.

Два вектора **равны**, если они имеют одинаковую размерность и соответствующие координаты их равны, т.е. векторы $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ равны, если $m=n$ и $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, …, $a_m=b_n$.

Прямым (декартовым) произведением множеств A и B ($A\times B$) называется множество всех пар, 1-я компонента которых принадлежит множеству A, а 2-я – множеству B.

Таким образом, элементами прямого произведения $A\times B$ являются пары вида (a, b):

$$A\times B=\{(a, b) \mid a\in A, b\in B\}.$$

Результат прямого произведения зависит от порядка сомножителей: в общем случае

$$X\times Y\neq Y\times X.$$

Если A = B, то обе координаты прямого произведения $A\times B$ принадлежат A. Такое произведение обозначается A^2.

Операция прямого произведения распространяется и на большее число множеств.

Прямым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество, обозначаемое $A_1\times A_2\times\dots\times A_n$ и состоящие из векторов длины n, первая компонента которых принадлежит A_1, вторая – A_2, …, n-я – A_n: $A_1\times A_2\times\dots\times A_n=\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1\in A_1, a_2\in A_2, \dots, a_n\in A_n\}$

Пусть A – произвольное множество. Прямое произведение n одинаковых множеств, равных A, обозначаем A^n: $\underbrace{A\times A\times A\times\dots\times A}_{n} = A^n$.

<u>Вывод</u>: Любой вектор размерности n является элементом прямого произведения $X_1\times X_2\times\dots\times X_n$ некоторых множеств $X_1, \dots, X_n$. И наоборот, прямое произведение n множеств состоит только из векторов размерности n.

Примеры.

Пусть $X=\{1,2,4\}$, $Y=\{3,5\}$, $Z=\{1\}$. Тогда $X\times Y=\{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(4,3),(4,5)\}$, $Z\times X=\{(1,1),(1,2),(1,4)\}$, $Y\times Z=\{(3,1),(5,1)\}$, $X\times Z\times Y=\{(1,1,3),(1,1,5),(2,1,3),(2,1,5),(4,1,3),(4,1,5)\}$

Теорема (о мощности прямого произведения множеств).

Пусть A и B – конечные множества. Тогда $|A\times B|=|A|\cdot|B|$, т.е. мощность прямого произведения этих множеств равна произведению мощностей множеств A и B.

<u>Следствие</u>. $|A^n|=|A|^n$.

Проекцией вектора $v = (v_1, \dots, v_n)$ на i-ю ось ($i=1,2\dots n$) называется его i-я компонента:

$$\text{Пр}_i\, v = v_i.$$

Проекцией вектора $v=(v_1,\dots,v_n)$ на оси с номерами $i_1,\dots,i_k$ называется вектор $(v_{i_1},\dots,v_{i_k})$ размерности k: $\text{Ïð}_{i_1,\dots,i_k} v = (v_{i_1},\dots,v_{i_k})$.

Пример. $\text{Пр}_3(3,4,6,7,9) = 6$, $\text{Пр}_{2,5}(3,4,6,7,9) = (4,9)$.

Операция проектирования множества тесно связана с операцией проектирования вектора и может применяться лишь к таким множествам, элементами которых являются векторы одинаковой размерности.

Пусть V – множество векторов одинаковой размерности, равной n. Тогда **проекцией множества** V на *i*-ю ось (*i* =1,...,n) называется множество проекций всех векторов этого множества на *i*-ю ось: $\text{Пр}_i V = \{\text{Пр}_i v \mid v \in V\}$.

Аналогично определяется проекция множества V на несколько осей:

$$\text{Ïð}_{i_1,\dots,i_k} V = \{\text{Ïð}_{i_1,\dots,i_k} v \mid v \in V\}.$$

Если множество состоит из векторов одинаковой размерности, то проекции позволяют рассматривать множество только первых компонент этих векторов или множество только 1-х и 2-х компонент и т.д.

Примеры. $\text{Пр}_3\{(1,1,3),(1,1,5),(4,1,5)\} = \{3, 5, 5\} = \{3, 5\}$.

$\text{Пр}_{1,2}\{(1,1,3),(1,1,5),(2,1,3)\} = \{(1,1),(1,1),(2,1)\} = \{(1,1),(2,1)\}$.

Пусть требуется найти проекцию множества X, которое представлено как прямое произведение некоторых множеств $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Проекция множества X на i–ю ось есть множество i–х компонент всех векторов, образующих множество X. i-я компонента каждого вектора – это элемент из множества X_i. При этом среди i–х компонент встретятся все элементы множества X_i (по определению прямого произведения). Поэтому

$$\text{Пр}_i X = \text{Пр}_i X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = X_i.$$

Аналогично, $$\text{Пр}_{i_1,i_2,\dots,i_k} X = X_{i_1} \times X_{i_2} \times \ldots \times X_{i_k}.$$

Примеры. Для множеств X, Y, Z, заданных выше, имеем:

$\text{Пр}_2\, X \times Z \times Y = Z$, $\text{Пр}_{1,3}\, X \times Z \times Y = X \times Y$.

Соответствия

Рассмотрим 2 множества X и Y. Элементы этих двух множеств могут каким-либо образом сопоставляться друг с другом, образуя пары (x, y).

Если способ такого сопоставления определен, то есть для элемента $x \in X$ указан элемент $y \in Y$, с которым сопоставляется элемент x, то говорят, что между множествами X и Y установлено **соответствие**.

Чтобы задать соответствие, необходимо указать:

1) множество X, чьи элементы сопоставляются с элементами другого множества;
2) множество Y, с чьими элементами сопоставляются элементы первого множества;
3) множество $Q \subseteq X \times Y$, определяющее закон, по которому осуществляется сопоставление, т.е. перечисляющее все пары (x; y), участвующие в сопоставлении.

Итак, соответствием между множествами X и Y называется подмножество $Q \subseteq X \times Y$.

Кроме трех рассмотренных множеств X, Y и Q, с каждым соответствием неразрывно связаны еще 2 множества:

1) множество $\text{Пр}_1 Q$, называемое **областью определения** соответствия, в которые входят элементы множества X, участвующие в сопоставлении;
2) множество $\text{Пр}_2 Q$ называемое **областью значений** соответствия, в которое входят элементы множества Y, участвующие в сопоставлении.

Если $(x, y) \in Q$ то это означает, что элемент y соответствует элементу x при соответствии Q.

Пример. Пусть $X=\{1,2\}$, $Y=\{3, 5\}$, так что $X\times Y=\{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$.

Это множество дает возможность получить 16 различных соответствий. Некоторые из них: $Q_1=\{(1, 3)\}$; $Пр_1Q_1=\{1\}$, $Пр_2Q_1=\{3\}$. $Q_2=\{(1, 3), (1, 5)\}$; $Пр_1Q_1=\{1\}$, $Пр_2Q_2=\{3, 5\}=Y$.

Соответствие может обладать следующими **свойствами:**

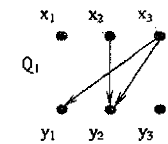
1) всюду определенность;
2) сюръективность;
3) инъективность;
4) функциональность;
5) взаимная однозначность.

В примерах будем рассматривать соответствия – подмножества прямого произведения $X\times Y$, где $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$.

Пусть $Q\subseteq X\times Y$ – некоторое соответствие.

1) Если $Пр_1Q=X$, то соответствие называется **всюду определенным** или полностью определенным (иначе соответствие называется **частичным**).
2) Если $Пр_2Q=Y$, соответствие называется **сюръективным.**

Другими словами, если соответствие $Q\subseteq X\times Y$ всюду определено – это значит, что при соответствии задействованы все элементы из X, если соответствие сюръективно, то это значит, что при сопоставлении задействованы все элементы из Y.



Пример. Между множествами X и Y установим соответствие $Q_1\subseteq X\times Y$, $Q_1=\{(x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}$ и рассмотрим его свойства.

$Пр_1Q_1=\{x_2, x_3\}\neq X \Rightarrow Q_1$ – не всюду определено.

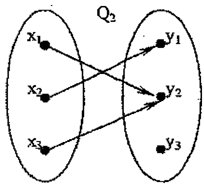
$Пр_2Q_1=\{y_2, y_1\}\neq Y \Rightarrow Q_1$ – не сюръективно.

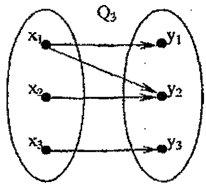
Множество всех $y\in Y$, соответствующих элементу $x\in X$, называется **образом** x в Y при соответствии Q.

Множество всех $x\in X$, соответствующих элементу $y\in Y$, называется **прообразом** y в X при соответствии Q.

$Q\subseteq X\times Y$

здесь находятся прообразы элементов из $Пр_2Q$	здесь находятся образы элементов из $Пр_1Q$





$\{x_1, x_3\}$ – прообраз y_2 при соответствии Q_2. $\{y_1, y_2\}$ – образ x_1 при соответствии Q_3

3) Соответствие Q называется **функциональным** (или однозначным), если образом любого элемента из $Пр_1Q$ является единственный элемент из $Пр_2Q$ (каждому элементу из $Пр_1Q$ соответствует только один элемент из $Пр_2Q$).

4) Соответствие Q называется **инъективным**, если прообразом любого элемента из $Пр_2Q$ является единственный элемент из $Пр_1Q$ (каждому элементу из $Пр_2Q$ соответствует только один элемент из $Пр_1Q$).

5) Соответствие Q между X и Y называется **взаимно однозначным (биективным)**, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

Пример. Рассмотрим $Q_4\subseteq X\times Y$, $Q_4=\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_2)\}$ – всюду определено, функционально, но не сюръективно, значит, не биективно.

Установим соответствие $Q_5 \subseteq X \times Y$, $Q_5 = \{(x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_1)\}$ – всюду определено, сюръективно, функционально, значит, биективно.

Функцией называется функциональное соответствие.

Если функция f устанавливает соответствие между множествами X и Y, то это записывается так: $f: X \to Y$.

Каждому элементу x из своей области определения функция f ставит в соответствие <u>единственный</u> элемент y из области значений. Это обозначается так: $f(x) = y$.

Пример. Рассмотрим соответствие $f_1: X \to Y$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$,

$f_1 = \{(x_1, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_2)\}$.

f_1 – функциональное соответствие, следовательно, это функция.

Пусть $f: X \to Y$.

Всюду определенная функция называется **отображением** X **в** Y (например f_1).

Если отображение сюръективно, т.е. каждый элемент из Y имеет прообраз в X, то имеет место **отображение** X **на** Y.

Отображение $f: A \to A$ называется **преобразованием** множества A.

Пусть A – конечное множество. Преобразования этого множества, являющиеся биективными, называются **перестановками** (иногда – подстановками).

Пример. $A = \{1, 2, 3\}$. Перестановку обычно записывают в виде матрицы, 1-ая строка которой содержит все элементы множества A, а под каждым элементом 1-ой строки (во 2-ой строке) записывается значение перестановки – тоже элементы множества A.

$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ означает, что $\alpha(1)=3$, $\alpha(2)=1$, $\alpha(3)=2$. Любая перестановка может быть разложена в произведение независимых циклов, например: $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,2\,6\,5\,4\,1 \end{pmatrix} = (136)(2)(45)$.

Отношения

Бинарным отношением R в множестве M называется подмножество его квадрата: $R \subseteq M^2$. Т.к. элементами M^2 являются упорядоченные пары, то бинарное отношение есть множество упорядоченных пар.

Элементы a и b находятся в отношении R, если $(a,b) \in R$ (другая запись: aRb).

Аналогично задаются отношения на прямом произведении отличных друг от друга множеств: $R \subseteq A \times B$, если $A \neq B$.

Пусть a, b, c – любые элементы из множества M, $R \subseteq M$ – бинарное отношение.

Свойства бинарных отношений.

- Рефлексивность: $\forall a \in M$ aRa – истинно.
- Антирефлексивность: $\forall a \in M$ aRa – ложно.

Все элементы главной диагонали матрицы рефлексивного отношения равны 1.

- Симметричность: $\forall a, b \in M$: если aRb – истина, то bRa – истинно.
- Антисимметричность: $\forall a, b \in M$: если aRb – истинно и bRa – истинно, то a=b.

Матрица симметричного отношения симметрична относительно главной диагонали.

- Транзитивность: $\forall a, b, c \in M$: если aRb и bRc – истинно, то aRc – истинно.

Отношения делятся на различные виды в зависимости от того, обладают или не обладают они некоторыми свойствами. Рассмотрим два основных вида отношений.

1. Отношение эквивалентности.

Некоторые элементы множества можно рассматривать как эквивалентные в том случае, когда любой из этих элементов при некотором рассмотрении может быть заменён другим. В этом случае говорят, что данные элементы находятся в отношении эквивалентности (для обозначения используется символ ~).

Отношение называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Разбиение множества по заданному отношению эквивалентности

Представление множества M в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств M_i называется **разбиением** множества M: $\bigcup_i M_i = M$, $M_k \cap M_l = \varnothing$, если $k \neq l$.

Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности R. Выполним следующее построение. Выберем элемент $a_1 \in M$ и образуем класс M_1 (подмножество множества M), состоящее из a_1 и всех элементов, эквивалентных a_1. Затем выберем элемент $a_2 \notin M_1$ и образуем класс M_2, состоящий из a_2 и всех элементов, эквивалентных a_2, и т.д. Получится система классов M_1, M_2,...(возможно бесконечная) такая, что любой элемент из M входит в один из классов, т.е. $\bigcup_i M_i = M$.

Каждому отношению эквивалентности на множестве M соответствует некоторое разбиение множества M на классы.

2. Отношение порядка.

Часто возникают отношения, которые определяют некоторый порядок расположения элементов множества. Если можно расположить элементы множества M в некотором порядке, то говорят, что на множестве X можно ввести **отношение порядка**.

Отношение называется отношением **нестрогого порядка**, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно (для обозначения используется символ $\leq$).

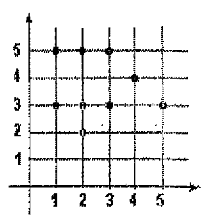
Отношение называется отношением **строгого порядка**, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно (обозначается символом <).

Элементы a и b **сравнимы по отношению порядка** R, если выполняется aRb или bRa.

Множество M, на котором задано отношение порядка, называется **полностью упорядоченным**, если любые два элемента из этого множества M сравнимы, и **частично упорядоченным** в противном случае.

Для множества, на котором задан частичный порядок элементов, можно ввести понятие нижней и верхней грани. **Нижнюю грань** образуют все несравнимые между собой минимальные элементы, а **верхнюю грань** - все несравнимые между собой максимальные элементы множества.

Пример. Пусть на множестве {(1,3),(1,5),(2,2), (2,3),(2,5),(4,3),(4,4), (4,5),(5,3)} задан частичный порядок, по которому сравниваются векторы одинаковой размерности: Нижняя грань этого множества - {(2,2), (1,3)}. Ее элементы не сравнимы между собой, т.к. при сравнении их первых компонент получаем, что 2>1, но при сравнении вторых - 2<3. Остальные элементы множества больше, чем элементы нижней грани. Верхняя грань – {(3,5),(4,4),(5,3)}.



Пример выполнения Задания 1

1. Дано: $U = \{x \mid x$ – целое, $0 \le x \le 9\}$, $A = \{0, 3, 5, 6, 7, 9\}$, $B = \{x \in U \mid x$ – нечетное$\}$, $C = \{3, 6, 8, 9\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \le x \le 9\}$; $M \subseteq C$, $|M| = 3$, $6 \in M$, $(D \setminus B) \cap C \subseteq M$, $\{2,3,4\} \cap M = \varnothing$.

Укажем, из каких элементов состоят множества U, B, D, заданные описанием:

$U = \{x \mid x$ – целое, $0 \le x \le 9\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (все целые числа, удовлетворяющие заданному неравенству),

$B = \{x \in U \mid x$ – нечетное$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (все нечетные числа из универсума),

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \le x \le 9\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (все натуральные числа, удовлетворяющие заданному неравенству).

Элементы множества M определим в соответствии с заданными условиями:

– $M \subseteq C$, значит, в M могут быть только элементы из множества $\{3, 6, 8, 9\}$.

– $|M| = 3$, значит, в M в точности 3 элемента.

– $6 \in M$, значит, в M есть элемент 6: $\{3, 6, 8, 9\}$.

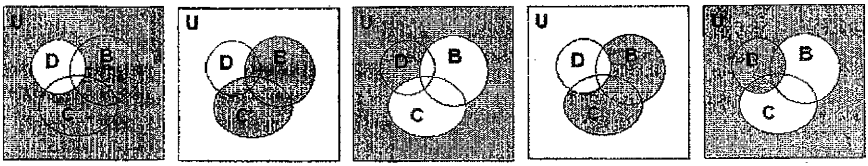
– $(D \setminus B) \cap C \subseteq M$, $(D \setminus B) \cap C = (\{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 9\}) \cap \{3, 6, 8, 9\} = \{4,6,8\} \cap \{3,6,8,9\} = \{6, 8\}$, $\{6, 8\} \subseteq M$, значит, в M есть также элемент 8: $\{3, 6, 8, 9\}$.

– $\{2,3,4\} \cap M = \varnothing$, значит, в M нет элементов 2, 3, 4: $\{3, 6, 8, 9\}$.

Т.к. множество M состоит из трех элементов, окончательно получаем: $M = \{6, 8, 9\}$.

2. Представим выражение, задающее множество M_5, диаграммой Эйлера.

$M_5 = \overline{M_1 \setminus \overline{M_3}} = \overline{\overline{D} \setminus \overline{B \cup C}}$. Результирующую диаграмму получим последовательно:



1) $\overline{D}$ 2) $B \cup C$ 3) $\overline{B \cup C}$ 4) $\overline{D} \setminus \overline{B \cup C}$ 5) $\overline{\overline{D} \setminus \overline{B \cup C}}$

Такой же результат можно было бы получить и проще, предварительно упростив исходное выражение: $\overline{\overline{D} \setminus \overline{B \cup C}} =$ [избавляемся от знака разности по свойству разности] $= \overline{\overline{D} \cap \overline{\overline{B \cup C}}} =$ [избавляемся от операции двойного дополнения по свойству инволютивности] $= \overline{\overline{D} \cap (B \cup C)} =$ [понижаем знак дополнения по закону де Моргана] $= \overline{\overline{D}} \cup \overline{B \cup C} =$ [избавляемся от двойного дополнения по свойству инволютивности] $= D \cup \overline{B \cup C}$.

3. Приведем выражение, задающее множество M_6, к виду «объединение пересечений элементарных множеств», используя свойства операций над множествами.

$M_6 = \overline{M_2} \cap M_4 = \overline{B} \cap D \Delta \overline{A} =$ [избавляемся от операции симметрической разности] $= \overline{B} \cap ((D \setminus \overline{A}) \cup (\overline{A} \setminus D)) =$ [избавляемся от операции разности по свойству 11] $= \overline{B} \cap ((D \cap \overline{\overline{A}}) \cup (\overline{A} \cap \overline{D})) =$ [избавляемся от двойного дополнения по свойству 10] $= \overline{B} \cap ((D \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{D})) =$ [раскрываем скобки по свойству дистрибутивности 4] $= (\overline{B} \cap (D \cap A)) \cup (\overline{B} \cap (\overline{A} \cap \overline{D})) = (\overline{B} \cap D \cap A) \cup (\overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{D})$. Полученное выражение имеет вид «объединение пересечений элементарных множеств» и при этом более не может быть упрощено.

4. Запишем выражения, подставив в них данные своего варианта, и найдем значения получившихся выражений.

а) $Пр_{2,3}M^3 \setminus Пр_{1,3}(M_3\times M_5\times M_6) = Пр_{2,3}(M\times M\times M) \setminus Пр_{1,3}(M_3\times M_5\times M_6) = (M\times M) \setminus (M_3\times M_6)$.

Найдем значения прямых произведений $M\times M$ и $M_3\times M_6$.

$M=\{6,8,9\}$, значит, $M\times M = \{6,8,9\}\times\{6,8,9\}=\{(6,6),(6,8),(6,9),(8,6),(8,8),(8,9),(9,6),(9,8),(9,9)\}$,

$M_3= B\cup C = \{1, 3, 5, 7, 9\}\cup\{3, 6, 8, 9\} = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$,

$M_6=\overline{B} \cap D\Delta\overline{A} = \overline{\{1,3,5,7,9\}} \cap \{4,5,6,7,8,9\}\Delta\overline{\{0,3,5,6,7,9\}}=$

$=\{0, 2, 4, 6, 8\}\cap\{4, 5, 6,7, 8, 9\}\Delta\{1, 2, 4, 8\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}\cap\{1, 2, 5, 7, 8, 9\} = \{2, 8\}$.

Значит,

$M_3\times M_6=\{1,3,5,7,8,9\}\times\{2,8\}=\{(1,2),(3,2),(5,2),(7,2),(8,2),(9,2),(1,8),(3,8),(5,8),(7,8),(8,8),(9,8)\}$.

Тогда $(M\times M) \setminus (M_3\times M_6) = \{(6,6),(6,8),(6,9),(8,6),\underline{(8,8)},(8,9),(9,6),\underline{(9,8)},(9,9)\} \setminus$

$\setminus \{(1,2),(3,2),(5,2), (7,2),(8,2),(9,2),(1,8),(3,8),(5,8),(7,8),\underline{(8,8),(9,8)}\} =$

$= \{(6,6),(6,8),(6,9),(8,6),(8,9),(9,6),(9,9)\}$.

Значит, $Пр_{2,3}M^3 \setminus Пр_{1,2}(M_3\times M_5\times M_6) =\{(6,6),(6,8),(6,9),(8,6),(8,9),(9,6),(9,9)\}$.

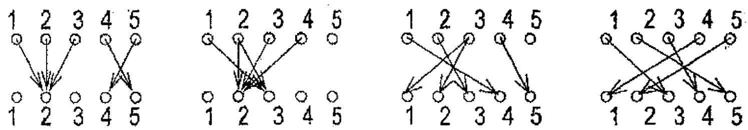
5. Даны множества $X = Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и соответствия $Q_i \subseteq X \times Y$, $i = 1, ..., 4$.

$Q_1=\{(2,2),(1,2),(3,2),(4,5),(5,4)\}$, $Q_2=\{(2,2),(3,2),(4,2),(1,3),(2,3)\}$,

$Q_3=\{(2,3),(3,2),(1,4),(3,1),(4,5)\}$, $Q_4=\{(5,2),(1,3),(2,5),(4,1),(3,4)$

Определим, обладают ли соответствия Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 свойствами всюду определенности, сюръективности, функциональности, инъективности, биективности.

Сначала изобразим каждое из соответствий графически:



Свойства соответствия Q_1:

а) *всюду определено*, т.к. область определения Q_1 совпадает с X: $Пр_1Q_1=\{1,2,3,4,5\}=X$.

б) *не сюръективно*, т.к. область значений Q_1 не равна множеству Y: $Пр_2Q_1=\{2,4,5\}\neq Y$.

в) *функционально*, поскольку образ любого элемента из области определения соответствия содержит только один элемент из области значений соответствия.

г) *не инъективно*, т.к. для элемента 2 из области значений соответствия Q_1 его прообраз {1, 2, 3} состоит более чем из одного элемента.

д) *не биективно*, поскольку соответствие не является сюръективным.

Т.к. соответствие Q_1 всюду определено и функционально, но не инъективно, выполним для него задание 4.1, то есть построим разбиение области определения соответствия на классы эквивалентности по отношению «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат прообразу одного и того же элемента».

Область определения $Пр_1Q_1 = \{1,2,3,4,5\}$ разбиваем на такие классы эквивалентности:

1 -й класс: прообраз элемента 2 из области значений соответствия – {1, 2, 3},

2 -й класс: прообраз элемента 4 из области значений соответствия – {5},

3 -й класс: прообраз элемента 5 из области значений соответствия – {4}.

Свойства соответствия Q_2:

а) *не является всюду определенным*, поскольку область определения соответствия Q_2 не равна множеству X: $Пр_1Q_2 = \{1, 2, 3, 4\} \neq X$.

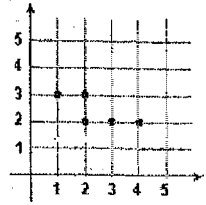
б) *не сюръективно*, т.к. область значений Q_2 не совпадает с Y: $Пр_2Q_2=\{2, 3\}\neq Y$.

в) *не функционально*, поскольку образ элемента 2 из области определения соответствия состоит более чем из одного элемента: $\{2, 3\} \subseteq Пр_2Q_2$.

г) *не инъективно*, поскольку, например, для элемента 2 из области значений соответствия прообраз состоит более чем из одного элемента: {2, 3, 4}.

д) *не биективно*, т.к. соответствие Q_2, например, не всюду определено.

Поскольку соответствие Q_2 не инъективно и не функционально, то выполним для него задание 4.3, то есть найдем нижнюю и верхнюю грани множества Q_2.



Нижняя грань множества Q_2: {(1, 3), (2, 2)}; все остальные элементы Q_2 больше, чем элементы его нижней грани.

Верхняя грань множества Q_2: {(2, 3), (4, 2)}; все остальные элементы Q_2 меньше, чем элементы его верхней грани.

Свойства соответствия Q_3:

а) *не всюду определенно*, т.к. область определения соответствия не равна множеству X: $Пр_1Q_3 = \{1, 2, 3, 4\} \neq X$.

б) *сюръективно*, т.к. область значений Q_3 совпадает с Y: $Пр_2Q_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\} = Y$.

в) *не функционально*, поскольку для элемента 3 из области определения соответствия Q_3 образ состоит более чем из одного элемента: $\{1, 2\} \subseteq Пр_2Q_3$.

г) *инъективно*, поскольку прообраз каждого элемента из области значений соответствия состоит в точности из одного элемента.

д) *не биективно*, т.к. соответствие не всюду определено и не функционально.

Т.к. соответствие Q_3 сюръективно и инъективно, но не функционально, то выполним для него задание 4.2, то есть построим разбиение области значений соответствия на классы эквивалентности по отношению «два элемента эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда они принадлежат образу одного и того же элемента».

Построим разбиение области значений $Пр_2Q_3 = \{1,2,3,4,5\}$ на классы эквивалентности:

1-й класс: образ элемента 1 из области определения соответствия – {4},

2-й класс: образ элемента 2 из области определения соответствия – {3},

3-й класс: образы элемента 3 из области определения соответствия – {1, 2},

4-й класс: образ элемента 4 из области определения соответствия – {5}.

Свойства соответствия Q_4:

а) *всюду определено*, т.к. область определения Q_4 совпадает с X: $Пр_1Q_4=\{1,2,3,4,5\}=X$.

б) *сюръективно*, поскольку область значений Q_4 совпадает с Y: $Пр_2Q_4=\{1,2,3,4,5\}=Y$.

в) *функционально*, поскольку образом любого элемента из области определения соответствия является единственный элемент из области значений соответствия.

г) *инъективно*, поскольку прообразом любого элемента из области значений соответствия является единственный элемент из области определения соответствия.

д) *биективно*, т.к. соответствие Q_4 всюду определено, сюръективно и функционально.

Поскольку соответствие Q_4 является биекцией, то выполним для него задание 4.4, то построим соответствующую ему перестановку на множестве X и разложим ее на циклы:

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Окончательно, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix} = (1,3,4)(2,5)$.

Задание 2. Графы

Дан смешанный граф D (множество вершин V={1,2,3,4,5,6,7}, множество ребер и дуг E, а также их веса см. в таблице VI; пары, задающие дуги, выделены жирным шрифтом). Построить граф D и соответствующий ему неориентированный граф D`.

1. Найти диаметр, радиус и центры графа D` (с помощью матрицы расстояний).
2. Найти хроматическое число графа D` и получить его функцию раскраски.
3. Найти цикломатическое число графа D`и построить его минимальное остовное дерево.
4. Найти все кратчайшие (по числу включенных дуг и ребер) пути графа D из вершины v в вершину w, используя алгоритм поиска в ширину (алгоритм фронта волны).
5. Найти все легчайшие (по весу включенных дуг и ребер) пути графа D из вершины v в w, используя алгоритм поиска в глубину.
6. Найти и построить все компоненты сильной связности графа D, а также выписать их матрицы смежности. Ту компоненту сильной связности, в которой число вершин наибольшее, обозначить D_s.
7. По структурной матрице компоненты сильной связности D_s найти все простые пути из вершины v в вершину w.
8. Используя результаты пункта 7, найти все наборы ребер компоненты сильной связности D_s, обладающие следующим свойством: одновременное удаление ребер, входящих в один такой набор, исключает возможность перехода из вершины v в вершину w (число ребер в каждом найденном наборе должно быть минимальным).
9. С помощью структурного числа компоненты сильной связности D_s найти все ее простые пути в вершину w и циклы, не проходящие через вершину w.

Таблица VI. Графы

№	Множество ребер и дуг E												v	w	Веса дуг и ребер											
1	**(1,2)**	(1,4)	(2,3)	**(2,6)**	(3,5)	**(3,6)**	**(3,7)**	**(4,2)**	**(5,2)**	(5,7)	**(6,5)**	**(7,6)**	2	7	2	3	4	5	1	3	5	3	4	2	1	6
2	(1,4)	**(2,3)**	**(2,4)**	**(3,1)**	**(3,5)**	**(3,7)**	**(4,3)**	**(5,4)**	**(5,6)**	**(5,7)**	**(7,1)**	**(7,4)**	5	1	4	3	2	2	3	4	1	5	6	3	7	2
3	**(1,2)**	**(2,4)**	**(2,7)**	(3,6)	**(4,1)**	(4,5)	**(5,1)**	**(5,3)**	**(5,7)**	**(7,1)**	**(7,3)**	**(7,6)**	5	2	6	3	4	9	1	4	7	2	3	3	2	8
4	**(1,4)**	**(1,7)**	**(2,1)**	**(2,4)**	(2,6)	**(3,1)**	**(3,5)**	**(4,3)**	(4,7)	**(5,4)**	**(5,7)**	**(7,3)**	1	3	8	4	2	1	3	4	9	5	2	2	8	8
5	**(1,4)**	**(1,7)**	**(2,1)**	(2,3)	**(3,1)**	**(3,5)**	(4,5)	**(4,6)**	(4,7)	**(5,7)**	**(6,1)**	(6,7)	3	4	8	2	5	6	1	7	4	6	3	1	1	4
6	(1,4)	**(1,5)**	**(1,7)**	(2,7)	(3,4)	**(3,6)**	**(4,2)**	**(4,7)**	**(5,3)**	(5,6)	**(5,7)**	**(6,1)**	5	1	2	1	3	5	6	2	6	3	1	4	5	7
7	**(1,4)**	**(1,5)**	(1,6)	**(2,1)**	**(2,5)**	**(2,7)**	**(3,7)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**(5,3)**	**(5,4)**	(5,6)	2	4	7	1	2	4	6	3	2	4	2	5	3	3
8	**(2,4)**	(2,6)	**(2,7)**	**(3,1)**	**(4,1)**	**(4,5)**	(4,6)	**(5,2)**	(6,7)	**(7,3)**	**(7,4)**	**(7,5)**	6	5	2	3	1	3	4	1	6	2	5	2	2	6
9	(1,3)	**(1,4)**	**(1,5)**	(2,5)	**(2,6)**	**(3,2)**	(3,6)	**(3,7)**	**(5,3)**	**(5,7)**	**(6,4)**	**(7,4)**	1	6	4	1	7	2	2	2	7	3	5	1	4	6
10	(2,4)	**(2,6)**	(2,7)	**(3,2)**	**(3,4)**	(3,6)	**(4,1)**	**(4,7)**	**(5,4)**	**(5,6)**	**(6,1)**	**(6,4)**	3	7	2	1	4	6	6	1	4	5	7	2	6	3
11	**(1,4)**	**(2,5)**	**(2,6)**	**(3,2)**	**(3,4)**	**(3,6)**	(3,7)	**(4,2)**	**(4,5)**	**(5,1)**	**(5,6)**	**(6,1)**	4	1	7	2	5	3	4	3	1	6	9	3	1	4
12	(2,5)	**(2,7)**	**(3,2)**	(3,5)	**(3,6)**	**(4,1)**	**(4,3)**	**(4,7)**	**(5,6)**	**(6,2)**	(6,7)	**(7,1)**	5	7	6	6	3	4	3	2	2	4	9	5	2	7
13	**(1,4)**	**(1,6)**	(1,7)	**(2,3)**	**(2,5)**	(2,6)	**(3,1)**	**(3,4)**	(3,6)	(3,7)	**(6,5)**	(6,7)	2	1	3	1	5	6	3	4	2	2	1	1	4	1
14	**(1,3)**	(1,4)	(1,5)	**(2,3)**	**(2,5)**	**(2,7)**	**(4,2)**	(4,7)	**(5,4)**	**(6,2)**	**(6,3)**	**(7,5)**	2	4	2	2	1	5	1	3	5	3	4	2	4	6
15	(1,2)	**(2,5)**	**(4,1)**	**(4,2)**	(4,5)	(4,6)	**(5,1)**	**(5,3)**	(5,6)	**(6,2)**	**(6,3)**	**(7,1)**	6	1	1	3	3	1	3	4	1	5	6	6	7	2
16	(1,3)	**(1,6)**	**(2,1)**	(2,3)	**(2,6)**	**(2,7)**	**(3,4)**	(3,6)	(4,5)	**(6,4)**	**(6,7)**	**(7,3)**	1	7	1	5	4	9	1	6	7	2	5	3	2	8
17	(1,3)	(1,5)	**(3,2)**	(3,4)	**(3,5)**	(3,7)	**(4,1)**	(4,7)	**(5,2)**	(5,7)	**(6,3)**	**(6,4)**	4	5	5	4	2	1	5	1	9	5	2	2	8	7
18	**(1,2)**	**(1,5)**	**(1,6)**	**(2,4)**	(2,6)	**(3,1)**	**(3,2)**	(3,4)	**(4,1)**	**(4,6)**	**(4,7)**	(5,7)	4	2	8	2	1	6	1	7	4	6	3	6	1	4
19	**(2,1)**	(2,3)	(2,5)	(2,6)	**(3,1)**	**(3,4)**	**(3,5)**	**(4,6)**	**(5,4)**	**(5,7)**	**(6,3)**	**(6,7)**	3	6	2	1	3	5	6	4	1	3	1	4	5	7
20	(1,4)	**(2,5)**	(2,6)	**(2,7)**	**(3,1)**	(3,6)	**(5,3)**	(5,7)	**(6,4)**	**(6,5)**	**(6,7)**	**(7,3)**	2	3	7	5	2	4	6	5	2	4	2	5	1	3

Теоретические сведения и примеры выполнения Задания 2

Система, образованная множеством V с заданным на нем бинарным отношением $R \subseteq V^2$, называется **графом** G=<V, R>, V - множество вершин, R- множество ребер графа. Графически это изображается с помощью точек, произвольным образом расположенных на плоскости и соединяющих их линий: точки соответствуют вершинам, линии - ребрам графа, причем не важно, какого вида линии (прямые, кривые, длинные, короткие) соединяют заданные пары точек. Важно показать сам факт соединения пар вершин ребрами.

Если $r=(v_i, v_j)$ - ребро, то вершины m_i, m_j - концы ребра.

Если вершина является концом ребра, то данные вершина и ребро **инцидентны**.

Две вершины называются **смежными**, если они соединены ребром.

Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую вершину.

Направленное (ориентированное) ребро называется **дугой**. Граф, все ребра которого ориентированы, называется **орграфом**.

Граф, содержащий и дуги, и ребра, называется **смешанным**.

При решении многих задач графы задаются специальными матрицами или списками.

В смешанных графах для их матричного представления каждое ребро заменяется двумя противоположно направленными дугами, соединяющими те же вершины, что и заменяемое ребро.

Матрица смежности вершин графа на n вершинах - это матрица $A=[a_{ij}]$, i,j=1,2,...,n, где

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если существует дуга } (v_i, v_j),\\ 0, \text{ если из вершины } v_i \text{ в вершину } v_j \text{ не ведет дуга.}\end{cases}$$

Структурная матрица графа на n вершинах - это матрица $S=[s_{ij}]$, i,j=1,2,...,n, где

$$s_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } i=j,\\ r_{ij}, \text{ если существует дуга } (v_i, v_j),\\ 0, \text{ если из вершины } v_i \text{ в вершину } v_j \text{ не ведет дуга.}\end{cases}$$

Введем в рассмотрение объекты, которые можно выделить в графе. Пусть G=<V, R>.

Маршрутом в графе G, соединяющим вершины v_0 и v_k, называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, r_1, v_1, r_2, \ldots, r_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны. Для графа, не имеющего петель и кратных ребер, при задании маршрута можно указывать только последовательность вершин (или только последовательность ребер). Если начальная и конечная вершина маршрута совпадают ($v_0=v_k$), то маршрут называется **замкнутым**.

Если все ребра маршрута различны, то маршрут называется **цепью**. Если все вершины в цепи различны, то она называется **простой цепью**.Замкнутая цепь называется **циклом**. Замкнутая простая цепь называется **простым циклом**.

Для орграфов цепь называется **путем**, а цикл - **контуром**.

Длиной маршрута называется количество ребер в нем.

Расстояния в графах. Диаметр, радиус, центры графа

Вершины v', $v'' \in M$ называются **связанными**, если существует маршрут с началом v' и концом v''. Граф называется **связным**, если все его вершины связаны между собой.

Пусть G - связной неориентированный граф, v' и v'' - любые две его вершины. Тогда существует связывающая их простая цепь с минимальным количеством ребер.

Минимальная длина простой цепи с началом v' и концом v'' называется **расстоянием** $d(v', v'')$ между этими вершинами. При этом d(v, v)=1.

Диаметр графа G $d(G)=\max d(v', v'')$, где максимум берется по всем парам вершин v', $v'' \in G$, т.е. диаметр – это максимальное из расстояний между всеми вершинами графа.

Пусть v - произвольная вершина графа G. **Максимальным удалением** в графе G от вершины v называется величина $r(v)=\max d(v,v')$, где максимум берется по всем вершинам $v' \in G$ $(v' \neq v)$. Вершина v называется **центром** графа G, если максимальное удаление от нее принимает минимальное значение: $r(v)=\min r(v')$, где минимум берется по всем $v' \in G$ $(v' \neq v)$. Центр не обязательно должен быть единственным.

Максимальное удаление $r(G)$ от центра называется **радиусом** графа G, т.е. радиус равен расстоянию от центра графа до максимально удаленной от него вершины.

Хроматическое число графа и его функция раскраски

Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется минимальное число красок, которое потребуется, чтобы раскрасить все вершины графа так, чтобы никакая пара смежных вершин не была окрашена одним цветом. **Функцией раскраски** графа называется функция, которая каждой вершине графа ставит в соответствие определенный цвет так, чтобы все смежные вершины были окрашены в разные цвета.

<u>Алгоритм поиска хроматического числа и получения функции раскраски графа D`.</u>

Полагаем $i:=1$, $D_1:=$ D`.

<u>Шаг i.</u> Выбираем любую вершину графа подграфа и строим множество M_i, в которое относим выбранную вершину и добавляем другие вершины подграфа D_i так, чтобы каждая вновь добавленная вершина не была смежной ни с какими другими вершинами из M_i. В M_i должно оказаться максимально возможное количество вершин подграфа D_i, попарно не смежных между собой. Удаляем из подграфа D_i все вершины, оказавшиеся в множестве M_i. Если вершин больше не осталось, то $i := i+1$, полученный после удаления вершин подграф называем D_i и переходим к i-му шагу. Иначе, хроматическое число найдено и равно i, функция раскраски всем вершинам из множества M_i ставит в соответствие один и тот же i-й цвет.

Цикломатическое число графа и его минимальное остовное дерево

Остовным деревом связного графа с n вершинами и m ребрами (m>n) называется его связный подграф, построенный на тех же n вершинах, что и исходный, но число ребер в котором равно n-1 (т.е. при построении остовного дерева часть ребер из исходного графа удаляется).

Минимальное остовное дерево графа – это остовное дерево, суммарный вес ребер которого является наименьшим по сравнению с суммарным весом ребер остальных остовных деревьев этого графа.

Цикломатическое число $\nu(G)$ связного графа G с n вершинами и m ребрами вычисляется по формуле: $\nu(G)=m-n+1$. Оно показывает, сколько ребер следует удалить из графа, чтобы получить его остовное дерево.

Поиск путей минимальной длины. Алгоритм фронта волны

Маршрут в графе G из вершины v в вершину w, где $v \neq w$, называется **минимальным**, если он имеет минимальную длину среди всех путей графа G из v в w.

Любой минимальный путь является простой цепью.

Вершина w графа G **достижима** из вершины v, если либо w=v, либо существует маршрут из v в w.

Пусть $G=\langle V,R\rangle$ - граф с $n \geq 2$ вершинами и v, w – заданные вершины из V, где $v \neq w$.

Алгоритм поиска минимального пути из v в w в графе G (**алгоритм фронта волны**)

Шаг 1. Помечаем вершину v. Записываем множество вершин, смежных с v. Полученное множество обозначаем $F_1(v)$. Помечаем все вершины из $F_1(v)$. Полагаем k=1.

Шаг 2. Если $F_k(v)=\varnothing$ или выполняется, что k=n-1 и $w \notin F_k(v)$, то вершина w не достижима из v, и работа алгоритма на этом заканчивается. Иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если $w \notin F_k(v)$, то переходим к шагу 4. Иначе существует путь из v в w длины k, и этот путь является минимальным. Последовательность вершин v $w_1 w_2 \ldots w_{k-1} w$, где w_i - любой элемент из $F_i(v)$, смежный с w_{i-1}, и есть искомый минимальный путь из v в w. На этом работа алгоритма заканчивается.

Шаг 4. Записываем множество вершин, смежных с каждой из вершин множества $F_k(v)$, и удаляем из него все вершины, помеченные ранее. Полученное множество обозначаем $F_{k+1}(v)$. Полагаем k:=k+1 и переходим к шагу 2.

Связность. Компоненты связности

Граф называется **связным**, если любая пара его вершин соединена маршрутом.

Связный ориентированный граф называется **сильно связным**. Орграф называется **слабо связным**, если соответствующий ему неориентированный граф связный.

Максимальный по включению вершин связный подграф графа называется его **компонентой связности**. Максимальный по включению вершин сильно связный подграф орграфа называется его **компонентой сильной связности**.

Граф называется **несвязным**, если число его компонент больше одной.

Матрицей сильной связности орграфа D с n вершинами называется квадратная матрица $S=[s_{ij}]$ порядка n, у которой $s_{ij}=1$, если вершина v_i достижима из вершины v_j и одновременно вершина v_j достижима из v_i, и $s_{ij}=0$ - в противном случае.

Утверждение. Пусть D=<V, R> - n-вершинный орграф с матрицей смежности A. Тогда

1) $T = \text{sign}(E+A+A^2+\ldots+A^{n-1})$; здесь sign(x)=1, если x>0 и sign(x)=0, если x=0.
2) $S=T\&[T]^T$, т – транспонирование, & - логическое умножение.

Алгоритм выделения компонент сильной связности.

Пусть D=<V, R> - орграф с матрицей сильной связности S и матрицей смежности A. Алгоритм позволяет определить число компонент сильной связности орграфа D, а также найти матрицы смежности этих компонентов.

Шаг 1. Полагаем p=1, $S_1=S$.

Шаг 2. Включаем в множество вершин V_p очередной компоненты сильной связности орграфа D вершины, соответствующие единицам первой строки матрицы S_p. В качестве A_p берем подматрицу матрицы смежности A, находящуюся на пересечении строк и столбцов соответствующих вершин из V_p.

Шаг 3. Вычеркиваем из S_p строки и столбцы, соответствующие вершинам из V_p. Если в результате такого вычеркивания не останется ни одной строки (и, соответственно, ни одного столбца), то p - количество компонент сильной связности и $A_1,\ldots,A_p$ - матрицы смежности компонент сильной связности $D_1,\ldots,D_p$ орграфа D.

В противном случае обозначим оставшуюся после вычеркивания из S_p соответствующих строк и столбцов матрицу через S_{p+1}, присваиваем p:=p+1 и переходим к шагу 2.

Поиск простых путей в графе с помощью структурной матрицы

Для поиска всех простых путей в графе из вершины v в вершину w строим структурную матрицу этого графа, затем получаем ее минор, вычеркнув строку с номером w и столбец с номером v. Раскрываем полученный определитель. Упрощаем его: удаляем из каждого слагаемого пары вида rij·rji; в полученном выражении из нескольких одинаковых слагаемых оставляем одно; большее слагаемое «поглощаем» меньшим - если все сомножители меньшего слагаемого присутствуют в большем, то большее слагаемое удаляем, а меньшее оставляем. Каждое из оставшихся слагаемых – один из искомых путей. Если в получившемся выражении заменить все знаки умножения пересечением, а знаки сложения и вычитания - объединением, то дополнение полученного объединения, приведенное к виду «объединение пересечений», даст все наборы ребер, каждый из которых обладает следующим свойством: удаление из графа всех ребер набора исключает возможность перехода из v в w. Если же хотя бы одно ребро набора не удалять, то возможность перехода сохраняется.

Поиск путей и контуров в графе с помощью структурных чисел

Дан граф G = <V,R>, |V| = n. Пусть из i-й вершины графа G исходит p_i дуг.

Определим i-е **элементарное структурное число графа** G как выражение вида

$$S_i = i \mid v_{i1} \ldots v_{ip_i},$$

где $v_{i1},\ldots v_{ip_i}$ - обозначения всех вершин, в которые ведут дуги из вершины i.

Произведение i-го и j-го элементарных структурных чисел графа G определим как новое структурное число, равное

$$S_i\, S_j = \frac{i \mid v_{i1}\ldots v_{ip_i}}{j \mid v_{j1}\ldots v_{jp_j}} = \begin{array}{c|ccccc} i & v_{i1}\ldots v_{i1} & v_{i2}\ldots v_{i2} & \ldots v_{ip_i}\ldots v_{ip_i} \\ j & v_{j1}\ldots v_{jp_j} & v_{j1}\ldots v_{jp_j} & \ldots v_{j1}\ldots v_{jp_j} \end{array}$$

Запись после второго знака равенства представляет собой структурное число в раскрытом виде, столбцы которого образованы всеми возможными парами (i_k, j_m), $k=1,\ldots p_i$, $m=1,\ldots,p_j$ такими, что $i_k \neq j_m$. Другими словами, в правой части должны быть вычеркнуты все те столбцы, у которых имеется два одинаковых элемента.

Аналогично определяется произведение трех элементарных структурных чисел и т.д. В любом таком произведении каждый столбец справа от вертикальной черты должен содержать только различные элементы, иначе столбец должен быть вычеркнут.

Структурное число графа S(G) определим как произведение всех его элементарных структурных чисел S_i, i=1,...,n.

$$S(G) = (S_1)(S_2)\ldots(S_n) = \begin{array}{c|l} 1 & v_{11}\ldots v_{1p_1} \\ 2 & v_{21}\ldots v_{2p_2} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ n & v_{n1}\ldots v_{np_n} \end{array}$$

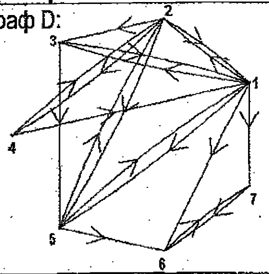
Раскрыв данное структурное число, получим все возможные перестановки на множестве вершин графа G. Каждая из этих перестановок соответствует некоторому множеству контуров графа G, такому, что каждая вершина графа G принадлежит только одному из контуров этого множества.

Производная по i от структурного числа S(G) - это структурное число графа, который получен из G путем удаления всех дуг, исходящих из вершины i. Обозначение для такой производной: $\partial S(G)/\partial i$. $\partial S(G)/\partial i$ получается из S(G), если вычеркнуть из него i-ю строку. Раскрытие такого структурного числа позволяет получить все пути, ведущие в вершину i, а также контуры графа, в которые не входят дуги, исходящие из вершины i.

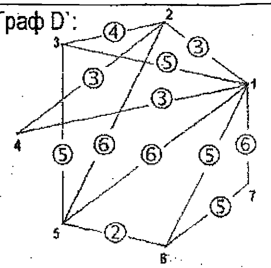
Пример выполнения Задания 2

Дан смешанный граф $D=\langle\{1,2,3,4,5,6,7\}, E\rangle$, $E=\{(1,2), (1,3), \mathbf{(4,1)}, (1,5), \mathbf{(2,3)}, (4,2), (2,5), \mathbf{(3,5)}, \mathbf{(1,6)}, \mathbf{(5,6)}, \mathbf{(1,7)}, (6,7)\}$.
Веса рёбер (на ребрах графа D` записаны в кружках): 3, 5, 3, 6, 4, 3, 6, 5, 5, 2, 6, 5
v=2, w=3.

Граф D:



Граф D`:



1. Найдем диаметр, радиус и центры графа D`.

Анализируем расстояния в графе (длины кратчайших простых цепей):

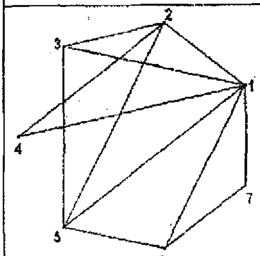
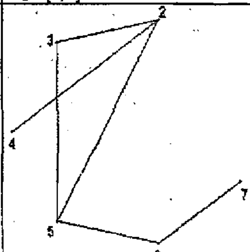
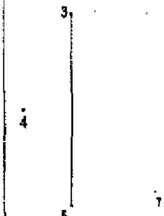
- из **1** в 2, 3, 4, 5, 6, 7: расстояние до каждой из оставшихся вершин равно 1;
- из **2** в 3, 4, 5, 6, 7: расстояние до вершин 3, 4, 5 равно 1; кратчайшие цепи до 6-й и 7-й вершины - $2\to1\to6$ и $2\to1\to7$, тогда расстояние до 6 и 7 равно 2;
- из **3** в 4, 5, 6, 7: $3\to2\to4$ (длина – 2); $3\to5$ (длина – 1); $3\to5\to6$ (длина – 2); $3\to1\to7$ (длина – 2), тогда расстояние до 5 равно 1, расстояние до 4, 6, 7 равно 2.
- из **4** в 5, 6, 7: расстояния равны 2, т.к. кратчайшие цепи $4\to2\to5$; $4\to1\to6$; $4\to1\to7$.
- из **5** в 6, 7: расстояние из 5 в 6 равно 1, из 5 в 7 – 2 (кратчайшая цепь - $5\to6\to7$).
- из **6** в 7: расстояние равно 1.

Матрица расстояний R симметрична относительно главной диагонали. Поэтому заполним полученными расстояниями верхний треугольник матрицы над главной диагональю, а оставшуюся часть матрицы заполним симметрично относительно главной диагонали. Добавим столбец "max", в котором укажем максимальное значение каждой строки.

$$R=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc}1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&2&2\\1&1&1&2&1&2&2\\1&1&2&1&2&2&2\\1&1&1&2&1&1&2\\1&2&2&2&1&1&1\\1&2&2&2&1&2&1\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c}\max\\2\\2\\2\\2\\2\\2\\2\end{array}$$

Диаметр графа – максимальное из расстояний между двумя его вершинами, тогда $d(D')=\max\{1, 2, 2, 2, 2, 2,2\}=2$.
Радиус графа - минимальное значение из максимальных расстояний от каждой вершины графа, значит, $r(D') = \min\{1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\} = 1$.
Центр графа – вершина, расстояние от которой до других вершин не больше радиуса, тогда вершина 1 - центр графа.

2. Найдем хроматическое число графа D` и построим его функцию раскраски.

i=1, $D_1:=D`$, $M_1=\{1\}$	i=2, D_2 получен из D_1 удалением вершины 1, $M_2=\{2,6\}$	i=3, D_3 получен из D_2 удалением вершин 2,6, $M_3=\{3,4,7\}$	i=4, D_4 получен из D_3 удалением вершин 3,4,7, $M_4=\{5\}$
			

После выполнения четвертого шага и удаления последней, 5-й, вершины, получили подграф с пустым множеством вершин. Значит, хроматическое число χ(D`) найдено и равно i=4. Функция раскраски: f(1) = 1, f(2) = f(6) = 2, f(3) = f(4) = f(7) = 3, f(5) = 4. $\chi$(D`)=4.

3. Найдем цикломатическое число и построим минимальное остовное дерево графа D`.

Цикломатическое число графа равно ν(D`) = 12-7+1=6.

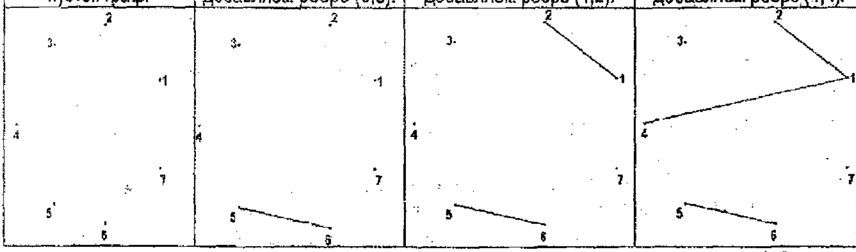
Построение минимального остовного дерева графа.

Упорядочим ребра графа D′ в порядке неубывания их весов

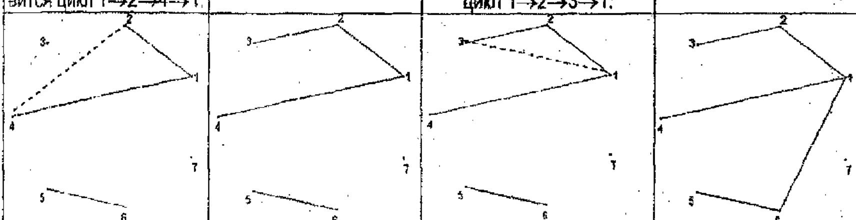
вес ребра	2	3	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6
ребро	(5, 6)	(1, 2)	(1, 4)	(2, 4)	(2, 3)	(1, 3)	(1, 6)	(3, 5)	(6, 7)	(1, 5)	(2, 5)	(1, 7)

Будем добавлять последовательно ребра в граф, начиная с первого ребра в полученном перечне, при этом соблюдая условие: добавление очередного ребра не должно приводить к появлению цикла в графе. Добавляем ребра в граф до тех пор, пока число ребер не станет равным n – 1 = 7 – 1 = 6, т.е не окажется на 1 меньше числа вершин.

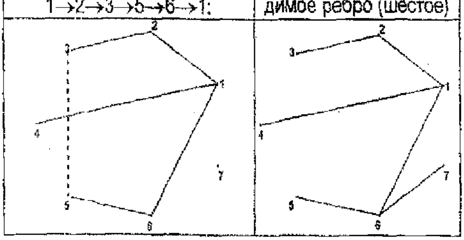
пустой граф:	добавляем ребро (5,6):	добавляем ребро (1,2):	добавляем ребро (1,4):



добавить ребро (2, 4) нельзя, т.к. в графе появится цикл 1→2→4→1:	добавляем ребро (2,3):	добавить ребро (1, 3) нельзя, т.к. в графе появится цикл 1→2→3→1:	добавляем ребро (1,6):



добавить ребро (3, 5) нельзя, т.к. в графе появится цикл 1→2→3→5→6→1:	добавляем ребро (6,7), это последнее необходимое ребро (шестое)



В результате получено минимальное остовное дерево графа D`. Общий суммарный вес ребер этого дерева равен 2+3+3+4+5+5=22.

Цикломатическое число графа ν(D`)= 6.

4. Найдем кратчайшие пути графа из вершины 4 в вершину 7 по алгоритму фронта волны. Выпишем матрицу смежности вершин графа D:

$$A=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array} \\ \begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}\end{array}$$

1) Создаем список помеченных вершин, обозначив его spv. Заносим вершину 4 в список помеченных вершин: spv = {4}. Записываем множество вершин, смежных с 4: $F_1(4)=\{1,2\}$ – это видно из 4-й строки матрицы (в столбцах 1 и 2 стоят единицы, значит, из 4-й вершины в 1-ю и во 2-ю ведут дуги). Помечаем все вершины из $F_1(4)$, тогда spv = {4,1,2}. Полагаем k=1.

2) Поскольку $F_1(4) \neq \varnothing$ и $k \neq n-1 = 7-1 = 6$, то переходим к следующему шагу.

3) Т.к. $7 \notin F_1(4)$, переходим к шагу 4.

4) Записываем множество вершин, смежных с каждой из вершин множества $F_1(4)$, и удаляем из него все вершины, помеченные ранее. Полученное множество обозначаем $F_2(4)$. $F_2(4) = (\underbrace{\{2,3,5,6,7\}}_{\text{(смежны с 1)}} \cup \underbrace{\{1,3,4,5\}}_{\text{(смежны с 2)}}) \setminus \underbrace{\{4,1,2\}}_{\text{помеченные}} = \{3,5,6,7\}$. k:=k+1=2. Переходим к шагу 2.

2') Поскольку $F_2(4) \neq \varnothing$ и $k \neq 6$, то переходим к следующему шагу.

3') Поскольку конечная вершина выстраиваемого пути $7 \in F_2(4)$, то найден кратчайший путь из 4 в 7 длины k=2. Выпишем последовательность вершин, образующих этот путь. Вершины выбираем последовательно из множеств $F_1(4)=\{1,2\}$, $F_2(4)=\{3,5,6,7\}$ так, чтобы любые две соседние вершины в получаемой последовательности были смежными. Из имеющихся элементов можно образовать следующие последовательности с началом в 4 и концом в 7: $4 \to 1 \to 7$ (допустимая последовательность, каждый элемент смежен со следующим за ним) и $4 \to 2 \to 7$ (не допустимая последовательность, т.к. 2 и 7 не смежны, что видно из матрицы А). Таким образом, найден единственный кратчайший (по числу включенных дуг) путь длины 2 из 4 в 7: $4 \to 1 \to 7$.

5. Определим легчайший путь из вершины v = 2 в вершину w = 3, используя алгоритм поиска в глубину:

<u>1 шаг</u>: Начнем поиск с вершины v = 2.

<u>2 шаг</u>: Выберем смежную с вершиной 2 вершину 1 (вес пути $2 \to 1$ равен 3).

<u>3 шаг</u>: Выберем смежную с вершиной 1 вершину 3 (вес пути $2 \to 1 \to 3$ равен 3 + 5 = 8). Поскольку построен путь из вершины v в вершину w, стоимость которого равна 8, то объявим его рекордом – промежуточным решением. Продолжим поиск с вершины 1.

<u>4 шаг</u>: Выберем следующую смежную с вершиной 1 вершину 5 (вес пути $2 \to 1 \to 5$ равен 3 + 6 = 9). Поскольку вес пути больше значения рекорда, т.е. вес нового возможного пути из вершины v в вершину w будет не меньше 9, то продолжать поиск в этом направлении смысла нет, поэтому возвратимся к вершине 1, но т. к. нет больше не пройденных вершин, смежных с вершиной 1, то возвратимся к вершине 2.

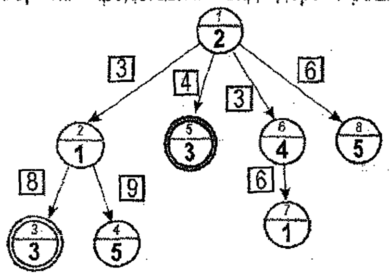
<u>5 шаг</u>: Выберем следующую смежную с вершиной 2 вершину w = 3 (вес пути $2 \to 3$ равен 4). Поскольку новый путь из вершины v в вершину w, стоимость которого равна 4, меньше значения рекорда, то новый путь объявим рекордом. Продолжим поиск с вершины 2.

<u>6 шаг</u>: Выберем следующую смежную с вершиной 2 вершину 4 (вес пути $2 \to 4$ равен 3).

7 шаг: Выберем смежную с вершиной 4 вершину 1 (вес пути 2→4→1 равен 3 + 3 = 6). Поскольку вес пути больше значения рекорда, т.е. вес нового возможного пути из вершины v в вершину w будет не меньше 6, то продолжать поиск в этом направлении смысла нет, поэтому возвратимся к вершине 4, но т. к. нет больше не пройденных вершин, смежных с вершиной 4, то возвратимся к вершине 2.

8 шаг: Выберем следующую смежную с вершиной 2 вершину 5 (вес пути 2→5 равен 6). Поскольку вес пути больше значения рекорда, т.е. вес нового возможного пути из вершины v в вершину w будет не меньше 6, то продолжать поиск в этом направлении смысла нет, поэтому возвратимся к вершине 2, но т. к. нет больше не пройденных вершин, смежных с вершиной v = 2, то процесс поиска завершен.

Результаты работы алгоритма представим в виде дерева решений:



Таким образом, путь с легчайшим весом есть путь 2→3, вес которого равен 4.

6. Найдем компоненты сильной связности графа D. Выпишем матрицу смежности вершин A и матрицу сильной связности S графа D.

$$
A=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1&2&3&4&5&6&7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0&1&1&0&1&1&1\\
1&0&1&1&1&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0
\end{array}\right] \end{array},
\quad
S=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1&2&3&4&5&6&7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
1&1&1&1&1&0&0\\
1&1&1&1&1&0&0\\
1&1&1&1&1&0&0\\
1&1&1&1&1&0&0\\
1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&1
\end{array}\right] \end{array}
$$

Матрицу S заполняем, отслеживая по рисунку графа D взаимную достижимость вершин. Например, s_{34}=1, т.к. из 3 в 4 существует путь (3→1→2→4) и наоборот, из 4 в 3 существует путь (4→2→3). Но s_{36}=0, т.к. из 3 в 6 существует путь (3→1→6), а из 6 в 3 пути нет.

1) Полагаем p=1, S_1=S.

2) Включаем в множество вершин V_1 первой компоненты сильной связности графа D вершины, соответствующим единицам первой строки матрицы S_1: V_1={1,2,3,4,5}. В качестве A_1 берем подматрицу матрицы смежности A, находящуюся на пересечении строк и столбцов соответствующих вершин из V_1.

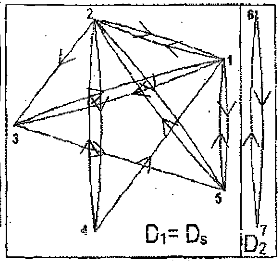
3) Вычеркиваем из S_1 строки и столбцы, соответствующие вершинам из V_1. Обозначаем оставшуюся после вычеркивания из S_1 соответствующих строк и столбцов матрицу через S_2. Увеличиваем p на 1: p:=p+1=2 и переходим к шагу 2 алгоритма.

2') Включаем в множество вершин V_2 второй компоненты сильной связности графа D вершины, соответствующим единицам первой строки матрицы S_2: V_2={6,7}. В качестве A_2 берем подматрицу матрицы смежности A, находящуюся на пересечении строк и столбцов соответствующих вершин из V_2.

3') В результате такого вычеркивания не осталось ни одной строки (и, соответственно, ни одного столбца), значит, p=2 - количество компонент сильной связности и A_1, A_2 - матрицы смежности компонент сильной связности D_1, D_2 графа D.

$$S_1=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}
\quad A_1=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$S_2=\begin{array}{c} \\ 6\\7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}6&7\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\end{array}
\quad A_2=\begin{array}{c} \\ 6\\7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc}6&7\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\end{array}$$



Компоненту сильной связности графа D, имеющую наибольшее количество вершин (D_1) обозначим D_s.

7. Найдем все простые пути, ведущие из v = 2 в w = 3, по структурной матрице графа D_s. Составим структурную матрицу S графа D_s, (дуге, идущей из i в j, присваиваем имя rij):

$$S=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&r12&r13&0&r15\\r21&1&r23&r24&r25\\r31&0&1&0&r35\\r41&r42&0&1&0\\r51&r52&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

Так как необходимо найти все пустые пути в графе D_s из вершины v = 2 в вершину w = 3, то удалим из структурной матрицы 3-ю строку (т.к. все искомые пути будут заканчиваться в вершине 3, и возможность выхода из 3-й вершины нас не интересует) и 2-й столбец (т.к. все искомые пути начинаются в вершине 2 и возможность попасть во 2-ю вершину нам не нужна). Вычислим определитель полученной матрицы, раскрыв его сначала по 5-й строке, а затем применив правило треугольника:

$$\det\begin{pmatrix}1&r13&0&r15\\r21&r23&r24&r25\\r41&0&1&0\\r51&0&0&1\end{pmatrix}=(-1)^{4+1}\cdot r51\cdot\det\begin{pmatrix}r13&0&r15\\r23&r24&r25\\0&1&0\end{pmatrix}+(-1)^{4+4}\cdot\det\begin{pmatrix}1&r13&0\\r21&r23&r24\\r41&0&1\end{pmatrix}=$$

$= -r51\cdot(r13\cdot r24\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot r25 + r23\cdot r15\cdot 1-0\cdot r24\cdot r15-r13\cdot r25\cdot 1-0\cdot 0\cdot 1) + (1\cdot r23\cdot 1 + r13\cdot r14\cdot r24+$
$+r21\cdot 0\cdot 0-0\cdot r23\cdot r41-1\cdot 0\cdot r24-1\cdot r21\cdot r13) =-r51\cdot(r23\cdot r15-r13\cdot r25) + (r23+r13\cdot r41\cdot r24-r21\cdot r13)=$
$=-r51\cdot r23\cdot r15 + r51\cdot r13\cdot r25 + r23 + r13\cdot r41\cdot r24-r21\cdot r13.$

В общем случае, над вычисленным определителем надо проделать следующую последовательность действий:

1) из каждого слагаемого удалить пары вида rij·rji, так как для графа это означает прохождение по одному и тому же ребру из вершины i в вершину j и обратно. При построении простого пути такие переходы должны быть исключены.
2) заменить знаки «+» и «–», стоящие между слагаемыми, на знак объединения $\cup$, а знак умножения «·» заменить знаком пересечения $\cap$. Должно получиться выражение, состоящее только из обозначений ребер и знаков объединения и пересечения.
3) упростить полученное выражение, используя свойство идемпотентности (из нескольких одинаковых слагаемых остается только одно) и свойство поглощения (меньшее выражение, у которого все сомножители входят в некоторое большее выражение, поглощает это большее выражение, например, $\boxed{r67\cap r74}\cup\boxed{r67\cap r71\cap r74}=\boxed{r67\cap r74}$).

В результате получится выражение, представляющее собой объединение пересечений, такое, которое уже нельзя упростить, применяя свойства операций над множествами.

Каждое из пересечений соответствует одному из возможных искомых простых путей, соединяющих две заданные вершины. При этом полученное таким способом выражение позволяет определить <u>все</u> возможные в данном случае простые пути.

Преобразуем полученное в нашем случае выражение по сформулированным правилам:

* удаляем пары вида $rij \cdot rji$:

$$-\cancel{r51} \cdot r23 \cdot \cancel{r15} + r51 \cdot r13 \cdot r25 + r23 + r13 \cdot r41 \cdot r24 - r21 \cdot r13$$

получаем: $-r23 + r51 \cdot r13 \cdot r25 + r23 + r13 \cdot r41 \cdot r24 - r21 \cdot r13$

* заменяем знаки:

$$r23 \cup r51 \cap r13 \cap r25 \cup r23 \cup r13 \cap r41 \cap r24 \cup r21 \cap r13$$

* применяем свойство идемпотентности:

$$r23 \cup r51 \cap r13 \cap r25 \cup r13 \cap r41 \cap r24 \cup r21 \cap r13$$

Свойство поглощения здесь применять не пришлось. Теперь каждому из пересечений поставим в соответствие путь с началом в 2 и концом в 3, упорядочив обозначения дуг.

1-й простой путь: $r23 \Rightarrow 2 \to 3$;

2-й простой путь: $r51 \cap r13 \cap r25 = r25 \cap r51 \cap r13 \Rightarrow 2 \to 5 \to 1 \to 3$;

3-й простой путь: $r13 \cap r41 \cap r24 = r24 \cap r41 \cap r13 \Rightarrow 2 \to 4 \to 1 \to 3$;

4-й простой путь: $r21 \cap r13 \Rightarrow 2 \to 1 \to 3$.

Результат: $2 \to 3$, $2 \to 5 \to 1 \to 3$, $2 \to 4 \to 1 \to 3$, $2 \to 1 \to 3$.

8. Найдем все наборы ребер (дуг), одновременное удаление которых исключает возможность перехода из вершины $v=2$ в вершину $w=3$ в графе D_5, причем число ребер (дуг) в каждом наборе должно быть минимальным.

Для того, чтобы найти все наборы ребер, удаление которых разорвет связь между вершинами $v = 2$ и $w = 3$, найдем дополнение к выражению, полученному в предыдущем пункте (дополнение к объединению пересечений ребер, дающее все пути в графе из $v = 2$ в $w = 3$). Дополнение выражения x вместо $\overline{x}$ будем обозначать $(x)'$. При преобразованиях будем применять законы де Моргана, свойства дистрибутивности и поглощения.

$(r23 \cup r51 \cap r13 \cap r25 \cup r13 \cap r41 \cap r24 \cup r21 \cap r13)' = (r23 \cup r13 \cap (r51 \cap r25 \cup r41 \cap r24 \cup r21))' =$
$= r23' \cap (r13' \cup (r51 \cap r25 \cup r41 \cap r24 \cup r21)') = r23' \cap r13' \cup r23' \cap ((r51 \cap r25)' \cap (r41 \cap r24)' \cap r21') =$
$= r23' \cap r13' \cup r23' \cap (r51' \cup r25') \cap (r41' \cup r24') \cap r21' = r23' \cap r13' \cup r23' \cap r21' \cap (r51' \cap r41' \cup$
$\cup r51' \cap r24' \cup r25' \cap r41' \cup r25' \cap r24') =$ [удалим все знаки дополнения, т.к. каждый из них относится теперь только к обозначению дуги и не влияет на преобразования] =
$= \boxed{r23 \cap r13} \cup \boxed{r23 \cap r21 \cap r51 \cap r41} \cup \boxed{r23 \cap r21 \cap r51 \cap r24} \cup \boxed{r23 \cap r21 \cap r25 \cap r41} \cup \boxed{r23 \cap r21 \cap r25 \cap r24}$.

Каждому пересечению поставим в соответствие набор ребер:

1-й набор ребер: $r23 \cap r13 \Rightarrow (2, 3), (1, 3)$;

2-й набор ребер: $r23 \cap r21 \cap r51 \cap r41 \Rightarrow (2, 3), (2, 1), (5, 1), (4, 1)$;

3-й набор ребер: $r23 \cap r21 \cap r51 \cap r24 \Rightarrow (2, 3), (2, 1), (5, 1), (2, 4)$;

4-й набор ребер: $r23 \cap r21 \cap r25 \cap r41 \Rightarrow (2, 3), (2, 1), (2, 5), (4, 1)$;

5-й набор ребер: $r23 \cap r21 \cap r25 \cap r24 \Rightarrow (2, 3), (2, 1), (2, 5), (2, 4)$.

Каждый из найденных наборов обладает следующим свойством: если удалить из графа D_5 все ребра набора, то нельзя будет перейти из вершины 2 в вершину 3. Если же хотя бы одно ребро из набора не удалять, то возможность перехода из 2 в 3 остается.

9. Найдем простые пути в вершину w=3 и циклы, не проходящие через эту вершину, используя структурное число графа.

Составляем вспомогательную таблицу, где для каждой вершины графа D_5 выпишем саму вершину и все смежные ей вершины:

$S(D_5)=$

1	1	2	3	5	
2	1	2	3	4	5
3	1	3	5		
4	1	2	4		
5	1	2	5		

Затем получим новую таблицу из вспомогательной, удалив из нее строку с номером w = 3:

$\dfrac{\partial S(D_5)}{\partial 3}=$

1	1	2	3	5	
2	1	2	3	4	5
4	1	2	4		
5	1	2	5		

Далее формируем новую таблицу, объединяя элементы строк 1 и 2, удаляя при этом пары с одинаковыми элементами:

$(S_1S_2)S_4S_5=$

1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	5	5	5	5
2	2	3	4	5	1	3	4	5	1	2	4	5	1	2	3	4
4	1	2	4													
5	1	2	5													

Затем формируем новую таблицу, объединяя элементы строк 1, 2 и 4, удаляя при этом тройки с одинаковыми элементами:

$(S_1S_2S_4)S_5=$

1	2	2	2	3	3	3	5	5	5	1	1	1	3	3	3	5	5	5	1	1	1	2	2	2	3	3	3	5	5	5
2	3	4	5	2	4	5	2	3	4	3	4	5	1	4	5	1	3	4	2	3	5	1	3	5	1	2	5	1	2	3
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	1	2	5																											

Составляем новую таблицу, объединяя элементы всех строк, удаляя при этом четверки с одинаковыми элементами:

$S_1S_2S_4S_5=$

1	3	3	5	5	2	2	3	3	5	5	3	3	5	5	1	1	3	3	5	5	2	2	3	3	1	1	3	3	1	1	2	2	3	3
2	4	5	3	4	3	5	2	5	2	3	4	5	3	4	3	5	1	5	1	3	3	4	2	4	3	4	1	4	2	3	1	3	1	2
4	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4	1	1	1	1	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

По последней таблице формируем соответствия P_i на {1,2,3,4,5}×{1,2,3,4,5} (некоторые из них - это перестановки на {1,2,4,5}).

Каждое соответствие P_i представим в виде матрицы, первая строка которой – это транспонированный первый столбец полученной таблицы (одинаковый для всех P_i), а вторая – транспонированный (i+1)-й столбец этой таблицы.

Каждое соответствие разложим на циклы и (или) пути. Циклы записываем в круглых скобках, пути – в квадратных.

Каждое соответствие, где в нижней строке есть w=3, позволяет получить путь из вершины, номер которой присутствует в верхней строке и отсутствует в нижней строке, в вершину w (по которой брали производную). Так, P_2 дает путь с началом в 4 (номер 4 отсутствует в нижней строке) и концом в 3 (номер 3 присутствует в нижней строке): P_2=[42513]. Соответствующий путь: 4→2→5→1→3.

Некоторые соответствия дают одинаковые пути, например, P_3 и P_{26}.

Каждая перестановка, в которой в нижней строке отсутствует w=3, позволяет получить циклы (контуры), не проходящие через вершину w=3. Так, P_{22} дает контур 1→2→4→1.

$P_1=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&4&2&1\end{pmatrix}=(2, 4)[5, 1, 3]$

$P_2=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&5&2&1\end{pmatrix}=[4, 2, 5, 1, 3]$

$P_3=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&3&2&1\end{pmatrix}=(1, 5)[4, 2, 3]$

$P_4=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&4&2&1\end{pmatrix}=(2, 4)(1, 5)$

$P_5=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&3&4&1\end{pmatrix}=(4)[5, 1, 2, 3]$

$P_6=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&5&4&1\end{pmatrix}=(1, 2, 5)(4)$

$P_7=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&2&4&1\end{pmatrix}=(2)(4)[5, 1, 3]$

$P_8=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&5&4&1\end{pmatrix}=(4)[2, 5, 1, 3]$

$P_9=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&2&4&1\end{pmatrix}=(1, 5)(2)(4)$

$P_{10}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&3&4&1\end{pmatrix}=(1, 5)(4)[2, 3]$

$P_{11}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&4&1&2\end{pmatrix}=[5, 2, 4, 1, 3]$

$P_{12}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&5&1&2\end{pmatrix}=(2, 5)[4, 1, 3]$

$P_{13}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&3&1&2\end{pmatrix}=[4, 1, 5, 2, 3]$

$P_{14}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&4&1&2\end{pmatrix}=(1, 5, 2, 4)$

$P_{15}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\1&3&4&2\end{pmatrix}=(1)(4)[5, 2, 3]$

$P_{16}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\1&5&4&2\end{pmatrix}=(1)(4)(2, 5)$

$P_{17}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&1&4&2\end{pmatrix}=(4)[5, 2, 1, 3]$

$P_{18}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&5&4&2\end{pmatrix}=(4)(2, 5)[1, 3]$

$P_{19}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&1&4&2\end{pmatrix}=(1, 5, 2)(4)$

$P_{20}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\5&3&4&2\end{pmatrix}=(4)[1, 5, 2, 3]$

$P_{21}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&3&1&5\end{pmatrix}=(5)[4, 1, 2, 3]$

$P_{22}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&4&1&5\end{pmatrix}=(1, 2, 4)(5)$

$P_{23}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&2&1&5\end{pmatrix}=(2)(5)[4, 1, 3]$

$P_{24}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&4&1&5\end{pmatrix}=(5)[2, 4, 1, 3]$

$P_{25}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\1&3&2&5\end{pmatrix}=(1)(5)[4, 2, 3]$

$P_{26}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\1&4&2&5\end{pmatrix}=(1)(2, 4)(5)$

$P_{27}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&1&2&5\end{pmatrix}=(5)[4, 2, 1, 3]$

$P_{28}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&4&2&5\end{pmatrix}=(2, 4)(5)[1, 3]$

$P_{29}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\1&2&4&5\end{pmatrix}=(1)(2)(4)(5)$

$P_{30}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\1&3&4&5\end{pmatrix}=(1)(4)(5)[2, 3]$

$P_{31}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&1&4&5\end{pmatrix}=(1, 2)(4)(5)$

$P_{32}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&3&4&5\end{pmatrix}=(4)(5)[1, 2, 3]$

$P_{33}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&1&4&5\end{pmatrix}=(4)(5)[2, 1, 3]$

$P_{34}=\begin{pmatrix}1&2&4&5\\3&2&4&5\end{pmatrix}=(2)(4)(5)[1, 3]$

Анализируя полученные результаты, имеем:

1) все простые пути в вершину w = 3				2) все циклы, не проходящие через w = 3:
из вершины 1:	из вершины 2:	из вершины 4:	из вершины 5:	
1→3 1→2→3 1→5→2→3	2→3 2→1→3 2→4→1→3 2→5→1→3	4→1→3 4→2→3 4→1→2→3 4→2→1→3 4→1→5→2→3 4→2→5→1→3	5→1→3 5→2→3 5→1→2→3 5→2→1→3 5→2→4→1→3	1→2→1 1→5→1 1→2→4→1 1→2→5→1 1→5→2→1 1→5→2→4→1 2→4→2 2→5→2

Задание 3. Логические функции

Логическая функция f(a,b,c,d) задана выражением (см. таблицу VII).

1. Привести выражение, задающее функцию f(a,b,c,d), к минимальной ДНФ, используя законы булевой алгебры.
2. Построить таблицу значений заданной функции.
3. Записать СДНФ и СКНФ функции f(a,b,c,d).
4. Получить минимальную ДНФ функции f(a,b,c,d), используя карты Карно.
5. Получить минимальную ДНФ функции f(a,b,c,d) методом Куайна-Мак-Класки.
6. Привести выражение, задающее минимальную ДНФ функции f(a,b,c,d), к КНФ.
7. Построить бинарную диаграмму решений функции f(a,b,c,d) с минимальным числом узлов в ней, выбрав оптимальный порядок расположения переменных по уровням. По построенной минимальной бинарной диаграмме решений получить представление функции f(a,b,c,d) с помощью условного оператора if.

Таблица VII. Логическая функция f(a,b,c,d):

№	f(a,b,c,d)
1	(a ∨ (¬d & b)) & ((¬a & (¬b ∨ d)) ∨ c) ∨ ¬c ∨ (a ∨ (b & ¬d))
2	(¬b ∨ d) & ((¬d & c) ∨ (a & c) ∨ (¬d & ¬c) ∨ (a & ¬c)) & (b ∨ d)
3	(a & c) ∨ ((b ∨ ¬d) & (¬a ∨ ¬d) & (d ∨ b) & (¬a ∨ d)) ∨ (a & ¬c)
4	((a ∨ b) & (¬b ∨ ¬d) & (¬b ∨ ¬c) & (¬c ∨ d)) ∨ ((¬b ∨ c) & (c ∨ d))
5	(c ∨ ¬d) & (a ∨ c) & (¬b & c & d)∨ (¬d & ¬a) & (¬b & c & d) ∨ ¬c
6	(¬a ∨ ¬b) & (¬b ∨ c) & (a ∨ c) & (¬a ∨ b ∨ ¬c ∨ d) & (d ∨ (d & c))
7	(¬a & b) ∨ (c & ¬b) & ((¬a & d) ∨ (c & d)) & (¬b & c & d) ∨ ¬b ∨ ¬c
8	((¬d & b) ∨ (c & b)) & (¬b ∨ ¬c) & (c ∨ ¬a) ∨ ((¬d ∨ ¬c) & (c ∨ a))
9	(¬(c & d)) & (a ∨ c) ∨ ¬b & (¬c ∨ a) ∨ (c & ¬a) & (c ∨ ¬d) & (¬d ∨ a)
10	((¬c ∨ d) & (d ∨ a)) ∨ ((b ∨ ¬b) & (¬c ∨ a) & (¬c ∨ ¬d) & (¬d ∨ a))
11	((a ∨ c) & (a ∨ d)) & (((c ∨ (c & b)) & ¬c) ∨ ¬a) ∨ (c & ¬b) & ¬a
12	((¬b ∨ ¬c) & (a ∨ b)) ∨ (d & ¬c) ∨ (((¬b & ¬a) ∨ c) & (a ∨ b))
13	((a ∨ (c ∨(b & c))) & (¬(c & d)) & (c & ¬d)) & (c ∨ (¬d & ¬c) ∨ d)
14	(a ∨ ¬c) & ((¬a & d) ∨ (b & d) ∨ (¬a & ¬d) ∨ (b & ¬d)) & (a ∨ c)
15	((¬c & ¬d) ∨ (b & c)) & (¬a ∨ ¬d) & (((¬c ∨ ¬b) & d) ∨ (c & b))
16	(a ∨ b) & (¬b & c & d) ∨ (¬a & ¬b & c & d) ∨ ¬b ∨ ¬c ∨ d & (a ∨ b)
17	(a & b) ∨ (a & ¬b) ∨ ((¬a ∨ b) & (c ∨ ¬d) & (¬a ∨ ¬b) & (d ∨ c))
18	((¬b & c) ∨ (¬c ∨ d) ∨ ¬a) & (¬a ∨ b ∨ ¬c ∨ d) & ¬(c ∨ d) & a
19	(b & d) ∨ ((c ∨ ¬d) & (a ∨ c) & (¬d ∨ ¬c) & (a ∨ ¬c)) ∨ (¬b & d)
20	(a & ¬d) ∨ (((¬c & ¬b) ∨ d) & (c ∨ b)) ∨ ((¬d ∨ ¬c) & (c ∨ b))

Теоретические сведения и примеры выполнения Задания 3

1. Минимизация булевых функций с использованием законов булевой алгебры

Основные законы булевой алгебры.

Здесь f1, f2, f3 – любые булевы функции.

1. *Ассоциативость:*

   $f_1\&(f_2\&f_3)=(f_1\&f_2)\&f_3=f_1\&f_2\&f_3$ $\qquad f_1\vee(f_2\vee f_3)=(f_1\vee f_2)\vee f_3=f_1\vee f_2\vee f_3$
2. *Коммутативность:*

   $f_1\&f_2=f_2\&f_1$ $\qquad f_1\vee f_2=f_2\vee f_1$
3. *Дистрибутивность*

   конъюнкции относительно дизъюнкции: $f_1\&(f_2\vee f_3)=(f_1\&f_2)\vee(f_1\&f_3)$

   дизъюнкции относительно конъюнкции: $f_1\vee(f_2\&f_3)=(f_1\vee f_2)\&(f_1\vee f_3)$
4. *Идемпотентность* $\quad f_1\&f_1=f_1$ $\qquad f_1\vee f_1=f_1$
5. *Двойное отрицание:* $\quad \overline{\overline{f_1}}=f_1$
6. *Свойства констант:* $\quad f_1\&1=f_1$ $\qquad f_1\vee1=1$ $\qquad \overline{0}=1$

   $f_1\&0=0$ $\qquad f_1\vee0=f_1$ $\qquad \overline{1}=0$
7. *Законы де Моргана:* $\quad \overline{f_1\&f_2}=\overline{f_1}\vee\overline{f_2}$ $\qquad \overline{f_1\vee f_2}=\overline{f_1}\&\overline{f_2}$
8. *Закон противоречия:* $\quad f_1\&\overline{f_1}=0$
9. *Закон «исключенного третьего»:* $\quad f_1\vee\overline{f_1}=1$

На основе этих законов выводятся свойства, которые используют, упрощая формулы:

10. *Поглощение:*

    1) $f_1\vee f_1\&f_2=f_1$

    2) $f_1\&(f_1\vee f_2)=f_1$
11. *Склеивание:*

    1) $f_1\&f_2\vee f_1\&\overline{f_2}=f_1$

    2) $f_1\vee\overline{f_1}\&f_2=f_1\vee f_2$

    3) $f_1\&f_2\vee f_1\&f_3\vee f_2\&\overline{f_3}=$
    $=f_1\&f_3\vee f_2\&\overline{f_3}$

Доказательства свойств:

$f_1\vee f_1\&f_2\overset{[6]}{=}f_1\&1\vee f_1\&f_2\overset{[3]}{=}f_1\&(1\vee f_2)\overset{[1,6]}{=}f_1\&1\overset{[6]}{=}f_1.$

$f_1\&(f_1\vee f_2)\overset{[3]}{=}f_1\&f_1\vee f_1\&f_2\overset{[4]}{=}f_1\vee f_1\&f_2\overset{[10(1)]}{=}f_1.$

$f_1\&f_2\vee f_1\&\overline{f_2}\overset{[3]}{=}f_1\&(f_2\vee\overline{f_2})\overset{[9]}{=}f_1\&1\overset{[6]}{=}f_1.$

$f_1\vee\overline{f_1}\&f_2\overset{[3]}{=}(f_1\vee\overline{f_1})\&(f_1\vee f_2)\overset{[9]}{=}1\&(f_1\vee f_2)\overset{[6]}{=}f_1\vee f_2.$

$f_1\&f_2\vee f_1\&f_3\vee f_2\&\overline{f_3}\overset{[3]}{=}$

$\overset{[3]}{=}f_1\&f_2(f_3\vee\overline{f_3})\vee f_1\&f_3\vee f_2\&\overline{f_3}\overset{[3]}{=}$

$\overset{[3]}{=}f_1\&f_2\&f_3\vee f_1\&f_2\&\overline{f_3}\vee f_1\&f_3\vee f_2\&\overline{f_3}\overset{[3]}{=}$

$\overset{[3]}{=}f_1\&f_3\&f_2\vee f_1\&f_3\vee f_1\&f_2\&\overline{f_3}\vee f_2\&\overline{f_3}\overset{[3]}{=}$

$\overset{[3]}{=}f_1\&f_3\vee f_2\&\overline{f_3}.$

Приведенные законы и свойства используются при упрощении формул, т. е. для получения эквивалентных формул, содержащих меньшее количество символов.

Порядок действий определяется скобками и следующим **приоритетом операций:** отрицание; конъюнкция; дизъюнкция.

Пример. Максимально упростим выражение

$$(b\&\neg d)\vee((c\vee a)\&(a\vee\neg c)\&(a\&b)\&(\neg b\vee a))\vee(b\&d).$$

а) Выделим в данном выражении подвыражения, соединенные одинаковым знаком (знаком дизъюнкции):

$$\overbrace{(b\&\neg d)}^{①}\vee\overbrace{((c\vee a)\&(a\vee\neg c)\&(a\&b)\&(\neg b\vee a))}^{②}\vee\overbrace{(b\&d)}^{③}.$$

По закону 2 коммутативности дизъюнкции, выражения ① и ② можно поменять местами:

$$\overbrace{((c\vee a)\&(a\vee\neg c)\&(a\&b)\&(\neg b\vee a))}^{②}\vee(\overbrace{b\&\neg d}^{①})\vee\overbrace{(b\&d)}^{③}.$$

По закону (1) ассоциативности дизъюнкции, порядок выполнения операций $\vee$ над выражениями ①, ②, ③ отрегулируем скобками:

$$\overbrace{((c\vee a)\&(a\vee\neg c)\&(a\&b)\&(\neg b\vee a))}^{②}\vee((\overbrace{b\&\neg d}^{①})\vee\overbrace{(b\&d)}^{③}).$$

Упростим сначала подвыражение $((b\&\neg d)\vee(b\&d))$. По закону (3) дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции, вынесем b за скобки:

$$((b\&\neg d)\vee(b\&d))=b\&(\neg d\vee d).$$

По закону «исключенного третьего» (9), $(\neg d\vee d)=1$. Тогда

$$((b\&\neg d)\vee(b\&d))=b\&(\neg d\vee d)=b\&1=\text{(по свойствам констант (6))}=b.$$

Этот же результат можно получить проще – по свойству склеивания (11):

$$((b\&\neg d)\vee(b\&d))=b.$$

Упростим теперь подвыражение ②. Так как выражения $(c\vee a)$, $(a\vee\neg c)$, $(a\&b)$, $(\neg b\vee a)$ соединены знаком конъюнкции, по закону (1) ассоциативности, расставим скобки, которые определят дальнейший порядок действий:

$$((c\vee a)\&(a\vee\neg c))\ \&\ ((a\&b)\&(\neg b\vee a)).$$

$$(c\vee a)\&(a\vee\neg c)\overset{(2)}{=}(a\vee c)\&(a\vee\neg c)\overset{(3)}{=}a\vee(c\ \&\ \neg c)\overset{(8)}{=}a\vee 0\overset{(6)}{=}a.$$

$$(a\&b)\&(\neg b\vee a)\overset{(2)}{=}(a\&b)\&(a\vee\neg b)\overset{(3)}{=}a\&b\&a\vee a\&b\&\neg b\overset{(2),(1)}{=}a\&a\&b\vee a\&(b\&\neg b)\overset{(1),(8)}{=}$$

$$(a\&a)\&b\vee a\&0\overset{(4),(6)}{=}a\&b\vee 0\overset{(6)}{=}a\&b.$$

Или, по-другому, используя свойство поглощения (10):

$$(a\&b)\&(\neg b\vee a)\overset{(2)}{=}(b\&a)\&(a\vee\neg b)\overset{(1)}{=}b\&(a\&(a\vee\neg b))\overset{(10)}{=}b\&a\overset{(2)}{=}a\&b.$$

Итак, подвыражение ② запишется в виде: $(a)\ \&\ (a\&b)\overset{(1)}{=}(a\&a)\ \&\ b\overset{(4)}{=}a\&b.$

Тогда исходное выражение сведется к такому представлению:

$$a\&b\vee b\overset{(2)}{=}b\vee(a\&b)\overset{(6)}{=}(b\&1)\vee(b\&a)\overset{(3)}{=}b\&(1\vee a)\overset{(6)}{=}b\&1\overset{(6)}{=}b.$$

Этот же результат проще получить, используя свойство поглощения:

$$a\&b\vee b\overset{(2)}{=}b\vee(a\&b)\overset{(10)}{=}b.$$

Пример. Максимально упростим выражение

$$\neg(\neg c\vee a)\vee\neg((c\&\neg a)\&(\neg a\&d)\vee d\vee(d\&c))\ \&(\neg c\vee\neg d)\vee d.$$

а) $\neg(\neg c\vee a)\vee\neg((c\&\neg a)\&(\neg a\&d)\vee d\vee(d\&c))\ \&(\neg c\vee\neg d)\vee d\overset{(9)}{=}(\neg\neg c\&\neg a)\vee$

$\vee\neg((c\&\neg a)\&(\neg a\&d)\vee d\vee(d\&c))\ \&(\neg c\vee\neg d)\vee d\overset{(5)}{=}c\&\neg a\vee\neg((c\&\neg a)\&(\neg a\&d)\vee d\vee(d\&c))\ \&$

$\&(\neg c\vee\neg d)\vee d\overset{(1),(2)}{=}c\&\neg a\vee\neg((\neg a\&\neg a)\&(c\&d)\vee d\vee(d\&c))\ \&(\neg c\vee\neg d)\vee d\overset{(4)}{=}c\&\neg a\vee$

$\vee\neg(\neg a\&c\&d\vee d\vee d\&c)\ \&(\neg c\vee\neg d)\vee d\overset{(2)}{=}c\&\neg a\vee\neg((d\vee d\&\neg a\&c)\vee(d\&c))\ \&(\neg c\vee\neg d)\vee d=$

$\overset{(11)}{=}c\&\neg a\vee\neg(d\vee(d\&c))\ \&(\neg c\vee\neg d)\vee d\overset{(11)}{=}c\&\neg a\vee\neg(d)\&(\neg c\vee\neg d)\vee d\overset{(11)}{=}=c\&\neg a\vee$

$\vee\neg d\vee d\overset{(1)}{=}c\&\neg a\vee(\neg d\vee d)\overset{(9)}{=}c\&\neg a\vee 1\overset{(6)}{=}1.$

2. Построение таблицы значений булевой функции

Будем рассматривать множество В = {0,1}, элементы которого являются формальными символами, не имеющими арифметического смысла (0 – ЛОЖЬ, 1 – ИСТИНА).

Булевой (логической) функцией от n переменных называется функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, которая вместе со своими аргументами $x_1, x_2,\ldots, x_n$ принимает значения из множества В.

Булевы функции двух переменных:

x	y	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	&	$\not\to$	x	$\not\leftarrow$	y	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	~	$\bar{y}$	$\leftarrow$	$\bar{x}$	$\to$	|	1

функция	название	функция	название
$\phi_0(x, y) \equiv 0$	константа нуля	$\phi_{13}(x, y) = x \to y$	левая импликация
$\phi_{12}(x, y) = \bar{x} = \neg x$	отрицание x	$\phi_8(x, y) = x \downarrow y$	стрелка Пирса
$\phi_1(x, y) = x \,\&\, y = x \wedge y$	конъюнкция	$\phi_{14}(x, y) = x \mid y$	штрих Шеффера
		$\phi_{15}(x, y) \equiv 1$	константа единицы
$\phi_7(x, y) = x \vee y$	дизъюнкция	$\phi_2(x, y) = x \not\to y$	левая коимпликация
$\phi_6(x, y) = x \oplus y$	сложение по модулю 2	$\phi_4(x, y) = x \leftarrow y$	правая импликация
$\phi_9(x, y) = x \sim y$	эквиваленция	$\phi_{11}(x, y) = x \not\leftarrow y$	правая коимпликация

Пример. Построим таблицу значений для $f(x,y,z) = \neg(x \to \neg y) \downarrow (z \oplus (z\&y \sim \neg x))$.

Знание особенностей логических функций 2х переменных позволит ускорить процесс построения таблицы значений заданной функции и проверку результата. Приведем ряд рассуждений (их легко получить, анализируя таблицы значений ф-ций 2-х переменных):

- если первый аргумент функции $\phi_{13}(x,y) = x \to y$ равен 0, то, независимо от значения второго аргумента, значение функции $x \to y$ равно 1;
- если хотя бы один из аргументов функции $\phi_1(x, y) = x\&y$ равен 0, то, независимо от значения другого аргумента, значение функции x&y равно 0;
- если хотя бы один из аргументов функции $\phi_8(x,y) = x \downarrow y$ равен 1, то, независимо от значения другого аргумента, значение функции $x \downarrow y$ равно 0.

Строим таблицу значений данной функции (здесь указан порядок выполнения действий):

В таких таблицах значения аргументов (x, y, z) (наборы из нулей и единиц) всегда расположены в определенном порядке – <u>*лексикографическом*</u>, совпадающим с порядком возрастания наборов, рассматриваемых как двоичные числа. Этот порядок не изменяется.

десятичные эквиваленты двоичных наборов:

				③	②	①	⑧	⑦	⑤	⑥	④
	x	y	z	¬	(x→	¬y)	↓	(z ⊕	(z&y	~	¬x))
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
3	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
4	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
6	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
7	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0

Т.к. порядок расположения наборов в таблице всегда одинаков, при задании функции ее значениями для сокращения записи столбец со значениями функции транспонируется и записывается в виде строки.

Например, рассмотренная выше функция задается так: f(x,y,z) = (1011 0100).

Другие варианты построения таблиц функций трех и четырех переменных:

f(x,y,z):

xy \ z	0	1
00	f(0,0,0)	f(0,0,1)
01	f(0,1,0)	f(0,1,1)
10	f(1,0,0)	f(1,0,1)
11	f(1,1,0)	f(1,1,1)

f(x,y,z,t):

xy \ zt	00	01	10	11
00	f(0,0,0,0)	f(0,0,0,1)	f(0,0,1,0)	f(0,0,1,1)
01	f(0,1,0,0)	f(0,1,0,1)	f(0,1,1,0)	f(0,1,1,1)
10	f(1,0,0,0)	f(1,0,0,1)	f(1,0,1,0)	f(1,0,1,1)
11	f(1,1,0,0)	f(1,1,0,1)	f(1,1,1,0)	f(1,1,1,1)

Если выражение, задающее функцию, представить в нормальной форме (дизъюнктивной или конъюнктивной), то построение таблицы значений функции упростится.

Пример. Построим таблицу значений заданной функции f(a,b,c,d) с учетом ее представления в виде минимальной ДНФ.

$f(a,b,c,d)=((\neg c\vee d)\&(d\vee a))\vee((a\vee\neg b)\&(\neg c\vee a)\&\neg(c\vee d)\&(\neg d\vee a))\vee a\&(b\vee\neg a)=d\vee\neg b\&\neg c\vee a\&b.$

	a	b	c	d	f(a,b,c,d)
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Эта таблица заполняется следующим образом. По выражению, задающему функцию f(a,b,c,d), определяем, на каких наборах ее значение равно 1.

Так как функция представлена в виде ДНФ, то, по свойству констант ($f_1\vee 1$ = 1), для того чтобы значение всего выражения, задающего функцию, равнялось 1, достаточно, чтобы хотя бы одно из его дизъюнктивных слагаемых имело значение, равное 1. Выражение $d\vee\neg b\&\neg c\vee a\&b$ имеет 3 дизъюнктивных слагаемых: d, $\neg b\&\neg c$ и a&b. Значит, f(a,b,c,d) =1 только в следующих случаях:

- либо при d = 1, т.к. тогда $f(a,b,c,d) = 1\vee\underbrace{\neg b\&\neg c\vee a\&b}_{f_1} = 1$,
- либо при $\neg b\&\neg c$ =1, т.к. тогда $f(a,b,c,d) = \underbrace{1\vee d\vee a\&b}_{f_1} = 1$,
- либо при a&b =1, т.к. тогда $f(a,b,c,d) = 1\vee\underbrace{d\vee\neg b\&\neg c}_{f_1} = 1$.

Определим, на каких наборах эти слагаемые принимают единичные значения.

a&b =1 тогда и только тогда, когда a=1 и b =1 одновременно, т.к. 1&1 =1. При этом переменные c и d (от которых также зависит функция), отсутствующие в этой конъюнкции, могут принимать любые значения. Значит, a&b =1 на наборах 1100, 1101, 1110, 1111. Аналогично, $\neg b\&\neg c$ =1 на наборах 0000, 0001, 1000, 1001. Для d = 1 наборов будет больше, т.к. для трех остальных переменных a, b и c имеется 8 разных наборов: 0001, 0011, 0101, 0111, 1001, 1011, 1101, 1111.

На остальных наборах значение заданной функции равно нулю. При заполнении таблицы не обязательно полностью определять наборы, на которых функция принимает единичные значения. Например, в нашем случае достаточно проставить единичные значения функции в тех строках таблицы, где a=1 и b =1 одновременно (12-я, 13-я, 14-я и 15-я строки), где b=0 и c =0 одновременно (0-я, 1-я, 8-я и 9-я строки) и где d = 1 (строки с номерами 1,3,5,7,9,11,13,15).

Другой вариант таблицы:

ab \ cd	00	01	10	11
00	1	1	0	1
01	0	1	0	1
10	1	1	0	1
11	1	1	1	1

3. Получение СДНФ и СКНФ булевых функций

Элементарными конъюнкциями называются конъюнкции переменных или их отрицаний, в которых каждая переменная встречается не более одного раза. **Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)** формулы называется формула, имеющая вид дизъюнкции элементарных конъюнкций. ДНФ формулы называется совершенной **дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)**, если каждая элементарная конъюнкция ДНФ формулы содержит символы всех переменных, от которых данная функция зависит.

Элементарными дизъюнкциями называются дизъюнкции переменных или их отрицаний, в которых каждая переменная встречается не более одного раза. **Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)** формулы называется формула, имеющая вид конъюнкции элементарных дизъюнкций. КНФ формулы называется **совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)**, если каждая элементарная дизъюнкция КНФ формулы содержит символы всех переменных, от которых данная функция зависит.

Пример. Получить СДНФ и СКНФ для функции f(x,y,z), заданной таблицей значений.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Для построения <u>СДНФ</u> по таблице значений рассмотрим только все те наборы, на которых функция принимает <u>единичные</u> значения. Каждому нулю из набора поставим в соответствие отрицание соответствующей переменной, а единице – саму переменную; таким образом, по каждому набору построим конъюнкцию переменных и их отрицаний:

$\boxed{000 \to \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}}$; $\boxed{010 \to \bar{x}\,y\,\bar{z}}$; $\boxed{011 \to \bar{x}\,y\,z}$; $\boxed{100 \to x\,\bar{y}\,\bar{z}}$; $\boxed{101 \to x\,\bar{y}\,z}$; $\boxed{110 \to x\,y\,\bar{z}}$

Соединив полученные конъюнкции знаком дизъюнкции, получим СДНФ функции: $f(x,y,z) = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,z \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,\bar{z}$.

Далее по таблице значений построим <u>СКНФ</u>. Для этого рассмотрим только все те наборы, на которых функция принимает <u>нулевые</u> значения (у нас это 001 и 111).Каждой единице из набора поставим в соответствие отрицание соответствующей переменной, а нулю – саму переменную; таким образом, по каждому набору построим дизъюнкцию переменных и их отрицаний: $(0,0,1) \to x \vee y \vee \bar{z}$; $(1,1,1) \to \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$.

Соединив полученные дизъюнкции знаком конъюнкции, получим СКНФ для нашей функции: $f(x,y,z) = (x \vee y \vee \bar{z})\&(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

Пример. Получим СДНФ и СКНФ для функции $f(x,y,z) = \bar{z} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$ по ее формуле, не выполняя построения таблицы значений.

$$f(x,y,z) = \bar{z} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} = (x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y})\bar{z} \vee \bar{x}y(z \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}(z \vee \bar{z}) =$$
$$= xy\bar{z} \vee \underline{x\bar{y}\bar{z}} \vee \underline{\bar{x}y\bar{z}} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \underline{\bar{x}y\bar{z}} \vee x\bar{y}z \vee \underline{x\bar{y}\bar{z}}$$
$$= \mathbf{xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z} \text{ – СДНФ.}$$

$$f(x,y,z) = \bar{z} \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} = (\bar{z} \vee \bar{x}y) \vee x\bar{y} = (\bar{z} \vee \bar{x})(\bar{z} \vee y) \vee x\bar{y} =$$
$$= ((\bar{z} \vee \bar{x})(\bar{z} \vee y) \vee x)((\bar{z} \vee \bar{x})(\bar{z} \vee y) \vee \bar{y}) =$$
$$= (\bar{z} \vee \bar{x} \vee x)(\bar{z} \vee y \vee x)(\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y})(\bar{z} \vee y \vee \bar{y}) =$$
$$= (\bar{z} \vee 1)(\bar{z} \vee y \vee x) = (\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y})(\bar{z} \vee 1) = \mathbf{(\bar{z} \vee y \vee x)(\bar{z} \vee \bar{x} \vee \bar{y})} \text{ – СКНФ.}$$

Пример. Получим СДНФ и СКНФ функции f(x,y,z), используя предельные разложения Шеннона.

Формула предельного дизъюнктивного разложения Шеннона, дающая <u>СДНФ функции</u>:

$\boxed{f(x,y,z) = \vee\, x^{\sigma_1} \& y^{\sigma_2} \& z^{\sigma_3}}$, где дизъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ таким, что $f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = 1$.

Формула предельного конъюнктивного разложения Шеннона, дающая СКНФ функции:

$\boxed{f(x,y,z) = \&(x^{\neg\sigma_1} \vee y^{\neg\sigma_2} \vee z^{\neg\sigma_3})}$, где конъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ таким, что $f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0$.

Здесь
$$a^{\sigma} = \begin{cases} \neg a, & \text{если } \sigma = 0, \\ a, & \text{если } \sigma = 1. \end{cases}$$

Запишем СДНФ для заданной функции f(x,y,z), принимающей значение 1 на наборах (0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0):

$$f(x,y,z) = x^0\&y^0\&z^0 \vee x^0\&y^1\&z^0 \vee x^0\&y^1\&z^1 \vee x^1\&y^0\&z^0 \vee x^1\&y^0\&z^1 \vee x^1\&y^1\&z^0 =$$
$$= \neg x\&\neg y\&\neg z \vee \neg x\&y\&\neg z \vee \neg x\&y\&z \vee x\&\neg y\&\neg z \vee x\&\neg y\&z \vee x\&y\&\neg z.$$

Запишем СКНФ для заданной функции f(x,y,z), принимающей значение 0 на наборах (0,0,1), (1,1,1):

$$f(x,y,z) = (x^{\neg 0} \vee y^{\neg 0} \vee z^{\neg 1})\&(x^{\neg 1} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 1})=(x^1 \vee y^1 \& \vee z^0)\&(x^0 \vee y^0 \vee z^0)=(x \vee y \vee \neg z)\ \&\ (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).$$

4. Построение минимальной ДНФ функции с помощью карт Карно

	a	¬a		a	
b	a&b&c&d	¬a&b&c&d	¬a&b&¬c&d	a&b&¬c&d	d
	a&b&c&¬d	¬a&b&c&¬d	¬a&b&¬c&¬d	a&b&¬c&¬d	¬d
¬b	a&¬b&c&¬d	¬a&¬b&c&¬d	¬a&¬b&¬c&¬d	a&¬b&¬c&¬d	
	a&¬b&c&d	¬a&¬b&c&d	¬a&¬b&¬c&d	a&¬b&¬c&d	d
	c		¬c		

Таблица 1

	a	¬a		a	
b	1111	0111	0101	1101	d
	1110	0110	0100	1100	¬d
¬b	1010	0010	0000	1000	
	1011	0011	0001	1001	d
	c		¬c		

Таблица 2

Карта Карно для функции четырех переменных f(a,b,c,d) представляет собой таблицу, где предусмотрены ячейки для всех возможных конъюнкций четырех переменных a,b,c,d и их отрицаний (см. таблицу 1).

Каждой ячейке таблицы 1 взаимно однозначно соответствует набор из нулей и единиц (см. таблицу 2). Таблица устроена таким образом, что любая пара соседних по горизонтали или по вертикали наборов отличается друг от друга только в одном разряде.

Заметим, что карта Карно представляет собой таблицу с пустыми внутренними ячейками. В таблицах 1 и 2 внутренние ячейки заполнены только для того, чтобы показать их соответствие конъюнкциям и наборам из нулей и единиц.

Карту Карно удобно заполнять, пользуясь таблицей 1, если функция представлена в виде СДНФ, и пользуясь таблицей 2, если функция задана таблицей значений.

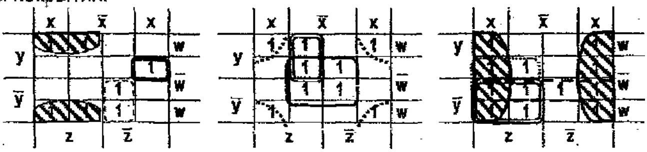
Для получения минимальной ДНФ функции:

1) карты Карно заполняем единицами следующим образом: в ячейку записываем 1, если соответствующая элементарная конъюнкция присутствует в СДНФ функции, или на соответствующем наборе функция принимает единичное значение;

2) строим покрытия всех единиц максимально возможного размера (длина стороны покрытия обязательно является степенью двойки – $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$ и т.д.); количество покрытий должно быть минимальным; при построении покрытий карты Карно можно мысленно склеивать около горизонтальной оси, около вертикальной оси и около обеих осей сразу; покрытия могут перекрываться; лишних покрытий строить не нужно, иначе получаемая ДНФ не будет минимальной;

3) каждому покрытию ставим в соответствие элементарную конъюнкцию переменных по следующему правилу: если переменная попадает на покрытие и с отрицанием, и без отрицания, то такая переменная в конъюнкцию не входит; остальные переменные попадают в конъюнкцию. Чем больше покрытие, тем меньше переменных входит в конъюнкцию, так для функции 4-х переменных покрытию 1×1 соответствует конъюнкция 4-х переменных, покрытию 1×2 - 3-х переменных, покрытию 2×2 - 2-х переменных и т.д.

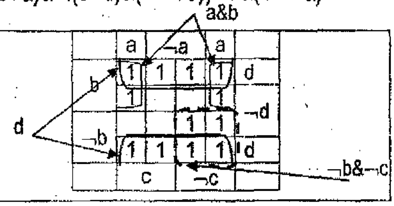
Примеры покрытий:



Пример. Получим минимальную ДНФ функции f(a,b,c,d), используя карты Карно (таблицу значений функции см. выше).

$$f(a,b,c,d)=((\neg c\lor d)\&(d\lor a))\lor((a\lor\neg b)\&(\neg c\lor a)\&\neg(c\lor d)\&(\neg d\lor a))\lor a\&(b\lor\neg a)$$

	a	¬a		a	
b	1	1	1	1	d
	1			1	¬d
¬b			1	1	
	1	1	1	1	d
	c		¬c		



Результат: минимальная ДНФ функции $f(a,b,c,d) = d\lor\neg b\&\neg c\lor a\&b$.

5. Получение минимальной ДНФ функции методом Куайна-Мак-Класки

Рассматриваем только те наборы, где значение функции равно 1.

Группируем наборы по количеству единиц в них. Далее объединяем наборы из соседних групп.

Объединению подлежат только те наборы, которые различаются лишь в одном разряде (соседние наборы). В объединяемых наборах разряд, в котором есть различие, заменяется другим символом (например, "+"). Например, 010 и 011 объединяются в 01+.

Если для каких-то строк таблицы такое объединение невозможно, переносим эти строки в следующую таблицу, не производя над ними никаких действий вплоть до шага, где требуется устранить избыточность.

Группируем строки с одинаковой позицией знаков "+" в них. Объединяем наборы в пределах каждой группы, если это возможно (объединяемые наборы должны различаться только в одном разряде). Из нескольких одинаковых строк (если такие есть) оставляем одну. Выполняем операции, описанные в этом абзаце, до тех пор, пока это возможно.

Далее устраняем избыточность: если в некоторой строке все присутствующие в ней номера имеются в других строках, то эта строка является избыточной, и ее удаляем.

Полностью реализация метода показана на примере функции f(a,b,c,d), таблицу значений которой получили выше.

$$f(a,b,c,d)=((\neg c\lor d)\&(d\lor a))\lor((a\lor\neg b)\&(\neg c\lor a)\&\neg(c\lor d)\&(\neg d\lor a))\lor a\&(b\lor\neg a)$$

1) Выпишем из таблицы значений f(a,b,c,d) только те наборы, на которых значение функции равно единице

	a	b	c	d	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	1
5	0	1	0	1	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

2) Группируем наборы по количеству единиц в них:

		a	b	c	d
без 1	0	0	0	0	0
с одной 1	1	0	0	0	1
	8	1	0	0	0
с двумя 1	3	0	0	1	1
	5	0	1	0	1
	9	1	0	0	1
	12	1	1	0	0
с тремя 1	7	0	1	1	1
	11	1	0	1	1
	13	1	1	0	1
	14	1	1	1	0
с четырьмя 1	15	1	1	1	1

3) Строим таблицу (строки формируются из соседних наборов)

	a	b	c	d
0,1	0	0	0	+
0,8	+	0	0	0
1,3	0	0	+	1
1,5	0	+	0	1
1,9	+	0	0	1
8,9	1	0	0	+
8,12	1	+	0	0
3,7	0	+	1	1
3,11	+	0	1	1
5,7	0	1	+	1
5,13	+	1	0	1
9,11	1	0	+	1
9,13	1	+	0	1
12,14	1	1	+	0
7,15	+	1	1	1
11,15	1	+	1	1
13,15	1	1	+	1
14,15	1	1	1	+

4) Группируем наборы с одинаковой позицией знаков (+) в них:

	a	b	c	d
0,1	0	0	0	+
8,9	1	0	0	+
14,15	1	1	1	+
1,3	0	0	+	1
5,7	0	1	+	1
9,11	1	0	+	1
12,14	1	1	+	0
13,15	1	1	+	1
1,5	0	+	0	1
8,12	1	+	0	0
3,7	0	+	1	1
9,13	1	+	0	1
11,15	1	+	1	1
0,8	+	0	0	0
1,9	+	0	0	1
3,11	+	0	1	1
5,13	+	1	0	1
7,15	+	1	1	1

5) Составляем новую таблицу, где строки формируются из соседних наборов

	a	b	c	d
0,1,8,9	+	0	0	+
1,3,5,7	0	+	+	1
1,3,9,11	+	0	+	1
5,7,13,15	+	1	+	1
9,11,13,15	1	+	+	1
12,14,13,15	1	1	+	+
1,5,3,7	0	+	+	1
1,5,9,13	+	+	0	1
8,12,9,13	1	+	0	+
3,7,11,15	+	+	1	1
9,13,11,15	1	+	+	1
0,8,1,9	+	0	0	+
1,9,3,11	+	0	+	1
1,9,5,13	+	+	0	1
3,11,7,15	+	+	1	1
5,13,7,15	+	1	+	1
14,15	1	1	1	+

6) В новой таблице из нескольких одинаковых наборов оставим один:

	a	b	c	d
0,1,8,9	+	0	0	+
1,3,5,7	0	+	+	1
1,3,9,11	+	0	+	1
5,7,13,15	+	1	+	1
9,11,13,15	1	+	+	1
1,5,9,13	+	+	0	1
8,12,9,13	1	+	0	+
3,7,11,15	+	+	1	1
12,14,13,15	1	1	+	+
14,15	1	1	1	+

7) Группируем наборы с одинаковой позицией знаков (+) в них:

0,1,8,9	+	0	0	+
1,3,5,7	0	+	+	1
9,11,13,15	1	+	+	1
1,3,9,11	+	0	+	1
5,7,13,15	+	1	+	1
1,5,9,13	+	+	0	1
3,7,11,15	+	+	1	1
8,12,9,13	1	+	0	+
12,14,13,15	1	1	+	+
14,15	1	1	1	+

8) Объединяем строки, наборы в которых различаются между собой только в одном разряде:

	a	b	c	d
0,1,8,9	+	0	0	+
1,3,5,7,9,11,13,15	+	+	+	1
1,3,9,11,5,7,13,15	+	+	+	1
1,5,9,13,3,7,11,15	+	+	+	1
8,12,9,13	1	+	0	+
12,14,13,15	1	1	+	+
14,15	1	1	1	+

9) Из нескольких строк таблицы таких, что записанные в них наборы одинаковы, оставляем одну:

	a	b	c	d
0,1,8,9	+	0	0	+
1,3,5,7,9,11,13,15	+	+	+	1
8,12,9,13	1	+	0	+
12,14,13,15	1	1	+	+
14,15	1	1	1	+

10) Устраняем избыточность: 0,1,8,9 – не является избыточной, т.к. 0 не встречается больше ни в какой группе; 1,3,5,7,9,11,13,15 – не является избыточной, т.к., например, 11 нигде больше не встречается; 14,15 – избыточна, т.к. эти номера есть в 12,14,13,15; 8,12,9,13 – избыточна, т.к. 8 и 9 есть в 0,1,8,9, а 12 и 13 есть в 12,14,13,15. Удалив лишние строки, получаем:

	a	b	c	d	конъюнкции:
0,1,8,9	+	0	0	+	$\neg b\&\neg c$
1,3,5,7,9,11,13,15	+	+	+	1	d
12,14,13,15	1	1	+	+	a&b

Результат: минимальная ДНФ функции $f(a,b,c,d) = d \vee \neg b\&\neg c \vee a\&b$.

6. Привести выражение, задающее минимальную ДНФ функции f(a,b,c,d), к КНФ

Пусть минимальная ДНФ функции $f(a,b,c,d) = d \vee \neg b\&\neg c \vee a\&b$.

Используя законы булевой алгебры, приведем данную ДНФ к КНФ.

$f(a,b,c,d) = d \vee \neg b\&\neg c \vee a\&b = (d \vee \neg b\&\neg c \vee a)\&(d \vee \neg b\&\neg c \vee b) =$

$=(d \vee a \vee \neg b\&\neg c)\&(d \vee b \vee \neg b\&\neg c) = ((d \vee a) \vee (\neg b\&\neg c))\&((d \vee b) \vee (\neg b\&\neg c)) =$

$=(d \vee a \vee \neg b)\&(d \vee a \vee \neg c)\&(d \vee b \vee \neg b)\&(d \vee b \vee \neg c) =$

$=(d \vee a \vee \neg b)\&(d \vee a \vee \neg c)\&(d \vee b \vee \neg c)$ – это и есть КНФ функции f(a,b,c,d).

7. Построение минимальной бинарной диаграммы решений (БДР) функции

БДР булевой функции n переменных $f(x_1,\ldots,x_n)$ представляет собой дерево со следующими свойствами:

- Вершины соответствуют переменным, от которых зависит функция, и расположены по уровням. Каждому уровню соответствует одна переменная.
- Из каждой вершины выходит две дуги. Одна соответствует нулевому значению переменной (пунктирная линия), а вторая - единичному (сплошная линия).
- БДР имеет 2^n листьев, каждый из которых соответствует одному из значений функции.

Суть задачи о минимизации БДР состоит в том, чтобы минимизировать число вершин в БДР. При этом порядок расположения вершин по уровням может быть произвольный.

Для фиксированного порядка расположения переменных по уровням:

1. Строим полную БДР.
2. Двигаясь по уровням сверху вниз, для каждого уровня выполняем 2 действия:

а) находим вершины, от прохождения которых не зависит значение функции, и удаляем их;

б) находим одинаковые поддеревья и из нескольких одинаковых оставляем одно.

3. Приводим БДР к конечному виду (для заданного порядка переменных она будет содержать минимальное число вершин).

4. Меняем порядок переменных и выполняем шаги 1-3 для нового порядка расположения переменных по уровням. Эти действия выполняем для всех возможных перестановок переменных, от которых зависит функция.

5. Выбираем тот порядок расположения переменных по уровням, который будет оптимальным (т.е. при котором БДР функции будет содержать минимальное количество вершин), если же таких вариантов несколько, то выбираем любой из них.

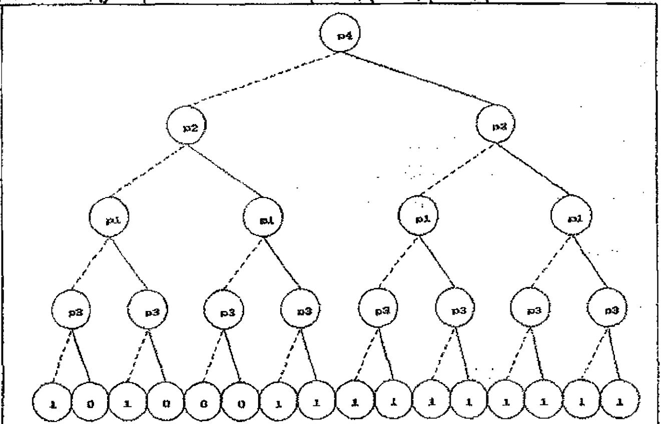
Для построения минимальной БДР функции f(a,b,c,d) оптимальным порядком расположения переменных по уровням является следующий: 1-й уровень – d, 2-й уровень – b, 3-й уровень – a, 4-й уровень – c.

Если порядок переменных соответствуем стандартному, тому, что использовался при построении таблицы значений функции f(a,b,c,d), то f(a,b,c,d)=(1101 0101 1101 1111).

Если же порядок переменных изменен, то изменится и строка, задающая значения функции. При выбранном порядке переменных f(d,b,a,c)= (1010 0011 1111 1111).

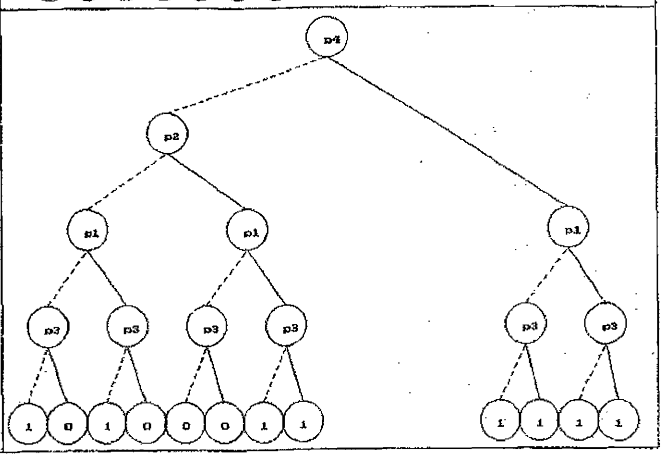
На рисунках, иллюстрирующих процесс построения минимальной бинарной диаграммы решений, используются следующие обозначения: p1=a, p2=b, p3=c, p4=d.

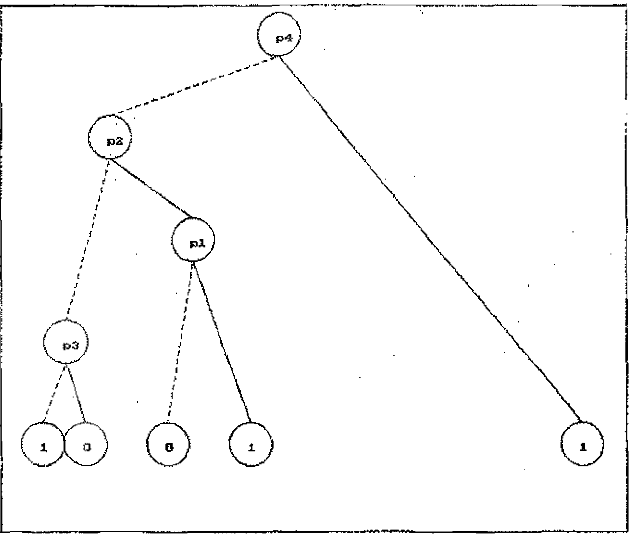
1) Для выбранного порядка переменных строим полную БДР, т.е. такую, где количество листьев (висячих вершин) равно 16 - по числу всех значений заданной функ-ции. Заметим, что, записывая значения функции, нужно обязательно учитывать новый порядок переменных.



2) Для единичного значения p4 видим, что от значения переменной p2 значение функции не зависит, поэтому этот узел в дереве удаляем.

На этой же диаграмме видно, что значение функции при p4=1 не зависит также и от значений p1 и p3, поэтому эти узлы тоже будут удалены.



3) При p2=0 для различных значений p1 видим, что исходящие из этого узла ребра ведут в вершины, в которых начинаются одинаковые поддеревья. Поэтому из двух одинаковых поддеревьев оставляем одно, а узел p1 удаляем, т.к. от значения этой переменной не зависит значение функции. При p2=1 значение функции не зависит от значения p3 – удаляем эти узлы.	

Таким образом, в полученной бинарной диаграмме решений осталось только 5 узлов, и эта диаграмма функции f(a,b,c,d) по числу узлов является минимальной.

Представление функции f(a,b,c,d) с помощью условного оператора **if** по построенной минимальной бинарной диаграмме решений имеет вид:

```
if d then
        f:=true
else
        if b then
                if a then
                        f:=true
                else
                        f:=false
                end if
        else
                if c then
                        f:=false
                else
                        f:=true
                end if
        end if
end if
```

Для определения оптимального порядка расположения переменных по уровням в локальной сети университета имеется программа, которая расположена по адресу:
U:\ VT&PM\ ZAOCH_F\ ММИП\ MinBDR\

Литература

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М., 1987.
2. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.,1986.
3. Редькин Н.П. Дискретная математика. – С-Пб., М., 2003.
4. Зыков А.А. Основы теории графов, 1987.
5. Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов, 1987.
6. Ахо А., Хопкрофт, Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов, 1979.
7. Искусственный интеллект. / Под ред. Э.В. Попова, Д.А. Поспелова, В.Н. Захарова, 1990.
8. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М., 1990.
9. Оре О. Теория графов. – М., 1980.
10. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. – М., 1972.
11. Карпов Ю.Г. Теория автоматов. – «Питер», 2002.
12. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. – М., 2001.
13. Романовский И.В. Дискретный анализ. – С-Пб., 2003.
14. Акимов О.Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. – М., 2001.
15. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М., 2001.
16. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М., 1977.
17. Математическая логика. Учебное пособие. / Под ред. Столярова А.А. – Мн., 1991.
18. Роберт Столл. Множества, логика, аксиоматические теории. – М.,1968.
19. Эдельман С.Л. Математическая логика. – М., 1975.
20. Айзерман М.А., Гусев Л.А., Розоноэр Л.И. и др. Логика. Автоматы. – М., 1963.
21. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М., 1992.
22. Тейз А., Грибомон П. Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию. – М., 1990.
23. Х. Уэно, М. Исидзука. Представление и использование знаний. – М., 1989.
24. Змитрович А.И. Интеллектуальные информационные системы. – Мн.,1997.
25. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М., 1982.
26. Капитонова Ю.В. и др. Лекции по дискретной математике. – С-Пб., 2004.
27. Борисов А.Н., Алексеев А.В., Меркурьева Г.В. и др. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений. – М.,1989.
28. Змитрович А.И. Базы данных: учебное пособие для вузов. – Мн., 1991.

Электронные учебно-методические материалы:
29. U:\ VT&PM\ FEIS\ MMIP\ Конспект лекций\
30. U:\ VT&PM\ FEIS \ MMIP\ Дополнительные материалы\
31. U:\ VT&PM\ ZAOCH_F\ ММИП\

СОДЕРЖАНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Тузик Ирина Владимировна
Парфомук Сергей Иванович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

и варианты заданий к контрольной работе №1 по дисциплине
«Математические модели информационных процессов и управления»
для студентов специальности
53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»
дневной и заочной форм обучения

Ответственный за выпуск: Тузик И.В.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Кармаш Е.Л.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 24.04.2009 г. Формат 60х84 1/16. Бумага «Снегурочка»
Усл.печ.л. 1,4. Уч.изд.л. 1,5. Тираж 100 экз. Заказ №492. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267