УДК 517

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К СУММИРОВАНИЮ РЯДОВ

Шошев Е.З.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель – Лебедь С.Ф., к. ф.- м. н., доцент

Методы операционного исчисления имеют широкое применение. В частности, они могут быть использованы для суммирования числовых и функциональных рядов.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть функция $f(t)$ является оригиналом для $F(p)$ (область аналитичности $F(p)$: $\operatorname{Re} p \ge k$), тогда сумма S ряда $\sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$ вычисляется по формуле

$$S = (\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)dt}{1 \mp e^{-t}}. \qquad (1)$$

Доказательство. По определению изображения $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$. По свойству бесконечной убывающей геометрической прогрессии $\frac{(\pm 1)^k e^{-kt}}{1 \mp e^{-t}} = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}$. С учетом этого

$$(\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)dt}{1 \mp e^{-t}} = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt} dt = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)dt = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n).$$

Что и требовалось доказать.

Пример. Используя формулу (1), вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2n+2\right)}$.

Решение. Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов, получим $F(n) = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2+2n+2} = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}$.

Найдем оригинал полученного изображения $f(t) = \sin t - e^{-t}\sin t = \sin t\left(1 - e^{-t}\right)$. Следовательно, по формуле (1) имеем:

$$S = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t)}{1 - e^{-t}} dt = [k = 1] = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} f(t)}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t\left(1 - e^{-t}\right)}{1 - e^{-t}} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt = \begin{bmatrix} u = e^{-t} & du = -e^{-t}dt \\ dv = \sin t dt & v = -\cos t \end{bmatrix} = -e^{-t}\cos t\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t dt =$$

$$=\begin{bmatrix} u=e^{-t} & du=-e^{-t}dt \\ dv=\cos t dt & v=\sin t \end{bmatrix} = -e^{-t}\cos t\Big|_0^{+\infty} - \left(e^{-t}\sin t\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t dt \right)$$

В результате получим $S=\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t dt = \dfrac{-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t}{2}\Bigg|_0^{+\infty} = 0-\dfrac{-1-0}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Определение. Производящей функцией последовательности $\{a_k\}$ называется сумма степенного ряда $f_a(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$.

Теорема. Пусть функция $f(t)$ является оригиналом для $F(p)$ (область аналитичности $F(p)$: $\operatorname{Re} p \ge 0$). Пусть, кроме того, $\Phi(t,x)$ – производящая функция бесконечной последовательности функций $\varphi_n(x)$ (то есть $\Phi(t,x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)t^n$). Тогда сумма $S(x)$ сходящегося на $[a,b]$ функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F(n)\varphi_n(x)$ может быть найдена по формуле

$$S(x)=\int_0^{+\infty}\Phi(e^{-t},x)f(t)dt. \qquad (2)$$

Доказательство. Имеем:

$$\int_0^{+\infty}\Phi(e^{-t},x)f(t)dt=\int_0^{+\infty} f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)e^{-nt}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\int_0^{+\infty}e^{-nt}f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)F(n)=S(x).$$

Что и требовалось доказать.

Пример. Используя формулу (2), с помощью подходящей производящей функции просуммировать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Решение. Для общего члена ряда имеем: $F(n)=\dfrac{1}{2n+1}, \varphi_n(x)=(-1)^n x^{2n+1}$, $f(t)=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$. Производящая функция будет равна

$$\Phi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x\cdot x^{2n}\cdot t^n=\frac{(-1)^n x}{1+x^2t}.$$

Тогда:

$$S(x)=\int_0^{+\infty}\Phi(e^{-t},x)f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2e^{-t}}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}dt=$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}t}}{1+(xe^{-1/2t})^2} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{d\left(xe^{-\frac{1}{2}t}\right)}{1+(xe^{-1/2t})^2} dt = -arctg\left(xe^{-\frac{1}{2}t}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} = arctgx.$$

Список цитированных источников

1. Власова, Е.А. Ряды: учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 612 с.

2. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука. Главная редакция математической литературы, 1981. – 368 с.

УДК 517.988

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАЗИОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Шпак Д.С.

УО «Гродненский государственный университет им. Я. Купалы», г. Гродно

Научный руководитель – Вувуникян Ю.М., д. ф.-м. н., доцент

Пусть оператор *A* является оператором Вольтерра-Винера с обобщенными импульсными характеристиками a_n, т.е.

$$Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n(a_n * x^{\otimes n}).$$

Оператор *B* – квазиобратный эволюционный оператор степени *r* к оператору *A*, т.е.

$$By = \sum_{m=1}^{r} S_m(b_m * y^{\otimes m}).$$

При этом при $C = B \circ A$ и $F = A \circ B$ имеем $C = I + \sum_{n=r+1}^{+\infty} C_n$ и $F = I + \sum_{n=r+1}^{+\infty} F_n$.

Для нахождения спектральных характеристик оператора *B* воспользуемся формулой

$$\tilde{b}_n(\lambda)\tilde{a}_1^{\otimes n}(\lambda) = -\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{n_1+n_2+...+n_m=n} \tilde{b}_m(\lambda_1+...+\lambda_{n_1}, \lambda_{n_1+1}+...+\lambda_{n_1+n_2}, ... \\ ..., \lambda_{n_1+...+n_{m-1}+1}+...+\lambda_n)\tilde{a}_{n_1}(\lambda_1,...,\lambda_n)...\tilde{a}_{n_m}(\lambda_{n_1+n_2+...+n_{m-1}+1},...,\lambda_n), \quad (1)$$

где $\tilde{a}_1(\lambda)$ – линейная часть нелинейного уравнения.

По формуле (1):

- при n = 1 спектральная характеристика $\tilde{b}_1(\lambda_1)$ равна $\tilde{b}_1(\lambda_1) = \dfrac{1}{\tilde{a}_1(\lambda_1)}$;
- при n = 2 спектральная характеристика $\tilde{b}_2(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, равна

$$\tilde{b}_2(\lambda_1,\lambda_2) = -\frac{\tilde{a}_2(\lambda_1,\lambda_2)\tilde{b}_1(\lambda_1)\tilde{b}_1(\lambda_2)}{\tilde{a}_1(\lambda_1+\lambda_2)} = -\frac{\tilde{a}_2(\lambda_1,\lambda_2)}{\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_1+\lambda_2)};$$