

вания Республики Беларусь, Брестский областной исполнительный комитет, Брестский научно-технологический парк, Брестский государственный технический университет; под научн. ред.: А. М. Омелянюка [и др.]. – Брест : БрГТУ, 2019. – С. 32–38.

4. Межгосударственный стандарт. Инновационная деятельность. Термины и определения: ГОСТ 31279-2004 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://belisa.org.by/ru/izd/stnewsmag/2\\_2011/art5\\_19\\_2011.html](http://belisa.org.by/ru/izd/stnewsmag/2_2011/art5_19_2011.html). – Дата доступа 30.10.2021.

5. Обзор наилучших мировых практик, международных стандартов и опыта создания передовых (модельных) национальных объектов индустриально-инновационной инфраструктуры государств-членов ЕАЭС / Евразийская экономическая комиссия. Департамент промышленной политики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.eurasiancommission.org/ru/act/promi\\_agroprom/dep\\_prom/SiteAssets/Nailu4shie%20praktiki%202018.pdf](http://www.eurasiancommission.org/ru/act/promi_agroprom/dep_prom/SiteAssets/Nailu4shie%20praktiki%202018.pdf). – Дата доступа 30.10.2021.

УДК 330.4

**Проневич А. Ф.**, к. ф.-м. н., доцент,

УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

г. Гродно, Республика Беларусь

**Хацкевич Г. А.**, д. э. н., профессор,

Институт бизнеса Белорусского государственного университета

г. Минск, Республика Беларусь

## **КРИТЕРИИ УЧЕТА АВТОНОМНОГО ЭКЗОГЕННОГО НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА В АГРЕГИРОВАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ**

### **Введение**

Начиная с начала XX века во всех экономически развитых странах мира особую роль при долгосрочной тенденции развития экономики начал играть научно-технический прогресс (НТП). Именно НТП на современном этапе в решающей степени определяет темпы и пропорции экономического роста в экономически развитых странах, поскольку возможности экстенсивного расширения производства в основном исчерпаны. Следуя [1, с. 214–215], под НТП будем понимать развитие техники и технологии производства, а также рост организации производства, повышение технического уровня кадров, изменение их профессиональной структуры и другие факторы; необходимая предпосылка расширенного воспроизводства. При этом экономико-математический анализ НТП наиболее полно проводится с помощью теории производственных функций (ПФ) (см., например, [2–4]).

Рассмотрим агрегированную динамическую ПФ

$$Y = F(K, L, t), \quad (1)$$

где  $Y$  – выпуск продукции,  $K$  – капитал,  $L$  – труд,  $t$  – параметр времени из

$\mathbf{R}_+ = [0; +\infty)$ , каждое значение которого выражает определенный уровень НТП, а неотрицательная функция  $F$  является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве  $D = G \times \mathbf{R}_+$ ,  $G \subset \mathbf{R}_+^2 = \{(K, L) : K \geq 0, L \geq 0\}$ .

Наиболее простым способом отражения НТП в рамках макроэкономических ПФ (1) является такой, при котором НТП задается экзогенно как функция времени, а его воздействие на экономику проявляется лишь в повышении эффективности производства, т. е. в возможности увеличения выпуска продукции без привлечения дополнительных ресурсов. Такое модельное построение называется *концепцией экзогенного НТП*.

В рамках задания ПФ (1) капитал и труд являются агрегированными и не различаются по «возрасту» (капитал – по времени ввода в строй, рабочая сила – по времени начала трудовой деятельности). Таким образом, при использовании агрегированной ПФ (1) предполагается, что НТП одинаково воздействует как на вновь вводимые, так и на уже функционирующие производственные ресурсы. Такой НТП называется *автономным*.

Обе гипотезы (экзогенность и автономность) являются существенным упрощением реальности, но для многих задач, особенно для анализа долгосрочных тенденций, они могут рассматриваться как приемлемые. Из реальных процессов, на которых обычно фокусируется изучение НТП, этим гипотезам в наибольшей степени удовлетворяют совершенствование организации и управления производством, рационализация хозяйственных связей, изменения в отраслевой структуре производства, в меньшей степени – повышение квалификации и образовательного уровня рабочей силы.

Автономность и экзогенность НТП – две различные и не связанные друг с другом концепции, которые отражают различные свойства НТП в рамках теории макроэкономических ПФ. Экзогенность означает, что НТП не связан с динамикой экономических показателей, а автономность – НТП одинаково воздействует на ресурсы разного возраста. Широкое распространение в экономическом анализе получили следующие представления ПФ (1) для учета автономного экзогенного НТП [5, с. 83 – 85; 6, с. 72–75]:

1°. *Продуктоувеличивающий* НТП

$$F(K, L, t) = A(t) \tilde{F}(K, L), \quad (2)$$

где коэффициент  $A$  называется *общей производительностью факторов* и характеризует эффективность использования основных факторов.

2°. *Капиталодобавляющий* (или *капиталосберегающий*) НТП

$$F(K, L, t) = \tilde{F}(A(t)K, L). \quad (3)$$

3°. *Трудодобавляющий* (или *трудоосберегающий*) НТП

$$F(K, L, t) = \tilde{F}(K, B(t)L). \quad (4)$$

4°. *Капитало- и трудодобавляющий* НТП

$$F(K, L, t) = \tilde{F}(A(t)K, B(t)L), \quad (5)$$

где строго возрастающие функции  $A(t)$  и  $B(t)$  такие, что  $A(0) = B(0) = 1$ , представляют собой индексы НТП по капиталу и труду, соответственно, а функция  $\tilde{F}$  является дважды непрерывно дифференцируемой на области  $G$ .

Данная работа продолжает исследования авторов [7–11] по изучению ПФ, учитывающих НТП. В статье установлены конструктивные аналитические кри-

терии того, что динамическая агрегированная ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП (2), капиталодобавляющий НТП (3), трудодобавляющий НТП (4), капитало- и трудодобавляющий НТП (5).

**Основные результаты** работы выражают следующие закономерности.

**Утверждение 1** (критерий продуктоувеличивающего НТП). *Агрегированная ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП тогда и только тогда, когда выполняются тождества<sup>3</sup>*

$$\partial_K \ln F(K, L, t) = \varphi(K, L), \quad \partial_L \ln F(K, L, t) = \psi(K, L), \quad (6)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  – некоторые непрерывно дифференцируемые на  $G' \subset G$  функции, которые не зависят от параметра  $t$  НТП.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть агрегированная ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Тогда ее можно представить в аналитической форме (2). Частные производные

$$\partial_K \ln F(K, L, t) = \frac{\partial_K F(K, L, t)}{F(K, L, t)} = \frac{\partial_K (A(t)\tilde{F}(K, L))}{A(t)\tilde{F}(K, L)} = \frac{\partial_K \tilde{F}(K, L)}{\tilde{F}(K, L)} = \partial_K \ln \tilde{F}(K, L),$$

$$\partial_L \ln F(K, L, t) = \frac{\partial_L F(K, L, t)}{F(K, L, t)} = \frac{\partial_L (A(t)\tilde{F}(K, L))}{A(t)\tilde{F}(K, L)} = \frac{\partial_L \tilde{F}(K, L)}{\tilde{F}(K, L)} = \partial_L \ln \tilde{F}(K, L),$$

а значит, имеет верна (6) при  $\varphi(K, L) = \partial_K \ln \tilde{F}(K, L)$ ,  $\psi(K, L) = \partial_L \ln \tilde{F}(K, L)$ .

**Достаточность.** Пусть ПФ (1) такова, что выполняются тождества (6). Тогда из первого уравнения системы в частных производных (6) находим, что

$\ln F(K, L, t) = \int \varphi(K, L) dK + C(L, t)$ , где  $C(L, t)$  – произвольная непрерывно дифференцируемая функция (постоянная интегрирования).

Подставляя это выражение во второе уравнение системы уравнений (6), с учетом формулы Лейбница дифференцирования под знаком интеграла, получаем  $\int \partial_L \varphi(K, L) dK + \partial_L C(L, t) = \psi(K, L)$ . Отсюда следует, что функция  $\partial_L C(L, t)$

не зависит от параметра  $t$  НТП, а является функцией только от одной переменной  $L$ , т. е.  $\partial_L C(L, t) = \tilde{C}(L)$ , а значит  $C(L, t) = \int \tilde{C}(L) dL + \tilde{A}(t)$ . Следовательно,

$$F(K, L, t) = \exp\left(\int \varphi(K, L) dK + \int \tilde{C}(L) dL + \tilde{A}(t)\right) = A(t)\tilde{F}(K, L), \quad \text{где } A(t) = \exp \tilde{A}(t),$$

$$\tilde{F}(K, L) = \exp\left(\int \varphi(K, L) dK + \int \tilde{C}(L) dL\right).$$

Таким образом, для ПФ (1) имеет место представление (2), а значит, ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП.

**Замечание 1.** Утверждение 1 можно сформулировать в следующей форме: *динамическая ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП, если и только если непрерывные темпы прироста по капиталу и по труду не зависят от параметра НТП.*

<sup>3</sup> Здесь и далее для удобства вычислений через  $\partial_t$ ,  $\partial_K$  и  $\partial_L$  обозначены частные производные первого порядка по переменным  $t$ ,  $K$  и  $L$ , соответственно.

**Утверждение 2** (критерий продуктоувеличивающего НТП). Для того чтобы ПФ (1) учитывала продуктоувеличивающий НТП, необходимо и достаточно выполнения тождества

$$\partial_t \ln F(K, L, t) = \theta(t), \quad (7)$$

где  $\theta$  – некоторая функция (темп прироста индекса НТП), которая зависит только от параметра  $t$  НТП.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть агрегированная ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Тогда ее можно представить в аналитической форме (2). Частная производная

$$\partial_t \ln F(K, L, t) = \frac{\partial_t F(K, L, t)}{F(K, L, t)} = \frac{\partial_t (A(t)\tilde{F}(K, L))}{A(t)\tilde{F}(K, L)} = \frac{A'(t)}{A(t)},$$

а значит, верно тождество (2) при  $\theta(t) = A'(t)/A(t)$ .

**Достаточность.** Пусть для ПФ (1) выполняется тождество (7). Тогда из (7) получаем, что  $\ln F(K, L, t) = \int \theta(t) dt + C(K, L)$ , где  $C(K, L)$  – произвольная непрерывно дифференцируемая функция (постоянная интегрирования). Значит, функция  $F(K, L, t) = \exp\left(\int \theta(t) dt + C(K, L)\right) = A(t)\tilde{F}(K, L)$ , где положено  $A(t) = \exp \int \theta(t) dt$  и  $\tilde{F}(K, L) = \exp C(K, L)$ .

Таким образом, для ПФ (1) имеет место представление (2), а значит, ПФ (1) учитывает продуктоувеличивающий НТП.

**Утверждение 3** (критерий капиталодобавляющего НТП). ПФ (1) учитывает капиталодобавляющий НТП, если и только если верно тождество

$$\frac{\partial_t F(K, L, t)}{K \cdot \partial_K F(K, L, t)} = \alpha(t), \quad (8)$$

где  $\alpha$  есть некоторая функция, зависящая только от параметра  $t$  НТП.

**Доказательство. Необходимость.** Если ПФ (1) учитывает капиталодобавляющий НТП, то, на основании представления (3), получаем

$$\frac{\partial_t F(K, L, t)}{K \cdot \partial_K F(K, L, t)} = \frac{\partial_t \tilde{F}(A(t)K, L)}{K \cdot \partial_K \tilde{F}(A(t)K, L)} = \frac{\partial_\xi \tilde{F}(\xi, L)|_{\xi=A(t)K} \partial_t (A(t)K)}{K \cdot \partial_\xi \tilde{F}(\xi, L)|_{\xi=A(t)K} \partial_K (A(t)K)} = \frac{A'(t)}{A(t)},$$

т.е. верно тождество (3) при  $\alpha(t) = A'(t)/A(t)$ .

**Достаточность.** Пусть ПФ (1) удовлетворяет тождеству (3). Тогда она будет решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\partial_t F - \alpha(t)K \cdot \partial_K F = 0 \quad (9)$$

с характеристической системой  $\frac{dK}{-\alpha(t)K} = \frac{dL}{0} = \frac{dt}{1}$ . Из дифференциального

уравнения  $\frac{dK}{-\alpha(t)K} = \frac{dt}{1}$ , разделяя переменные, находим первый интеграл в виде  $\ln K + \int \alpha(t) dt = \tilde{C}_1$  или  $K \exp \int \alpha(t) dt = C_1$ , где число  $C_1 = \exp \tilde{C}_1$ , а  $\tilde{C}_1$  – произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциального уравнения  $\frac{dL}{0} = \frac{dt}{1}$  находим первый интеграл  $L = C_2$ , где  $C_2$  – произвольная вещественная постоянная. Тогда общее решение уравнения (2.4)  $F(K, L, t) = \tilde{F}\left(K \exp \int \alpha(t) dt, L\right) = \tilde{F}(A(t)K, L)$ , где  $\tilde{F}$  – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция (учено, что ПФ (1) неотрицательна), а индекс НТП  $A(t) = \exp \int \alpha(t) dt$ .

Следовательно, на основании представления (3) получаем, что динамическая ПФ (1) учитывает капиталодобавляющий НТП.

**Замечание 2.** Тождество (8) можно записать в аналитической форме  $\partial_t \ln F(K, L, t) = \alpha(t)E_K(F)$ , где  $E_K(F)$  есть эластичность выпуска по капиталу, а утверждение 3 сформулировать в следующем виде: *ПФ (1) учитывает капиталодобавляющий НТП, если и только если непрерывный темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через функцию от параметра НТП с эластичностью выпуска по капиталу.*

Аналогично утверждению 3 доказывается

**Утверждение 4** (критерий трудодобавляющего НТП). *ПФ (1) учитывает трудодобавляющий НТП тогда и только тогда, когда имеет место следующее тождество  $\frac{\partial_t F(K, L, t)}{L \cdot \partial_L F(K, L, t)} = \beta(t)$ , где  $\beta$  есть некоторая функция, зависящая только от параметра  $t$  НТП.*

**Утверждение 5** (критерий капитало- и трудодобавляющего НТП). *Динамическая ПФ (1) учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП тогда и только тогда, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по капиталу и труду, т. е. верно тождество*

$$\partial_t \ln F(K, L, t) = \alpha(t)E_K(F) + \beta(t)E_L(F), \quad (10)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  есть некоторая функции, зависящая только от параметра  $t$  НТП, а  $E_K(F)$  и  $E_L(F)$  есть эластичности выпуска по капиталу и по труду.

**Доказательство. Необходимость.** Если ПФ (1) учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП, то, на основании представления (5), находим темп прироста по параметру НТП:

$$\begin{aligned} \partial_t \ln F &= \frac{\partial_t \tilde{F}(AK, BL)}{\tilde{F}(AK, BL)} = \frac{\partial_\xi \tilde{F}(\xi, \zeta) \cdot \partial_t(A(t)K) + \partial_\zeta \tilde{F}(\xi, \zeta) \cdot \partial_t(B(t)L)}{\tilde{F}(\xi, \zeta)} \Bigg|_{\substack{\xi=A(t)K \\ \zeta=B(t)L}} = \\ &= \frac{A'(t)}{A(t)} \frac{\xi}{\tilde{F}(\xi, \zeta)} \partial_\xi \tilde{F}(\xi, \zeta) \Bigg|_{\substack{\xi=A(t)K \\ \zeta=B(t)L}} + \frac{B'(t)}{B(t)} \frac{\zeta}{\tilde{F}(\xi, \zeta)} \partial_\zeta \tilde{F}(\xi, \zeta) \Bigg|_{\substack{\xi=A(t)K \\ \zeta=B(t)L}} = \frac{A'}{A} E_K + \frac{B'}{B} E_L, \end{aligned}$$

т. е. имеет место тождество (10) при  $\alpha(t) = A'(t)/A(t)$ ,  $\beta(t) = B'(t)/B(t)$ .

**Достаточность.** Пусть ПФ (1) удовлетворяет тождеству (10). Тогда она будет решением дифференциального уравнения в частных производных

$$\partial_t F - \alpha(t)K \cdot \partial_K F - \beta(t)L \cdot \partial_L F = 0 \quad (11)$$

с характеристической системой  $\frac{dK}{-\alpha(t)K} = \frac{dL}{-\beta(t)L} = \frac{dt}{1}$ . Из уравнения  $\frac{dK}{-\alpha(t)K} = \frac{dt}{1}$ , разделяя переменные, находим первый интеграл в виде  $\ln K + \int \alpha(t)dt = \tilde{C}_1$  или  $K \exp \int \alpha(t)dt = C_1$ , где число  $C_1 = \exp \tilde{C}_1$ , а  $\tilde{C}_1$  – произвольная вещественная постоянная. Из уравнения  $\frac{dL}{-\beta(t)L} = \frac{dt}{1}$ , разделяя переменные, находим первый интеграл в виде  $\ln L + \int \beta(t)dt = \tilde{C}_2$  или  $L \exp \int \beta(t)dt = C_2$ , где число  $C_2 = \exp \tilde{C}_2$ , а  $\tilde{C}_2$  – произвольная вещественная постоянная. Тогда общее решение уравнения (11) имеет аналитический вид  $F(K, L, t) = \tilde{F}\left(K \exp \int \alpha(t)dt, L \exp \int \beta(t)dt\right) = \tilde{F}(A(t)K, B(t)L)$ , где  $\tilde{F}$  – произвольная неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция (учено, что ПФ (1) неотрицательна), а  $A(t) = \exp \int \alpha(t)dt$  и  $B(t) = \exp \int \beta(t)dt$ .

Следовательно, на основании представления (5) получаем, что динамическая ПФ (1) учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП. □

В случае, когда индексы НТП по капиталу и по труду равны, т. е.  $A(t) = B(t)$ , на основании утверждения 5 получаем

**Утверждение 6.** *ПФ (1) учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП с равными индексами НТП по капиталу и труду, если и только если имеет место тождество  $\frac{\partial_t F(K, L, t)}{K \cdot \partial_K F(K, L, t) + L \cdot \partial_L F(K, L, t)} = \alpha(t)$ , где  $\alpha$  есть некоторая функция, зависящая только от параметра  $t$  НТП.*

### Литература

1. Лопатников, Л. И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки / Л. И. Лопатников. – М. : Дело, 2003. – 520 с.
2. Плакунов, М. К. Производственные функции в экономическом анализе / М. К. Плакунов, Р. Л. Раяцкас. – Вильнюс : Минтис, 1984. – 308 с.
3. Клейнер, Г. Б. Производственные функции: теория, методы, применение / Г. Б. Клейнер. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
4. Паппэ, Я. Ш. Малоразмерные макроэкономические модели экономического роста и научно-технического прогресса / Я. Ш. Паппэ. – М. : Наука, 1992. – 187 с.
5. Иванилов, Ю. П. Математические модели в экономике / Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов. – М. : Наука, 1979. – 304 с.
6. Курзенев, В. Экономический рост / В. Курзенев, В. Матвеевко. – СПб. : Питер, 2018. – 608 с.
7. Проневич, А. Ф. Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Белорусский экономический журнал. – 2020. – № 3. – С. 87–105.
8. Проневич, А. Ф. Продуктоувеличивающий научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу / А. Ф. Проневич // Вестник ЦЭМИ РАН. – 2020. – № 3. – С. 4–27.

9. Pranevich, A.F. Generalized neutral technological progress by Hicks, Harrod, and Solow // A.F. Pranevich // Business. Innovations. Economy. – 2020. – Vol. 4. – P. 193–201.

10. Хацкевич, Г.А. Классификация Сато – Бекмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение / Г. А. Хацкевич, А. Ф. Проневич // Журнал Белорусского государственного университета. Экономика. – 2020. – № 2. – С. 4–17.

11. Проневич, А. Ф. Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Вестник института экономики НАН Беларуси. – 2021. – Вып. 2. – С. 105–120.

УДК 338.1

**Протасеня С. И.**, к. э. н., доцент,  
**Попуцевич Ю. В.**, студент

УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»,  
г. Гродно, Республика Беларусь

### **«ЗЕЛЕНАЯ» ЭКОНОМИКА В РЕСПУБЛИКЕ БЕЛАРУСЬ: ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ**

Научно-технический прогресс, достигнутый за последние три десятилетия, значительно повысил уровень жизни людей, однако сделано это было ценой ухудшения качества природной среды планеты. Продолжение экономического развития без значительного изменения нынешней экономической модели может привести к росту экологических угроз и сделает невозможным устойчивое развитие. С целью предотвращения грядущих проблем, экономисты, социологи, политики и представители естественных наук начали поиск новых путей развития, которые бы позволили восстановить природную среду и одновременно обеспечивали достойный уровень жизни населения. Одним из результатов такого поиска стала концепция «зеленой» экономики.

Как следует из определения ЮНЕП (программа ООН по окружающей среде), «зеленая экономика – это основанная на низкоуглеродном развитии ресурсоэффективная экономика, которая приводит к улучшению благосостояния людей и социальной справедливости, при этом значительно сокращая экологические риски и предотвращая утрату биоразнообразия». Благодаря поддержке международных организаций и национальных правительств концепция приобрела значительную популярность [1, с. 16].

Развитие «зеленой» экономики является актуальным направлением политики белорусского государства. Республика Беларусь обладает богатым природным потенциалом и человеческими ресурсами, на высоком уровне развития находятся промышленность и сельское хозяйство, которые являются основой экономики, но при этом оставляют значительный экологический след. Снижение вредного воздействия на окружающую среду, улучшение её состояния, а также устойчивое управление природными ресурсами входят в число основных долгосрочных приоритетов национальной политики.