треугольным законам нагрузок, можно выполнять расчёты рамно-стержневых систем методом конечных элементов по принципам, изложенным в [3], но уже с учётом упруго-податливого присоединения КЭ к узлам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие. – Брест: БрГТУ, 2004. – 172 с.
2. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
3. Калита, Р.О. Алгоритм расчета плоских стержневых систем методом конечных элементов / Р.О. Калита // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2012.

УДК 681.3:519.3
Калита Р.О.
Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В последние годы одним из основных и наиболее мощных инструментов численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений при действии различных нагрузок и воздействий является метод конечных элементов (МКЭ). Это объясняется тем, что МКЭ позволяет решать задачи с очень бо́льшим числом неизвестных, возможностью высокой степени автоматизации всех процессов при использовании этого метода, особенно при использовании современной компьютерной техники и при наличии компьютерных программ, реализующих этот метод. При этом метод конечных элементов отличают достаточная простота, физическая наглядность, высокая логичность и универсальность [1, 2].

Рассматриваются плоские стержневые системы – рамы, фермы балки, находящиеся под действием статических нагрузок. Такие системы могут быть представлены в виде совокупности прямолинейных стержней, соединенных между собой в жестких либо шарнирных узлах, которые опираются с помощью опор на основание. Для расчёта принят метод конечных элементов в форме метода перемещений, в которой в качестве основных неизвестных принимаются перемещения узлов соединения конечных элементов между собой.

Разрешающие уравнения метода конечных элементов записываются в виде [1]:

$$[E_1]\cdot\{-[K]\cdot\{\Delta\}+\{P\}\}=0,$$

где $\{P\}$ – вектор действующих в узлах системы внешних нагрузок; $\{\Delta\}$ – вектор перемещений узлов системы; $[K]$ – матрица жесткости системы, имеющая вид:

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}.$$

Элемент матрицы жесткости k_{mj} представляет собой реакцию в m-ом направлении (величину реакции r_m) от смещения узла в j-ом направлении на единичную величину.

Смещение же узла в некотором направлении вызовет деформации всех примыкающих к этому узлу стержней, и, следовательно, величина возникающей в этом узле реакции должна включать реакции от всех этих стержней. Поэтому коэффициент k_{mj} вычисляют, задаваясь смещением $\Delta j = 1$ и суммируя реакции от всех элементов, примыкающих к узлу i_m, к которому относится m-е направление реакции (и перемещения)

$$k_{mj} = \sum_{s \in i_m} r_{mj}^s .$$

Здесь i_m – номер узла, к которому относится m-ое направление реакции. Величины k_{mj} и r_{mj}^s определяются в общей системе координат.

$[E_1]$ – диагональная матица вида:

$$[E_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Число элементов матрицы по диагонали равно числу элементов вектора $\{\Delta\}$, причем каждому диагональному элементу матрицы $[E_1]$ соответствует узел и направление его перемещения в том же порядке, как и в матрице $\{\Delta\}$. Диагональные элементы матрицы $[E_1]$ могут принимать два значения – 0 либо 1. Равными нулю принимаются элементы, которые соответствуют перемещениям узлов в направлениях, в которых эти перемещения явно отсутствуют (вследствие наличия опорных связей).

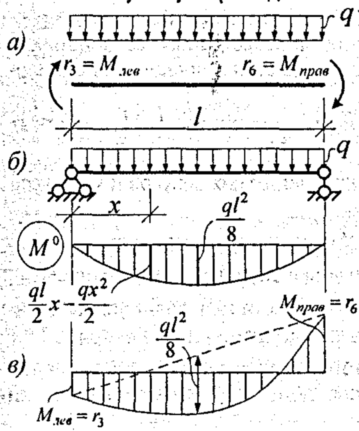

Рисунок 1

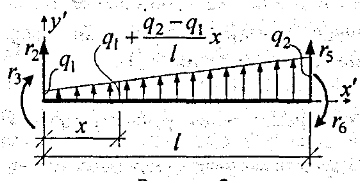

Рисунок 2

Найденные по концам КЭ усилия прикладываем к соответствующим стержням с учетом их знаков и определяем от их действия по обычным правилам строительной механики растянутые волокна (для изгиба) и знаки поперечных и продольных сил в крайних сечениях КЭ.

Зная величины усилий по концам конечных элементов и используя известные закономерности изменений внутренних сил, несложно построить эпюры этих усилий в каждом из конечных элементов и соответственно во всей системе в целом. При этом для стержней, на которые действует распределенная нагрузка (рис. 1а), при построении эпюры изгибающих моментов (рис. 1в) необходимо к линейной эпюре, полученной соединением прямой линией ординат по концам стержня, добавить балочную эпюру M^0 (рис. 1б).

Выражения для перемещений несложно получить на основе известных дифференциальных зависимостей. Например, для конечного элемента (стержня), на который действует нагрузка, распределенная по трапециидальному закону (рисунок 2), для поперечных перемещений будем иметь

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EJ}=\frac{1}{EJ}\left(r_3+r_2x+\frac{q_1}{2}x^2+\frac{q_2-q_1}{6l}x^3\right),$$

проинтегрировав это выражение два раза и учитывая граничные условия (при $x=0$ – $y=\delta_2$, $\frac{dy}{dx}=-\delta_3$), получим

$$u_2=y=\delta_2-\delta_3x+\frac{1}{EJ}\left(r_3\frac{x^2}{2}+r_2\frac{x^3}{6}+\frac{q_1x^4}{24}+\frac{q_2-q_1}{120l}x^5\right);\qquad u_3=\varphi=\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Отметим, что выражения (1) представляют собой перемещения сечений КЭ в местной системе координат. Для перевода их в общую систему координат необходимо выполнить соответствующие преобразования.

На основе изложенного в предыдущих разделах можно сформулировать следующий алгоритм расчета стержневых систем методом конечных элементов в форме метода перемещений:

1. Определение расчетной дискретной модели заданной стержневой системы (разделение ее на конечные элементы, назначение узлов) и описание ее структуры (нумерация узлов и стержней, определение их числа).

2. Выбор общей и местных систем координат и определение координат узлов в общей системе координат.

3. Составление матрицы перемещений узлов расчетной дискретной модели заданной системы $\{\Delta\}$.

4. Идентификация конечных элементов (определение их типов, длин l_s, жесткостей EA_s и EJ_s и установление соответствия между номерами стержней и номерами начального и конечного узлов для этих стержней).

5. Преобразование внешних нагрузок (преобразование пролетных равномерно распределенных нагрузок на стержни к узловым нагрузкам, преобразование сосредоточенных узловых сил из местных систем в общую систему координат, определение суммарных узловых сил в каждом узле дискретной модели).

6. Построение матриц жесткости конечных стержневых элементов $[K'_s]$ в местных системах координат.

7. Определение для каждого конечного элемента направляющих синусов и косинусов ($\sin\alpha_s$ и $\cos\alpha_s$) и составление матриц преобразования $T_{\alpha s}$.

8. Получение матриц жесткости элементов $[K_s]$ в общей системе координат.

9. Формирование матрицы жесткости $[K]$ всей системы в общей системе координат.

10. Получение системы разрешающих уравнений путем учета граничных условий (наличия опорных связей); при этом может быть использована диагональная матрица $[E_1]$ либо простое вычеркивание строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям.

11. Решение системы разрешающих уравнений и определение узловых перемещений $\{\Delta\}$ расчетной модели.

12. Определение узловых перемещений $\{\delta'_s\}$ и усилий $\{r'_s\}$ для конечных элементов.

13. Определение усилий и перемещений в конечных элементах, построение эпюр внутренних сил в системе, определение деформированного вида системы (1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие. – Брест: БрГТУ, 2004. – 172 с.

2. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.