

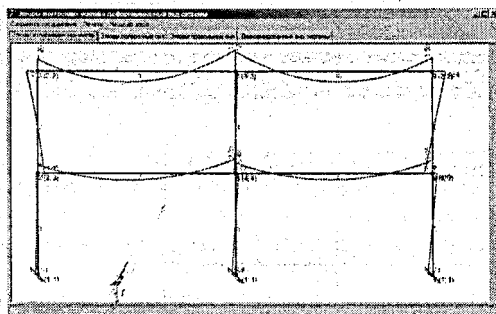


Рисунок 5 – Результаты расчета. Эпюра М

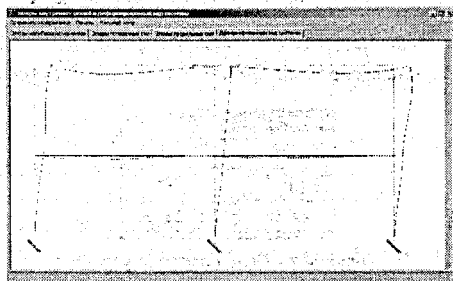


Рисунок 6 – Результаты расчета. Схема деформаций системы

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие. – Брест: БрГТУ, 2004. – 172 с.
2. Калита, Р.О. Алгоритм расчета плоских стержневых систем методом конечных элементов // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2012.
3. Калита, Р.О. Учет упругой податливости в узловых соединениях при расчете рам методом конечных элементов // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2012.
4. Фаронов, В.В. Delphi программирование на языке высокого уровня: учебник для вузов. – Санкт-Петербург: Питер, 2010. – 640 с.
5. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.

УДК 681.3:519.3

Калита Р.О.

Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.

УЧЕТ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ В УЗЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЯХ ПРИ РАСЧЕТЕ РАМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Соединение элементов в узлах и опорах на расчётных схемах обычно принимается жёстким либо шарнирным. Однако в реальных сооружениях соединение (опирание) конструктивных элементов не всегда отвечает этим двум вариантам, часто в узлах и опорах присутствуют упруго-податливые перемещения между соединёнными элементами. В таких случаях представляет большой интерес анализ и оценка влияния такого соединения элементов на распределение и величины усилий в сооружениях [1, 2].

Для учёта в расчётах сооружений упругой податливости в узловых соединениях получены матрицы жёсткости КЭ для плоских стержневых систем, учитывающие упруго-податливое присоединение КЭ к узлам по всем направлениям сопряжения, т.е. во всех угловых и линейных связях, с помощью которых КЭ присоединяются к узлам – горизонтальных (c_1, c_4), вертикальных (c_2, c_5) и угловых (c_3, c_6) (рисунок 1), где c_i – упругая податливость связи, равная величине ее смещения (линейного либо углового) при приложении к ней единичного усилия (упругая податливость связи обратна жесткости связи).

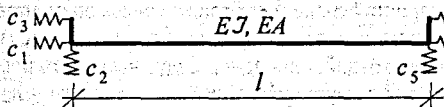


Рисунок 1

Матрица жёсткости конечного элемента типа 1 (рисунок 1), упруго-податливым присоединенного по концам к узлам, в местной системе координат имеет вид

$$[K'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} k_1 & -\frac{6EJ}{l^2} k_2 & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} k_1 & -\frac{6EJ}{l^2} k_2 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} k_2 & \frac{3EJ}{l} (k_2 + k_3) & 0 & \frac{6EJ}{l^2} k_2 & \frac{3EJ}{l} (k_2 - k_3) \\ -\frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 & \frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} k_1 & \frac{6EJ}{l^2} k_2 & 0 & \frac{12EJ}{l^3} k_1 & \frac{6EJ}{l^2} k_2 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} k_2 & \frac{3EJ}{l} (k_2 - k_3) & 0 & \frac{6EJ}{l^2} k_2 & \frac{3EJ}{l} (k_2 + k_3) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где обозначено

$$k_N = \frac{1}{1 + (c_1 + c_4) \frac{EA}{l}}; \quad k_1 = \frac{t_1}{t_2 t_4 - 3t_3^2}; \quad k_2 = \frac{t_3 + t_4}{t_2 t_4 - 3t_3^2}; \quad k_3 = \frac{1}{3t_4} + \frac{t_3}{t_4} k_2; \quad k_4 = \frac{t_4 - t_3}{t_2 t_4 - 3t_3^2}; \quad k_5 = \frac{1}{3t_4} + \frac{t_3}{t_4} k_4,$$

$$t_2 = 1 + (c_2 + c_5) \frac{12EJ}{l^3} + (c_3 + c_6) \frac{3EJ}{l}; \quad t_3 = (c_6 - c_3) \frac{EJ}{l}; \quad t_4 = 1 + (c_3 + c_6) \frac{EJ}{l}.$$

Матрица жёсткости конечного элемента типа 2 с упруго-податливым присоединением его концов к узлам (рис. 2) имеет вид



Рисунок 2

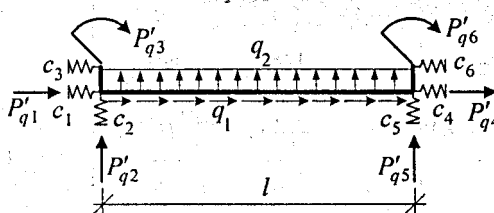
$$[K'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} f_2 & -\frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} f_2 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^2} f_2 & \frac{3EJ}{l} f_2 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 \\ -\frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} f_2 & \frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 & \frac{3EJ}{l^3} f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $f_1 = k_N = \frac{1}{1 + (c_1 + c_4) \frac{EA}{l}}$; $f_2 = \frac{1}{1 + \frac{3EJ}{l^3} (c_2 + c_5) + \frac{3EJ}{l} c_3}$.

Аналогично получается матрица жёсткости КЭ типа 3.

Как уже указывалось, при действии на КЭ распределённых нагрузок их необходимо преобразовывать к узловым. Это преобразование для конечных элементов, упруго-податливо присоединяемых к узлам, так же не будет совпадать со случаями жёсткого соединения КЭ в узлах и может быть получено на основе расчётов конечных элементов методом сил по аналогии с тем, как это сделано и при получении матриц жёсткости, только с учётом того, что в качестве внешних воздействий здесь будут выступать распределённые нагрузки. Ниже приведены схемы нагружений таких КЭ и величины узловых нагрузок для них:

1) нагружение КЭ типа 1 равномерно распределёнными нагрузками



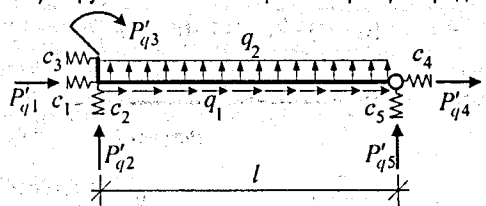
$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ \frac{q_1 l}{2} (1 - f_{q2}) \\ -\frac{q_2 l^2}{12} (1.5 - 3f_{q2} - f_{q3}) \\ \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ \frac{q_2 l}{2} (1 + f_{q2}) \\ \frac{q_2 l^2}{12} (1.5 + 3f_{q2} - f_{q3}) \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

Здесь

$$f_{q2} = \frac{3 t_{q2} t_4 - t_{q3} t_3}{6 t_3^2 - 2 t_3 t_4}; \quad f_{q3} = 3 f_{q2} \frac{t_3}{t_4} + \frac{t_{q3}}{2 t_4},$$

где $t_{q2} = \frac{EJ}{l} (c_6 - c_3) + \frac{8EJ}{l^3} (c_5 - c_2)$; $t_{q3} = 1 + \frac{3EJ}{l} (c_3 + c_6)$; t_2, t_3, t_4 — см. выше;

2) нагружение КЭ типа 2 равномерно распределёнными нагрузками



$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ q_2 l \left(1 - \frac{3}{8} f_{q2}\right) \\ -\frac{q_2 l^2}{8} (4 - 3f_{q2}) \\ \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ \frac{3 q_2 l}{8} f_{q2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $f_{q1} = \left(1 + c_1 \frac{2EA}{l}\right) f_1$; $f_{q2} = \left(1 + \frac{8EJ}{l^3} c_2 + \frac{4EJ}{l} c_3\right) f_2$;

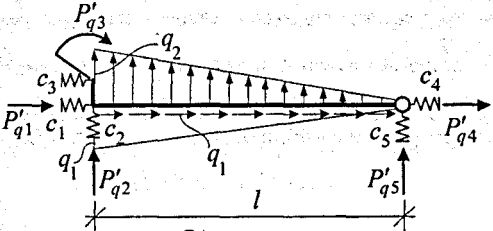
f_1 и f_2 — см. (5);

3) для КЭ типа 3 с упруго-податливым присоединением концов стержня к узлам матрицу $\{P'_q\}$ легко получить из матрицы $\{P'_q\}$ для КЭ типа 2, поэтому здесь приводить её не будем;

4) при нагружении КЭ типа 4 с упруго-податливым присоединением его концов к узлам равномерно распределёнными нагрузками q_1 и q_2 , представленными выше, силы P'_{q1} и

P'_{q4} будут такими же, как во всех вышеприведённых матрицах $\{P'_q\}$, а силы $P'_{q2} = P'_{q5} = \frac{q_2 l}{2}$ — как в обычном КЭ типа 4;

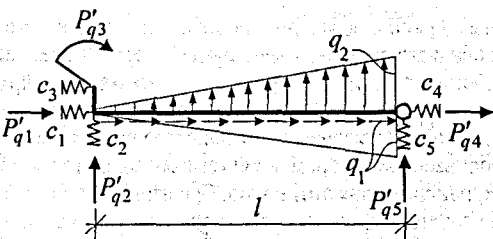
5) нагружение КЭ типа 2 треугольной убывающей нагрузкой



$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6}(3-s_{q1}) \\ \frac{q_2 l}{10}(5-f_2 s_{q2}) \\ -\frac{q_2 l^2}{30}(5-3f_2 s_{q2}) \\ \frac{q_1 l}{6}s_{q1} \\ \frac{q_2 l}{10}f_2 s_{q2} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

где $s_{q1} = \frac{1+3\frac{EA}{l}c_1}{1+(c_1+c_4)\frac{EA}{l}}$; $s_{q2} = 1+c_2\frac{15EJ}{l^3}+c_3\frac{5EJ}{l}$;

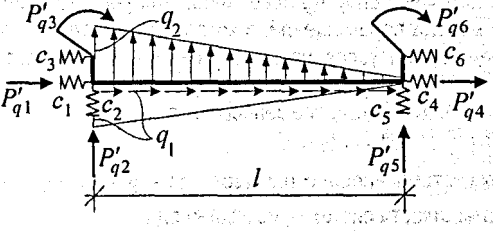
6) нагружение КЭ типа 2 треугольной возрастающей нагрузкой



$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6}s_{q1} \\ \frac{q_2 l}{40}(20-11f_2 s_{q3}) \\ -\frac{q_2 l^2}{120}(40-33f_2 s_{q3}) \\ \frac{q_1 l}{6}(3-s_{q1}) \\ \frac{11q_2 l}{40}f_2 s_{q3} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где $s_{q3} = 1+\frac{60EJ}{11l^3}c_2+\frac{40EJ}{11l}c_3$; s_{q1} — см. (5); f_2 — см. (2);

7) нагружение КЭ типа 1 треугольной убывающей нагрузкой



$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6}(3-s_{q1}) \\ \frac{q_2 l}{20}(10-u_{q1}) \\ -\frac{q_2 l^2}{120}(20+u_{q2}-6u_{q1}) \\ \frac{q_1 l}{6}s_{q1} \\ \frac{q_2 l}{20}u_{q1} \\ \frac{q_2 l^2}{120}u_{q2} \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

Здесь $u_{q1} = \frac{8s_{q2}u_3-5s_{q3}u_2}{4u_1u_3-3u_2^2}$; $u_{q2} = \frac{3u_2u_{q1}-5s_{q3}}{u_3}$,

где $u_1 = \frac{1}{f_2}$; f_2 — см. (2); $u_2 = 1+\frac{2EJ}{l}c_3$; $u_3 = 1+(c_3+c_6)\frac{EJ}{l}$; $s_{q2} = 1+c_2\frac{15EJ}{l^3}$; $s_{q3} = 1+\frac{4EJ}{l}c_3$.

Используя представленные в этом разделе матрицы жёсткости конечных элементов, а также матрицы сосредоточенных узловых усилий от распределённых равномерно и по

треугольным законам нагрузок, можно выполнять расчёты рамно-стержневых систем методом конечных элементов по принципам, изложенным в [3], но уже с учётом упруго-податливого присоединения КЭ к узлам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие. – Брест: БрГТУ, 2004. – 172 с.
2. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
3. Калита, Р.О. Алгоритм расчета плоских стержневых систем методом конечных элементов / Р.О. Калита // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2012.

УДК 681.3:519.3

Калита Р.О.

Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В последние годы одним из основных и наиболее мощных инструментов численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений при действии различных нагрузок и воздействий является метод конечных элементов (МКЭ). Это объясняется тем, что МКЭ позволяет решать задачи с очень большим числом неизвестных, возможностью высокой степени автоматизации всех процессов при использовании этого метода, особенно при использовании современной компьютерной техники и при наличии компьютерных программ, реализующих этот метод. При этом метод конечных элементов отличаются достаточная простота, физическая наглядность, высокая логичность и универсальность [1, 2].

Рассматриваются плоские стержневые системы – рамы, фермы балки, находящиеся под действием статических нагрузок. Такие системы могут быть представлены в виде совокупности прямолинейных стержней, соединенных между собой в жестких либо шарнирных узлах, которые опираются с помощью опор на основание. Для расчёта принят метод конечных элементов в форме метода перемещений, в которой в качестве основных неизвестных принимаются перемещения узлов соединения конечных элементов между собой.

Разрешающие уравнения метода конечных элементов записываются в виде [1]:

$$[E] \cdot \{ -[K] \cdot \{\Delta\} + \{P\} \} = 0,$$

где $\{P\}$ – вектор действующих в узлах системы внешних нагрузок; $\{\Delta\}$ – вектор перемещений узлов системы; $[K]$ – матрица жесткости системы, имеющая вид:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}.$$

Элемент матрицы жесткости k_{mj} представляет собой реакцию в m -ом направлении (величину реакции r_m) от смещения узла в j -ом направлении на единичную величину.