

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Запругин, Г.Н. Исследование прочности и деформативности контакта при срезе в сборно-монолитных конструкциях // Сб. научн. тр. Челябинск. политехн. ин-та. – Челябинск, 1974. – №149. – С. 162-172.
2. Корейба, С.А. Определение прочностных характеристик технологических швов между старым и новым бетонами / С.А. Корейба, Ю.К. Люненко, Н.Г. Негура, А.П. Скрипкин // Совершенствование строительных конструкций и строительного производства. – Кишинев, 1984. – С. 28-33.
3. Городецкий, Б.Л. Экспериментально-теоретические исследования прочности контакта в сборно-монолитных предварительно напряженных железобетонных конструкциях: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 – Свердловск: 1969. – 184 с.
4. Мирсаяпов, Ил.Т. Исследование выносливости сборно-монолитных железобетонных изгибаемых элементов: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. – Москва 1988. – 243 с.
5. Харченко, А.В. Исследование прочности сборно-монолитных изгибаемых конструкций по нормальным сечениям: Автор. дис. ... канд. техн. наук 05.23.01 – Киев, 1978. – 19 с.

УДК 624.04:519.3

Веренич А.А.

Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.

РАСЧЁТ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛИТ, ОПЁРТЫХ ПО КОНТУРУ, НА ВЕРТИКАЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ

Уравнение Софи Жермен–Лагранжа[1, 2]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \tag{1}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, h – толщина плиты, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, $q(x, y)$ – функция заданной нагрузки, $w(x, y)$ – функция прогибов точек плиты, в разностной форме с учетом выражений, представленных в [3], для i -й точки принимает вид:

$$20w_i - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + 2(w_e + w_f + w_g + w_h) + (w_k + w_l + w_m + w_n) = \frac{q\lambda^4}{D}, \tag{2}$$

где $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n$ – узлы сетки; λ – шаг сетки (рисунок 1).

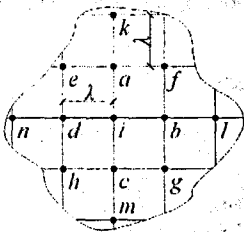


Рисунок 1

Изгибающие моменты в сечениях плиты M_x и M_y определяются выражениями:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \tag{3}$$

которые в разностной форме записываются в виде:

$$M_{x,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_f + w_c) - (w_b + w_d)], \tag{4}$$

$$M_{y,i} = \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu)w_i - \nu(w_b + w_d) - (w_a + w_c)]. \tag{5}$$

Плита является двумерной системой, поэтому для удобства составления разностных выражений вида (2, 4, 5) их удобно представить в матрично-операторной форме:

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} \cdot w_i - \frac{q\lambda^4}{D} = 0 \tag{6}$$

$$M_{x,i} = \frac{D}{\lambda^2} \cdot \begin{bmatrix} -\nu & & \\ -1 & 2+2\nu & -1 \\ & & -\nu \end{bmatrix} \cdot w_i, \quad M_{y,i} = \frac{D}{\lambda^2} \cdot \begin{bmatrix} & & -1 \\ -\nu & 2+2\nu & -\nu \\ & & -1 \end{bmatrix} \cdot w_i \quad (7)$$

где каждая клеточка оператора отвечает соответствующему узлу сетки (рисунок 1) по месту её положения относительно средней клетки (i -й узел), а её содержание указывает, на какой коэффициент в разностном уравнении следует умножить перемещение w соответствующего узла.

Рассмотрим, например, прямоугольную плиту, которую разобьём сеткой на 14×12 частей с одинаковым шагом в обоих направлениях (рисунок 2). Рассматриваемые здесь и далее плиты симметричны относительно обеих осей x и y , поэтому расчёт будем вести для четверти плиты.

Для каждой точки сетки, в которой имеется неизвестное перемещение w , записывается уравнение вида (6). При записи этих уравнений приходится использовать контурные узлы и один ряд внеконтурных узлов (рисунок 2).

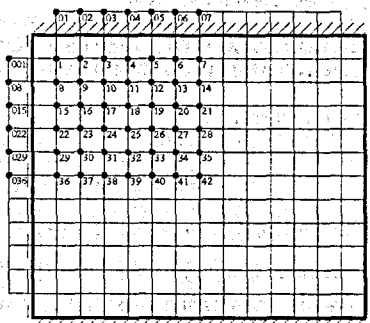


Рисунок 2

Значения функции w в этих узлах, с использованием граничных условий, выражаются через её значения во внутренних узлах и в конечных разностях для защемленного края имеют вид [3]:

$$a) w_{\text{конт.}} = 0; \quad б) w_{\text{защемл.}} = w_{\text{внутр.}} \quad (8)$$

Для шарнирноопёртого края соответственно получим:

$$a) w_{\text{конт.}} = 0; \quad б) w_{\text{защемл.}} = -w_{\text{внутр.}} \quad (9)$$

Тогда для плиты, представленной на рис. 2, будем иметь:

$$w_{01} = w_1, w_{02} = w_2, w_{03} = w_3 \text{ и } w_{001} = -w_1, w_{08} = -w_8, w_{015} = -w_{15} \text{ и т. д.}$$

Рассмотрим железобетонную плиту перекрытия размером $l = 7 \text{ м}$, $b = 6 \text{ м}$, $b = 0,22 \text{ м}$, жестко защемленную с двух противоположных сторон и шарнирно опертую с двух других сторон, нагруженную по всей плоскости равномерно распределенной нагрузкой. Приведенные характеристики материала плиты примем равными: $E = 1 \cdot 10^9 \text{ кПа}$, $\nu = 0,2$.

Плиту разобьем квадратной сеткой с шагом $\lambda = 0,5 \text{ м}$ – нумерация узлов представлена на рисунке 2. Плита имеет две оси симметрии x и y , поэтому расчёт можно выполнить для четверти плиты. Для каждого узла сетки составляем разностные уравнения вида (2) с учётом граничных условий (9), (10). Решая систему уравнений, составленную в

конечно-разностной форме, в среде компьютерной математики MathCAD [4], получим величины перемещений, показанные в табл. 1. На основании величин прогибов на рисунке 6 изображён деформированный вид плиты. По полученным результатам для прогибов по выражениям (7) вычислим изгибающие моменты в узловых сечениях (табл. 1) и построим эпюры изгибающих моментов M_x и M_y (рисунки 3, 4).

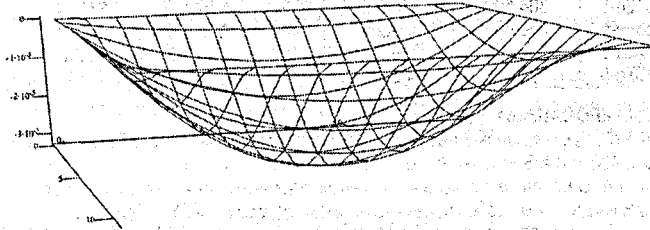


Рисунок 3 – Деформированный вид плиты

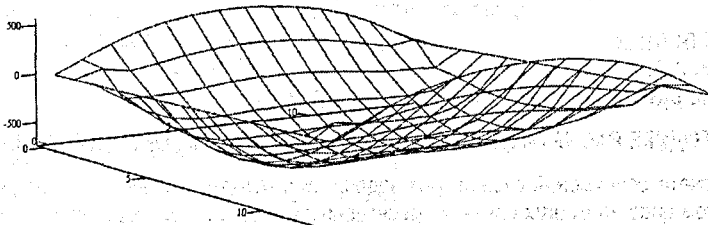


Рисунок 4 – Эпюра изгибающего момента M_x

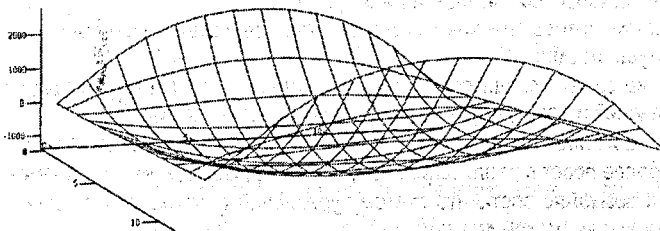


Рисунок 5 – Эпюра изгибающего момента M_y

Таблица 1 – Перемещения и изгибающие моменты в плите

Узел	w_i , м	M_{xi} , Н·м	M_{yi} , Н·м	Узел	w_i , м	M_{xi} , Н·м	M_{yi} , Н·м
1	3.797e-7	-114.422	-135.281	22	2.171e-6	-666.266	-71.745
2	1.006e-6	-67.316	-301.831	23	6.178e-6	-92.709	171.62
3	1.651e-6	-67.723	-504.687	24	1.054e-5	245.018	379.86
4	2.203e-6	-88.368	-696.561	25	1.443e-5	434.187	542.686
5	2.611e-6	-112.539	-848.307	26	1.74e-5	532.802	657.885
6	2.859e-6	-130.334	-944.181	27	1.925e-5	578.124	726.163
7	2.941e-6	-136.763	-976.837	28	1.987e-5	590.997	748.744
8	1.076e-6	-213.148	-14.592	29	2.491e-6	-787.691	-83.112
9	2.824e-6	-44.288	-17.925	30	7.154e-6	-120.843	202.911
10	4.686e-6	72.782	-43.376	31	1.227e-5	281.662	458.009
11	6.318e-6	126.965	-78.776	32	1.685e-5	512.197	664.473
12	7.549e-6	146.205	-113.181	33	2.037e-5	635.457	814.246

Продолжение таблицы 1

13	8.304e-6	150.435	-137.569	34	2.255e-5	693.646	904.484
14	8.557e-6	150.686	-146.323	35	2.329e-5	710.494	934.572
15	1.678e-6	-477.007	-56.928	36	2.601e-6	-829.532	-87.697
16	4.667e-6	-59.382	106.088	37	7.489e-6	-131.478	211.971
17	7.884e-6	177.618	226.444	38	1.287e-5	293.206	481.861
18	1.073e-5	304.609	310.643	39	1.769e-5	538.173	702.26
19	1.289e-5	366.632	365.257	40	2.14e-5	670.11	863.215
20	1.422e-5	392.953	395.638	41	2.37e-5	732.85	960.613
21	1.467e-5	399.974	405.347	42	2.448e-5	751.106	993.158

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Караманский, Т.Д. Численные методы строительной механики / Пер с болг.; под ред. Г.К. Клейна. – М.: Стройиздат, 1981. – 436 с.
2. Веренич, А.А. О методике расчета изгибаемых плит методом конечных разностей / А.А. Веренич // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2012.
3. Макаров, Е.Г. Инженерные расчеты в MathCad: учебный курс. – СПб.: Питер, 2005. – 448 с.

УДК 624.04:519.3

Веренич А.А.

Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.

О МЕТОДИКЕ РАСЧЁТА ИЗГИБАЕМЫХ ПЛИТ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В расчёте сооружений существуют задачи, для которых получить точное решение в замкнутом виде во многих случаях, на сегодняшний день, либо невозможно, либо очень сложно [1, 2]. В таких случаях для решения задач используют численные методы. Один из них – метод конечных разностей (МКР) [1, 2].

Применение метода конечных разностей характеризуется следующими особенностями и преимуществами:

- решение задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно значений искомой функции на заданном множестве точек;
- в решениях МКР используются и получаются достаточно простые выражения;
- МКР более прост в реализации, чем, например, метод конечных элементов (МКЭ);
- всегда возможно составить систему уравнений с симметричной ленточной матрицей, являющейся основой решения;
- возможно применение разностных уравнений повышенной точности [2].

В работе рассматривается расчёт методом конечных разностей изгибаемых плит с промежуточными опорами при действии вертикальной статической нагрузки.

Решения задач строительной механики и теории упругости, в сущности, являются решениями некоторых дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений. Точное решение таких уравнений возможно в отдельных простых случаях при специально подобранных физических характеристиках и граничных условиях рассматриваемой конструкции. Практика располагает огромным числом разнообразных конструкций, для которых во многих случаях точного решения в замкнутом виде не существует. В этих случаях численные методы дают богатые возможности для получения решения. Метод конечных разностей – классический образец метода этого направления.

Основная идея метода конечных разностей состоит в следующем [1, 2]. На объекте располагается система узловых точек. Задача считается решённой, если известны значения участвующих в решении функций в этих точках.