СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Советов, Б.Я. Моделирование систем / Б.Я.Советов, С.А. Яковлев. – М.: Высшая школа, 2005. – 343 с.
2. Рыжиков, Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. – СПб.: КОРОНА, 2004. – 320 с.
3. Майоров, С.А. Основы теории вычислительных систем / С.А. Майоров, Г.И. Новиков, Т.И. Алиев. – М.: Высшая школа, 1978. – 320 с.
4. Максимей, И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988. – 232 с.
5. Труб, И.И. Объектно-ориентированное моделирование на С++. – СПб.: Питер, 2006. – 411 с.

УДК 510

Савченко Р.Я.

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Лебедь С.Ф.

ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА

Гамма-функция, или эйлеров интеграл второго рода, определяется формулой

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx \tag{1}$$

Этот интеграл является несобственным, так как верхний предел бесконечен. Кроме того, при $p-1<0$ подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x=0$. Интеграл (1) сходится при $p>0$. *Каждому положительному значению p соответствует вполне* определенное значение Г(р). Функция Г(р) не является элементарной.

С помощью метода интегрирования по частям докажем, что

$$\Gamma(p+1)=p\cdot\Gamma(p). \tag{2}$$

Имеем $\Gamma(p+1)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{p}dx=\begin{bmatrix} u=x^p & du=px^{p-1} \\ dv=e^{-x}dx & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=-e^{-x}x^p\Big|_0^{\infty}+p\int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx=p\Gamma(p)$,

так как при $p>0$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^p}{e^x}=0$. Что и требовалось доказать.

При p = 1 интеграл находится непосредственно:

$$\Gamma(1)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}=1.$$

Подставляя в формулу (2) значения p = 1, 2..., n, получаем Г(2) = 1·Г(1) = 1 = 1!, Г(3) = = 2Г(2) = 2·1 = 2!, Г(4) = 3·Г(3) = 3·2·1 = 3!,

$$\Gamma(n+1)=n\cdot(n-1)\ldots2\cdot1=n!. \tag{3}$$

Итак, при натуральных значениях аргумента гамма-функция совпадает с факториалом, т.е. с функцией $f(n)=n!$. Но гамма-функция определена не только при натуральных n, но и при любых положительных значениях аргумента. Из формулы (3) следует, что можно считать 0! = Г(1) = 1.

Гамма-функция определяется и при отрицательных значениях p. В этом случае необходимо применить формулу (3),переписав её в виде

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}. \tag{4}$$

Если $-1<p<0$ то $0<p+1<1$, *поэтому правая часть* формулы (4) имеет смысл, ею и определяется Г(p) при этих значениях р ; отметим, что в таком случае Г(p)<0. Продолжая аналогичные рассуждения, убеждаемся в том, что гамма-функция определена для всех отрицательных значениях p, p = -k, где k = 0, 1, 2,... и кроме p = 0.

Гамма-функция определена и для комплексных значений аргумента, кроме $p = -k$, $k = 0, 1, 2\ldots$

Бета – функция, или эйлеров интеграл первого рода, определяется формулой

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{5}$$

Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки x=0 при p-1<0 и в окрестности точки x = 1 при q-1<0. Интеграл (5) сходится при p>0, q>0.

Значения бета-функции при различных значениях параметров p и q связаны между собой следующими соотношениями:

$$B(p,q)=B(q,p);\; B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1), q>1; B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}, 0<p<1.$$

В случае комплексных p и q интеграл (5) сходится, когда Re p>0,Re q>0.

Между бета и гамма-функциями существует связь, выражаемая формулой

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\; p>0,\, q>0 \tag{6}$$

Пример 1. Вычислить $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ с помощью формулы (6).

Пологая в формуле (6) $p = q = 1/2$, получаем

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx=\arcsin(2x-1)\Big|_0^1=\pi,$$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\pi.$$

Так как Г(p)>0 при p>0, то $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\approx 1{,}772$.

Пример 2. Вычислить $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$, который, как известно, не выражается через элементарные функции.

При вычислении этого интеграла используем результаты примера 1.

Полагая $x=\sqrt{t}$, находим $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{(1/2)-1}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Следовательно, $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Пример 3. Установить следующие соотношения:

а) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; б) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}, n\in\mathbb{Z}$.

а) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=[\text{по формуле}\,(2)]=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

б)
$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(1+(n-1)+\frac{1}{2}\right)=\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-1+\frac{1}{2}\right)=\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(n-2+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\ldots=\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-3+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-3+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-3)}{2}\cdot\frac{(2n-5)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=$$

$$=1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак. – Мн.: Навука і тэхніка, 1991. – 480 с.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу / под редакцией Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1978. – 480 с.

УДК 626.13
Согоян А.Л.
Научный руководитель: доцент Шуть В.Н.

АЛГОРИТМ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМ ПЕРЕКРЕСТКОМ

С каждым днем нагрузки на автотранспортную сеть увеличиваются. В результате чего возникла проблема регулирования движения автотранспортных потоков. В данной работе был создан алгоритм, позволяющий эффективно управлять перекрестком любой сложности, с любым количеством потоков и пешеходных переходов.

Покажем работу алгоритма адаптивного управления на перекрестке улиц Пионерской и Московской в городе Бресте. Схема перекрестка представлена на рисунке 1.

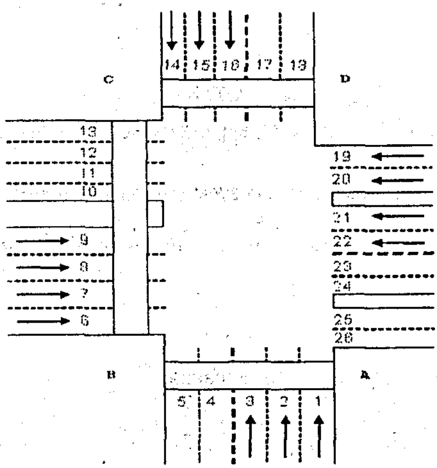

Рисунок 1 – Схема перекрестка ул. Московская и ул. Пионерская

Пешеходные переходы обозначим как AB, BC и CD. Полосы движения автотранспортных средств обозначили нумерацией.

Выявляем возможные направления движения транспортных средств (кроме разворота), в зависимости от полосы, на которой находится автомобиль. Вариант движения обозначим номером исходящей полосы и полосы цели.