Как только система «светофорный объект» идентифицирует наступление затора, сразу управление формированием потоков (комбинация потоков) переходит в режим свободного формирования таких пар, чтобы быстрее устранить затор. Возможность такая имеется. Если в режиме беззаторовой работы постоянно функционировала пара (1,2), то 1 еще можно комбинировать с 5 и 8 (рис. 6).

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дрю, Д. Теория транспортных потоков и управления ими; пер. с англ. – М.: Транспорт, 1972. – 423 с.
2. Харари, Ф. Теория графов. – Москва: Мир, 1973, – 34с.
3. Кременец, Ю.А. Технические средства регулирования дорожного движения. / Ю.А. Кременец, М.П. Печерский. – Москва: Транспорт, 1981. – 92с.

УДК 004.514.

Власенко С.Н., Латий О.О.
Научный руководитель: Хведчук В.И.

ОПЕРАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНИКИ

Одним из элементов проектирования интегральных схем является анализ физических процессов, происходящих в полупроводниковых структурах. Причем имеют место размеры активных областей менее 0,5 мкм и многомерная природа переноса заряда.

Многие процессы переноса энергии, массы, импульса, заряда и т.д. описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Так, для физики полупроводников базовыми являются уравнения Максвелла:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad rot\vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}_{II}}{\partial t} + \vec{J}_{пров},$$

$$div\vec{D}_{II} = \rho, \qquad div\vec{B} = 0,$$

$$\vec{B} = \mu_{н}\vec{H}, \qquad \vec{D} = \varepsilon\,\vec{E},$$

где $\vec{E}$, $\vec{D}_{II}$ – векторы напряженности электрического поля и индукции; $\vec{H}$, $\vec{B}$ – векторы напряженности магнитного поля и индукции; ε, $\mu_{н}$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости; $\vec{J}_{пров}$ – плотность тока проводимости, t – время.

Метод конечных элементов (МКЭ) является сеточным методом, предназначенным для решения задач микроуровня, для которого модель объекта задается системой дифференциальных уравнений в частных производных с заданными краевыми условиями [1].

МКЭ основывается на методе взвешенных невязок, суть которого заключается в следующем: подбирается функция, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям и краевым условиям, но подбирается непроизвольно, поскольку такой подбор вряд ли возможен уже в двухмерном пространстве, а с использованием специальных методов.

Пусть состояние некоторой среды описывается следующим дифференциальным оператором, с заданным граничным условием:

$$LV + P = 0, \qquad V(\Gamma) = V_{\Gamma}.$$

Здесь L – дифференциальный оператор (например, оператор Лапласа), V – фазовая переменная – неизвестная функция, которую следует найти, P – величина, независящая от V, $V(\Gamma) = V_{\Gamma}$ – граничное условие первого рода (Дирихле), то есть на границе задано значение фазовой переменной. Решение задачи с граничными условиями Неймана рассматривается ниже с помощью функции, имеющей следующий вид:

$$V^* = F + \sum_{m=1}^{M} A_m N_m \qquad (1)$$

Здесь V^* – приближенное решение, F – функция, удовлетворяющая граничными условиями, N_m – пробные функции, которые на границе области должны быть равны нулю, A_m – неизвестные коэффициенты, которые необходимо отыскать из условия наилучшего удовлетворения дифференциальному оператору, M – количество пробных функций.

Если подставить V^* в исходный дифференциальный оператор, то получим невязку, принимающую в различных точках области разное значение.

$$R = LV^* + P$$

Необходимо сформулировать условие, позволяющее минимизировать эту невязку по всей области. Одним из вариантов такого условия может быть следующее уравнение:

$$\int_S W_n R dS = 0$$

Здесь W_n – некоторые весовые функции, в зависимости от выбора которых различают варианты метода взвешенных невязок, S – область пространства, в которой ищется решение. При выборе в качестве весовых функций дельта-функций будем иметь метод, который получил название метод поточечной коллокации, для кусочно-постоянных функций – метод коллокаций по подобластям, но наиболее распространенным является метод Галеркина, в котором в качестве весовых функций выбираются пробные функции N. В этом случае, если количество пробных функций равно количеству весовых функций, после раскрытия определенных интегралов приходим к замкнутой системе алгебраических уравнений относительно коэффициента A.

$$KA + Q = 0,$$

где коэффициенты матрицы K и вектора Q вычисляются по формулам:

$$K_{ij} = \int_S W_i L N_j dS,$$

$$Q_i = \int_S W_i (LF + P) dS.$$

После нахождения коэффициентов A и подстановки их в (1), получаем решение исходной задачи.

Недостатки метода взвешенных невязок очевидны: поскольку решение ищется сразу по всей области, то количество пробных и весовых функций должно быть значительным для обеспечения приемлемой точности, но при этом возникают трудности при вычислении коэффициентов K_{ij} и Q_i, особенно при решении плоских и объемных задач, когда потребуется вычисление двойных и тройных интегралов по областям с криволинейными границами. Поэтому на практике этот метод не использовался, пока не был изобретен метод конечных элементов.

Идея метода заключается в следующем: в методе взвешенных невязок воспользоваться простыми пробными и весомыми функциями, но не во всей области S, а ее отдельных подобластях (конечных элементах), а точность решения задачи обеспечить использованием большого числа конечных элементов (КЭ), при этом КЭ могут быть простой формы и вычисление интегралов по ним не должно вызывать особых затруднений. Математически переход от метода взвешенных невязок к МКЭ осуществляется с использованием специальных пробных функций, которые также называются глобальными базисными функциями, обладающих следующими свойствами:

1) в узле аппроксимации функции имеют значение равное единице;

2) отличны от нуля только в конечных элементах, содержащих этот узел аппроксимации, во всей остальной области равны нулю.

Далее рассматривается решение задач в одномерной области.

В результате на каждом конечном элементе действует строго определенное число ненулевых глобальных базисных функций (в данном примере две) и вместо вычисления интеграла по всей области можно вычислить интегралы по конечным элементам и сложить их. Процедура сложения получила название ансамблирование. Использование глобальных базисных функций приводит к тому, что процедура вычисления интегралов по конечным элементам становится достаточно простой и, поскольку в узлах аппроксимации $N_m = 1$, коэффициенты А приобретают физический смысл, они становятся равными значению фазовой переменной в узлах. В аппроксимации (1) теперь можно отказаться от использования функции *F*, поскольку удовлетворить граничные условия можно естественным образом, задавая значения *V* в узлах, расположенных на границе.

В пределах конечного элемента, при условии, что он включен между i-м и j-м узлами, аппроксимацию решения можно определить с помощью глобальных базисных функций следующим образом:

$$V = \left(1 - \frac{X}{L}\right)V_i + \frac{X}{L}V_j = N_c V .$$

Здесь X – текущая координата, отсчитываемая от начала конечного элемента, L – его длина, V_i и V_j – значения фазовых переменных в узлах конечного элемента. Компоненты вектора N_c получили название функций формы конечного элементы. Функции формы можно получить и из других соображений. Зададимся полиномом, аппроксимирующим решение внутри конечного элемента, например:

$$V = A0 + A1 \cdot X$$

при $X = 0$ $V_i = A0$, при $X = L$ $V_j = A0 + A1 \cdot X$,

Находим коэффициенты А0 и А1 и подставляем их в аппроксимацию:

$$V = V_i + \left(V_j - V_i\right)\frac{X}{L} = \left(1 - \frac{X}{L}\right)V_i + \frac{X}{L}V_i$$

Таким же образом можно получить функции формы для квадратичной, кубической и других аппроксимаций. Соответственно аппроксимации называются и функции формы и конечных элементов – квадратичный, кубический и т.д.

На базе описанной модели реализованы одномерная и двумерная версия расчета в математической системе Mathcad. Проведен расчет по МКЭ на примере теплового режима кремниевой пластины.

Реализованные операции МКЭ могут быть использованы для разработки инструментария построения моделей расчета переходных процессов, позволяющих анализировать функционально-интегрированные элементы БИС и СБИС[2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике. – М: Мир, 1975.

2. Петров, М.Н. Моделирование компонентов и элементов интегральных схем. / М.Н. Петров, Г.В. Гудков. – СПб: Издателство «Лань», 2011.