СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Система освещения: пат. РБ №6524-с1, F21S 11/00 / В.С. Северянин. – 2004.
2. Способ освещения помещений и объектов: пат. РБ №6369-с1, F21K 2/00 / В.С. Северянин. – 2004.
3. Гелиоустановка: пат. РБ №3998-U, F24J 2/00 / В.С. Северянин. – 2007.
4. Гелиоконцентратор: пат. РБ №4296-U, F24J 2/00 / В.С. Северянин. – 2007.
5. http:// www.fluoreinterior.ru
6. Политехнический словарь / А.Ю. Ишлинский. – М.: Сов. энциклопедия, 1989. – С. 278, 571.

УДК 551.492

Гетман В.А., Ефимик С.В.

Научный руководитель: к.т.н., доцент Махнист Л.П.

О ПРИБЛИЖЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИДРОЛОГИИ

Введение

В работе рассматривается модель процесса многолетних колебаний речного стока, представленная в виде дифференциального уравнения [1]:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_1}{d\xi}=-1 \qquad (1)$$

с краевыми условиями $\frac{d\theta_1}{d\xi}(+\infty)=0,\ \theta_1(\xi_*)=0$.

Эта модель, широко используемая в стохастической гидрологии, получена на основе уравнения Фоккера-Планка, при некоторых условиях на переходную функцию плотности вероятности.

Уравнение (1), приведенное в [1], при решении различных прикладных задач, например, в [2], интегрировалось численными методами. В [3] получено точное решение уравнения (3), представленное в виде степенного ряда:

$$\theta_1(\xi)=S_1(\xi)-S_1(\xi_*), \qquad (2)$$

где $S_1(\xi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}$, а $\{t\}$ – дробная часть числа t.

В [4] получены условия для вычисления суммы сходящегося ряда в соотношении (2) с заданной степенью точности. Анализ полученных результатов и их программной реализации позволяет сделать вывод о необходимости исследования асимптотического поведения решения (2) и соответствующих рядов [5].

О приближении решения уравнения

Функция $\theta_1(\xi)$ является возрастающей на всей числовой прямой, так как $\frac{d\theta_1}{d\xi}=\frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}$, где $\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – интеграл вероятностей, а $\varphi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ – плотность стандартного нормального распределения.

Исследуем функцию $\theta_1(\xi)$ на вогнутость и выпуклость.

Так как $\dfrac{d^2\theta_1}{d\xi^2}=\dfrac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}\xi-1$, то $\dfrac{d^2\theta_1}{d\xi^2}<0$, если $\xi\le 0$.

Учитывая, что для любого $\xi>0$ выполняется

$$\int_\xi^{+\infty}\frac{(t^2+1)e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{t^2}=\frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\xi} \text{ и } \int_\xi^{+\infty}\frac{(t^4+4t^2-3)e^{-\frac{t^2}{2}}}{(t^2+3)^2}dt=\frac{\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\xi^2+3}\text{, получаем}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\int_0^\xi e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_\xi^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt<\int_\xi^{+\infty}\frac{t^6+6t^4+9t^2+6}{t^2(t^2+3)^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_\xi^{+\infty}\frac{2(t^2+1)e^{-\frac{t^2}{2}}}{3t^2}dt+$$

$$+\int_\xi^{+\infty}\frac{(t^4+4t^2-3)e^{-\frac{t^2}{2}}}{3(t^2+3)^2}dt=\frac{2e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{3\xi}+\frac{\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{3(\xi^2+3)}=\frac{(\xi^2+2)e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\xi(\xi^2+3)} \text{ или}$$

$$\frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}<\frac{\xi^2+2}{\xi(\xi^2+3)}.$$

Заметим, что выполняется равенство:

$$\int_\xi^{+\infty}\frac{(t^2-1)e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{(t^2+1)^2}=-\frac{te^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2+1}\Bigg|_\xi^{+\infty}+\int_\xi^{+\infty}\frac{tde^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2+1}=\frac{\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\xi^2+1}-\int_\xi^{+\infty}\frac{t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{t^2+1}$$

Тогда для $\xi>0$ получаем

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\int_0^\xi e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_\xi^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt>\int_\xi^{+\infty}\frac{(t^4+2t^2-1)e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{(t^2+1)^2}=$$

$$=\int_\xi^{+\infty}\frac{(t^2-1)e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{(t^2+1)^2}+\int_\xi^{+\infty}\frac{t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{t^2+1}=\frac{\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\xi^2+1} \text{ или } \frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}>\frac{\xi}{\xi^2+1}.$$

Таким образом, для любого $\xi>0$ выполняется неравенство

$$\frac{\xi}{\xi^2+1}<\frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}<\frac{\xi^2+2}{\xi(\xi^2+3)}.$$

Следовательно, для любого $\xi>0$ выполняется неравенство

$$-\frac{1}{\xi^2+1}<\frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}\xi-1<-\frac{1}{\xi^2+3}\text{, т.е. }\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}<0,$$

и функция $\theta_1(\xi)$ является выпуклой на всей числовой прямой.

Так как $\dfrac{d^3\theta_1}{d\xi^3}=\dfrac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}(\xi^2+1)-\xi$, то $\dfrac{d^3\theta_1}{d\xi^3}>0$, если $\xi\le 0$.

Учитывая, что $0<\dfrac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}(\xi^2+1)-\xi<\dfrac{2}{\xi(\xi^2+3)}$ для любого $\xi>0$, то $\dfrac{d^3\theta_1}{d\xi^3}>0$ и функция $\dfrac{d^2\theta_1}{d\xi^2}$ является возрастающей на всей числовой прямой.

Заметим, что для любого $\xi \geq \xi_* > 0$ выполняется

$$\theta_1(\xi) = \int_{\xi_*}^{\xi} \frac{0,5-\Phi(t)}{\varphi(t)} dt \geq \int_{\xi_*}^{\xi} \frac{t\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{\xi^2+1}{\xi_*^2+1} \text{ и}$$

$$\theta_1(\xi) = \int_{\xi_*}^{\xi} \frac{0,5-\Phi(t)}{\varphi(t)} dt \leq \int_{\xi_*}^{\xi} \frac{(t^2+2)dt}{t(t^2+3)} = \int_{\xi_*}^{\xi} \frac{2dt}{3t} + \int_{\xi_*}^{\xi} \frac{t\,dt}{3(t^2+3)} = \frac{1}{6}\ln\frac{t^6+3t^4}{t_*^6+3t_*^4}.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}\ln\frac{\xi^2+1}{\xi_*^2+1} \leq \theta_1(\xi) \leq \frac{1}{6}\ln\frac{t^6+3t^4}{t_*^6+3t_*^4}$ для любого $\xi \geq \xi_* > 0$.

Так как для любого

$\xi \geq 0$ $\frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)} < \frac{\xi^2+2}{\xi^3+3\xi}$, то $\frac{d^4\theta_1}{d\xi^4} = \frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}(\xi^3+3\xi) - (\xi^2+2) < 0$,

т.е. функция $\frac{d^3\theta_1}{d\xi^3}$ является убывающей на интервале $[0;+\infty)$.

Учитывая условие $\left.\frac{d^3\theta_1}{d\xi^3}\right|_{\xi=0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и то, что $\frac{d^3\theta_1}{d\xi^3} > 0$ имеем

$$0 < \frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}(\xi^2+1) - \xi \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ или } \frac{\xi}{\xi^2+1} < \frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)} \leq \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\xi}{\xi^2+1}.$$

Следовательно, $\ln\sqrt{\xi^2+1} \leq S_1(\xi) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}arctg\xi + \ln\sqrt{\xi^2+1}$ (3)

для любого $\xi \geq 0$. Учитывая то, что $arctg\xi < \frac{\pi}{2}$ и $\sqrt{\frac{\pi^3}{8}} \approx 1,97$, имеем неплохое приближение функции $S_1(\xi)$ при больших значениях $\xi > 0$:

$$\ln\sqrt{\xi^2+1} < S_1(\xi) < \ln\sqrt{\xi^2+1} + 2.$$

Так как функция $\frac{d\theta_1}{d\xi}$ является убывающей и вогнутой вверх функцией на интервале $[0;+\infty)$, то для любого x $(0 \leq x \leq \xi)$ выполняется неравенство

$y_1(x) \leq \theta_1'(x) \leq y_2(x)$, где $y_2(x) = \frac{\theta_1'(\xi)-\theta_1'(0)}{\xi}x + \theta_1'(0)$ – уравнение прямой, проходящей через точки $(0,\theta_1'(0))$ и $(\xi,\theta_1'(\xi))$, а $y_1(x) = (\theta_1'(\xi)\xi - 1)x + {}$ $+\theta_1'(\xi)(1-\xi^2) + \xi$ – уравнение касательной к кривой θ_1' в точке $(\xi,\theta_1'(\xi))$.

Тогда $\frac{\xi^2}{2} + \frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}\left(\xi - \frac{\xi^3}{2}\right) < \int_0^{\xi} \frac{0,5-\Phi(t)}{\varphi(t)}dt < \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{0,5-\Phi(\xi)}{\varphi(\xi)}\right)\frac{\xi}{2}$

и, следовательно, $0,8278 \approx 0,5 + \frac{0,5-\Phi(1)}{2\varphi(1)} < S_1(1) < \sqrt{\frac{\pi}{8}} + \frac{0,5-\Phi(1)}{2\varphi(1)} \approx 0,9545$

и, кроме того $S_1(1) \approx 0,9019$, используя (2).

Тогда для любого $\xi > 1$ имеем:

$$\ln \sqrt{\xi^2+1} + S_1(1) - \ln\sqrt{2} < S_1(\xi) < \ln \sqrt[6]{\xi^6+3\xi^4} + S_1(1) - \ln\sqrt[6]{4}. \quad (4)$$

Учитывая, что $\ln \sqrt[6]{\xi^6+3\xi^4} < \ln\sqrt{\xi^2+1}$, получим

$$\ln \sqrt{\xi^2+1} + S_1(1) - \ln\sqrt{2} < S_1(\xi) < \ln \sqrt{\xi^2+1} + S_1(1) - \ln\sqrt[6]{4},$$

что позволяет вычислять значения функции $S_1(\xi)$ с точностью не большей чем

$$\ln\sqrt{2} - \ln\sqrt[6]{4} = \ln\sqrt[6]{2} \approx 0,1155.$$

Выводы

В работе предложено теоретическое обоснование приближения математического ожидания одного из одномерных распределений вероятностей многолетних колебаний речного стока, широко используемого в практике гидрологии.

Анализ методики получения неравенств (3), (4) позволяет получить приближение решения рассматриваемой модели с помощью исследования его производных более высоких порядков.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Найденов. В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – М., 2002. – Том 29, № 1. – С. 62-67.

2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2006. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 56-60.

3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2008. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 84-87.

4. Волчек, А.А. О сходимости решения одной малопараметрической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Вестник БрГТУ. – Брест, 2009. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 2-5.

5. Гетман, В.А. Сходимость и свойства решения одного стохастического уравнения / В.А. Гетман, И.И. Гладкий, С.В. Ефимик, Л.П. Махнист // Современные проблемы математики и вычислительной техники: материалы VI Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, Брест, 26-28 ноября 2009 г. – Брест: БрГТУ, 2009. – Ч. 2. – С. 121-126.

УДК 628.316

Журавель О.М

Научный руководитель: ассистент Наумчик Г.О.

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ АРОМАТИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ МЕТОДОМ УФ-СПЕКТРОМЕТРИИ

Введение. На кафедре ВВиОВР осуществляются исследования применения озона для очистки и обеззараживания природных и сточных вод. В частности разрабатывается технология снижения окраски производственных сточных вод ОАО «Брестский чулочный комбинат». При изучении механизма действия озона на синтетические красители возникла проблема идентификации продуктов распада красителей. С учетом того, что все