Под сходимостью метода (2) понимается утверждение о том, что приближения (2) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения $Ax = y$ при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

Воспользовавшись интегральным представлением положительного самосопряженного оператора A и формулой (1), по индукции получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n dE_\lambda y$, где $M = \|A\|$, E_λ – спектральная функция оператора A. Отсюда легко выводится сходимость метода (1) при $n \to \infty$ для $0 < \alpha < \frac{2}{M^2}$. Справедливы

Теорема 1. *Процесс* (2) *сходится при* $0 < \alpha < \frac{2}{M^2}$, *если выбирать число итераций* n *в зависимости от* δ *так, чтобы* $n^{1/2}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0$.

Теорема 2. *Если решение* $x = A^s z$, $s > 0$ *для уравнения* $Ax = y$, *то при условии* $0 < \alpha \le \frac{5}{4M^2}$ *для метода* (2) *справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{\frac{s}{2}}(2n\alpha e)^{-\frac{s}{2}}\|z\| + 2n^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{1}{2}}\delta$, $n \ge 2$. *Априорный момент останова равен* $n_{опт} = s^{\frac{s+2}{s+1}} 2^{-\frac{s+2}{s+1}} \alpha^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{2}{s+1}} \delta^{-\frac{2}{s+1}}$.

Л. П. МАХНИСТ, Е. Н. ЗАЩУК, И. И. ГЛАДКИЙ, М. М. ЮХИМУК
Беларусь, Брест, БрГТУ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧЕ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной работе рассматривается стохастическая модель многолетних колебаний речного стока, представленная в виде системы дифференциальных уравнений (например, в [1] и [2]):

$$\frac{d^2\theta_k}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_k}{d\xi} = -k\theta_{k-1}, \text{ при } \frac{d\theta_k}{d\xi}(+\infty) = 0,\ \ \theta_k(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0\ \ (\theta_0 = 1,\ k \in N). \quad (1)$$

Эта модель получена на основе уравнения Фоккера – Планка, при некоторых условиях на переходную функцию плотности вероятности, широко используется в стохастической гидрологии [1]. Решения системы $\theta_k(\xi)$ служат для оценки начальных моментов k-го порядка распределения вероятностей модели процесса многолетних колебаний речного стока [3].

Представление решения первого уравнения системы (1) в виде степенного ряда получено в [1], а в [3] приведены асимптотические оценки этого решения. В работах [2; 4] получено решение системы при $k=\overline{1,2}$, представленное в виде степенных рядов, и исследована их сходимость в [5].

В работе предлагается подход к решению системы (1) с использованием системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

Используя СКА *Mathematica*, решение первого дифференциального уравнения системы (1) при соответствующих граничных условиях в аналитическом виде можно записать в виде:

$$\theta_1(\xi)=S_1(\xi)-S_1(\xi_*),\quad S_1(\xi)=\frac{\pi}{2}erfi\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\xi^2}{2}\cdot{}_2F_2\left(1,1;\frac{3}{2},2;\frac{\xi^2}{2}\right),$$

где $erfi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$ – мнимая функция ошибок, ${}_2F_2\left(1,1;\frac{3}{2},2;\frac{\xi^2}{2}\right)$ – соответствующее значение обобщенной гипергеометрической функции вида ${}_2F_2(a,b;c,d;x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a)_n(b)_n x^n}{(c)_n(d)_n n!}$, а $(p)_n=\prod_{k=1}^{n}(p+k-1)$ – символ Похгаммера. Следовательно, $\frac{\pi}{2}erfi\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $\frac{\xi^2}{2}\cdot{}_2F_2\left(1,1;\frac{3}{2},2;\frac{\xi^2}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$.

Тогда решение первого уравнения системы (1) можно записать в виде:

$$S_1(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$$

или в виде знакочередующегося ряда: $S_1(\xi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}$,

где $\{t\}$ – дробная часть числа t.

Рассмотренный подход к решению системы (1) можно предложить к использованию для оценки начальных моментов распределения вероятностей модели многолетних колебаний речного стока [6].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек [и др.] // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2008. – № 5. – С. 83–87.

2. Волчек, А. А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 68–77.

3. Волчек, А. А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А. А. Волчек, Л. П. Махнист, В. С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь : сб. материалов междунар. науч.-техн. конф., Брест, 22–23 апр. 2010 г. / Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: С. В. Басов [и др.]. – Брест, 2010. – С. 45–49.

4. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек [и др.] // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2010. – № 5. – С. 48–53.

5. О сходимости решения диффузионной модели стохастической гидрологии / А. А. Волчек [и др.] // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Сер. Физика, математика, информатика. – 2011. – № 5. – С. 69–73.

6. Применение систем компьютерной алгебры для решения модели стохастической гидрологии / Л. П. Махнист [и др.] // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 апр. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Н. Н. Сендера. – Брест : БрГУ, 2021. – С. 96–98.

Е. И. МИРСКАЯ
Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСПЕРСИИ ОСРЕДНЕННОЙ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОКОН ПРОСМОТРА ДАННЫХ

Развитие математической статистики характеризуется значительным расширением теоретических исследований по статистическому анализу временных рядов и их практическим применением.