Пусть π – некоторое множество простых чисел, π' – дополнение к π, т. е. $\pi' = P \setminus \pi$, где P – множество всех простых чисел.

В 2006 году В. С. Монаховым [2] было предложено понятие производной π-длины π-разрешимой группы. Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^\alpha(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то значение $l_\pi^\alpha(G)$ совпадает со значением производной длины группы G.

Влиянию строения силовских подгрупп на производную π-длину конечной π-разрешимой группы посвящены работы Монахова В. С., Грицука Д. В., Шпырко О. А. и Трофимука А. А. В частности, в работе [3] получены оценки производной π-длины π-разрешимой группы с бициклическими силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$. Напомним, что группа называется бициклической, если она является произведением двух циклических подгрупп.

Доказана следующая теорема

Теорема. *Пусть G – π-разрешимая группа и пусть все силовские p-подгруппы либо бициклические, либо их порядок не превышает p^5, тогда если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^\alpha(G) \le 3(1+m)$, где m – количество небициклических силовских p-подгрупп ($p \in \pi$).*

Список цитированных источников

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск: Вышэйшая школа. – 2006. – 312 с.
2. Монахов, В.С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В.С. Монахов // Математические заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
3. Грицук, Д.В. О конечных -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.

УДК 519.6+517.983

ОСТАНОВ ПО ПОПРАВКАМ В НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Карват У. М.

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, г. Брест, Беларусь

Научный руководитель: Матысик О. В., канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве *H* исследуется операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где *A* – положительный ограниченный и несамосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако $0 \in SpA$, и, следовательно, рассматриваемая задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части *y* уравнение (1) имеет единственное решение *x*. Для отыскания этого решения применяется неявная итерационная схема:

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^2\right)^{-1} \left[\left(E - \alpha A^* A\right)^2 x_n + 2\alpha A^* y\right], \quad \alpha > 0, \; x_0 \in H. \quad (2)$$

В случае, когда правая часть y уравнения (1) известна приближённо $\|y - y_\delta\| \le \delta$, схема (2) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^2\right)^{-1} \left[\left(E - \alpha A^* A\right)^2 z_n + 2\alpha A^* y_\delta\right] +$$

$$+ \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^2\right)^{-1} \left(E - \alpha A^* A\right)^2 u_n, \quad z_0 \in H, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим $C = \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^2\right)^{-1} \left(E - \alpha A^* A\right)^2$, $B = \left(E + \alpha^2 \left(A^* A\right)^2\right)^{-1} 2\alpha A^*$. Тогда метод (3) запишется в виде $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$.

2. Останов по поправкам. Определим момент *m* останова итерационного процесса (3) условием [1-2]

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon, \quad (4)$$

где ε – заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Справедливы

Лемма 1. *Пусть приближение* w_n *определяется равенствами*

$$w_0 = z_0, \quad w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n, \quad n \ge 0.$$

Тогда верно неравенство $\sum_{k=0}^{n} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$.

Лемма 2. *При любом* $w_0 \in H$ *и любой последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполняется неравенство*

$$\varliminf_{n \to \infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$$

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определён при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta,\beta \to 0$, *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, $d > 1$, $p \in (0,1)$, *тогда метод* (3) *с правилом останова* (4) *сходится, т. е.* $\lim\limits_{\delta,\beta \to 0} \| z_m - x \| = 0.$

Список цитированных источников

1. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
2. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик // Тр. Нижегород. гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексеева. – 2015. – № 4 (111). – С. 52–61.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МИНИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ

Климчук М. С.

Брестский государственный технический университет, г. Брест, Беларусь
Научный руководитель: Монахов В. С., доктор физ.-мат. наук, профессор

Рассматриваются только конечные группы.

Конечная группа – это группа, содержащая конечное число элементов, называемых её «порядком».

Минимальной подгруппой группы называется подгруппа простого порядка. Многие авторы исследовали структуру группы *G* в предположении, что все ее минимальные подгруппы «хорошо расположены» в группе.

Ито доказал, что если *G* – группа нечетного порядка и все ее минимальные подгруппы лежат в центре группы *G*, то *G* нильпотентна. Продолжением результата Ито является следующее утверждение: если для нечетного простого числа *p* каждая подгруппа группы *G* порядка *p* лежит в центре группы *G*, то группа *G p*-нильпотентна. Если все элементы группы *G* порядков *2* и *4* лежат в центре группы *G*, то группа *G 2*-нильпотентна.

Бакли [1] доказал, что если *G* – группа нечетного порядка и все ее минимальные подгруппы нормальны в *G*, то *G* сверхразрешима. Напомним, что подгруппа *H* группы *G* называется *S*-квазинормальной в *G*, если *H* перестановочна с каждой силовской подгруппой группы *G*. Позднее Шаалан [2] доказал, что если *G* – группа и каждая ее подгруппа простого порядка или порядка *4 S*-квазинормальна в *G*, то *G* сверхразрешима.

В работе [3] было приведено следующее понятие.

Определение. Подгруппа *A* группы *G* называется *tcc*-подгруппой в *G*, если она удовлетворяет следующим условиям: