Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (4) равенство (2), получим $\varepsilon_{n+1} = (E+\alpha A)^{-1}(E-\alpha A)\varepsilon_n + \alpha\gamma_n,\ \varepsilon_0 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции получаем $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(E+\alpha A)^{-(n-1-k)}(E-\alpha A)^{n-1-k}\alpha\gamma_k$.

В силу $\alpha > 0$ и принадлежности нуля спектру оператора *A* $\left\|(E+\alpha A)^{-1}(E-\alpha A)\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma,\ \gamma = \sup\limits_k |\gamma_k|$.

Таким образом, с учётом вычислительной погрешности для метода (2) справедлива следующая оценка

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le \max\left\{ s^s (4n\alpha)^{-s},\ M^s \left(\frac{\alpha M - 1}{\alpha M + 1}\right)^n \right\} \|z\| + 2n\alpha\delta + n\alpha\gamma.$$

Список цитированных источников

1. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики: учеб. пособие : в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Вышэйш. шк., 1975. – Т. 2. – 672 с.

УДК 519.6+517.983

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ АПОСТЕРИОРНОГО ВЫБОРА ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

Шостакович И. О.,

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина, г. Брест, Беларусь

Научный руководитель: Матысик О. В., канд. физ.-мат. наук, доцент

В гильбертовом пространстве *H* решается уравнение I рода $Ax = y$ с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением, но $0 \in Sp\ A$ (поэтому рассматриваемая задача некорректна). Используется явный итерационный метод

$$x_n = (E - \alpha A)^2 x_{n-1} + 2\alpha y - \alpha^2 A y,\ x_0 = 0, \tag{1}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения $Ax = y$ при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод примет вид

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 A y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Здесь $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$. В случае, когда неизвестна истокопредставимость точного решения, т. е. что $x = A^s z,\ s > 0$, метод (2) можно сделать эффективным, если воспользоваться

зоваться правилом останова по невязке [1-2]: зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного метода определим условиями

$$\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon,\ (n < m),\ \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon,\ \varepsilon = b\delta,\ b > 1. \qquad (3)$$

Покажем возможность применения правила (3) к методу (2). Справедливы

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Тогда для* $\forall w \in H$ *выполняется* $(E - Ag_n(A))w \to 0,\ n \to \infty$.

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Тогда* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s \left\|A^s (E - Ag_n(A))v\right\| \to 0,\ n \to \infty,\ 0 \le s < \infty$.

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$. *Если для некоторого* $n_k < \bar{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $k \to \infty$ *имеем* $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0$, *то* $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \to 0.$

Имеют место

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0, \|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2) *выбирается по правилу* (3). Тогда $x_{m,\delta} \to x$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z,\ s > 0$, *тогда справедливы оценки* $m(\delta) \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}$,

$$\left\|x_{m(\delta),\delta} - x\right\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta. \qquad (4)$$

Замечание 1. *Порядок оценки* (4) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{(s+1)}}\right)$, *и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями* [1].

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы* 2 *предположение, что порядок истокопредставимости точного решения равен* $s > 0$, *не требуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближённого решения. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке* (4), *как показывает теорема* 1, *обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

Список цитированных источников

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.

2. Матысик, О.В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О.В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.