Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2021. Том 29. № 1-2. С. 17–40

УДК 517.9

КЛАССИЧЕСКИЕ, АНАЛИТИЧЕСКИЕ, ФОРМАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МЕРОМОРФНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А. Б. Антоневич, Е. В. Кузьмина

Белорусский государственный университет
Брестский государственный технический университет
e-mail: antonevich@bsu.by, elena_kuzmina@inbox.ru
Поступила 15.10.2021

В работе рассматривается вопрос о существовании обобщенных решений однородного линейного дифференциального уравнения первого порядка с обобщенным коэффициентом. Исследован случай, когда обобщенный коэффициент совпадает с заданной мероморфной функцией на дополнении к множеству полюсов этой функции и при этом соответствующее уравнение на комплексной плоскости имеет мероморфное решение. Описаны все обобщенные функции, совпадающие с рассматривамой мероморфной функцией на дополнении к множеству полюсов. Для уравнений с такими обобщенными коэффициентами введено понятие формального решения и такие решения построены в явном виде. Основной результат заключается в описании тех обобщенных коэффициентов из рассматриваемого класса, для которых существует обобщенное решение.

1. Введение. Дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами встречаются во многих приложениях и их исследованию посвящена обширная литература (С. Альбеверио [1], С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин [2], Н. В. Лазакович [3], А. Б. Антоневич, Т. А. Романчук [4] и др.), Основное осложнение при исследовании уравнений с обобщенными коэффициентами заключается в том, что в классической теории обобщенных функций не определено произведение обобщенных функций, входящее в такие уравнения и, следовательно, не определено понятие обобщенного решения. Общий подход к определению понятия решения такого уравнения основан на замене обобщенного коэффициента на его аппроксимацию семейством гладких функций, зависящим от малого параметра ε. Если у решений $u_\varepsilon(x)$ соответствующих уравнений существует предел при $\varepsilon \to 0$ в пространстве распределений $D'(R)$, то он называется *обобщенным решением* исходного уравнения при заданном способе аппроксимации коэффициента. При этом существование такого обобщенного решения не является общим фактом, а получено только для некоторых конкретных классов обобщенных коэффициентов с помощью прямых вычислений.

Ответ на вопрос о том, при каких коэффициентах Q существуют обобщенные решения, неизвестен даже в случае простейшего линейного дифференциального уравнения первого порядка на $\mathbb{R}$ с обобщенным коэффициентом вида

$$u' - Qu = 0. \tag{1}$$

Известные ранее результаты в основном относятся к случаю, когда Q является производной (в смысле обобщенных функций) функции ограниченной вариации. В работах [5–7] рассмотрены некоторые конкретные уравнения вида (1), в которых коэффициенты не являются производными функцией конечной вариации и обнаружено, что существование обобщенного решения связано с достаточно тонкими свойствами коэффициента Q.

В ходе исследования были построены другие типы решений рассматриваемого уравнения и установлена их связь с основным вопросом о существовании обобщенного решения.

Настоящая работа содержит развитие результатов, полученных в [5–7]. Предметом исследования в данной работе являются решения задачи Коши уравнений (1), где Q – обобщенная функция, совпадающая с заданной мероморфной функцией q на дополнении к множеству ее полюсов. Вводятся понятия аналитического, формального, слабого и обобщенного решений и устанавливаются связи между ними.

2. Модельные примеры. Начнем с рассмотрения конкретных примеров, исследованных в [5, 6] и поясним вопросы, возникающие при построении обобщенных решений.

Исходным объектом исследования являются уравнения на прямой вида

$$u'(x) - q(x)u(x) = 0, \tag{2}$$

в которых коэффициент q имеет неинтегрируемую особенность в одной точке 0. Модельным примером служит уравнение

$$u'(x) - \frac{s}{x}u(x) = 0, \tag{3}$$

где s – целое число.

Классическое решение задачи Коши с условием $u(-1) = C$ для (2) однозначно определено только при $x < 0$. Для уравнения (3) такое решение есть функция

$$u(x) = C(-1)^s \frac{1}{x^{-s}},\ x < 0.$$

Ввиду того что точка $x = 0$ особая, при классической постановке задачи в теории дифференциальных уравнений на прямой нет способов, позволяющих однозначно продолжить решение на положительную полуось. Такое продолжение может быть получено с помощью уточнения постановки задачи, содержащей внесение дополнительной информации, позволяющей, в частности, однозначно продолжить решение на положительную полуось.

Переход к уравнению с обобщенным коэффициентом. Первый шаг к уточнению постановки задачи заключается в рассмотрении вместо функции $q(x) = \frac{s}{x}$ одной из соответствующих ей обобщенных функций.

Напомним, что обобщенная функция f есть линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ [8]. Обобщенная функция называется регулярной, если она представляется в виде

$$< f, \varphi >= \int g(x)\varphi(x)dx,$$

где g – локально интегрируемая функция. Говорят, что обобщенная функция имеет *первый порядок сингулярности,* если она является производной в смысле обобщенных функций от регулярной. Иначе говоря, это обобщенные функции, у которых первообразная является локально интегрируемой функцией.

Функция $q(x) = \frac{s}{x}$ не является локально интегрируемой и не задает обобщенную функцию, так как интеграл

$$\int \frac{s}{x}\varphi(x)dx \tag{4}$$

расходится, если $\varphi(0) \neq 0$. Интеграл (4) задает непрерывный линейный функционал, определенный только на подпространстве

$$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\}.$$

У этого функционала существует однопараметрическое семейство продолжений на все пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и поэтому функции $\frac{s}{x}$ соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций, это функционалы вида

$$Q_M = s\left[P\left(\frac{1}{x}\right) + M\delta\right], \tag{5}$$

где M – произвольная постоянная, $\langle\delta_\tau, \varphi\rangle = \varphi(\tau)$ – дельта-функция Дирака, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ – обобщенная функция, заданная с помощью интеграла в смысле главного значения по Коши:

$$\left\langle P\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \int \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx.$$

Обобщенные функции (5) имеют первый порядок сингулярности, так как Q_M есть производная от локально интегрируемой функции

$$g_M(x) = s\ln|x| + sM\Theta(x),$$

где $\Theta(x)$ – функция Хевисайда.

Выбор конкретной обобщенной функции вида (5) позволяет перейти от уравнения (3) к уравнению

$$u' - Q_M u = 0 \tag{6}$$

и вопрос сводится к определению понятия решения уравнения с обобщенным коэффициентом.

При любом содержательном определении решение должно при $x < 0$ совпадать с классическим решением задачи Коши для уравнения (3) и при $x > 0$ оно также должно совпадать с одним из многих классических решений уравнения (3). Поэтому проблема построения обобщенного решения включает в себя нахождение однозначно определенного продолжения через особенность классического решения уравнения (3).

Аналогичные вопросы можно поставить для уравнения

$$\frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{x^2}u(x) = 0,$$

классические решения которого есть функции вида $u(x) = Cexp\frac{1}{x}$. Для этого уравнения задача об обобщенных решениях заведомо не имеет решения, так как не существует обобщенной функции, совпадающей с такой функцией $u(x)$ при $x > 0$. Это показывает существенность специального вида коэффициента в (3), а именно того, что он имеет полюс первого порядка.

Особенности теории уравнений с обобщенными коэффициентами. Уравнение вида (2), в котором коэффициент q есть непрерывная функция, является наипростейшим из дифференциальных уравнений, решение которого строится элементарно. Деление на u приводит к разделению переменных и равенству

$$\ln|u| = \int q(t)dt,$$

откуда получаем, что решение задачи Коши с условием $u(x_0) = C$ задается формулой

$$u(x) = Ce^{g(x)}, \tag{7}$$

где $g(x) = \int\limits_{x_0}^{x} q(t)dt$ – первообразная для q.

Но указанные преобразования не имеют смысла в пространстве обобщенных функций, так как все использованные операции (деление, вычисление логарифма и вычисление экспоненты и интеграла по отрезку) не определены для обобщенных функций. Это показывает, что принципиальные отличия уравнений с обобщенными коэффициентами от классических появляются уже в случае простейших уравнений. При этом для них не только неприменимы методы исследования из классической теории, но также качественно отличаются результаты. В частности, в общем случае не выполнена даже теорема о существовании и единственности решения задачи Коши.

Сведение к интегральному уравнению. Упомянем также общий метод доказательства существования классических решений дифференциальных уравнений, основанный на сведении задачи Коши к интегральному уравнению. Но и при таком подходе к уравнениям с обобщенными коэффициентами возникают осложнения. Уравнение (2) является частным случаем уравнений вида

$$u' = F(u,x)g'(x), \tag{8}$$

где $g(x)$ – локально интегрируемая функция. Задача Коши для уравнения (8) формальным интегрированием сводится к интегральному уравнению

$$u(x) + \int\limits_{x_0}^{x} F(u,t)g'(t)dt = u(x_0).$$

Это уравнение можно записать в виде

$$u(x) + \int\limits_{x_0}^{x} F(u,t)dg = u(x_0),$$

но при этом надо пояснить, в каком смысле следует понимать интеграл.

Если функция g имеет конечную вариацию, интеграл можно понимать в смысле Стилтьеса и доказать существование функции, являющейся решением этого интегрального уравнения. Но в уравнении (6) функция

$$g_M(x) = s\ln|x| + sM\Theta(x), \tag{9}$$

имеет бесконечную вариацию и формально записанный интеграл не определен.

Формальные решения. Специфика рассматриваемых уравнений (6) заключается в том, что для обобщенной функции (5) первообразная является локально интегрируемой функцией (9) и она может быть подставлена в формулу (7). После подстановки получаем определенную на всей прямой функцию

$$u(x) = (-1)^s exp[sln|x| + sM\Theta(x)] = \begin{cases} \frac{1}{x^{-s}}, & x < 0; \\ (-1)^s \frac{exp[sM]}{x^{-s}}, & x > 0. \end{cases}$$

которую будем называть *формальным решением задачи Коши* с условием $u(-1) = (-1)^s$.

Обратим внимание на то, что для функции $\frac{1}{x}$ первообразная g в классическом смысле определена с точностью до двух произвольных слагаемых

$$g(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_1, & x < 0; \\ \ln|x| + C_2, & x > 0. \end{cases}$$

В этом примере внесение дополнительной информации при выборе соответствующей обобщенной функции (5) заключается в задании связи между этими постоянными – у первообразной обобщенной функции Q_M выполнено равенство $C_2 = C_1 + M$. Именно эта связь позволила однозначно построить продолжение решения на положительную полуось.

Аналогичные рассуждения применимы для любого уравнения вида (1), у которого коэффициент Q есть обобщенная функция первого порядка сингулярности. Если при этом первообразная g для Q непрерывна в точке x_0, то формула (7) задает функцию, определенную почти всюду на прямой, которую будем называть *формальным решением* задачи Коши для уравнения (1).

Например, для наиболее часто встречающегося уравнения с обобщенным коэффициентом

$$u' - a\delta u = 0$$

формальное решение задачи Коши с условием $u(-1) = 1$ есть кусочно постоянная функция

$$u(x) = exp(a\Theta(x)) = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ exp[a], & x > 0. \end{cases}$$

Обобщенные и слабые решения. Наиболее распространенный подход для введения понятия решения уравнения с обобщенными коэффициентами основан на задании семейств гладких функций, аппроксимирующих обобщенные функции, входящие в уравнение.

В случае уравнения (1) следует задать семейство гладких функций q_ε, сходящееся к обобщенной функции Q. При каждом ε задача Коши для уравнения

$$u' - q_\varepsilon u = 0,$$

имеет решение $u_\varepsilon(x)$, определенное при всех x. Если существует предел аппроксимирующих решений $u_\varepsilon(x)$, то его естественно считать решением исходного уравнения (1). Но здесь возможно рассмотрение пределов в разных смыслах, поэтому возникает несколько понятий решения. Выделим два из них.

Если семейство $u_\varepsilon(x)$ сходится к обобщенной функции u в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, то обобщенную функцию u будем называть *обобщенным решением задачи Коши* (при заданном способе аппроксимации).

Если семейство $u_\varepsilon(x)$ почти всюду сходится к функции u, то эту функцию будем называть *слабым решением задачи Коши* (при заданном способе аппроксимации).

Связь формального решения с аппроксимациями коэффициента описывается следующим образом.

Утверждение. *Пусть обобщенный коэффициент Q в уравнении (1) имеет первый порядок сингулярности, т.е. является производной локально интегрируемой функции g, непрерывной в точке x_0. Если семейство гладких функций $g_\varepsilon(x)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к g почти всюду и $g_\varepsilon(x_0) \to g(x_0)$, то решения задачи Коши для аппроксимирующих уравнений*

$$u'_\varepsilon - g'_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = 0$$

почти всюду сходятся к формальному решению (7).

Поскольку для всех естественных аппроксимаций условие утверждения выполнены, получаем, что для уравнения вида (1) слабое решение существует, не зависит от способа аппроксимации и совпадает с формальным.

Зависимость слабого решения от способа аппроксимации. Слабое решение может существовать для более сложных уравнений, но в общем случае появляется зависимость от способа аппроксимации. Для примера рассмотрим уравнение

$$u' - a\delta u = b\delta \tag{10}$$

с обобщенным коэффициентом и обобщенной правой частью.

Если $q(x)$ и $v(x)$ есть непрерывные функции, то решение задачи Коши с условием $u(x_0) = C$ для уравнения

$$u' - qu = v$$

задается формулой

$$u(x) = exp[g(x)]\left(\int\limits_{x_0}^{x} v(t)exp[-g(t)]dt + C\right), \tag{11}$$

где $g(x) = \int\limits_{x_0}^{x} q(t)dt$ – первообразная для q. В случае уравнения (10) формула (11) не имеет смысла и формальное решение не определено.

Стандартный способ аппроксимации дельта-функции семейством гладких функций задается формулой

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

где $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\int \psi(x)dx = 1$. Поскольку входящие в уравнение (10) две дельта-функции играют разную роль, зададим для них аппроксимации, порожденные разными функциями ψ и γ, т.е. рассмотрим семейство аппроксимирующих уравнений

$$u'_\varepsilon(x) - a\psi_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = b\gamma_\varepsilon(x).$$

Если обозначить

$$\Psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \psi(t)dt,$$

то первообразными для ψ_ε являются функции $\Psi(\frac{x}{\varepsilon})$. Согласно (11), решения задачи Коши с условием $u(-1) = 1$ для аппроксимирующих уравнений задаются формулой

$$u_\varepsilon(x) = exp\left[a\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\left(\int\limits_{-1}^{x} \frac{b}{\varepsilon}\gamma\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)exp\left[-a\Psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]dt + 1\right) =$$

$$= exp\left[a\Psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]\left(\int\limits_{-1/\varepsilon}^{x/\varepsilon} b\gamma(\tau)exp[-a\Psi(\tau)]d\tau + 1\right).$$

Переходя к пределу получаем слабое решение

$$u(x = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ e^a[bS + 1], & x > 0, \end{cases}$$

где

$$S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau)exp[-a\Psi(\tau)]d\tau$$

и это число зависит от выбранных аппроксимаций.

В этом примере формальное решение не определено, а слабое зависит от способа аппроксимации обобщенных компонент в уравнении.

Это подтверждает то, что переход к уравнениям с обобщенными коэффициентами в общем случае не приводит к однозначному продолжению решения через особенность, а выбор способа аппроксимации есть внесение дополнительной информации, позволяющей, в частности, однозначно продолжить решение через особую точку.

Аналитические решения. Отметим еще один подход к продолжению решения уравнения (3) через особую точку, основанный на том, что коэффициент в (3) является аналитической функцией. Рассмотрим на комплексной плоскости соответствующее уравнение

$$\frac{du(z)}{dz} - \frac{s}{z}u(z) = 0, \tag{12}$$

Решение задачи Коши для него является аналитической функцией, которая на отрицательной полупрямой совпадает с классическим решением, поэтому продолжением на положительную полуось можно считать значение этого аналитического решения на положительной полуоси.

Но при нецелых значениях s решение уравнения (12) является многозначной функцией и ее значения на положительной полуоси не определены однозначно. Поэтому естественно выделить случай целых s, для которых определены *однозначные аналитические решения.*

Проблема существования обобщенного решения. Основная сложность в этой тематике связана с вопросом о сходимости в пространстве обобщенных функций семейства решений аппроксимирующих уравнений.

Существенным отличием рассмотренных примеров является то, что в случае уравнений, где слабое решение является локально интегрируемой функцией, более детальный анализ показывает, что слабое решение является и обобщенным. Для уравнения (6) это выполнено при $s > 0$, но при $s < 0$ слабое решение не является локально интегрируемой функций, ей соответствует s-параметрическое семейство обобщенных функций, которые могут служить кандидатами на обобщенные решения. Поскольку невозможно с помощью подстановки в уравнение непосредственно проверить, какие из них являются решениями, обобщенное решение понимается в смысле приведенного определения и на первый план выходит вопрос о существовании предела семейства решений аппроксимирующих уравнений.

При исследовании модельных уравнений было обнаружено, что такая сходимость не является общим фактом, а имеет место только при специальных значениях параметра M. В частности, при $s = -1$ это те и только те значения M, при которых формальное решение совпадает с аналитическим. Таким образом, существование обобщенного решения даже для простейших уравнений с обобщенными коэффициентами связано с достаточно тонкими свойствами коэффициента Q.

3. Уравнения с мероморфными коэффициентами.

Системы. Естественным обобщением рассмотренного выше уравнения (1) являются системы вида

$$U' - B\frac{1}{x}U = 0, \tag{13}$$

где B – заданная постоянная матрица. Такой системе соответствует система на комплексной плоскости

$$U' - B\frac{1}{z}U = 0, \tag{14}$$

где B – заданная постоянная матрица. Здесь, как и в случае модельного примера, выделим случай, когда система имеет однозначное аналитическое решение. При записи матрицы B в форме Жордана решения строятся независимо для компонент, соответствующих каждой клетке Жордана. Если клетка Жордана одномерна, то, как было отмечено выше, решение является однозначной функцией только тогда, когда соответствующее собственное значение есть целое число. А если матрица B является клеткой Жордана размерности большей 1, то, как показано, например в [9], решение содержит множители, являющиеся полиномами от логарифма, и является многозначной функцией. Отсюда получаем

Утверждение. *Решения системы* (14) *являются однозначными аналитическими вектор-функциями тогда и только тогда, когда собственные значения матрицы* B *целые и простые (все клетки Жордана одномерны).*

Матрица, удовлетворяющая условиям утверждения, приводится к диагональному виду. Поэтому система (13) распадается на скалярные уравнения вида (3), которые уже исследованы.

Скалярные уравнения с мероморфными коэффициентами. Другим обобщением являются уравнения, у которых коэффициенты являются мероморфными функциями. Исследование таких уравнений является целью данной работы.

Напомним, что аналитическая функция называется *мероморфной в области* D*,* если она не имеет других особых точек, кроме полюсов. Это эквивалентно тому, что она представима в виде отношения двух функций, гомоморфных (не имеющих особенностей) в D [10]. Ниже нас интересует случай, когда D есть односвязная окрестность вещественной оси.

Поскольку в модельном примере оказалось, что существование обобщенных решений связано с существованием однозначного аналитического решения, выясним, для каких мероморфных функций q существует мероморфное решение уравнения

$$\frac{du(z)}{dz} - q(z)u(z) = 0. \tag{15}$$

Заметим, что существование мероморфного решения уравнения (15) равносильно возможности представления $q = \frac{u'}{u}$, т.е. тому, что q является логарифмической производной от мероморфной функции.

На всей комплексной плоскости функция $q(z)$ является логарифмической производной рациональной функции тогда и только тогда, когда она является правильной рациональной, имеет полюса только первого порядка и вычеты в полюсах являются целыми числами. Такая функция представляется в виде суммы элементарных дробей

$$q(z) = \sum_{k=1}^{N_0} \frac{s_k}{z - a_k}, \tag{16}$$

где числа s_k – целые. Для такой $q(z)$ решения уравнения (15) есть рациональные функции

$$u(z) = const\frac{P^+(z)}{P^-(z)},$$

где

$$P^+(z) = \prod_{s_k>0}(z - a_k)^{s_k}, \quad P^-(z) = \prod_{s_k<0}(z - a_k)^{-s_k}.$$

Но в произвольной области D функция, удовлетворяющая сформулированным условиям (имеет в области полюса только первого порядка и вычеты в полюсах являются целыми числами), может не быть логарифмической производной. Это видно на примере функции $q(z) = \frac{3z-1}{2z(z-1)}$ в кольце $D = \{\lambda : 1/2 < |\lambda| < 2\}$.

Отметим одно отличие свойств мероморфной функции от свойств рациональной. Если

$$q(z) = \frac{v(z)}{w(z)},$$

где $v(z)$, $w(z)$ – голоморфные в D функции, не имеющие общих нулей, и функция $w(z)$ имеет нули только первого порядка, то аналогом суммы (16) является ряд

$$q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k}{z - a_k}.$$

Но такой ряд может оказаться расходящимся и для мероморфной функции, согласно теореме Миттаг-Леффлера [10], возможно только представление в несколько более сложном виде

$$q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{s_k}{z - a_k} - P_k(z) \right] + b_D(z),$$

где $P_k(z)$ – некоторые полиномы, а $b_D(z)$ – голоморфная функция. Такой более сложный вид усложняет анализ соответствующих уравнений.

Приведем описание мероморфных функций, являющихся логарифмическими производными и их представление, удобное для вычислений, связанных с построением обобщенных решений.

Теорема 1. *Пусть в односвязной области D задана мероморфная функция*

$$q(z) = \frac{v(z)}{w(z)}, \tag{17}$$

где $v(z)$, $w(z)$ – голоморфные в D функции, не имеющие общих нулей, $w(a_k) = 0$ и $w(z_0) \neq 0$. У уравнения (15) существует мероморфное в D решение задачи Коши с условием $u(z_0) = C$ тогда и только тогда, когда при представлении (17) функция $w(z)$ имеет в точках a_k нули только первого порядка и все числа $s_k = v(a_k)$ целые. При этом если $s_k < 0$, то мероморфное решение $u(z)$ имеет в точке a_k полюс порядка $-s_k$, а при $s_k > 0$ – нуль порядка s_k.

Доказательство. Обозначим через $N_f = \{a : f(a) = 0\}$ множество нулей функции $f(z)$. Если уравнение (15) имеет в произвольной области D мероморфное решение

$$u(z) = \frac{V(z)}{W(z)},$$

то

$$q = \frac{u'}{u} = \frac{WV' - W'V}{WV}$$

и q является мероморфной функцией, имеющей особенности в точках из $N_W \cup N_V$.

Если $u(z)$ имеет в точке a полюс порядка m, то $u(z) = \frac{b(z)}{(z-a)^m}$, где функция $b(z) = (z-a)^m u(z)$ голоморфна в окрестности точки a, причем $b(a) \neq 0$. Такое же представление, т.е. $\frac{b(z)}{(z-a)^m}$, имеет функция, у которой в точке a нуль порядка $-m$. Поэтому

$$q(z) = \frac{u'(z)}{u(z)} = \frac{b'(z)(z-a)^m - mb(z)(z-a)^{m-1}}{(z-a)^{2m}} \cdot \frac{(z-a)^m}{b(z)} =$$

$$= \frac{b'(z)(z-a) - mb(z)}{b(z)(z-a)} = \frac{\frac{b'(z)}{b(z)}(z-a) - m}{z-a}.$$

При представлении (17) получаем, что $v(z) = \frac{\frac{b'(z)}{b(z)}(z-a)-m}{z-a}$, откуда $v(a) = -m$. Таким образом сформулированное условие на функцию q необходимо в любой области.

Проверим, что это условие достаточно, причем, как следует их приведенного выше примера, здесь существенна односвязность области. Пусть для мероморфной функции q выполнены условия из теоремы и пусть $\gamma(z_0, z)$ есть произвольная кривая, соединяющая точку z_0 с точкой z, лежащая в D и не проходящая через полюса a_k. Покажем, что выражение

$\exp\left(\int\limits_{\gamma(z_0,z)} q\,(t)\,dt\right)$ не зависит от пути интегрирования и формула

$$u(z) = C\exp\left(\int\limits_{\gamma(z_0,z)} q\,(t)\,dt\right) \tag{18}$$

задает однозначную функцию $u\,(z)$, которая и является искомым решением.

Пусть $\gamma_0(t):[0,1]\to D$, $\gamma_0(0)=z_0$, $\gamma_0(1)=z$, и $\gamma_1(t):[0,1]\to D$, $\gamma_1(0)=z_0$, $\gamma_1(1)=z$, есть два пути в D, соединяющие z_0 и фиксированную точку z, не проходящие через полюса функции q. По определению односвязности области эти пути гомотопны, т.е. существует семейство путей γ_τ, $0\le\tau\le 1$ в D, непрерывно зависящее от τ, соединяющее γ_0 с γ_1. Непрерывность означает, что непрерывна функция двух переменных $\Gamma(t,\tau):[0,1]\times[0,1]\to D$, заданная формулой $\Gamma(t,\tau)=\gamma_\tau(t)$.

Образ квадрата $[0,1]\times[0,1]$ при отображении Γ есть компактное односвязное множество в D и, следовательно, содержит только конечное число полюсов a_k. Существует окрестность Ω этого множества, которая не содержит других полюсов. В такой окрестности q представляется в виде

$$q(z) = \sum_{a_k\in\Omega}\frac{v(a_k)}{z-a_k} + b_\Omega(z),$$

где функция $b_\Omega(z)$ голоморфна в Ω. Пусть

$$f_\tau(z) = \int\limits_{\gamma_\tau} q(t)dt = \int\limits_{\gamma_\tau}\left[\sum_{a_k\in\Omega}\frac{v(a_k)}{t-a_k} + b_\Omega(t)\right]dt.$$

Так как пути γ_0 и γ_1 гомотопны в области голоморфности функции $b_\Omega(z)$, интегралы от $b_\Omega(t)$ в этих выражениях совпадают. Но интеграл от слагаемого $\frac{v(a_k)}{t-a_k}$ не существует при тех значениях τ, при которых путь γ_τ проходит через точку a_k, имеет в этих точках скачки и зависит от пути интегрирования. При этом разность

$$\int\limits_{\gamma_0}\frac{v(a_k)}{t-a_k}dt - \int\limits_{\gamma_1}\frac{v(a_k)}{t-a_k}dt$$

есть интеграл по замкнутому контуру, его значение выражается через вычет в точке a_k и это число вида $2\pi i\,[v(a_k)n_k]$, где целое число n_k определяется по тому, сколько раз замкнутый контур обходит точку a_k. Ввиду того что числа $v(a_k)$ целые, после вычисления экспоненты получаем, что выполнено требуемое равенство $exp[f_0(z)] = exp[f_1(z)]$ и формула (18) задает однозначно определенное во всей области решение $u(z)$. Так как

$$exp\left[\int\limits_{\gamma_\tau}\frac{v(a_k)}{t-a_k}dt\right] = (z-a_k)^{v(a_k)},$$

которое является мероморфной функцией. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть q есть мероморфная функция, удовлетворяющая в односвязной области D условиям теоремы* 1. *В каждой подобласти Ω из D, содержащей конечное число полюсов функции q, эта функция представляется в виде*

$$q(z) = \sum_{a_k\in\Omega}\frac{s_k}{z-a_k} + b_\Omega(z),$$

где числе s_k *целые, а функция* $b_\Omega(z)$ *голоморфна в* Ω. *При этом мероморфное решение уравнения* (15), *удовлетворяющее условию* $u(z_0) = C$, $z_0 \in \Omega$, *имеет вид*

$$u_{mer}(z) = \frac{C}{w(z_0)} w(z) B_\Omega(z), \tag{19}$$

где

$$w(z) = \prod_{a_k \in \Omega} (z - a_k)^{s_k}, \ B_\Omega(z) = exp\left(\int\limits_{\gamma(z_0,z)} b_\Omega(t)dt \right).$$

Формальные решения уравнения с мероморфным коэффициентом. Пусть q есть мероморфная функция, имеющая на прямой полюсы первого порядка в точках a_k и такая, что при представлении (17) числа $v(a_k)$ целые. Как и в модельном примере, формула

$$\int q(x)\varphi(x)dx$$

задает линейный ограниченный функционал не на всем пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, а только на подпространстве $\mathcal{D}_q(\mathbb{R})$, состоящем из таких φ , что $\varphi(a_k) = 0$ для всех a_k . Интересующие нас функционалы Q есть его продолжения на все пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Множество таких продолжений зависит от бесконечного числа параметров, получим удобное для дальнейшего выражение для таких функционалов Q .

Рассмотрим расширяющуюся последовательность интервалов $(-N;\ N)$ и обозначим через $\mathcal{D}_N(\mathbb{R})$ подпространство, состоящее из φ , у которых носитель принадлежит $(-N;\ N)$.

Рассматриваемая функция q на $(-N;\ N)$ представляется в виде

$$q = \sum_{|a_k|<N} \frac{s_k}{x - a_k} + b_N(x). \tag{20}$$

Поскольку функции $\frac{1}{x-a_k}$ соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций

$$P\left(\frac{1}{x - a_k}\right) + M_k \delta_{a_k},$$

функции q вида (20) соответствует семейство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}_N(\mathbb{R})$ вида

$$Q_N = \sum_{|a_k|<N} s_k \left[P\left(\frac{1}{x - a_k}\right) + M_k \delta_{a_k} \right] + b_N(x), \tag{21}$$

где M_k – произвольные комплексные числа.

Функционал Q_{N+1}, определенный формулой (21) на более широком пространстве $\mathcal{D}_{N+1}(\mathbb{R})$, на $\mathcal{D}_N(\mathbb{R})$ совпадает с Q_N, поэтому при заданных M_k получаем функционал Q, определенный на всем пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \cup \mathcal{D}_N(\mathbb{R})$.

Будем считать, что точка $x_0 \in (-N;\ N)$ и $x_0 \neq a_k$. Первообразная для функционала Q является локально интегрируемой функцией, которая на $(-N;\ N)$ представляется в виде

$$g(x) = \sum_{|a_k|<N} s_k \ln|x - a_k| + \sum_{|a_k|<N} s_k M_k \Theta(x - a_k) + \int\limits_{x_0}^{x} b_N(t)dt.$$

Поэтому, как и выше, при заданном обобщенном коэффициенте определено формальное решение по формуле (7).

При целых s_k для рассматриваемой функции q существует мероморфное решение (19).

Теорема 2. *При рассматриваемом коэффициенте Q вида (21) формальное решение $u(x)$ задачи Коши с условием $u(x_0) = C$ имеет на интервале $(-N;\ N)$ вид произведения*

$$u(x) = u_{mer}(x)\frac{S(x)}{S(x_0)}, \tag{22}$$

где $u_{mer}(x)$ есть мероморфное решение, заданное формулой (19), *а*

$$S(x) = \prod_{-N<a_k<x} (-1)^{s_k} e^{s_k M_k} \tag{23}$$

есть кусочно постоянная функция, которая имеет скачки только в тех точках a_k, где

$$e^{s_k M_k} \neq (-1)^{s_k}.$$

Доказательство заключается в непосредственном вычислении экспоненты.

4. Решения аппроксимирующих уравнений. Перейдем к рассмотрению уравнений вида (1), где Q есть обобщенная функция описанного выше вида, соответствующая мероморфной функции q. Чтобы применить общий подход, основанный на аппроксимации коэффициента, воспользуемся одним из наиболее естественных способов аппроксимации, называемым *аналитическим представлением обобщенной функции* [11].

Говорят, что пара функций $Q^{+}(z)$ и $Q^{-}(z)$, где функция Q^{+} является аналитической в верхней полуплоскости, а функция Q^{-} – в нижней полуплоскости, задает аналитическое представление обобщенной функции Q, если

$$Q = \lim_{\varepsilon\to 0}[Q^{+}(x+i\varepsilon) - Q^{-}(x-i\varepsilon)],$$

где предел понимается в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций.

Распределение, в аналитическом представлении которого функции $Q^{\pm}$ являются рациональными, называется *рациональным.*

Для распределения $P\left(\frac{1}{x}\right)$ соответствующее аппроксимирующее семейство есть

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon}\right] = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2},$$

а для δ-функции – семейство

$$\frac{i}{2\pi}\left[\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Так как $b_N(x)$ есть гладкая функция, для нее не требуется стоить аппроксимации. Поэтому на интервале $(-N;\ N)$ аппроксимирующее семейство для распределения (21) может быть записано в виде

$$q_{\varepsilon_N}(x) = \sum_{|a_k|<N} \frac{\lambda_k s_k}{x+i\varepsilon-a_k} + \sum_{|a_k|<N} \frac{(1-\lambda_k)s_k}{x-i\varepsilon-a_k} + b_N(x), \tag{24}$$

где $\lambda_k = \frac{1}{2} + \frac{M_k i}{2\pi}$.

Обозначим через $q_{\varepsilon_{N+1}}(x)$ аппроксимирующее семейство для распределения (21) на $(-N-1;\ N+1)$. На интервале $(-N;\ N)$ разность $q_{\varepsilon_{N+1}}(x) - q_{\varepsilon_N}(x)$ равномерно стремится к нулю и аналитически зависит от ε.

Теорема 3. *Решения задачи Коши с условием* $u(x_0)=C$ *для аппроксимирующих уравнений*

$$u'_\varepsilon(x)-q_\varepsilon(x)\,u_\varepsilon(x)=0 \tag{25}$$

при аппроксимации (24) *коэффициента* (21) *на интервале* $(-N;\ N)$ *представляются в виде*

$$u_{\varepsilon_N}(x)=CB_N(x)\prod_{|a_k|<N}\left(\frac{x_0-a_k-i\varepsilon}{x-i\varepsilon-a_k}\right)^{-s_k}\left(\frac{x-i\varepsilon-a_k}{x+i\varepsilon-a_k}\cdot\frac{x_0-a_k+i\varepsilon}{x_0-a_k-i\varepsilon}\right)^{-\lambda_k s_k} \tag{26}$$

и при этом функции $u_{\varepsilon_N}(x)$ *ограничены* $const$ *в окрестности каждой точки* a_k, *где* $s_k>0$, *а в окрестности каждой точки* a_k, *где* $s_k<0$, *имеют место оценки*

$$|u_{\varepsilon_N}(x)|\le\frac{const}{|x-a_k|^{-s_k}} \tag{27}$$

и

$$|u_{\varepsilon_N}(x)|\le\frac{const}{\varepsilon^{-s_k}}. \tag{28}$$

При $x\ne a_k$ *функции* $u_{\varepsilon_N}(x)$ *точечно сходятся на интервале* $(-N;\ N)$ *к формальному решению* (22), *при этом сходимость равномерная вне любой окрестности указанных точек.*

Доказательство. Пусть n_N – число указанных точек a_k на интервале $(-N;\ N)$, а функция $\widetilde{B_N}(x)$ – первообразная для $b_N(x)$. Для функции

$$\frac{1}{x\pm i\varepsilon}=\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\mp i\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

первообразная имеет вид

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\varepsilon^2\right)\mp i\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon}.$$

Для функции

$$\frac{1}{x\pm i\varepsilon-a_k}=\frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+\varepsilon^2}\mp i\frac{\varepsilon}{(x-a_k)^2+\varepsilon^2}$$

первообразной является

$$\frac{1}{2}\ln\left((x-a_k)^2+\varepsilon^2\right)\mp i\,\mathrm{arctg}\frac{x-a_k}{\varepsilon}.$$

Следовательно, одной из первообразных для $q_{\varepsilon_N}(x)$ является функция

$$G_{\varepsilon_N}(x)=\sum_{|a_k|<N}\lambda_k s_k\left[\frac{1}{2}\ln\left((x-a_k)^2+\varepsilon^2\right)-i\,\mathrm{arctg}\frac{x-a_k}{\varepsilon}\right]+$$

$$+\sum_{|a_k|<N}(1-\lambda_k)\,s_k\left[\frac{1}{2}\ln\left((x-a_k)^2+\varepsilon^2\right)+i\,\mathrm{arctg}\frac{x-a_k}{\varepsilon}\right]+\widetilde{B_N}(x).$$

Решения аппроксимирующих уравнений есть

$$u_{\varepsilon_N}(x)=Ce^{G_{\varepsilon_N}(x)-G_{\varepsilon_N}(x_0)}.$$

Представим экспоненту в более явном виде. Пусть $arg(x+iy)$ есть непрерывная ветвь аргумента комплексного числа $x+iy$, определенная на комплексной плоскости с выброшенной положительной действительной полуосью и принимающую значения на интервале $(0;2\pi)$. Тогда

$$\arg(x+i\varepsilon)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{x}{\varepsilon},$$

$$\arg(x-i\varepsilon)=\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{x}{\varepsilon}.$$

И тогда

$$G_{\varepsilon_N}(x)=\sum_{|a_k|<N}s_k\left[\ln|x-i\varepsilon-a_k|+i\,\arg(x-i\varepsilon-a_k)-\frac{3\pi}{2}i\right]+$$

$$+\sum_{|a_k|<N}\lambda_k s_k\left[\ln|x+i\varepsilon-a_k|+i\,\arg(x+i\varepsilon-a_k)-\frac{\pi}{2}i\right]-$$

$$-\sum_{|a_k|<N}\lambda_k s_k\left[\ln|x-i\varepsilon-a_k|+i\,\arg(x-i\varepsilon-a_k)-\frac{3\pi}{2}i\right]+\widetilde{B_N}(x).$$

Так как равенство $\operatorname{Ln}(x+iy)=\ln|x+iy|+i\,\arg(x+iy)$ задает непрерывную ветвь логарифма комплексного числа, то после преобразований G_{ε_N} можно записать в виде

$$G_{\varepsilon_N}(x)=\sum_{|a_k|<N}s_k\operatorname{Ln}(x-i\varepsilon-a_k)+\sum_{|a_k|<N}\lambda_k s_k\left[\operatorname{Ln}\frac{x+i\varepsilon-a_k}{x-i\varepsilon-a_k}+\pi i\right]-\sum_{k=1}^{n_N}s_k\frac{3\pi}{2}i+\widetilde{B_N}(x).$$

Получаем выражение для экспонент

$$e^{G_{\varepsilon_N}(x)}=e^{\widetilde{B_N}(x)}\prod_{|a_k|<N}i^{s_k}(-1)^{\lambda_k s_k}\left(\frac{1}{x-i\varepsilon-a_k}\right)^{-s_k}\left(\frac{x-i\varepsilon-a_k}{x+i\varepsilon-a_k}\right)^{-\lambda_k s_k}.$$

Обозначим

$$z_k=z_k(x,\varepsilon)=\exp\left(-\operatorname{Ln}\left[\frac{x+i\varepsilon-a_k}{x-i\varepsilon-a_k}\right]\right)=\frac{x-i\varepsilon-a_k}{x+i\varepsilon-a_k},$$

$$w_{\varepsilon_N}(x)=\prod_{|a_k|<N}\left(\frac{1}{x-i\varepsilon-a_k}\right)^{-s_k},$$

$$W_{\varepsilon_N}(x)=w_{\varepsilon_N}(x)\prod_{|a_k|<N}[z_k(x,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k}.$$

Учитывая то, что

$$B_N(x)=exp\left[\int_{x_0}^{x}b_N(t)dt\right]=e^{\widetilde{B_N}(x)-\widetilde{B_N}(x_0)},$$

можем записать

$$u_{\varepsilon_N}(x)=CB_N(x)\frac{W_{\varepsilon_N}(x)}{W_{\varepsilon_N}(x_0)}.\tag{29}$$

Отметим, что если число $\lambda_k s_k$ целое, то степень $z_k^{-\lambda_k s_k}$ определена однозначно, а при нецелом $\lambda_k s_k$ функции $z_k^{-\lambda_k s_k}$ многозначны. Но здесь $|z_k(x,\varepsilon)|=1$ и z_k представляется в виде $z_k(x,\varepsilon)=e^{i\tau_k(x,\varepsilon)}$. Поэтому выражение $z_k^{-\lambda_k s_k}$ определено однозначно по формуле $z_k^{-\lambda_k s_k}=e^{-i\lambda_k s_k\tau_k(x,\varepsilon)}$.

Оценки (27) и (28) очевидным образом следуют из (29).

Найдём предел в смысле точечной сходимости рассматриваемого семейства функций. Для этого рассмотрим

$$z_k(x,\varepsilon)=\frac{x-i\varepsilon-a_k}{x+i\varepsilon-a_k}=\frac{(x-a_k)^2-\varepsilon^2}{(x-a_k)^2+\varepsilon^2}-2i\varepsilon\frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+\varepsilon^2}.$$

Если $x \neq a_k$ в окрестности точки a_k, то при $\varepsilon \to 0$ значения $z_k(x,\varepsilon)$ стремятся к 1, причем сходимость неравномерная в окрестности точки a_k, так как $z_k(a_k,\varepsilon) \to -1$. При этом, если $x < a_k$, то $\operatorname{Im}(z_k(x,\varepsilon)) > 0$ и значения $z_k(x,\varepsilon)$ стремятся к 1 из верхней полуплоскости, поэтому аргумент $\tau_k(x,\varepsilon)$ стремится к нулю, $\lambda_k s_k \tau_k(x,\varepsilon)$ также стремится к нулю и $[z_k(x,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k}$ стремится к 1.

Но если $x > a_k$ в окрестности точки a_k, то $\operatorname{Im}(z_k(x,\varepsilon)) < 0$ и значения $z_k(x,\varepsilon)$ стремятся к 1 из нижней полуплоскости, аргумент $\tau_k(x,\varepsilon)$ стремится к 2π, $\lambda_k s_k \tau_k(x,\varepsilon) \to \lambda_k s_k 2\pi$ и $[z_k(x,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k}$ стремится к $e^{-i2\pi\lambda_k s_k}$. Поэтому в окрестности точки a_k

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [z_k(x,\,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k} = \begin{cases} 1, & x < a_k; \\ e^{-i2\pi\lambda_k s_k}, & x > a_k. \end{cases}$$

Так как $e^{-i2\pi\lambda_k s_k} = (-1)^{s_k} e^{s_k M_k}$, то

$$\prod_{|a_k|<N} [z_k(x,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k} \to \prod_{-N<a_k<x} (-1)^{s_k} e^{s_k M_k} = S(x),$$

т.е. $\prod\limits_{|a_k|<N} [z_k(x,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k}$ сходится к функции, заданной формулой (23). Тогда

$$\frac{\prod\limits_{|a_k|<N} [z_k(x,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k}}{\prod\limits_{|a_k|<N} [z_k(x_0,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k}} \to \frac{S(x)}{S(x_0)}.$$

Следовательно, при $x \neq a_k$, $k = \overline{1,\, n_N}$ семейство $u_\varepsilon(x)$ точечно сходится к формальному решению (22), причем вне окрестностей точек a_k сходимость равномерная.

Учитывая обозначения, можем записать

$$u_{\varepsilon_N}(x) = C e^{\widetilde{B_N}(x) - \widetilde{B_N}(x_0)} \prod_{|a_k|<N} \left(\frac{x_0 - a_k - i\varepsilon}{x - i\varepsilon - a_k} \right)^{-s_k} \left[\frac{z_k(x,\varepsilon)}{z_k(x_0,\varepsilon)} \right]^{-\lambda_k s_k} \tag{30}$$

или

$$u_{\varepsilon_N}(x) = C B_N(x) \prod_{|a_k|<N} \left(\frac{x_0 - a_k - i\varepsilon}{x - i\varepsilon - a_k} \right)^{-s_k} \left(\frac{x - i\varepsilon - a_k}{x + i\varepsilon - a_k} \cdot \frac{x_0 - a_k + i\varepsilon}{x_0 - a_k - i\varepsilon} \right)^{-\lambda_k s_k}.$$

В частности, если числа $\lambda_k s_k$ целые, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} [z_k(x,\,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k} = 1$, $x \neq a_k$, а тогда $u_{\varepsilon_N}(x)$ точечно сходится к мероморфной функции

$$C B_N(x) \prod_{|a_k|<N} \left(\frac{x_0 - a_k}{x - a_k} \right)^{-s_k} = C B_N(x) \frac{w(x)}{w(x_0)}.$$

Если хотя бы одно число $\lambda_k s_k$ $(k = \overline{1,\, n_N})$ не является целым, то $u_{\varepsilon_N}(x)$ точечно сходится к функции

$$C B_N(x) \frac{w(x)}{w(x_0)} \frac{S(x)}{S(x_0)},$$

где $S(x)$ имеет скачки только в тех точках a_k, для которых $\lambda_k s_k$ не является целым. Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы следует, что при аппроксимации на большем интервале $(-N-1;\ N+1)$ решения $u_{\varepsilon_{N+1}}(x)$ задачи Коши с условием $u(x_0) = C$ для аппроксимирующих уравнений (25) также, как и $u_{\varepsilon_N}(x)$, точечно сходятся на интервале $(-N;\ N)$ к формальному решению (22).

Для дальнейшего исследования опишем более детально взаимосвязь между $u_{\varepsilon_{N+1}}(x)$ и $u_{\varepsilon_N}(x)$.

Лемма 1. *На интервале* $(-N;\ N)$ *справедливо равенство*

$$u_{\varepsilon_{N+1}}(x) = u_{\varepsilon_N}(x)\frac{k(x,\varepsilon)}{k(x_0,\varepsilon)},$$

где $k(x,\varepsilon)$ *– семейство функций, которые на* $(-N;\ N)$ *гладкие, аналитически зависят от* ε *и при* $\varepsilon \to 0$ *сходятся к* 1.

Доказательство. При переходе к интервалу $(-N-1;\ N+1)$ получим

$$G_{\varepsilon_{N+1}}(x) = \sum_{|a_k|<N+1} s_k \mathrm{Ln}\,(x - i\varepsilon - a_k) + \sum_{|a_k|<N+1} \lambda_k s_k \left[\mathrm{Ln}\frac{x + i\varepsilon - a_k}{x - i\varepsilon - a_k} + \pi i\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{n_{N+1}} s_k \frac{3\pi}{2} i + \widetilde{B_{N+1}}(x).$$

Тогда

$$u_{\varepsilon_{N+1}}(x) = Ce^{\widetilde{B_{N+1}}(x) - \widetilde{B_{N+1}}(x_0)} \prod_{|a_k|<N} \left(\frac{x_0 - a_k - i\varepsilon}{x - i\varepsilon - a_k}\right)^{-s_k} \left(\frac{x - i\varepsilon - a_k}{x + i\varepsilon - a_k}\cdot\frac{x_0 - a_k + i\varepsilon}{x_0 - a_k - i\varepsilon}\right)^{-\lambda_k s_k} \times$$

$$\times \prod_{N<|a_k|<N+1} \left(\frac{x_0 - a_k - i\varepsilon}{x - i\varepsilon - a_k}\right)^{-s_k} \left(\frac{x - i\varepsilon - a_k}{x + i\varepsilon - a_k}\cdot\frac{x_0 - a_k + i\varepsilon}{x_0 - a_k - i\varepsilon}\right)^{-\lambda_k s_k}.$$

Так как

$$B_N(x) = e^{\widetilde{B_N}(x) - \widetilde{B_N}(x_0)} = e^{\widetilde{B_{N+1}}(x) - \widetilde{B_{N+1}}(x_0)} \prod_{N<|a_k|<N+1} \left(\frac{x_0 - a_k}{x - a_k}\right)^{-s_k},$$

то

$$u_{\varepsilon_{N+1}}(x) = CB_N(x) \prod_{|a_k|<N} \left(\frac{x_0 - a_k - i\varepsilon}{x - i\varepsilon - a_k}\right)^{-s_k} \left(\frac{x - i\varepsilon - a_k}{x + i\varepsilon - a_k}\cdot\frac{x_0 - a_k + i\varepsilon}{x_0 - a_k - i\varepsilon}\right)^{-\lambda_k s_k} \times$$

$$\times \prod_{N<|a_k|<N+1} \left(\frac{x - a_k}{x_0 - a_k}\right)^{-s_k} \prod_{N<|a_k|<N+1} \left(\frac{x_0 - a_k - i\varepsilon}{x - i\varepsilon - a_k}\right)^{-s_k} \left(\frac{x - i\varepsilon - a_k}{x + i\varepsilon - a_k}\cdot\frac{x_0 - a_k + i\varepsilon}{x_0 - a_k - i\varepsilon}\right)^{-\lambda_k s_k}.$$

Следовательно,

$$u_{\varepsilon_{N+1}}(x) = u_{\varepsilon_N}(x) \prod_{N<|a_k|<N+1} \left(\frac{x_0 - a_k - i\varepsilon}{x - i\varepsilon - a_k}\cdot\frac{x - a_k}{x_0 - a_k}\right)^{-s_k} \left(\frac{x - i\varepsilon - a_k}{x + i\varepsilon - a_k}\cdot\frac{x_0 - a_k + i\varepsilon}{x_0 - a_k - i\varepsilon}\right)^{-\lambda_k s_k}.$$

Обозначим

$$k(x,\varepsilon) = \prod_{N<|a_k|<N+1} \left(\frac{x - a_k}{x - i\varepsilon - a_k}\right)^{-s_k} \left(\frac{x - i\varepsilon - a_k}{x + i\varepsilon - a_k}\right)^{-\lambda_k s_k}.$$

На интервале $(-N;\ N)$ функции семейства $k(x,\varepsilon)$ не имеют особенностей. Они являются однозначно определенными гладкими функциями, аналитически зависят от ε и при $\varepsilon \to 0$ стремятся к 1. Получаем требуемое.

Лемма показывает, что на каждом интервале задана своя аппроксимация и при переходе от интервала к большему интервалу аппроксимации будут хорошо согласованы.

5. Существование обобщенных решений. Основную сложность представляет исследование сходимости аппроксимирующих решений $u_{\varepsilon_N}(x)$ в пространстве обобщенных функций. Согласно (30), семейство $u_{\varepsilon_N}(x)$ представлено в виде произведения семейств, сходящихся в пространстве распределений. Действительно, для произвольного k при $s_k < 0$ семейство $\left(\frac{1}{x-i\varepsilon-a_k}\right)^{-s_k}$ сходится к распределению $\left(\frac{1}{x-a_k-i0}\right)^{n}$, а семейство $[z_k(x,\varepsilon)]^{-\lambda_k s_k}$ сходится к кусочно-постоянной функции (23). Проблема умножения распределений связана с тем, что из сходимости сомножителей не следует сходимость их произведения в пространстве распределений. В частности, даже если один из сомножителей равномерно сходится к гладкой функции, то предел произведения может не существовать, а если существует, то может не быть равен произведению пределов.

Ниже показано, что сходимость имеет место при дополнительных условиях.

Лемма 2. *Если семейство функций $v_\varepsilon(x)$ сходится к обобщенной функции V в смысле теории распределений и существует число M такое, что выполняется оценка*

$$v_\varepsilon(x) \le \frac{const}{\varepsilon^M},$$

а семейство гладких функций $f_\varepsilon(x)$ аналитически зависит от ε и при $\varepsilon \to 0$ сходится к $f(x)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x) = V \cdot f(x),$$

т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(x) \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x).$$

Доказательство. Семейство $f_\varepsilon(x)$ допускает разложение по степеням ε с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами:

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n(x)}{n!}\varepsilon^n,$$

где $f_n(x)$ – значение производной n-го порядка функции $f_\varepsilon(x)$ по ε, вычисленное при $\varepsilon = 0$. Тогда

$$v_\varepsilon(x)\cdot f_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(x)\left(f(x) + \varepsilon f_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} f_2(x) + ... + \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(x) + ...\right).$$

Рассмотрим

$$\left| v_\varepsilon(x)\cdot f_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)\left(f(x) + \varepsilon f_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} f_2(x) + ... + \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(x)\right)\right| =$$

$$= \left| v_\varepsilon(x)\left[f_\varepsilon(x) - \left(f(x) + \varepsilon f_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} f_2(x) + ... + \frac{\varepsilon^n}{n!} f_n(x)\right)\right]\right| \le \frac{\varepsilon^{n+1} const}{\varepsilon^M}.$$

Так как $\frac{\varepsilon^{n+1} const}{\varepsilon^M} \to 0$ при $n = M$ и $\varepsilon \to 0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(v_\varepsilon(x) f(x) + \varepsilon v_\varepsilon(x) f_1(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} v_\varepsilon(x) f_2(x) + ... + \frac{\varepsilon^M}{M!} v_\varepsilon(x) f_M(x)\right).$$

Для любого целого k функция $f_k(x)$ бесконечно дифференцируемая, не зависящая от ε. Значит, при $\varepsilon \to 0$ в пространстве распределений

$$v_\varepsilon(x) f_k(x) \to V \cdot f_k(x),$$

т.е. интегралы

$$\int v_\varepsilon(x) f_k(x)\varphi(x)dx$$

имеют конечный предел. Все слагаемые вида $\frac{\varepsilon^k}{k!}v_\varepsilon(x)f_k(x)$, содержащие множитель ε в положительной степени, стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x) = V \cdot f(x).$$

Получили требуемое.

Покажем на примерах, что условие аналитической зависимости от ε семейства гладких функций $f_\varepsilon(x)$ является существенным, а условие равномерной сходимости к гладкой функции не является достаточным.

Пример 1. Рассмотрим произведение

$$\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2}\left(1+\varepsilon^3\frac{1}{(x-i\varepsilon)^2}\right).$$

Здесь

$$v_\varepsilon(x) = \frac{1}{(x+i\varepsilon)^2},\ f_\varepsilon(x) = 1+\varepsilon^3\frac{1}{(x-i\varepsilon)^2}.$$

Множитель $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к 1. Семейство гладких функций $\frac{1}{(x\pm i\varepsilon)^n}$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в пространстве обобщенных функций к распределению

$$P\left(\frac{1}{x^n}\right) \pm \frac{(-1)^n}{(n-1)!} i\pi\delta^{(n-1)},$$

а значит, множитель $v_\varepsilon(x)$ сходится к распределению $P\left(\frac{1}{x^2}\right)+i\pi\delta'$. Если бы равномерной сходимости было бы достаточно для того, чтобы предел произведения равнялся бы произведению пределов, то произведение $v_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x)$ сходилось бы в пространстве распределений к $\left(P\left(\frac{1}{x^2}\right)+i\pi\delta'\right)\cdot 1 = P\left(\frac{1}{x^2}\right)+i\pi\delta'$. Запишем исходное произведение в другом виде и тогда из равенства

$$\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2}\left(1+\varepsilon^3\frac{1}{(x-i\varepsilon)^2}\right) = \frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} - \frac{i}{4(x-i\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{4(x-i\varepsilon)^2} + \frac{i}{4(x+i\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{4(x+i\varepsilon)^2}$$

следует, что исходное произведение сходится к $P\left(\frac{1}{x^2}\right)+i\pi\delta' + \frac{1}{2}\pi\delta$, т.е. предел произведения не равен произведению пределов.

Пример 2. Рассмотрим произведение

$$\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2}\left(1+\varepsilon^{2,5}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^2}\right) = \frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} - \frac{i}{4\sqrt{\varepsilon}(x-i\varepsilon)} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4(x-i\varepsilon)^2} + \frac{i}{4\sqrt{\varepsilon}(x+i\varepsilon)} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4(x+i\varepsilon)^2}.$$

Пусть

$$v_\varepsilon(x) = \frac{1}{(x+i\varepsilon)^2},\ f_\varepsilon(x) = 1+\varepsilon^{2,5}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^2}.$$

Тогда множитель $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к 1, а множитель $v_\varepsilon(x)$ сходится в пространстве обобщенных функций к распределению $P\left(\frac{1}{x^2}\right)+i\pi\delta'$. Но произведение $v_\varepsilon(x)f_\varepsilon(x)$ не только не сходится к $P\left(\frac{1}{x^2}\right)+i\pi\delta'$, но и вообще не имеет предела в пространстве распределений, так как в правой части равенства есть слагаемые с коэффициентом $\frac{i}{4\sqrt{\varepsilon}}$, бесконечно большим при $\varepsilon \to 0$.

Пусть, как и выше, $\lambda_k = \frac{1}{2} + \frac{M_k i}{2\pi}$. Будем говорить, что *коэффициент* (21) *удовлетворяет условию* $\mathcal{K}$, если при тех значениях k, при которых $s_k < 0$, число $\lambda_k s_k$ целое, такое, что $\lambda_k s_k \le s_k$ или $\lambda_k s_k \ge 0$.

Теорема 4. *Решения задачи Коши для аппроксимирующих уравнений* (25) *при аппроксимации* (24) *коэффициента* (21) *на интервале* $(-N;\ N)$ *имеют предел в пространстве распределений тогда и только тогда, когда коэффициент* (21) *удовлетворяет условию* $\mathcal{K}$.

При этом решения задачи Коши для аппроксимирующих уравнений (25) *при* $q_{\varepsilon_{N+1}}(x)$ *имеет такой же предел на* $(-N;\ N)$, *тем самым определено обобщенное решение задачи Коши на всей прямой.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что задача допускает локализацию. Пусть интервал $(-N;\ N)$ настолько мал, что содержит только одну особую точку a_1. Без ограничения общности для упрощения записи будем считать, что $a_1 = 0$. Тогда, согласно (26),

$$u_{\varepsilon_N}(x) = C\frac{\widetilde{u_{\varepsilon_N}}(x)}{\widetilde{u_{\varepsilon_N}}(x_0)},$$

где

$$\widetilde{u_{\varepsilon_N}}(x) = e^{\widetilde{B_N}(x)}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^{-s_1}}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{-\lambda_1 s_1}.$$

Числовой множитель

$$\frac{C}{\widetilde{u_{\varepsilon_N}}(x_0)} = Ce^{-\widetilde{B_N}(x_0)}(x_0-i\varepsilon)^{-s_1}\left(\frac{x_0+i\varepsilon}{x_0-i\varepsilon}\right)^{-\lambda_1 s_1}$$

имеет ненулевой предел и не влияет на сходимость и расходимость $u_{\varepsilon_N}(x)$ в пространстве распределений. Множитель $e^{\widetilde{B_N}(x)}$ не имеет особенностей на $(-N;\ N)$, допускает разложение по степеням ε и при $\varepsilon \to 0$ сходится к гладкой функции. В силу леммы 2 вопрос сводится к рассмотрению сходимости семейства функций

$$\widetilde{U_{\varepsilon_N}}(x) = \frac{1}{(x-i\varepsilon)^{-s_1}}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{-\lambda_1 s_1}.$$

Как следует из [6], при выполнении условия $\mathcal{K}$ семейство $\widetilde{U_{\varepsilon_N}}(x)$ сходится в пространстве распределений. Если условие $\mathcal{K}$ не выполнено, то возможны два случая.

Первый случай. Пусть $s_1 < 0$, а число $\lambda_1 s_1$ является целым, при этом $s_1 < \lambda_1 s_1 < 0$. Из [6] следует, что $\widetilde{U_{\varepsilon_N}}(x)$, а значит, и $u_{\varepsilon_N}(x)$ не имеет предела в пространстве распределений.

Второй случай. Пусть $s_1 < 0$, но число $\lambda_1 s_1$ не является целым. Для доказательства достаточно показать, что хотя бы для одной основной функции φ не существует конечный предел интегралов

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int \widetilde{U_{\varepsilon_N}}(x)\varphi(x)dx.$$

Если $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(-s_1-1)}(0) = 0$, то оценка (27) позволяет применить теорему Лебега о мажорированной сходимости и получить существование предела. Поэтому расходимость может иметь место только для функций, у которых хотя бы одно значение из $\varphi(0),\ \varphi'(0),\ \ldots,\ \varphi^{(-s_1-1)}(0)$ отлично от нуля.

Существует такая основная функция φ, что $\varphi(x) = 1$ при $|x| \le h$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \ge 2h$. Для этой функции исследуем поведение интеграла

$$\int\limits_{|x|\le 2h} \widetilde{U_{\varepsilon_N}}(x)\varphi(x)dx = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon),$$

где

$$I_1(\varepsilon) = \int\limits_{-h}^{h} \widetilde{U_{\varepsilon_N}}(x)dx = \int\limits_{|x|\le h} \frac{1}{(x-i\varepsilon)^{-s_1}} \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{-\lambda_1 s_1} dx,$$

$$I_2(\varepsilon) = \int\limits_{h\le|x|\le 2h} \widetilde{U_{\varepsilon_N}}(x)\varphi(x)dx.$$

При $h \le |x| \le 2h$ сходимость равномерная, поэтому при $\varepsilon \to 0$ существует конечный предел у $I_2(\varepsilon)$. Рассмотрим более подробно $I_1(\varepsilon)$. Обозначим $-\lambda_1 s_1 = t$, где $t = \alpha+\beta i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ -s_1 = s$. Пусть

$$I_{s,t}(\varepsilon) = I_1(\varepsilon) = \int\limits_{|x|\le h} \frac{1}{(x-i\varepsilon)^{s}} \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t} dx.$$

При $s = 1$ получим

$$I_{1,t}(\varepsilon) = \int\limits_{|x|\le h} \frac{1}{x-i\varepsilon} \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t} dx = \int\limits_{|x|\le h} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1} dx =$$

$$= \int\limits_{|x|\le h} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1} dx - \int\limits_{|x|\le h} \frac{i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{|x|\le h} \left(\ln\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\right)' \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1} dx - \int\limits_{|x|\le h} \frac{i\varepsilon}{(x+i\varepsilon)^2} \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2} dx.$$

Так как

$$\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)' = \left(1-\frac{2i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)' = \frac{2i\varepsilon}{(x+i\varepsilon)^2},$$

то можем записать

$$I_{1,t}(\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int\limits_{|x|\le h} \left(\ln\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\right)' \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1} dx - \frac{1}{2} \int\limits_{|x|\le h} \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2} d\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right).$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int\limits_{|x|\le h} \left(\ln\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\right)' \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1} dx =$$

$$= \left(\ln\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1}\right)\Bigg|_{-h}^{h} + (t-1) \int\limits_{|x|\le h} \frac{-2i\varepsilon}{(x+i\varepsilon)^2} \ln\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2} \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2} dx.$$

Тогда

$$\left(\ln\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1}\right)\Bigg|_{-h}^{h} = \ln\frac{\varepsilon^2}{h^2+\varepsilon^2} \cdot \left(\left(\frac{h-i\varepsilon}{h+i\varepsilon}\right)^{t-1} - \left(\frac{-h-i\varepsilon}{-h+i\varepsilon}\right)^{t-1}\right).$$

Так как при $\varepsilon \to 0$

$$\left(\frac{h-i\varepsilon}{h+i\varepsilon}\right)^{t-1} - \left(\frac{-h-i\varepsilon}{-h+i\varepsilon}\right)^{t-1} \to e^{i(t-1)2\pi} - 1,$$

а $e^{i(t-1)2\pi}-1 \neq 0$ при нецелом $t=\alpha+\beta i$, то здесь мы наблюдаем рост со скоростью $const \cdot \ln \varepsilon$. А в интеграле

$$(t-1)\int\limits_{|x|\le h} \frac{-2i\varepsilon}{(x+i\varepsilon)^2}\ln\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2}dx$$

сделаем замену $x=\varepsilon y$:

$$(t-1)\int\limits_{|x|\le h} \frac{-2i\varepsilon}{(x+i\varepsilon)^2}\ln\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2}dx = 2(t-1)i\int\limits_{|y|\le \frac{h}{\varepsilon}} \frac{\ln\left(y^2+1\right)}{y^2+1}\left(\frac{y-i}{y+i}\right)^{t-1}dy.$$

Так как дробь $\left(\frac{y-i}{y+i}\right)^{t-1}$ ограничена константой при $y\to\infty$, а функция $f(y)=\frac{\ln\left(y^2+1\right)}{y^2+1}$ ограниченная (принимает значения от 0 в точке $y=0$ до $\frac{1}{e}$ в точках $y=\pm\sqrt{e-1}$) и быстро убывающая при $y\to\infty$, то рассматриваемый интеграл имеет конечный предел при $\varepsilon\to 0$.

Значит, интеграл

$$\int\limits_{|x|\le h}\left(\ln\frac{\varepsilon^2}{x^2+\varepsilon^2}\right)'\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1}dx$$

растет со скоростью $const\cdot\ln\varepsilon$.

Далее рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{|x|\le h}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2}d\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right).$$

Это интеграл вида $\int\limits_{\gamma_\varepsilon} z^\mu dz$, где $z=\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}$, а γ_ε – часть окружности $|z|=1$ от точки $z_1=z(-h)$ до точки $z_2=z(h)$. При $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_{\gamma_\varepsilon} z^\mu dz \to \int\limits_{|z|=1} z^\mu dz.$$

Если μ – целое число, то $\int\limits_{|z|=1} z^\mu dz=0$. В противном случае $\int\limits_{|z|=1} z^\mu dz\neq 0$.

$$\int\limits_{|x|\le h}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2}d\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)=\frac{1}{t-1}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1}\Bigg|_{-h}^{h}=\frac{1}{(t-1)}e^{i(t-1)\left(\pi+2\arctan\frac{x}{\varepsilon}\right)}\Bigg|_{-h}^{h}=$$

$$=\frac{1}{(t-1)}e^{i(t-1)\pi}\left(e^{i(t-1)2\arctan\frac{h}{\varepsilon}}-e^{-i(t-1)2\arctan\frac{h}{\varepsilon}}\right)\to\frac{1}{(t-1)}\left(e^{i(t-1)2\pi}-1\right).$$

Так как $t=\alpha+\beta i$ не является целым числом, то $e^{i(t-1)2\pi}\neq 1$. Значит,

$$\int\limits_{|x|\le h}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2}d\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)\to const\neq 0.$$

Таким образом, в $I_{1,t}(\varepsilon)$ первый интеграл растет как $const\ln\varepsilon$, а второй равен $const\neq 0$. Следовательно, при $\varepsilon\to 0$ интеграл $I_{1,t}(\varepsilon)$ не имеет конечного предела.

При $s=2$

$$I_{s,t}(\varepsilon)=I_{2,t}(\varepsilon)=\int\limits_{|x|\le h}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^2}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t}dx=\frac{1}{2i\varepsilon}\int\limits_{|x|\le h}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2}d\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right).$$

В случае если $t=\alpha+\beta i$ не является целым числом,

$$\int\limits_{|x|\le h}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2}d\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)\to\frac{1}{(t-1)}\left(e^{i(t-1)2\pi}-1\right)\ne 0,$$

а коэффициент $\frac{1}{2i\varepsilon}$ в $I_{2,t}(\varepsilon)$ является бесконечно большим при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, $I_{2,t}(\varepsilon)$ растет как $\frac{const}{\varepsilon}$ и при $\varepsilon\to 0$ не имеет конечного предела.

Далее пусть $s>2$.

$$I_{s,t}(\varepsilon)=\int\limits_{|x|\le h}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^s}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^t dx=\frac{1}{2i\varepsilon}\int\limits_{|x|\le h}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^{s-2}}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-2}d\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i\varepsilon(t-1)}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^{s-2}}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1}\Bigg|_{-h}^{h}+\frac{s-2}{2i\varepsilon(t-1)}\int\limits_{|x|\le h}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^{s-1}}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1}dx.$$

Получили рекуррентную формулу

$$I_{s,t}(\varepsilon)=\frac{1}{2i\varepsilon(t-1)}\frac{1}{(x-i\varepsilon)^{s-2}}\left(\frac{x-i\varepsilon}{x+i\varepsilon}\right)^{t-1}\Bigg|_{-h}^{h}+\frac{s-2}{2i\varepsilon(t-1)}I_{s-1,t-1}(\varepsilon).$$

Здесь первое слагаемое растет не быстрее, чем $\frac{const}{\varepsilon}$. Второе слагаемое растет как $\frac{const}{\varepsilon^{s-1}}$, т.е. быстрее первого слагаемого. Следовательно, интеграл $I_{s,t}(\varepsilon)$ расходится и конечный предел у $\int\limits_{|x|\le 2h}\widetilde{U_{\varepsilon_N}}(x)\varphi(x)dx$ не существует. Значит, $u_{\varepsilon_N}(x)$ не имеет предела в пространстве распределений, если при $s_1<0$ число $\lambda_1 s_1$ не является целым.

Согласно лемме 1, при переходе к интервалу $(-N-1;\ N+1)$ получим

$$u_{\varepsilon_{N+1}}(x)=u_{\varepsilon_N}(x)\frac{k(x,\varepsilon)}{k(x_0,\varepsilon)},$$

где $k(x,\varepsilon)$ – семейство функций, которые на $(-N;\ N)$ являются гладкими, сходятся к 1 и аналитически зависят от ε. Для $u_{\varepsilon_N}(x)$ справедлива оценка (28). Тогда, в соответствии с леммой 2, на интервале $(-N;\ N)$ семейства функций $u_{\varepsilon_N}(x)$ и $u_{\varepsilon_{N+1}}(x)$ имеют одинаковый предел. Теорема доказана.

Замечание. Если условие $\mathcal{K}$ выполнено, точки a_k, лежащие на $(-N;\ N)$, можно разбить на три типа. Для точек первого типа $s_k>0$, для второго типа $s_k<0\le\lambda_k s_k$ и $\lambda_k s_k$ – целое число, а для третьего типа $\lambda_k s_k\le s_k<0$ и $\lambda_k s_k$ – целое число. Три типа точек позволяют выделить в $\widetilde{u_{\varepsilon_N}}(x)$ три типа сомножителей $\frac{(x+i\varepsilon-a_k)^{\lambda_k s_k}}{(x-i\varepsilon-a_k)^{\lambda_k s_k-s_k}}$, причем в окрестности каждой точки a_k произведение остальных сомножителей в $\widetilde{u_{\varepsilon_N}}(x)$ аналитически зависит от ε и при $\varepsilon\to 0$ сходится к гладкой функции. Согласно лемме 2, $\widetilde{u_{\varepsilon_N}}(x)$ будет сходиться в пространстве распределений. Для точки a_k первого типа множитель

$$\frac{(x+i\varepsilon-a_k)^{\lambda_k s_k}}{(x-i\varepsilon-a_k)^{\lambda_k s_k-s_k}}=(x-i\varepsilon-a_k)^{s_k}\left(1-\frac{2i\varepsilon}{x+i\varepsilon-a_k}\right)^{-\lambda_k s_k}$$

точечно сходится к функции

$$\begin{cases}(x-a_k)^{s_k}, & x<a_k;\\ (x-a_k)^{s_k}e^{-i2\pi\lambda_k s_k}, & x>a_k,\end{cases}$$

ограничен $const$ в окрестности точки a_k, поэтому при любых значениях $\lambda_k s_k$ сходится в пространстве распределений. Дробь $\frac{(x+i\varepsilon-a_k)^{\lambda_k s_k}}{(x-i\varepsilon-a_k)^{\lambda_k s_k - s_k}}$ для точки a_k второго типа сходится в пространстве распределений к

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(x-i\varepsilon-a_k)^{-s_k}} = P\left(\frac{1}{(x-a_k)^{-s_k}}\right) - \frac{(-1)^{-s_k}}{(-s_k-1)!}\pi i\delta_k^{(-s_k-1)},$$

а для точки a_k третьего типа – к

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(x+i\varepsilon-a_k)^{-s_k}} = P\left(\frac{1}{(x-a_k)^{-s_k}}\right) + \frac{(-1)^{-s_k}}{(-s_k-1)!}\pi i\delta_k^{(-s_k-1)}.$$

Таким образом, в окрестности точек разного типа имеем разные виды особенностей обобщенных решений.

6. Заключение. Рассмотренные примеры приводят к формированию общей точки зрения на задачу об обобщенных решениях дифференциальных уравнений.

Из изложенного выше следует, что при исследовании возможны три уровня абстракции, соответствующие разным постановкам задачи.

На первом уровне коэффициенты считаются функциями, на втором переходим к рассмотрению обобщенных коэффициентов, порожденных этими функциями, на третьем уровне переходим к рассмотрению аппроксимаций соответствующих обобщенных функций семействами гладких функций. При переходе на более высокий уровень конкретному уравнению соответствует семейство уравнений более высокого уровня, выбор одного из уравнений этого семейства включает в себя внесение дополнительной информации, позволяющей получить ответы на более широкий круг вопросов, чем на предыдущем уровне. Соответственно появляются решения трех уровней – функции, обобщенные функции и семейства гладких функций.

Таким образом, построение обобщенных решений возможно только после перехода на третий уровень – после задания аппроксимаций коэффициентов. Основная сложность в этой тематике связана с исследованием сходимости в пространстве обобщенных функций семейства решений аппроксимирующих уравнений, которое требует ряда вычислений.

Литература

1. *Альбеверио, С.* Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Холден – М.: Мир, 1991. – 568 с.
2. *Завалищин, С.Т.* Импульсные процессы. Модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин – М.: Наука, 1991. – 256 с.
3. *Лазакович, Н.В.* Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемофункций / Н.В. Лазакович, О.Л. Яблонский, А.К. Хмызов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 5–9.
4. *Антоневич, А.Б.* Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А.Б. Антоневич, Т.А. Романчук – Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 148 с.

5. *Антоневич, А.Б.* Обобщенные решения одного дифференциального уравнения с рациональным коэффициентом / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // Таврический Вестник Информатики и Математики. – 2019. – № 3. – С. 23–36.
6. *Антоневич, А.Б.* Решения дифференциального уравнения $u' + \frac{s}{x}u = 0$ в пространстве распределений / А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – Т. 10, № 2. – С. 56–66.
7. *Кузьмина, Е.В.* Обобщенные решения дифференциального уравнения первого порядка с рациональным коэффициентом специального вида / Е.В. Кузьмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1 (46). – С. 54–61.
8. *Владимиров, В.С.* Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
9. *Болибрух, А.А.* Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения / А.А. Болибрух – М. МЦНМО, 2000. – 120 с.
10. *Шабат, Б.В.* Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат — М.: Наука, 1969. – 566 с.
11. *Бремерман, Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. – М.: Мир, – 1968.

A. B. Antonevich, A. V. Kuzmina

Classical, analytical, formal and generalized solutions of a first-order differential equation with a meromorphic coefficient

Summary

The paper considers the question of the existence of generalized solutions of a homogeneous linear differential equation of the first order with a generalized coefficient. The case is investigated when the generalized coefficient coincides with a given meromorphic function on the complement to the set of poles of this function and, moreover, the corresponding equation on the complex plane has a meromorphic solution. All generalized functions are described that coincide with the considered meromorphic function on the complement to the set of poles. For equations with such generalized coefficients, the concept of a formal solution is introduced, and such solutions are constructed in an explicit form.The main result consists in describing those generalized coefficients from the class under consideration, for which there is a generalized solution.