Таким образом, метод упругих решений позволяет быстро и с достаточной для применения на практике точностью получать решение краевой задачи о деформировании физически нелинейной трехслойной пластины, покоящейся на упругом основании.

Литература

1. Старовойтов, С.А. Напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня на упругом основании / С.А. Старовойтов // Вестн. БелГУТа «Наука и транспорт». – 2004. – № 1(8). – С. 25 – 28.
2. Старовойтов, Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости: учебник для студентов строит. спец. вузов / Э.И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.

УДК 539.3

Тарасевич А.Н., канд. техн. наук
(БрГТУ, г. Брест)

К РАСЧЁТУ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ С УСЛИЯМИ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИ

Рассмотрим прямоугольную, тонкую плиту длиной a и шириной b, опирающуюся на упругое основание. Плоскость, параллельная основаниям плиты и проходящая на одинаковом расстоянии от них, называется срединной плоскостью. Систему координат на краю плиты выбираем так, чтобы оси x и y лежали в срединной поверхности, а ось z, перпендикулярная к ним, была направлена вниз.

Предполагается, что внешняя нагрузка на плиту нормальна к ее поверхности, касательные силы на контакте плиты и основания отсутствуют. В расчете принята техническая теория изгиба плит, где предполагается, что все точки плиты, которые до деформации находились на одной вертикали, получают одинаковые перемещения в направлении оси z. Поэтому прогиб характеризует не только вертикальные перемещения точки срединной поверхности, но и вертикальные перемещения любой точки плиты. Вертикальные перемещения точки плиты не зависят от координаты z. Таким образом, – $w = f(x, y)$.

Второе предположение технической теории изгиба предполагает, что горизонтальные перемещения точек срединной поверхности принимаются равными нулю, а горизонтальные перемещения любой точки плиты в направлении осей x и y определяются исходя из гипотезы прямых нормалей. Это означает, что перемещения по осям x и y возникают в результате наклона линейного элемента, который до деформации был вертикальным, а вследствие деформации повернулся, оставаясь перпендикулярным срединной поверхности.

Предполагая, что плита является упругим телом и исходя из сделанных допущений, можно выразить все напряжения через одну функцию $w(x, y)$. Таким образом, задача сводится к отысканию функции $w(x,y)$, удовлетворяющей уравнению изгиба плиты, уравнению совместности деформаций плиты и основания, а также граничным условиям.

Дифференциальное уравнение изгиба срединной поверхности плиты с учетом действующих в срединной плоскости усилий запишется в виде:

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=q(x,y)-p(x,y), \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость плиты; $w(x, y)$ – прогиб плиты; N_x, N_y, N_{xy} – горизонтальные усилия, приложенные в срединной плоскости; $q(x, y)$ – внешняя нагрузка, перпендикулярная срединной плоскости; $p(x, y)$ – реактивное давление грунта.

Уравнение, выражающее зависимость между давлением на основание и перемещением поверхности основания имеет вид:

$$w^*(x,y)=\iint_F P(\xi,\eta)K(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (2)$$

где $w^*(x,y)$ – осадка поверхности основания; $K(x,y,\xi,\eta)$ – ядро основания, т.е. прогиб основания в точке (x, y) от единичной силы, приложенной в точке (ξ,η); ξ,η – координаты точки приложения силы; x, y – координаты точки, где определяется перемещение.

Соответствующими уравнениями задаются граничные условия на свободных краях плиты.

Аналитическое решение системы уравнений при заданных граничных условиях в замкнутом виде не получено. Для решения данной системы применяются методы, которые удобно реализуются на ЭВМ. К таким методам относятся: метод конечных разностей, метод конечных элементов и др. Для решения системы дифференциальных уравнений применим простой. но универсальный метод конечных разностей. В этом методе частные производные заменяются конечными разностями, и вместо дифференциальных уравнений решается система алгебраических уравнений [1 – 3].

Прежде чем перейти к соответствующим разностным уравнениям, установим основные зависимости между производными и конечными разностями. Разделим поверхность рассматриваемой плиты линиями, параллельными осям принятой прямоугольной системы координат с шагом Δx и Δy. Ординаты срединной поверхности плиты на пересечении двух линий обозначим $w_{i,k}$. Тогда производные выразятся выражениями через значения функций в соседних точках.

Подставляя в дифференциальное уравнение (1) соответствующие разностные отношения получим следующее разностное уравнение:

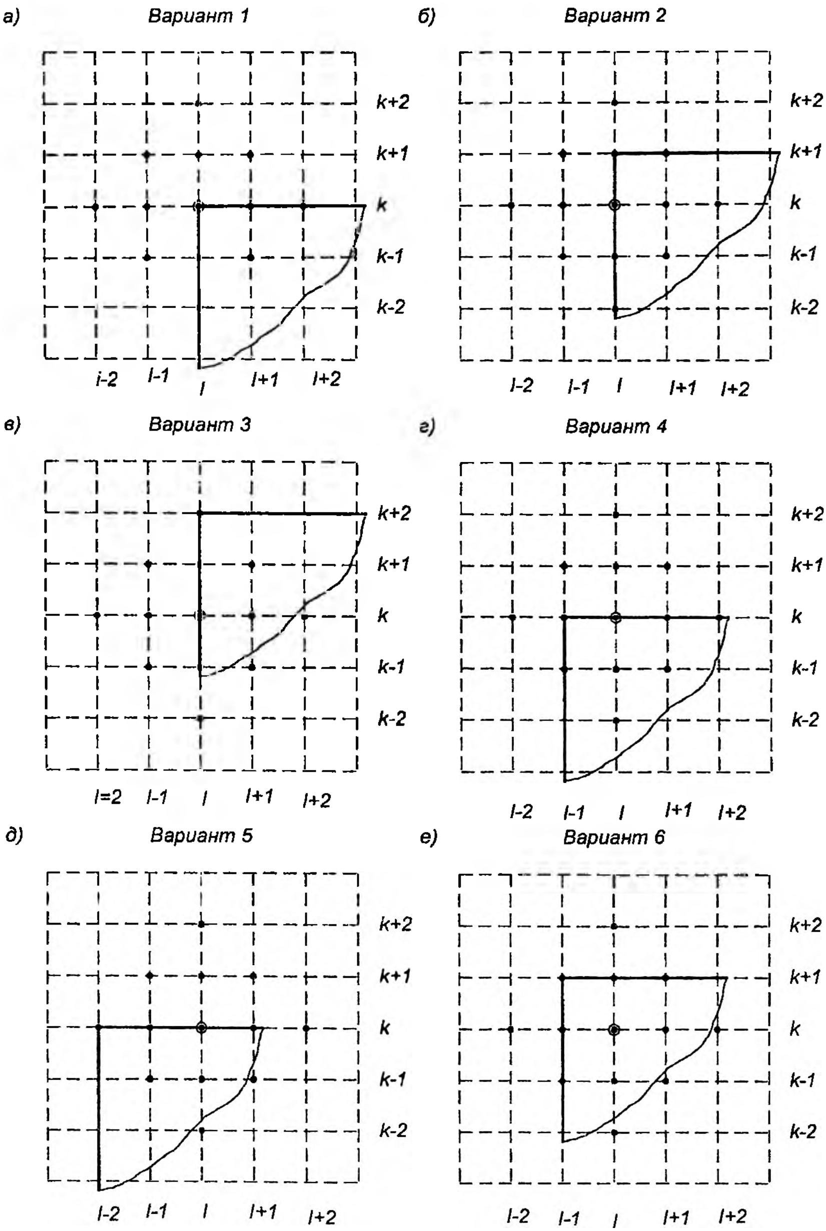
$$
\begin{gathered}
D\left\{\frac{w_{i-2,k}-4w_{i-1,k}+6w_{i,k}-4w_{i+1,k}+w_{i+2,k}}{\Delta x^4}+\right.\\
+\frac{2}{\Delta x^2\Delta y^2}\Big[4w_{i,k}-2\left(w_{i-1,k}+w_{i,k-1}+w_{i+1,k}+w_{i,k+1}\right)+\\
+w_{i-1,k-1}+w_{i-1,k+1}+w_{i+1,k-1}+W_{i+1,k+1}\Big]+\\
\left.+\frac{w_{i,k-2}-4w_{i,k-1}+6w_{i,k}-4w_{i,k+1}+w_{i,k+2}}{\Delta y^4}\right\}+N_x\frac{w_{i+1,k}-2w_{i,k}+w_{i-1,k}}{\Delta x^2}+\\
+N_y\frac{w_{i,k+1}-2w_{i,k}+w_{i,k-1}}{\Delta y^2}+N_{xy}\frac{w_{i-1,k-1}-w_{i-1,k+1}-w_{i+1,k-1}+w_{i+1,k+1}}{2\Delta x\Delta y}=q(x,y)-p(x,y).
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Соответственно и уравнения граничных условий запишутся в конечных разностях. При записи дифференциального уравнения изгиба прямоугольной плиты на упругом основании в конечных разностях с учетом граничных условий необходимо рассматривать различные варианты, при которых исключаются законтурные точки. Ввиду малых значений N_{xy} принимаем их равными нулю.

Решая на пакете «Mathematica» совместно уравнения изгиба плиты, записанные для точки (i, k), и уравнения граничных условий для изгибающих моментов, крутящих моментов и приведенных поперечных сил, получим, например, выражение для $w_{i,k}$, содержащее только прогибы точек плиты:

$$
\begin{gathered}
\frac{(2-2\nu)}{a^4}w_{i,k-2}+\frac{4(\nu-1)(1+2\lambda^2+\nu)}{\lambda^4}w_{i,k-1}+\frac{2(1+\lambda^4-4\lambda^2(\nu-1)-2\nu^2)}{\lambda^4}w_{i,k}-\\
-\frac{8(\nu-1)}{\lambda^2}w_{i+1,k-1}+\frac{4(2\lambda^2(\nu-1)-\lambda^4-\nu^2)}{\lambda^4}w_{i+1,k}+2\left(2-\frac{2\nu^2}{\lambda^4}\right)w_{i+2,k}=\\
=\frac{\Delta x^4}{4D}[q(x,y)-p(x,y)],
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где $\lambda=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; $\alpha=N_x\Delta x^2$; $\beta=N_y\Delta x^2$.


а)
Вариант 1
k+2
k+1
k
k-1
k-2
i-2
l-1
l
l+1
l+2
б)
Вариант 2
k+2
k+1
k
k-1
k-2
l-2
l-1
l
l+1
l+2
в)
Вариант 3
k+2
k+1
k
k-1
k-2
l=2
l-1
l
l+1
l+2
г)
Вариант 4
k+2
k+1
k
k-1
k-2
l-2
l-1
l
l+1
l+2
д)
Вариант 5
k+2
k+1
k
k-1
k-2
l-2
l-1
l
l+1
l+2
е)
Вариант 6
k+2
k+1
k
k-1
k-2
l-2
l-1
l
l+1
l+2

Аналогично и для остальных точек (i, $k-1$; i, k; i, $k+1$) и т. д. исключим законтурные точки.

При расчете плиты методом конечных разностей за неизвестные принимаем перемещения узлов принятой сетки $w_{i,k}$ ($i = 1, n$; $k = 1, m$) и реактивные давления. Причем реактивные давления в пределах каждого расчета считаем равномерно распределенными по площадке $\Delta x \cdot \Delta y$ с центром в точке (i, k), за исключением крайних участков, имеющих другие размеры. Тогда уравнение совместности деформаций можно записать в виде суммы, заменив интегрирование суммированием.

В матричной форме система уравнений для определения перемещений узлов сетки плиты и реактивных давлений в контактной зоне записывается в следующем виде:

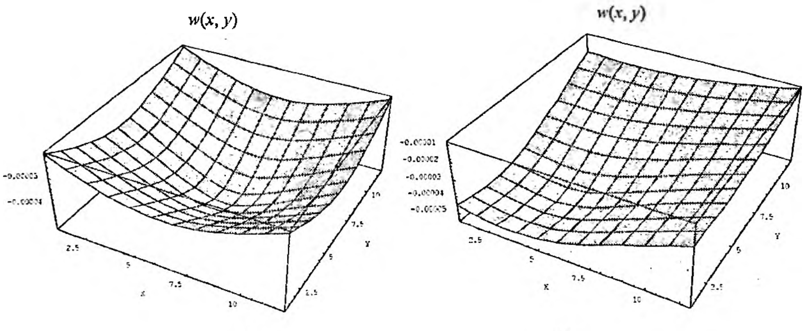
$$[K]\overline{X} = \overline{P}, \qquad (5)$$

где: $[K]$ - матрица жесткостей и совместности деформаций; X – вектор неизвестных перемещений и реактивных давлений; $\left[\overline{X}\right] = [w_1, w_2, ..., w_n, p_1, p_2, ..., p_n]$; P – вектор внешней нагрузки, которая на участке принимается постоянной.

$$\left[\overline{P}\right] = \left[q_1, q_2, ..., q_n, 0, 0, ..., 0\right].$$

После решения системы (5) по известным прогибам плиты определяются усилия в плите (изгибающие моменты и поперечные силы).

Авторами работы составлена программа для расчета прямоугольных плит с усилиями, действующими в срединной плоскости.



а) б)

Рис. 1. Прогибы плиты при нагрузке:
а – в центре; б – в 1/3 пролета

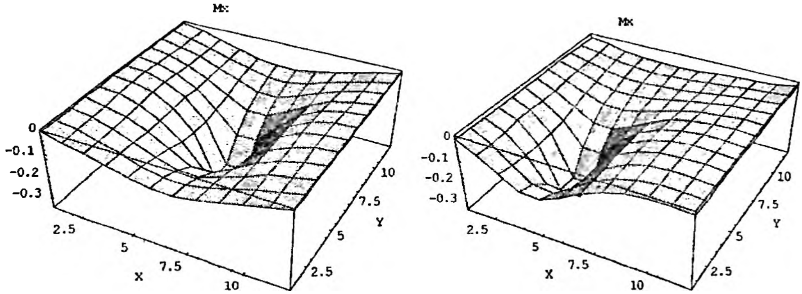


Рис. 2. Эпюра изгибающих моментов:
а – при нагрузке в центре; б – при нагрузке в 1/3 пролета

Литература

1. Варвак, П.М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций / П.М. Варвак, Л.П. Варвак. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.
2. Тарасевич, А.Н. Расчет осесимметрично нагруженной круглой фундаментной плиты с усилиями в срединной плоскости / А.Н. Тарасевич // Вклад вузовской науки в развитие приоритетных направлений производственно-хозяйственной деятельности, разработку экономичных и экологически чистых технологий и прогрессивных методов обучения: Материалы междунар. науч.-техн. конф. – Минск: БГПА, 2000. – С. 53.
3. Босаков, С.В. Расчет плитных фундаментов из напрягающего бетона / С.В. Босаков, А.Н. Тарасевич // Совершенствование железобетонных конструкций, оценка их состояния и усиление: сб. науч. тр. – Новополоцк, 1999. – С. 37 – 44.