

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХШАРНИРНЫХ КРУГОВЫХ АРОК, ЗАГРУЖЕННЫХ РАДИАЛЬНО ДЕЙСТВУЮЩИМИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ

Ветровые нагрузки на покрытия цилиндрической формы действуют в радиальных направлениях [1]. Расчет таких покрытий, которые широко применяются, может быть сведен к расчету арочных систем [2]. Поэтому расчет трехшарнирных арок кругового очертания на действие радиально направленных равномерно распределенных нагрузок (рис. 3) актуален и представляет интерес.

Рассматриваются трехшарнирные арки кругового очертания постоянной жесткости пролетом l (рис. 1), загруженные статическими радиально действующими равномерно распределенными нагрузками. Расчет выполняется статическим методом в полярной системе координат [2].

Выражения для определения усилий в сечениях рассматриваемых арок – изгибающих моментов, поперечных и продольных сил – получены в работе [2].

Деформированный вид системы будет определен, если будут известны перемещения всех точек системы.

Определение перемещений точек арки будем выполнять по формуле Мора:

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GA} + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EA}, \quad (1)$$

где \bar{M}_i , \bar{Q}_i , \bar{N}_i – изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в системе от действия единичной силы, приложенной в точке, для которой определяется перемещение, в направлении искомого перемещения (i -м); M_P , Q_P , N_P – изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в системе от действия внешней нагрузки, от которой определяется перемещение (зависимости для этих усилий получены в работе [2]).

Вначале рассмотрим определение вертикальных перемещений. Для этого к точке оси арки, перемещение которой определяется, прикладываем единичную вертикальную силу (рис. 1), от действия которой найдем зависимости изменения внутренних сил. Вначале из уравнений равновесия арки в целом и ее полуарок находим опорные реакции хотя бы в одной опоре, например, левой:

$$R_A = 1 - \frac{x_\Delta}{l} = \frac{1}{2} + \frac{r}{l} \cos \theta_\Delta, \quad H_A = \frac{l}{4f} \left(1 - \frac{2r}{l} \cos \theta_\Delta \right).$$

Изгибающий момент, продольная и поперечная силы в сечениях арки определяются выражениями:

а) на участке от опоры A до точки приложения силы (участок I) (рис. 1):

$$\bar{M}_{\Delta \in (I)} = R_A \left(\frac{l}{2} - r \cos \theta \right) - H_A (r \sin \theta - r + f) =$$

$$= \left\{ r \left[\frac{l}{4f} + \left(1 - \frac{r}{2f} \right) \cos \theta_{\Delta} \right] \right\} + \left[-r \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \right] \cos \theta + \left[\frac{r}{f} \left(\frac{r}{2} \cos \theta_{\Delta} - \frac{l}{4} \right) \right] \sin \theta. \quad (2)$$

$$\bar{Q}_{\Delta\epsilon(I)} = R_A \sin \theta - H_A \cos \theta = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \sin \theta - \frac{l}{4f} \left(1 - \frac{2r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \cos \theta. \quad (3)$$

$$\bar{N}_{\Delta\epsilon(I)} = -R_A \cos \theta - H_A \sin \theta = - \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \cos \theta - \frac{l}{4f} \left(1 - \frac{2r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \sin \theta. \quad (4)$$

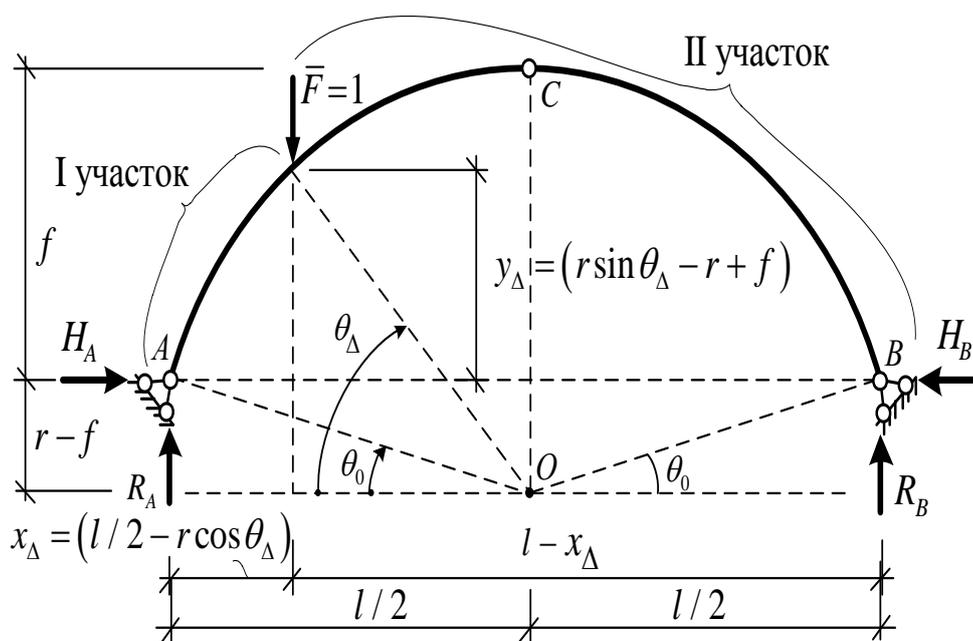


Рисунок 1. Приложение единичной силы для определения вертикальных перемещений

б) на участке от точки приложения силы до опоры \$B\$ (участок II) (рис. 1):

$$\bar{M}_{\Delta\epsilon(II)} = \bar{M}_{\Delta\epsilon(I)} - 1 \cdot (x - x_{\Delta}) = \left[\frac{r}{2f} \left(\frac{l}{2} - r \cos \theta_{\Delta} \right) \right] + \left[r \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \right] \cos \theta + \left[\frac{r}{f} \left(\frac{r}{2} \cos \theta_{\Delta} - \frac{l}{4} \right) \right] \sin \theta. \quad (5)$$

$$\bar{Q}_{\Delta\epsilon(II)} = \bar{Q}_{\Delta\epsilon(I)} - 1 \cdot \cos \theta = \left(-\frac{1}{2} + \frac{r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \sin \theta - \frac{l}{4f} \left(1 - \frac{2r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \cos \theta. \quad (6)$$

$$\bar{N}_{\Delta\epsilon(II)} = \bar{N}_{\Delta\epsilon(I)} + 1 \cdot \cos \theta = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \cos \theta - \frac{l}{4f} \left(1 - \frac{2r}{l} \cos \theta_{\Delta} \right) \sin \theta. \quad (7)$$

Теперь вертикальное перемещение любого сечения арки в соответствии с (1) и полученными зависимостями (2)–(7) можно определить по выражению:

$$\Delta^{верт} = \frac{1}{EJ} \left[\int_{\theta_0}^{\theta_{\Delta}} (\bar{M}_{\Delta\epsilon(I)} M_P) r d\theta + \int_{\theta_{\Delta}}^{\pi-\theta_0} (\bar{M}_{\Delta\epsilon(II)} M_P) r d\theta \right] + \frac{\eta}{GA} \left[\int_{\theta_0}^{\theta_{\Delta}} (\bar{Q}_{\Delta\epsilon(I)} Q_P) r d\theta + \int_{\theta_{\Delta}}^{\pi-\theta_0} (\bar{Q}_{\Delta\epsilon(II)} Q_P) r d\theta \right] = \frac{1}{EA} \left[\int_{\theta_0}^{\theta_{\Delta}} (\bar{N}_{\Delta\epsilon(I)} N_P) r d\theta + \int_{\theta_{\Delta}}^{\pi-\theta_0} (\bar{N}_{\Delta\epsilon(II)} N_P) r d\theta \right]. \quad (8)$$

Рассмотрим определение горизонтальных перемещений сечений.

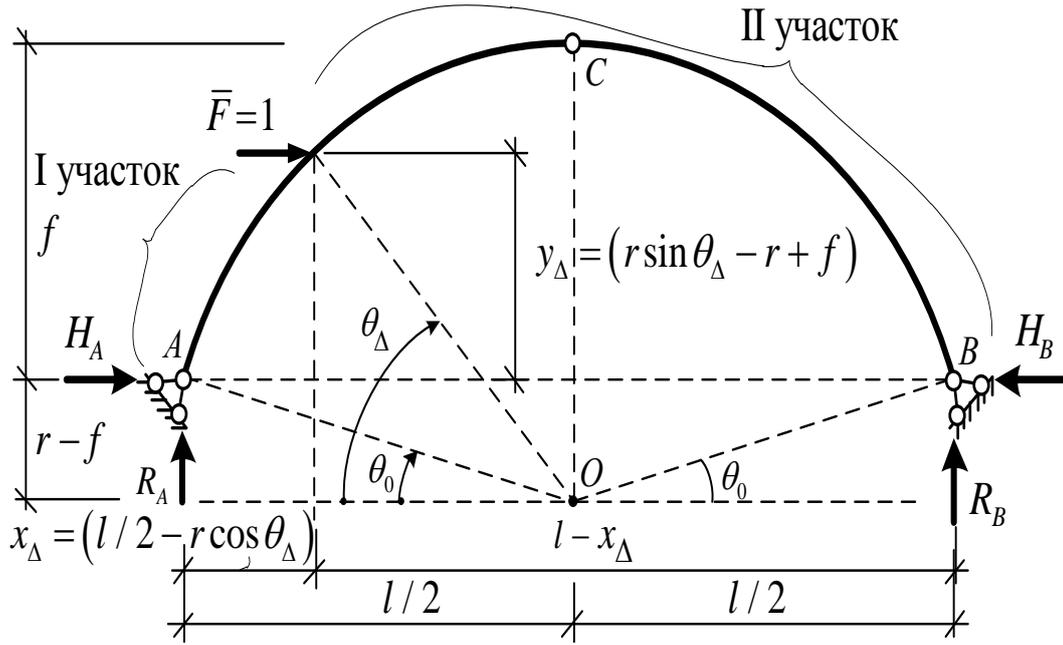


Рисунок 2 – Приложение единичной силы для определения горизонтальных перемещений

Опорные реакции в опоре A найдем из уравнения равновесия арки в целом и ее левой полуарки:

$$R_A = \frac{1}{l} y_{\Delta} = \frac{r}{l} \left(\sin \theta_{\Delta} - 1 + \frac{f}{r} \right); \quad H_A = \frac{r}{2f} \left(1 + \frac{f}{r} - \sin \theta_{\Delta} \right).$$

Изгибающий момент, продольная и поперечная силы в сечениях арки определяются выражениями:

а) на участке от опоры A до точки приложения силы (участок I) (рис. 2):

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\Delta z (I)} = R_A y - H_A x = \frac{r^2}{2f} \left[\left(1 - \frac{2f}{r} \right) \sin \theta_{\Delta} - 1 + \frac{f}{r} \right] + \\ + r \left[\frac{r}{2f} (1 - \sin \theta_{\Delta}) + \frac{1}{2} \right] \sin \theta + r \left[\frac{r}{l} (\cos \theta_{\Delta} - 1) + \frac{f}{l} \right] \cos \theta. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\bar{Q}_{\Delta z (I)} = -R_A \sin \theta + H_A \cos \theta = \frac{r}{l} \left(1 - \sin \theta_{\Delta} - \frac{f}{r} \right) \cdot \sin \theta + \frac{r}{2f} \left(1 + \frac{f}{r} - \sin \theta_{\Delta} \right) \cdot \cos \theta. \quad (10)$$

$$\bar{N}_{\Delta z (I)} = R_A \cos \theta + H_A \sin \theta = \frac{r}{l} \left(1 - \sin \theta_{\Delta} - \frac{f}{r} \right) \cos \theta + \frac{r}{2f} \left(1 + \frac{f}{r} - \sin \theta_{\Delta} \right) \sin \theta. \quad (11)$$

б) на участке от точки приложения силы до опоры B (участок II) (рис. 2) получим:

$$\bar{M}_{\Delta z (II)} = \frac{r^2}{2f} \left[\sin \theta_{\Delta} - 1 + \frac{f}{r} \right] + r \left[\frac{r}{2f} (1 - \sin \theta_{\Delta}) - \frac{1}{2} \right] \sin \theta + r \left[\frac{r}{l} (\cos \theta_{\Delta} - 1) + \frac{f}{l} \right] \cos \theta. \quad (12)$$

$$\bar{Q}_{\Delta z (II)} = \bar{Q}_{\Delta z (I)} - 1 \cdot \cos \theta = \frac{r}{l} \left(1 - \sin \theta_{\Delta} - \frac{f}{r} \right) \sin \theta + \frac{r}{2f} \left(1 - \frac{f}{r} - \sin \theta_{\Delta} \right) \cos \theta. \quad (13)$$

$$\bar{N}_{\Delta z (II)} = \bar{N}_{\Delta z (I)} - 1 \cdot \sin \theta = \frac{r}{l} \left(1 - \sin \theta_{\Delta} - \frac{f}{r} \right) \cos \theta + \frac{r}{2f} \left(1 - \frac{f}{r} - \sin \theta_{\Delta} \right) \sin \theta. \quad (14)$$

Теперь горизонтальное перемещение любого сечения арки в соответствии с (1) и полученными зависимостями (9)–(14) можно определить по выражению:

$$\Delta^{zop} = \frac{1}{EJ} \left[\int_{\theta_0}^{\theta_\Delta} (\bar{M}_{\Delta z(I)} M_P) r d\theta + \int_{\theta_\Delta}^{\pi-\theta_0} (\bar{M}_{\Delta z(II)} M_P) r d\theta \right] + \frac{\eta}{GA} \left[\int_{\theta_0}^{\theta_\Delta} (\bar{Q}_{\Delta z(I)} Q_P) r d\theta + \int_{\theta_\Delta}^{\pi-\theta_0} (\bar{Q}_{\Delta z(II)} Q_P) r d\theta \right] + \frac{1}{EA} \left[\int_{\theta_0}^{\theta_\Delta} (\bar{N}_{\Delta z(I)} N_P) r d\theta + \int_{\theta_\Delta}^{\pi-\theta_0} (\bar{N}_{\Delta z(II)} N_P) r d\theta \right]. \quad (15)$$

На основе полученных зависимостей (8) и (15) выполним расчет вертикальных и горизонтальных перемещений арки, представленной на рис. 3. Величины перемещений узловых точек арки приведены в таблице 1, а деформированный вид арки (в масштабе перемещений 9:1) показан на рис. 4.

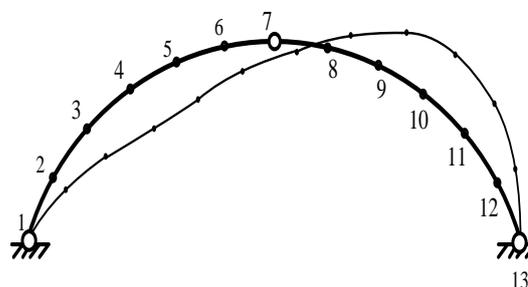
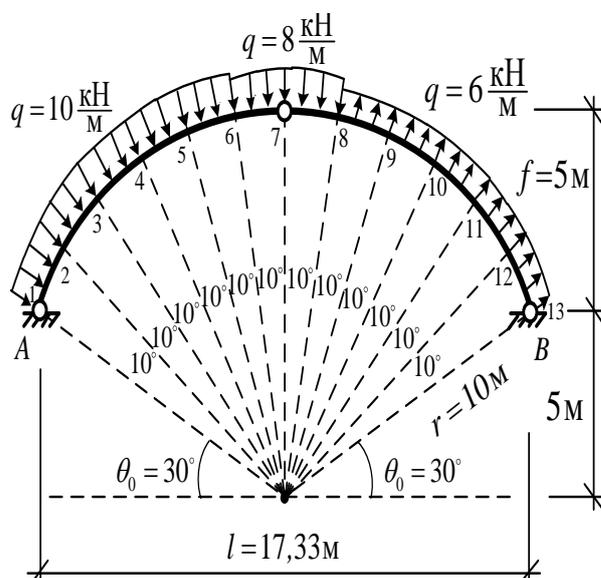


Рисунок 3 – Расчетная схема арки

Рисунок 4 – Деформированный вид арки (в масштабе перемещений 7:1)

Таблица 1 – Перемещения узловых точек арки, м

№ узла	1	2	3	4	5	6	7
по горизонтали	0	0,0564	0,0938	0,1095	0,1087	0,1015	0,0973
по вертикали	0	-0,0402	-0,0784	-0,1015	-0,1011	-0,0762	-0,0

№ узла	8	9	10	11	12	13
по горизонтали	0,1029	0,1158	0,1228	0,1094	0,0672	0
по вертикали	0,0363	0,0877	0,1048	0,0872	0,0462	0

Список цитированных источников

1. Воздействия на конструкции. Общие воздействия. Ветровые воздействия: СН 2.01.05-2019. – Минск : Стройтехнорм, 2020. – 120 с.

2. Лешко, М. А. К определению усилий в трехшарнирных круговых арках, нагруженных радиально действующими равномерно распределенными нагрузками / М. А. Лешко, В. Р. Колесник // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов / БрГТУ. – Брест, 2021.