

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Машиностроительный факультет

Кафедра прикладной механики

СОГЛАСОВАНО

Заведующий кафедрой

 В.И.Игнатюк

«31» 01 2022 г.

СОГЛАСОВАНО

Декан факультета

 А.А.Волчек

2022 г.



**ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

для специальности (направления специальности):

1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна»

Составитель: Игнатюк Валерий Иванович, канд. техн. наук, доцент.

Рассмотрено и утверждено на заседании Научно-методического совета университета _____, протокол № _____.

Брест, 2022

Учреждение образования

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	5
1. ЦЕЛЬ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:.....	5
2. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:	5
3. ЦЕЛИ УМК.....	7
4. СТРУКТУРА УМК	7
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	8
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	8
1.1. Строительная механика и ее задачи	8
1.2. Расчетная схема сооружения, нагрузки и воздействия.....	8
1.3. Классификация сооружений.....	11
1.4. Основные допущения, принципы и понятия	12
2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ.....	13
3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ.....	21
3.1. Внутренние силы и их определение	21
3.2. Статически определимые рамы, их виды.....	24
3.3. Расчет простых рам	25
3.4. Особенности расчета трехшарнирных рам	33
3.5. Расчет составных рам.....	36
3.6. Расчет статически определимых составных балок	39
3.7. Особенности расчета трехшарнирных арок на вертикальные нагрузки	40
3.8. Определение усилий в фермах	42
3.9. Определение перемещений в изгибаемых системах.....	46
4. РАБОТА СИЛ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ СИСТЕМЫ	53
4.1. Понятие о работе сил	53
4.2. Действительная работа внешних сил. Теорему Клапейрона	53
4.3. Возможная работа внешних сил	54
4.4. Действительная работа внутренних сил.....	54
4.5. Возможная работа внутренних сил.....	57
4.6. Потенциальная энергия деформации системы	58
4.7. Теоремы о взаимности возможных работ и взаимности единичных перемещений.....	58
5. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ .	59
5.1. Идея метода сил.....	59
5.2. Степень статической неопределимости системы.....	60
5.3. Выбор основной системы метода сил	60
5.4. Система канонических уравнений метода сил	62
5.5. Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений и их проверки .	64
5.6. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки.....	66
5.7. Порядок расчета рам методом сил.....	69
5.8. Упрощения в расчетах методом сил симметричных рам	70
6. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. СМЕШАННЫЙ МЕТОД	76
6.1. Подходы и допущения, положенные в основу метода перемещений.....	76
6.2. Определение степени кинематической неопределимости рам	77
6.3. Основная система метода перемещений	79
6.4. Канонические уравнения метода перемещений	80
6.5. Табличные эпюры метода перемещений	82

СОДЕРЖАНИЕ

6.6.	Построение единичных и грузовых эпюр усилий в основной системе метода перемещений.....	86
6.7.	Определение коэффициентов и свободных членов системы уравнений.....	88
6.8.	Проверки коэффициентов и свободных членов системы уравнений.....	91
6.9.	Построение окончательных эпюр усилий и их проверки.....	92
6.10.	Упрощения при расчетах симметричных рам.....	93
6.11.	Смешанный метод расчета статически неопределимых рам. Комбинированное применение метода сил и метода перемещений.....	98
6.12.	Комбинированное применение метода сил и метода перемещений.....	104
7.	ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ.....	106
7.1.	Общие понятия.....	106
7.2.	Предельное состояние сжато-растянутого элемента по нормальному сечению.....	107
7.3.	Предельное состояние изгибаемого элемента по нормальному сечению.....	108
7.4.	Предельное состояние систем и методы расчета.....	111
7.5.	Расчет статически определимых систем по несущей способности.....	114
7.6.	Расчет статически неопределимых систем по несущей способности.....	117
	ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	129
1.	КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ.....	129
2.	РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ.....	132
2.1.	Расчет простых рам.....	132
2.2.	Расчет трехшарнирных рам.....	137
2.3.	Расчет составных рам.....	142
2.4.	Расчет статически определимых составных балок.....	144
2.5.	Линии влияния усилий в балочных системах.....	147
2.6.	Особенности расчета трехшарнирных арок на вертикальные нагрузки.....	148
2.7.	Определение усилий в фермах.....	151
2.8.	Определение перемещений в изгибаемых системах.....	153
3.	РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ.....	158
3.1.	Степень статической неопределимости системы.....	158
3.2.	Выбор основной системы метода сил.....	159
3.3.	Примеры расчета рам методом сил.....	162
4.	РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	179
5.	ОСНОВЫ РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ.....	186
	РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ.....	197
1.	ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.....	197
1.1.	Кинематический анализ сооружений.....	197
1.2.	Расчет статически определимых систем.....	198
1.3.	Расчет статически неопределимых рам методом сил.....	201
1.4.	Расчет статически неопределимых рам методом перемещений.....	202
1.5.	Расчет статически неопределимых рам смешанным методом.....	202
2.	ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.....	203
2.1.	Кинематический анализ сооружений.....	203
2.2.	Расчет статически определимых систем.....	203
2.3.	Расчет статически неопределимых рам методом сил.....	207
2.4.	Расчет статически неопределимых рам методом перемещений.....	209
2.5.	Расчет статически неопределимых рам смешанным методом.....	210

СОДЕРЖАНИЕ

3. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ	211
4. ДИАГНОСТИКА КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТА	214
5. ОБРАЗЦЫ БИЛЕТОВ К ЗАЧЕТУ	215
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	219
1. СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	219
2. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА	220
2.1. Пояснительная записка	222
2.2. Содержание учебного материала	225
2.3. Учебно-методические карты	227
2.4. Информационно-методическая часть.....	230

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

«Строительная механика» для студентов специальности 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна» является одной из базовых дисциплин.

1. ЦЕЛЬ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Изучить способы создания и кинематического анализа плоских и пространственных стержневых систем; методы определения реактивных и внутренних сил и перемещений в статически определимых и статически неопределимых стержневых системах при действии на них различных нагрузок и воздействий; методы исследования устойчивости упругих систем и их элементов; особенности автоматизации расчетов и применения программных расчетно-проектировочных комплексов для расчета сооружений при действии на них неподвижных и подвижных, статических и динамических нагрузок, при изменении температуры и осадке опор.

Развивать у будущих специалистов широкое инженерное мышление и творческие подходы.

2. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Устанавливаются сферы профессиональной деятельности выпускников специальности:

вооружение будущего инженера знаниями, необходимыми для расчета, проектирования и строительства конструкций, зданий и сооружений.

Формирование знаний, умений и профессиональных компетенций при изучении методов расчета и проектирования инженерных сооружений и строительных конструкций, развитие инженерного мышления у студентов, формирование фундамента инженерно-технических знаний на основе изучения достижений мировой и отечественной науки и техники, формирование установки на практическое внедрение полученных студентами знаний в их профессиональной деятельности и других сферах жизни общества, а также развитие и закрепление академических, профессиональных и социально-личностных компетенций.

В результате изучения дисциплины студенты специальности должны закрепить и развить академические, профессиональные и социально-личностные компетенции, предусмотренные образовательным стандартом ОСВО 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна».

Для приобретения этих компетенций в результате изучения дисциплины студенты должны:

знать:

- классификацию расчетных схем строительных сооружений;
- последовательность проведения кинематического анализа сооружений;
- основные понятия, гипотезы и допущения строительной механики;
- методы определения усилий и перемещений в статически определимых и неопределимых стержневых системах на статические, неподвижные, подвижные и динамические нагрузки;
- методы расчета строительных сооружений на прочность, жесткость и

СОДЕРЖАНИЕ

устойчивость от действия нагрузок и других воздействий;

– причины разрушения инженерных сооружений и строительных конструкций и способы повышения их надежности и долговечности;

уметь:

– выполнить кинематический анализ расчетной схемы;

– выбирать рациональные методы и алгоритмы расчета инженерных сооружений и строительных конструкций с учетом возможных допущений, упрощений и ограничений;

– определять усилия, вычислять перемещения от действующих на сооружения нагрузок;

– дать оценку прочности, жесткости и устойчивости сооружения;

– выполнять сложные инженерные расчеты с использованием современных компьютерных программ;

владеть:

– методикой выбора допущений и расчетных схем при решении задач расчета сооружений;

– методикой оценки прочности, жесткости и устойчивости сооружения;

– полученными базовыми научно-теоретическими знаниями и уметь применять их для решения теоретических и практических профессиональных задач;

– навыками самостоятельного получения знаний и повышения квалификации;

– современными компьютерными технологиями расчета и проектирования зданий и сооружений.

Учебно-методический комплекс (УМК) объединяет структурные элементы научно-методического обеспечения образования и представляет собой сборник материалов теоретического и практического характера для организации работы студентов специальности 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна» дневной, заочной и заочной сокращенной форм получения образования по изучению дисциплины «Строительная механика».

УМК разработан на основании Положения об учебно-методическом комплексе на уровне высшего образования, утвержденного Постановлением Министерства образования Республики Беларусь от 26 июля 2011 г., № 167, Положения об учебно-методическом комплексе по учебной дисциплине учреждения образования «Брестский государственный технический университет», утвержденного 31.01.2019, № 12; и предназначен для реализации требований учебной программы по учебной дисциплине «Строительная механика» для специальности 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна».

Содержание и объем УМК полностью соответствуют образовательному стандарту высшего образования специальности ОСВО – 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», учебно-программной документации образовательных программ высшего образования и с утвержденной учебной программой по учебной дисциплине государственного компонента

СОДЕРЖАНИЕ

цикла общенаучных и общепрофессиональных дисциплин.. Материал представлен на требуемом методическом уровне и адаптирован к современным образовательным технологиям.

3. ЦЕЛИ УМК

- обеспечение качественного методического сопровождения процесса обучения, рационального распределения учебного времени по темам учебной дисциплины и совершенствование методики проведения занятий;
- организация эффективной самостоятельной работы студентов.
- успешное усвоение студентами учебного материала.

Содержание и объем УМК полностью соответствуют образовательным стандартам высшего образования специальности представленных в УМК, а также учебно-программной документации образовательных программ высшего образования. Материал представлен на требуемом методическом уровне и адаптирован к современным образовательным технологиям.

4. СТРУКТУРА УМК

Теоретический раздел УМК содержит лекционный материал в соответствии с основными разделами и темами учебной программы дисциплины «Строительная механика» для специальности 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна».

Практический раздел УМК содержит материалы для проведения практических учебных занятий в виде примеров решённых и подробно разобранных задач с методическими рекомендациями по их решению.

Раздел контроля знаний УМК содержит материалы для текущей аттестации, включающие экзаменационные вопросы, образцы экзаменационных билетов, тестовые задачи с ответами на них, позволяющие обучающимся самостоятельно изучать дисциплину и позволяющие определить соответствие результатов учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования.

Вспомогательный раздел включает учебную программу учреждения высшего образования по учебной дисциплине «Строительная механика», список рекомендованной литературы, который может использоваться студентами при подготовке к занятиям, при выполнении расчётно-проектировочных работ и сдаче экзаменов.

Рекомендации по организации работы с УМК:

- лекции проводятся с использованием теоретических материалов, представленных в УМК;
- практические занятия проводятся с использованием представленных в УМК материалов к практическим занятиям;
- экзамен проводится в письменном виде, вопросы к экзамену приведены в разделе контроля знаний.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Строительная механика и ее задачи

Строительная механика, кратко, – это наука о расчете сооружений на прочность, жесткость и устойчивость.

Основная задача строительной механики – определение напряженно-деформированного состояния сооружений, то есть определение внутренних сил (усилий) и перемещений, возникающих в элементах сооружений от внешних воздействий – силовых, кинематических (смещений опор), температурных.

К задачам строительной механики относятся также изучение принципов образования сооружений, исследование условий их устойчивости и поведения сооружений при различных подвижных и динамических нагрузках.

1.2. Расчетная схема сооружения, нагрузки и воздействия

Строительная механика служит расчету и проектированию реальных сооружений. Однако расчет реального сооружения с точным учетом всех его особенностей является сложной и, в большинстве случаев, практически неразрешимой задачей. Поэтому этот расчет упрощают, заменяя реальное сооружение его расчетной схемой.

Расчетная схема сооружения – это упрощенная, идеализированная схема реального сооружения, вводимая в расчет, в которой отражены основные его свойства и пренебрегается второстепенными свойствами и несущественными деталями, незначительно влияющими на работу сооружения.

Выбор расчетной схемы во многом определяет трудоемкость расчета и корректность получаемых результатов. Для определения расчетной схемы сооружения необходимо иметь опыт в расчете сооружений, хорошо представлять работу рассматриваемого сооружения и отдельных его элементов, принципы взаимодействия элементов сооружения друг с другом.

Все сооружения являются пространственными системами. Однако часто, если это позволяет сделать структура сооружений, пространственные системы разделяют на плоские, – в этом случае их расчет значительно упрощается. Такой подход можно применить, если в пространственной системе можно выделить плоские несущие элементы (рамы, фермы), связанные между собой поперечными связями.

В конструкциях сооружений выделяют стержневые элементы, пластины, оболочки и массивные тела, которые соединяются между собой в единую систему посредством узловых соединений (или просто узлов) и опираются на землю (основание) посредством опорных устройств (опор).

Стержневые элементы – это прямолинейные или криволинейные пространственные элементы, у которого один размер (длина) значительно больше двух

СОДЕРЖАНИЕ

других (поперечных размеров). На расчетных схемах такие элементы заменяют их осевыми линиями (прямыми, криволинейными или ломаными) и называют стержнями. При этом в расчетах учитываются параметры поперечных сечений этих элементов через соответствующие их характеристики (площади поперечных сечений, моменты инерции и т. д.), приведенные к центрам сечений.

Если сооружение состоит только из стержневых элементов, то оно является стержневой системой.

Реальные опорные устройства на расчетных схемах заменяются идеальными опорами (опорными связями). Опоры – это устройства, передающие нагрузку от сооружений, конструкций на основание, связанное с Землей.

Основные виды опор и их характеристики представлены в таблице 1.1. (Суть понятий «кинематическая связь» и «степень свободы» – см. далее).

Узлы могут быть жесткими, шарнирными и упругими (податливыми). Шарнирное соединение (или просто шарнир) рассматривается как устройство, допускающее взаимный поворот соединяемых элементов относительно центра шарнира. На расчетных схемах шарнир обозначается кружком. Силами трения в шарнирах обычно пренебрегают.

Таблица 1.1

Основные виды опор

№ пп	Название опоры	Возможная конструктивная схема опоры	Изображение на расчетных схемах	Число кинематических связей	Число реакций (и их составляющих)	Число степеней свободы
1	Шарнирно подвижная			1	1	2
2	Шарнирно неподвижная			2	1(2)	1
3	Защемление, заделка			3	2(3)	0
4	Подвижная заделка			2	2	1

СОДЕРЖАНИЕ

Жесткое соединение элементов (жесткий узел) полностью устраняет их взаимное смещение, и угол между осями стержней в нем не изменяется при деформировании системы.

Разделение узлов на идеально шарнирные и идеально жесткие не всегда соответствуют действительности. Часто узлы имеют податливость и допускают взаимные смещения соединяемых элементов (повороты, сдвиги), зависящие от возникающих в узле внутренних сил. На расчетных схемах податливые узлы специально оговаривают или изображают с упругими связями – линейными (рис. 1.1,*а*) или угловыми (рис. 1.2,*а*). Внутренние силы в податливом узле связаны со взаимным смещением соединяемых элементов. Например, величина изгибающего момента в узле на рис. 1.2,*а* будет зависеть от величины взаимного угла поворота соединяемых стержней и может быть выражена через значение упругой податливости узла c , которая представляет собой величину изгибающего момента, возникающего при взаимном повороте соединяемых в узле элементов на угол единичной величины (рис. 1.2,*б*).

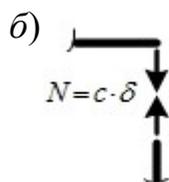
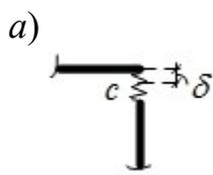


Рис. 1.1

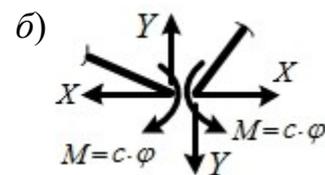
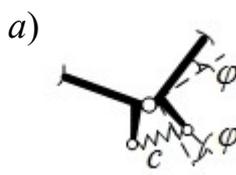


Рис. 1.2

В реальных сооружениях любые элементы (стойки, балки, пластины, оболочки и т. д.) всегда имеют какие-то отклонения от проектных форм, размеров, свойств используемых материалов, которые возникают при их изготовлении, транспортировке, сборке и которые на расчетных схемах чаще всего не учитываются. Невозможно представить себе идеально прямую стойку, которая на расчетных схемах представляется прямым стержнем.

Шарнирные соединения элементов (шарниры) считаются идеальными, то есть считается, что в них отсутствуют силы трения, а усилия передаются через центры шарниров, что на практике труднодостижимо.

Еще больше приближений связано с нагрузками, определить точные величины которых в ряде случаев практически невозможно. Нормативные значения снеговых и ветровых нагрузок рассчитываются на основе статистической обработки величин нагрузок по результатам многолетних наблюдений. Разделение нагрузок на сосредоточенные силы и моменты, на равномерно распределенные нагрузки также достаточно условно.

Выбор расчетной схемы является первым весьма важным и сложным этапом расчета – расчетную схему надо выбрать так, чтобы учесть все основные особенности данного сооружения и при этом максимально облегчить расчет.

СОДЕРЖАНИЕ

Степень точности отражения расчетной схемой реальной работы сооружения связана с возможностями учета в расчетной схеме:

- действительной геометрии элементов сооружения и видов их соединений;
- физико-механических свойств материалов сооружения;
- реально действующих на сооружение воздействий и нагрузок;
- использования методов расчета, компьютерных программ и вычислительной техники, позволяющих выполнить расчет с необходимой точностью.

Все **воздействия на сооружения** можно разделить на силовые (нагрузки), температурные и кинематические (смещения опор и связей).

При этом воздействия могут быть *статическими* и *динамическими*.

К *статическим* относят воздействия и нагрузки, которые при приложении возрастают от нуля до конечной величины настолько медленно, что скорости и ускорения точек систем при их деформировании малы и можно пренебречь силами инерции.

К *динамическим* относят воздействия, которые сообщают массам сооружения существенные ускорения и соответственно вызывают такие силы инерции, что их влияние должно учитываться.

Примерами динамических воздействий являются ударные и вибрационные нагрузки, воздействия взрывных волн, сейсмические воздействия.

Силовые воздействия или нагрузки представляются сосредоточенными силами, сосредоточенными моментами, распределенными нагрузками постоянной или переменной интенсивности. Эти нагрузки могут быть *подвижными* и *неподвижными*. *Неподвижные* нагрузки действуют постоянно в одном месте. *Подвижные* перемещаются по системе (например, транспорт по мосту).

1.3. Классификация сооружений

Классификация сооружений и их расчетных схем может выполняться по различным признакам, часть из которых представлена ниже.

Все сооружения являются *пространственными*. Однако, как уже указывалось, часто они могут рассчитываться и рассчитываются как *плоские* системы. В данном пособии далее рассматриваются только плоские стержневые системы.

По геометрическим признакам выделяют:

1. Стержневые сооружения (состоящие из стержней – балки, фермы, рамы, арки, комбинированные системы).
2. Сооружения из пластин и оболочек.
3. Массивные сооружения (подпорные стены, плотины).

По особенностям работы сооружений различают:

1. Балочные конструкции.
2. Арочные конструкции.
3. Рамы – стержневые системы с жестким соединением элементов во всех либо некоторых узлах.

СОДЕРЖАНИЕ

4. Фермы – системы, все элементы которых испытывают практически только растяжение-сжатие.

5. Висячие системы – в которых основные, преимущественно гибкие элементы работают только на растяжение.

6. Комбинированные системы, представляющие комбинацию сооружений 1–5.

7. Плиты.

8. Оболочки.

С точки зрения *статики* системы делятся на:

1. Статически определимые системы – не имеющие «лишних» связей и, соответственно, расчет которых может быть выполнен с использованием только уравнений равновесия (уравнений статики).

2. Статически неопределимые системы – имеющие «лишние» связи, для расчета которых необходимо привлекать дополнительные уравнения.

По направлениям опорных реакций выделяют:

1. Безраспорные сооружения – сооружения, у которых нагрузка одного направления (например, вертикальная) вызывает опорные реакции того же направления (только вертикальные). Пример: простые и многопролетные балки.

2. Распорными называют сооружения, у которых при нагрузке одного направления возникают опорные реакции и в других направлениях. Примерами распорных систем являются трехшарнирные арки и рамы.

1.4. Основные допущения, принципы и понятия

В основу классических методов строительной механики положены следующие *основные допущения, принципы и понятия*:

1. Предполагается, что материал всех элементов сооружений является *сплошным, изотропным и однородным*. Изотропным называется материал, свойства которого по всем направлениям одинаковы.

2. Тела считают *идеально упругими*. Такие тела полностью восстанавливают свою первоначальную форму и размеры после удаления внешней нагрузки.

3. Рассматриваются материалы, удовлетворяющие *закону Гука*, согласно которому зависимость между нагрузками и перемещением линейна;

4. Для сооружений в целом также принимается физическая модель, для которой выполняется линейная зависимость между нагрузками и перемещениями, и такие системы называют *линейно-деформируемыми* или *упругими*.

5. Принимается, что для нагрузок и воздействий, действующих на сооружения, справедлив *принцип независимости действия сил*, согласно которому – результат действия суммы сил равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности.

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Строительные сооружения предназначены воспринимать действующие на них нагрузки, сохраняя при этом заданную форму, то есть они должны быть геометрически неизменяемыми.

При этом в строительной механике рассматриваются деформируемые конструкции и сооружения (п. 1.4), в элементах которых будут возникать деформации (продольные, поперечные, изгибные); однако величины этих деформаций малы в сравнении с общими размерами элементов и конструкций, и поэтому такие элементы, конструкции и сооружения будем считать неизменяемыми.

С учетом сказанного:

Геометрически неизменяемыми являются системы, изменение формы и взаимного расположения элементов которых невозможно, если считать все ее элементы (стержни) абсолютно жесткими.

Примером простейшей неизменяемой системы является трехстержневой шарнирный треугольник (рис. 2.1).

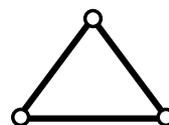


Рис. 2.1

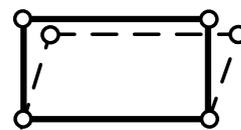


Рис. 2.2

Геометрически изменяемые системы – это системы, изменение формы и взаимного расположения элементов которых возможно даже в случае, если все ее элементы считать абсолютно жесткими. Простейшим примером изменяемой системы является шарнирно-стержневой четырехугольник (рис. 2.2).

Изменяемые системы в сооружениях недопустимы, учитывая, что они могут резко менять форму и соответственно не могут воспринимать действующие на них нагрузки.

Для выяснений геометрической неизменяемости или изменяемости систем служит кинематический анализ сооружений, который должен предшествовать расчету и выполняется в два этапа:

- 1) определение степени свободы системы;
- 2) геометрический анализ структуры системы.

Степень свободы системы – это число независимых геометрических параметров (координат, перемещений), определяющих положение всех элементов сооружения на плоскости или в пространстве.

Например, точка на плоскости имеет две степени свободы, так как её положение характеризуется двумя координатами (рис. 2.3).

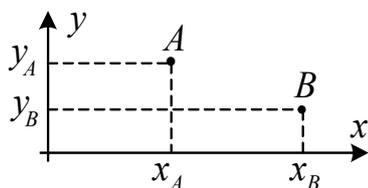


Рис. 2.3

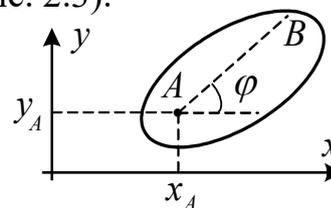


Рис. 2.4

Точка в пространстве имеет три степени свободы.

Любое заведомо неизменяемое тело, сооружение либо его часть будем называть *диск*ом.

СОДЕРЖАНИЕ

Примеры дисков представлены на рис. 2.5. Диском будет и любое жесткое соединение ряда прямолинейных стержней с образованием ломано-разветвленного стержня (рамно-стержневой системы) (см. рис 2.4 в конце), учитывая, что жесткое соединение имеет три связи и соединяет элементы неизменно.

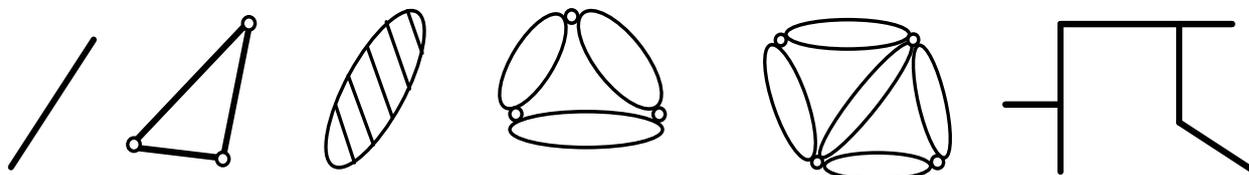


Рис. 2.5

Любой диск на плоскости обладает тремя степенями свободы – его положение на плоскости определяется тремя параметрами (x_A, y_A, φ) (рис. 2.5).

В пространстве диск имеет шесть степеней свободы – три координаты некоторой точки и три угла поворота относительно осей x, y, z .

Всякое тело, отнимающее у другого тела одну степень свободы, называется кинематической или простой связью.

Сооружения на расчетных схемах с учетом введенных понятий можно рассматривать как системы, состоящих из дисков, соединенных между собой шарнирами, и опирающихся на основание (на землю) с помощью опор.

При этом следует различать: – шарнирный узел (шарнир)
– и простой или одиночный шарнир.

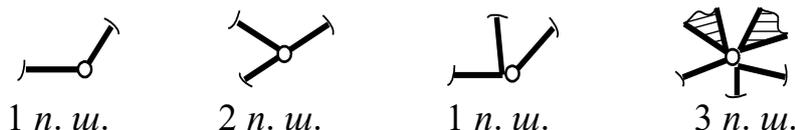
Одиночный, простой шарнир – это шарнир, соединяющий два диска.

В шарнирах, как шарнирных узлах, соединяющих ряд дисков, будет несколько простых шарниров, число которых может быть определено по формуле:

$$n_{п.ш.} = D_y - 1,$$

где D_y – число дисков, соединяющихся в узле.

Например:



Каждый простой шарнир препятствует любым взаимным линейным перемещениям соединяемых элементов, оставляя возможность их взаимного поворота друг относительно друга, соответственно имеет две кинематические связи, и при его разрезании в нем возникает две внутренние силы – две реакции взаимодействия соединяемых дисков (рис. 2.6).

Определение степени свободы системы

может быть выполнено по формулам:

$$1. \quad W = - (3K - III), \quad (2.1)$$

где: K – число замкнутых контуров в системе;

III – число простых, одиночных шарниров в системе, включая шарниры между дисками (стержнями) и основанием (землей).

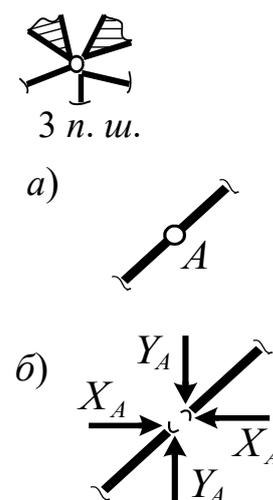


Рис. 2.6

СОДЕРЖАНИЕ

Под *замкнутым контуром* будем понимать замкнутую цепь, образованную последовательным соединением жестко либо шарнирно ряда дисков, одним из которых может быть и Земля (рис. 2.7).

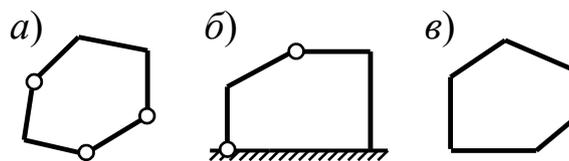
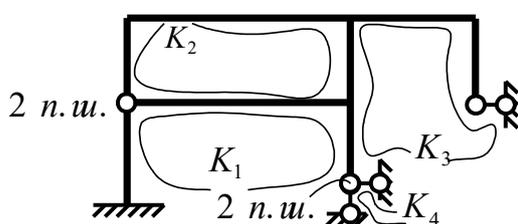


Рис. 2.7

Если в замкнутом контуре все элементы соединены друг с другом только жестко, то его будем называть *жестким замкнутым контуром* (рис. 2.7, в).

Формула (2.1) основана на том, что каждый жесткий замкнутый контур является статически неопределимой системой, имеющей три «лишних» связи, а каждый врезанный в контур шарнир удаляет одну связь – связь, закрепляющую два рядом расположенных сечения от их взаимного поворота друг относительно друга, придавая контуру одну степень свободы.

Формула (2.1) может применяться для любых плоских стержневых систем. Например, для системы, изображенной на рис. 2.8, получим:



$$W = -(3K - Ш) = -(3 \cdot 4 - 8) = -4.$$

Рис. 2.8

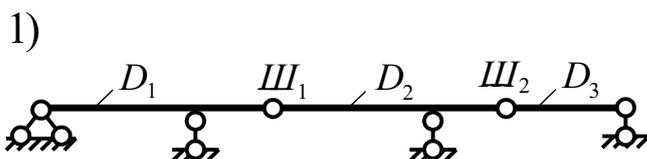
$$2. \quad W = 3D - 2Ш - C_0, \quad (2.2)$$

где: D – число дисков в системе; $Ш$ – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих диски D ; C_0 – число кинематических опорных связей в системе.

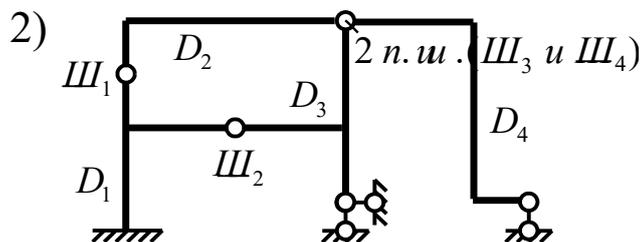
Данную формулу можно использовать для всех систем, кроме содержащих в себе полностью жесткие замкнутые контуры (рис. 2.7, в).

Эта формула основана на том, что каждый диск имеет три степени свободы, каждый шарнир, соединяющий диски, отнимает у системы дисков две степени свободы, а каждая кинематическая связь отнимает одну степень свободы.

Примеры применения формулы:



$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0; \quad W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 6 = -2.$$

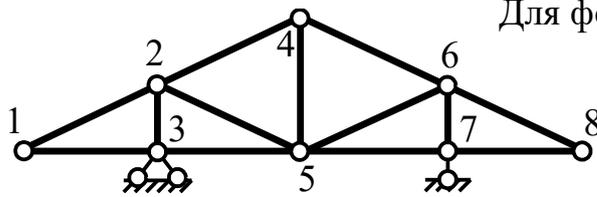


3. Для ферм более удобно и целесообразно применять формулу:

$$W = 2У - С - C_0, \quad (2.3)$$

где: $У$ – число шарнирных узлов в ферме; $С$ – число стержней фермы; C_0 – число опорных связей.

В основу этой формулы положены узлы фермы, которые имеют (как точки) по две степени свободы, а каждый стержень, соединяя узлы фермы, а также каждая опорная связь, отнимают одну степень свободы.



Для фермы, изображенной на рис. 2.9, получим:

$$W = 2U - C - C_0 = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0.$$

Рис. 2.9

В зависимости от числа степеней свободы для систем возможно три качественно отличных друг от друга результата:

1. $W > 0$ – система изменяема, является механизмом, так как не имеет достаточного количества связей.

2. $W = 0$ – система имеет достаточное число связей, чтобы быть неизменяемой и статически определимой.

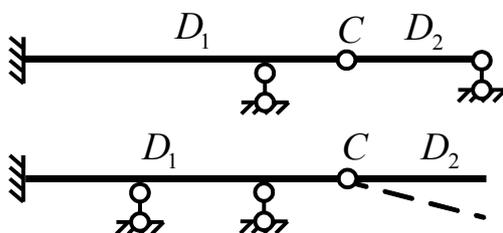
3. $W < 0$ – система имеет лишние связи, является статически неопределимой и должна быть неизменяемой.

Условия $W < 0$ и $W = 0$ – являются необходимыми, но недостаточными, чтобы утверждать, что система неизменяема, так как геометрическая неизменяемость зависит не только от числа связей, но и от их расположения, то есть от структуры системы. В ряде случаев система может иметь достаточное число связей, но быть изменяемой. Это иллюстрирует, например, простая система, представленная на рис. 2.10,а. Балка как диск имеет три степени свободы, которые, казалось бы, убираются тремя имеющимися связями. Но так как все эти связи вертикальны, ни одна из них не закрепляет балку от горизонтального смещения, которое здесь возможно, и соответственно система изменяема. Если одну из опор переставить, например, установить ее горизонтально, как показано на рис. 2.10,б, система становится неизменяемой.



Рис. 2.10

На рис. 2.11 представлено две балочные системы, степень свободы которых описывается одним и тем же выражением (у них одинаковое число дисков, шарниров и опорных связей), однако первая из них геометрически неизменяема, а вторая изменяема (диск D_2 может поворачиваться относительно шарнира C).



$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 5 = 0.$$

Рис. 2.11

Как видим, неизменяемость систем в большой степени определяется расположением их элементов, условиями их соединения друг с другом и положением опорных связей, то есть структурой систем.

СОДЕРЖАНИЕ

Поэтому для выяснения, действительно ли сооружение геометрически неизменяемо, или оно изменяемо (мгновенно изменяемо), и необходимо выполнять

Геометрический анализ структуры сооружений,
который обычно производится на основе заранее известных

Принципов образования геометрически неизменяемых систем:

1. Три диска, соединенные друг с другом последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуют неизменяемую систему, то есть такая система в целом является диском (рис. 2.12, поз. 1).

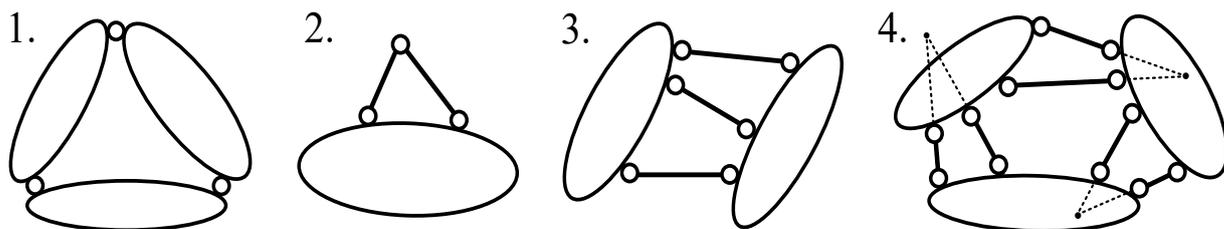


Рис. 2.12. Принципы образования геометрически неизменяемых систем

2. Если точка присоединяется к диску двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, то такая система в целом неизменяема, т.е. является диском (рис. 2.12, поз. 2). С учетом того, что стержни – это тоже диски, здесь мы имеем, по существу, первый признак неизменяемости.

3. Два диска, соединенные друг с другом тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуют неизменяемую систему, то есть такая система в целом является диском (рис. 2.12, поз. 3).

Рассмотрим соединение двух дисков двумя пересекающимися (в некоторой точке C) стержнями (рис. 2.13,а). Анализ этой системы показывает, что диски могут поворачиваться друг по отношению к другу относительно точки пересечения стержней C , будто в этой точке находится шарнир. Такой шарнир называют *фиктивным*, а рассматриваемое соединение двух дисков тогда может быть представлено в виде, показанном на рис. 2.13,б.

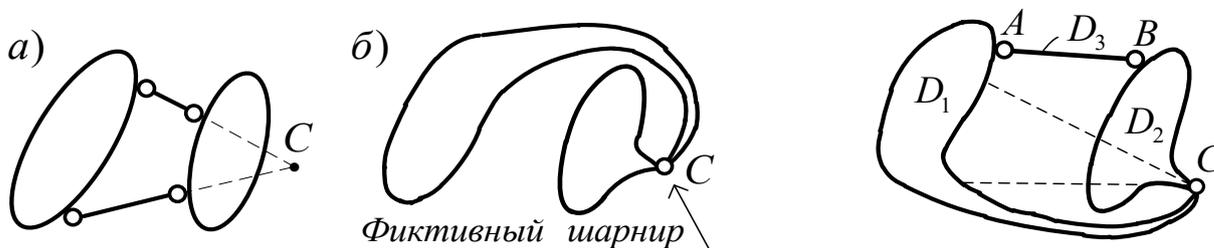


Рис. 2.13

Рис. 2.14

С учетом отмеченного рассматриваемый случай соединения трех дисков (рис. 2.12, поз. 3) может быть представлен в виде, показанном на рис. 2.14, что соответствует последовательному соединению трех дисков тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, или первому признаку неизменяемости.

4. Три диска, соединенные последовательно друг с другом парами стержней, точки пересечения которых не лежат на одной прямой, образуют неизменяемую систему, и система в целом является диском (рис. 2.12, поз. 4).

Если пары пересекающихся стержней заменить здесь фиктивными шарнирами, расположенными в точках пересечения этих пар стержней, то опять будем иметь три диска, соединенных друг с другом последовательно тремя шарнирами (правда, фиктивными), не лежащими на одной прямой.

Понятие о мгновенно изменяемых системах

Мгновенно изменяемые системы представляют собой исключительный случай геометрически неизменяемых систем, при котором они допускают бесконечно малые перемещения.

Рассмотрим, например, систему, представленную на рис. 2.15,а.

Несложно понять, что крайняя правая точка диска D_1 (у шарнира C) в рассматриваемом состоянии может вертикально перемещаться (при повороте диска D_1 относительно точки A вектор перемещения этой точки будет перпендикулярен радиусу AC); рассуждая аналогично, получим, что крайняя левая точка диска D_2 также имеет возможность вертикального перемещения, которое будет полностью совпадать с предыдущим вертикальным перемещением. Таким образом, точка C в системе может вертикально перемещаться. Но как только она

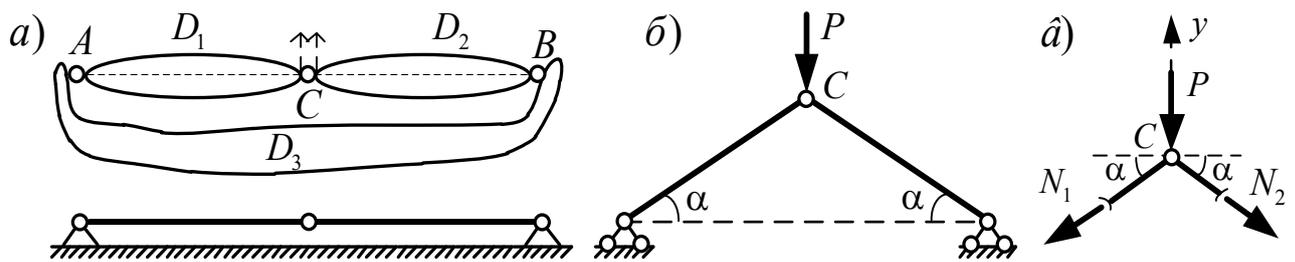


Рис. 2.15

переместится на некоторую величину, система станет удовлетворять первому признаку неизменяемости – три диска становятся соединенными последовательно друг с другом тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, и становится неизменяемой. Такова суть мгновенно изменяемой системы. Возможность перемещений в мгновенно изменяемых системах, пусть и небольших, не служит их использованию в строительных сооружениях.

Рассматриваемую мгновенно изменяемую систему можно получить из системы, представленной на рис. 2.15,б, если угол α устремить к нулю ($\alpha \rightarrow 0$). При узловой нагрузке стержни этой системы будут работать только на сжатие и продольные усилия в них можно найти, вырезав узел C (рис. 2.15,в):

$$\sum Y = 0; \quad -2N_1 \sin \alpha - P = 0; \quad N_1 = -\frac{P}{2 \sin \alpha}; \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0 \text{ получим: } N_1 = -\frac{P}{0} = \infty.$$

Этот расчет показывает, что в мгновенно изменяемых системах усилия могут принимать очень большие значения, и соответственно сечения элементов также должны быть большими. Учитывая сказанное, мгновенно изменяемые системы не могут использоваться в строительных сооружениях.

Признаки мгновенно изменяемых систем

1. Если три диска соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами, лежащими на одной прямой, то такая система мгновенно изменяема (рис. 2.15,а).

2. Если два диска соединены друг с другом тремя стержнями, параллельными друг другу, то эта система мгновенно изменяема (рис. 2.16,а).

Здесь диски могут смещаться друг относительно друга в направлении, перпендикулярном параллельным стержням; но как только они переместятся на некоторую величину, вследствие поворота стержней на разные углы система начинает удовлетворять второму признаку неизменяемости – два диска становятся соединенными друг с другом тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуя неизменяемую систему.

3. Если два диска соединены друг с другом тремя стержнями, пересекающимися в одной точке, то эта система мгновенно изменяема (рис. 2.16,б).

В этом случае диски могут поворачиваться друг относительно друга вокруг точки пересечения стержней (как фиктивного шарнира); при этом повороте стержни, имея различную длину, будут поворачиваться на разные углы, вследствие чего два диска становятся соединенными друг с другом тремя стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке (второй признак неизменяемости), и система становится неизменяемой.

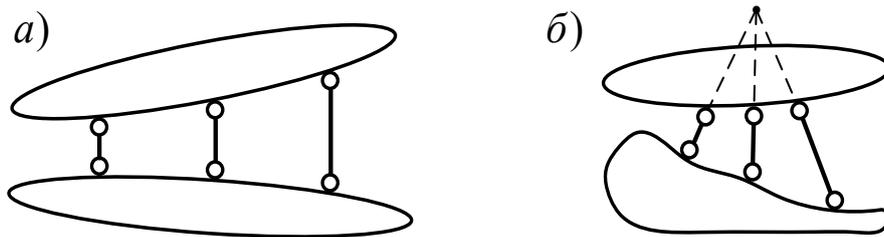


Рис. 2.16

Выполним кинематический анализ нескольких систем.

Пример 1. Рассмотрим систему, представленную на рис. 2.17,а. Определим степень свободы системы по формулам (2.1) (рис. 2.17,а) и (2.2) (рис. 2.17,б):

$$W = -(3K - 3Ш) = -(3 \cdot 4 - 12) = 0;$$

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 5 = 0.$$

Результаты, как видно, совпадают, что, конечно, и должно быть.

Переходим ко второму этапу кинематического анализа – геометрическому анализу структуры системы. Отметим, что основание (земля) является целостным объектом, то есть будет тоже диском.

Процедура геометрического анализа:

1) диски D_2 , D_3 и D_4 соединены тремя шарнирами B , S , C , не лежащими на одной прямой, и соответственно образуют неизменяемую систему, то есть диск (первый признак неизменяемости) (рис. 2.17,в);

СОДЕРЖАНИЕ

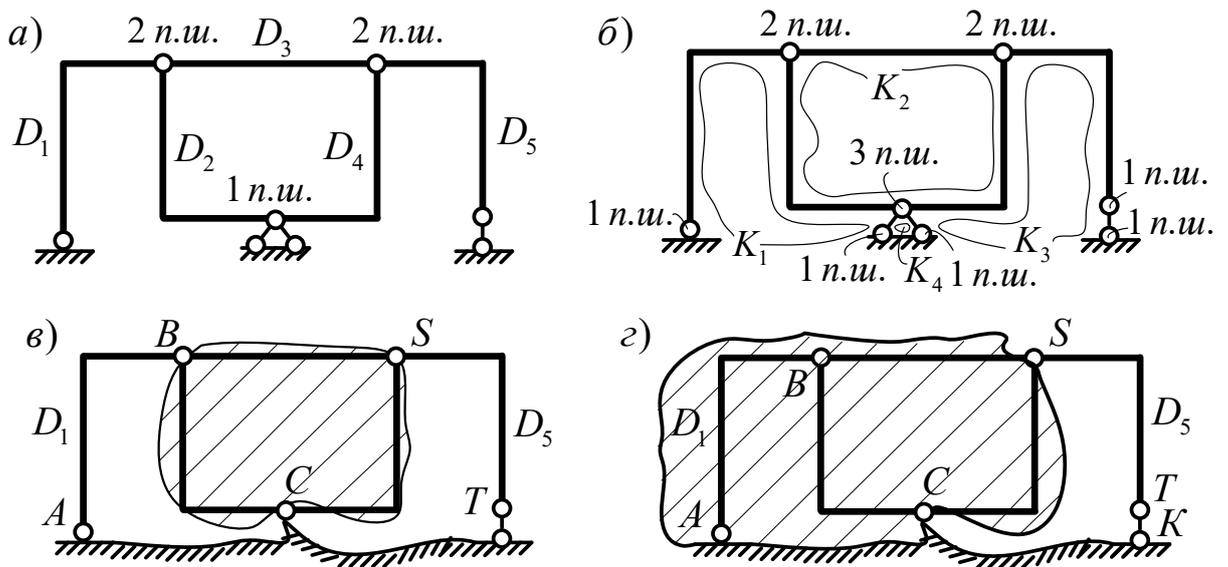


Рис. 2.17

2) шарнир C присоединен к диску земли двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, образуя вместе с ней неизменяемую систему (второй признак неизменяемости) (рис. 2.17, в);

3) диск D_1 , диск земли и диск BSC соединены тремя шарнирами A , B и C , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости) (рис. 2.17, з);

4) последний диск (вместе с основанием), диск D_5 и опорный стержень TK (а это тоже диск) соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами S , T и K , не лежащими на одной прямой, (рис. 2.17, з) и соответственно образуют в целом неизменяемую систему (первый признак неизменяемости).

Вывод: рассматриваемая система статически определима и геометрически неизменяема.

Таким образом, выполнение геометрического анализа структуры системы представляет собой структурно-логическую задачу, решая которую в структуре системы (в соединениях ее элементов) необходимо последовательно находить представленные выше случаи геометрической неизменяемости или мгновенной изменяемости (или выявлять изменяемость), и делать это нужно до тех пор, пока не будут задействованы все элементы (диски) системы и не будет выявлено, какой же система является с точки зрения изменяемости-неизменяемости.

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

3.1. Внутренние силы и их определение

При действии на плоскую статически определимую стержневую систему внешней нагрузки в каждом поперечном сечении ее может возникнуть три вида внутренних сил (усилий) (рис. 3.1):

– изгибающий момент M , действующий в плоскости сооружения относительно центральной оси поперечного сечения элемента (стержня), перпендикулярной к этой плоскости;

– поперечная сила Q , действующая в плоскости поперечного сечения в направлении центральной оси поперечного сечения элемента (стержня), лежащей в плоскости сооружения;

– продольная сила N , действующая перпендикулярно к сечению (вдоль оси стержня) и приложенная в центре тяжести сечения.

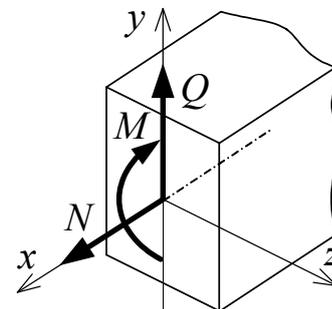


Рис. 3.1

Определение усилий M , Q , N в сечениях статически определимых стержневых систем выполняется методом сечений. Метод основан на том, что если неизменяемая система находится в равновесии, то в равновесии будет находиться и любая ее часть. В месте определения усилия проводится сечение, разделяющее систему на две части, и рассматривается равновесие одной из этих частей, любой. При этом действие отброшенной части на рассматриваемую часть заменяется силами, которые являются внутренними силами в сечении, а по отношению к рассматриваемой части действуют как внешние силы. Из уравнений равновесия, число которых равно трем (что соответствует количеству неизвестных внутренних сил), определяются усилия в рассматриваемом сечении системы.

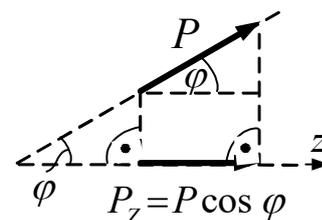
Метод сечений позволяет сформулировать правила определения внутренних сил в сечениях плоских стержневых систем:

⚠ Изгибающий момент в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил (включая и опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, относительно центра тяжести сечения.

⚠ Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось, перпендикулярную к оси стержня.

⚠ Продольная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части системы с одной стороны от сечения, на ось, касательную к оси стержня (для прямолинейных стержней – на ось самого стержня).

Напомним, что проекция силы на ось равна произведению величины силы на косинус угла между линией действия силы и рассматриваемой осью – $P_z = P \cos \varphi$. (см. рисунок справа).



Момент силы относительно некоторой точки равен произведению величины этой силы на ее плечо относительно этой точки, где плечо силы относительно точки (h_P) определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы. Например, на рис. 3.2,а – $M_A(P) = P \cdot h_P$.

Согласно данным определениям легко вычисляются момент относительно любой точки и проекция на любую ось нагрузок, распределенных по любым законам, если эти нагрузки привести к равнодействующим силам (R_q). Величина момента относительно некоторой точки A равномерно распределенной нагрузки q_1 (рис. 3.2,б) (равнодействующая R_{q1} которой приложена в середине участка, на который действует нагрузка) будет равна:

$$M_A(q_1) = R_{q1} h_{R1} = (q a) h_{R1},$$

а для нагрузки q_2 , изменяющейся на участке по треугольному закону, будет определяться выражением:

$$M_A(q_2) = R_{q2} h_{R2} = \left(\frac{1}{2} q_2 b \right) h_{R2}.$$

Заметим, что момент относительно любой точки от действия сосредоточенного момента равен самому сосредоточенному моменту, а его проекция на любую ось равна нулю.

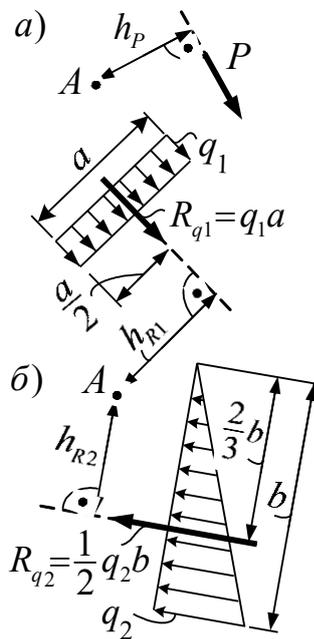


Рис. 3.2

Для наглядного представления об изменении усилий в сечениях систем строят эпюры усилий. Эпюрой усилия (M , Q , N и др.) называется график (диаграмма), отражающий зависимость изменения этого усилия по длинам всех элементов (стержней) системы от действия постоянной нагрузки.

Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр усилий:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси стержня или просто совпадала с ней.

2. Ординаты эпюр откладывают от базовой оси перпендикулярно к ней. Каждая из ординат эпюры усилий представляет собой в определенном масштабе величину усилия, для которого построена эпюра, в поперечном сечении рамы, в котором эта ордината отложена.

3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базовой оси (каждая из линий штриховки – это тоже ордината эпюры усилий).

4. Ординаты усилий откладывают в определенном масштабе, одинаковом в пределах одной эпюры; в характерных точках проставляют значения ординат усилий, а в полях эпюр (в кружочках) обычно ставят знаки ординат эпюр.

При определении поперечных и продольных сил и построении их эпюр в строительной механике обычно принимают следующие правила знаков:

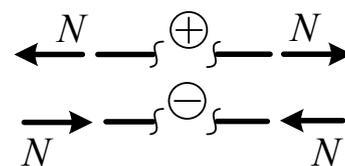
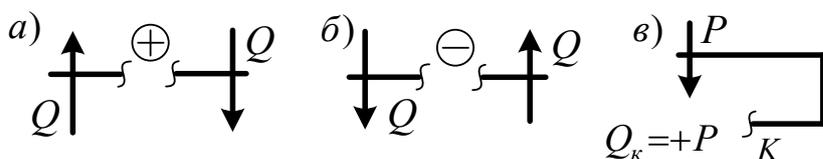
– Поперечная сила в сечении, определенная по вышеуказанному правилу, положительна, если при приложении ее на бесконечно малом расстоянии от сечения со стороны рассматриваемой части она стремится повернуть эту часть относительно сечения по часовой стрелке, и отрицательна, если стремится повернуть эту часть относительно сечения против часовой стрелки – см. рис. 3.3.

Например, при рассмотрении отсеченной части на рис. 3.3,в поперечная

СОДЕРЖАНИЕ

сила в сечении K равна силе P и положительна.

– **Продольная сила** в сечении **положительна**, если она вызывает растяжение в стержне рамы (направлена от сечения), и **отрицательна**, если вызывает сжатие (направлена к сечению) – см. рис. 3.4.



Отметим, что при построении эпюр Q и N ординаты поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны от базовых осей (стержней). При этом следует руководствоваться наибольшей наглядностью эпюр (исключая, по возможности, наложение эпюр друг на друга) и, конечно, на одной эпюре и на участках, являющихся продолжением друг друга по прямой, целесообразно и предпочтительно ординаты одного знака откладывать с одной стороны.

Для **изгибающих моментов** специального правила знаков не устанавливают, а откладывают ординаты их **на растянутых волокнах** (со стороны растянутых волокон). При определении величин изгибающих моментов знаки их можно принимать по собственному усмотрению. В данном пособии изгибающий момент принимается положительным, если он действует относительно сечения по часовой стрелке. Растянутые волокна в сечении при этом определяются следующим образом. В той части системы, из равновесия которой в расчетном сечении определен изгибающий момент, выделяем бесконечно малый элемент стержня, прилегающий к рассматриваемому сечению (на схемах этот бесконечно малый элемент стержня для наглядности изображается в виде элемента конечной длины). Считаем затем, что в расчетном сечении указанный элемент имеет защемление, и прикладываем к нему вычисленный для этого сечения изгибающий момент. Анализируя теперь изгиб рассматриваемого элемента системы (рамы), несложно определить, с какой стороны стержня волокна будут растянуты, а с какой – сжаты.

Схема изгиба элемента системы, выделенного возле сечения 1–1 с правой стороны, показана на рис. 3.5,б. Из анализа этой схемы видно, что растянутыми в сечении 1–1 будут нижние волокна (здесь и далее на схемах изгиба элементов растянутые волокна будем обозначать, проводя со стороны растянутых волокон штриховые линии).

Отметим, что для систем, находящихся в равновесии, усилия в любом сечении, полученные при рассмотрении одной и другой частей относительно этого сечения, будут равны друг другу (значения изгибающих моментов при этом при использовании рассматриваемых правил знаков будут получаться с противоположными знаками – растянутые же волокна, определенные по ним, будут находиться с одной и той же стороны).

Например, для системы на рис. 3.5,а должны соблюдаться равенства:

СОДЕРЖАНИЕ

$M_{1-1}^{(лев)} = -M_{1-1}^{(прав)}$; $Q_{1-1}^{(лев)} = Q_{1-1}^{(прав)}$; $N_{1-1}^{(лев)} = N_{1-1}^{(прав)}$. Это обстоятельство следует использовать для проверки правильности вычисления усилий в сечениях систем.

Приведем несколько примеров вычисления усилий в сечении 1–1 (в общем виде) системы, представленной на рис. 3.5,а, которую будем считать равновесной:

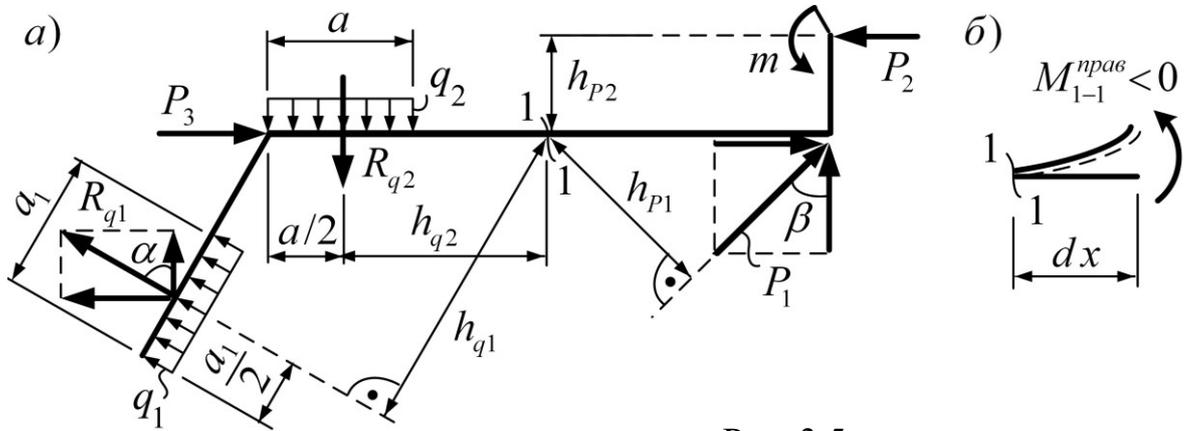


Рис. 3.5

$$M_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot h_{q1} - R_{q2} \cdot h_{q2} + P_3 \cdot 0 = q_1 a_1 h_{q1} - q_2 a h_{q2};$$

$$M_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot h_{p1} - P_2 \cdot h_{p2} - m;$$

$$Q_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \cos \alpha + P_3 \cdot \cos 90^0 - R_{q2} \cdot \cos 0^0 = q_1 a_1 \cos \alpha - q_2 a;$$

$$Q_{1-1}^{(прав)} = -P_1 \cdot \cos \beta + P_2 \cdot \cos 90^0 = -P_1 \cos \beta;$$

$$N_{1-1}^{(лев)} = R_{q1} \cdot \sin \alpha - P_3 \cdot \cos 0^0 - R_{q2} \cdot \cos 90^0 = q_1 a_1 \sin \alpha - P_3;$$

$$N_{1-1}^{(прав)} = -P_2 + P_1 \sin \beta.$$

Здесь: $M_{1-1}^{(лев)}$, $Q_{1-1}^{(лев)}$, $N_{1-1}^{(лев)}$ – усилия в сечении 1–1, полученные из рассмотрения левой части системы относительно этого сечения; $M_{1-1}^{(прав)}$, $Q_{1-1}^{(прав)}$, $N_{1-1}^{(прав)}$ – те же усилия, полученные из рассмотрения правой части системы относительно сечения 1–1.

3.2. Статически определимые рамы, их виды

Рамами называют системы, состоящие из прямолинейных стержней, соединенных между собой жестко (и шарнирно) в узлах, и опирающихся с помощью опор на основание.

По структуре статически определимые рамы обычно разделяют на простые, трехшарнирные и составные.

Простые рамы – это системы (рис. 3.6), состоящие из одного диска в виде ломано-разветвленного стержня, соединенного с основанием тремя связями с использованием обычно трех основных видов опор – шарнирно подвижной опоры, шарнирно неподвижной опоры, заземления (табл. 1.1).

Трехшарнирные рамы (рис. 3.7,а, б) – это систе-

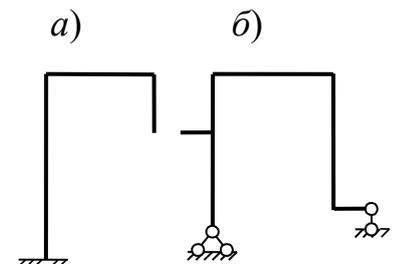
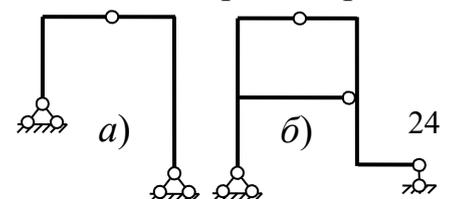


Рис. 3.6. Простые рамы



СОДЕРЖАНИЕ

мы, состоящие из трех дисков (ломано-разветвленных стержней), соединенных между собой последовательно тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой (то есть по принципу трехдискового трехшарнирного треугольника). Одним из дисков при этом может быть основание (рис. 3.7,а). Трехшарнирные рамы относятся к классу распорных систем.

Составными называют рамы, состоящие из нескольких соединенных между собой простых и (или) трехшарнирных рам (рис. 3.7,в).

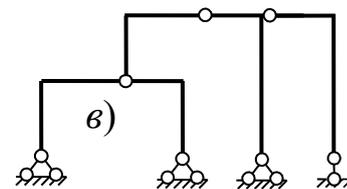


Рис. 3.7

Расчет составных рам выполняется путем расчета отдельных простых и трехшарнирных рам, на которые могут быть разделены составные рамы, с учетом их взаимодействия друг с другом.

3.3. Расчет простых рам

Рассмотрим раму, представленную на рис. 3.8. Из анализа рамы видно, что при определении усилий в ее сечениях нельзя обойтись без знания опорных реакций. Следовательно, расчет рамы необходимо начинать с их определения.

Опорные реакции определяются из уравнений равновесия рамы в целом, которые в общем случае можно составить в трех различных вариантах:

1) в виде сумм проекций сил на две произвольные не параллельные друг другу оси и суммы моментов сил относительно некоторой точки плоскости ($\Sigma X = 0$; $\Sigma Y = 0$; $\Sigma M_T = 0$);

2) в виде суммы проекций сил на произвольную ось и двух сумм моментов относительно любых точек плоскости, не лежащих на одном перпендикуляре к указанной оси проекции ($\Sigma X = 0$; $\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$);

3) в виде трех сумм моментов относительно трех точек, не лежащих на одной прямой ($\Sigma M_A = 0$; $\Sigma M_B = 0$; $\Sigma M_C = 0$).

Заметим, что вид уравнений равновесия для определения опорных реакций следует выбирать так, чтобы в каждое из них, по возможности, входило только одна неизвестная опорная реакция и не входили ранее определенные опорные реакции, используя для этого, например, уравнения моментов относительно точек пересечения других неизвестных опорных реакций или сумму проекций сил на ось, перпендикулярную другим опорным реакциям (см. расчет рамы на рис. 3.8).

После определения опорных реакций всегда нужно выполнять **проверку** правильности их расчета, для чего следует использовать уравнение равновесия, которое ранее не использовалось, и в которое входили бы все вычисленные ранее опорные реакции.

Определим опорные реакции для рассматриваемой рамы (рис. 3.8). Для этого здесь используем второй вариант уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma X = 0; & \quad R_A - 4 = 0; & \quad R_A = 4 \text{ кН}; \\ \Sigma M_L = 0; & \quad -4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - R_C \cdot 4 = 0; & \quad R_C = 5 \text{ кН}; \\ \Sigma M_D = 0; & \quad -4 \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 8 + R_B \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 0; & \quad R_B = +7 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Если величина реакции в результате ее определения получается отрицательной, это указывает на то, что мы неверно предположили ее направление

СОДЕРЖАНИЕ

(в нашем примере – реакции R_B) и оно будет противоположным. В этом случае рекомендуется сразу же исправить направление реакции на действительное.

Проверка правильности определения опорных реакций:

$$\Sigma M_k = 0; \quad 4 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 8 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = 0; \quad +64 - 64 = 0; \quad 0 = 0.$$

Для удобства дальнейших расчетов действительные значения вычисленных реакций рекомендуется показывать на расчетной схеме рамы (см. рис. 3.8).

Переходим к определению усилий и построению их эпюр. Несложно заметить, что любую раму можно разбить на отдельные участки (отрезки стержней), на каждом из которых изменение того или иного усилия описывается (в пределах этого участка) одной зависимостью. Граничные точки этих участков, в которых происходит переход от одних зависимостей изменения эпюр к другим, будем называть характерными точками.

В качестве характерных точек обычно выступают:

- точки, в которых приложены внешние сосредоточенные нагрузки (силы, моменты) либо опорные реакции;
- точки начала и конца приложения распределенных нагрузок;
- точки излома и разветвления стержней.

Для рамы на рис. 3.8 характерными будут точки А, Т, К, В, С и можно выделить четыре расчетных участка:

$$I \rightarrow AT, \quad II \rightarrow TK, \quad III \rightarrow KB \quad \text{и участок} \quad IV \rightarrow BC.$$

Рассмотрим вначале участок I. Проведем на нем произвольное сечение I–I. Внутренние силы в любом сечении рамы могут быть определены из рассмотрения как левой относительно сечения, так и правой (как нижней, так и верхней) частей рамы; при этом эти значения должны получаться равными друг другу (см. раздел 1); это можно и нужно использовать для проверки правильности вычисления усилий в сечениях. Заметим, что определение внутренних сил в сечениях удобнее производить из рассмотрения той отсеченной части рамы, на которую действует меньшее количество сил. Для сечения I–I рассмотрим верхнюю часть рамы (для наглядности в этом примере покажем рассматриваемые части рамы отдельно – см. рис. 3.9,а). Расстояние от верхней крайней точки (точка А) до сечения I–I обозначим x_1 . Тогда выражения для определения внутренних сил в произвольном сечении I–I участка I ($0 \leq x_1 \leq 2$) будут иметь вид:

$$M_I^{всп} = R_A \cdot x_1 + P \cdot 0 = 4x_1; \quad Q_I^{всп} = +R_A = 4; \quad N_I^{всп} = -P = -4.$$

Аналогично определим внутренние силы на участке II ($0 \leq x_2 \leq 4$) (рис. 3.9,б):

$$M_{II}^{всп} = 4 \cdot (2 + x_2) - 4 \cdot 0 - 4 \cdot x_2 = 8 \quad (\text{при любом значении } x_2);$$

$$Q_{II}^{всп} = 4 - 4 = 0; \quad N_{II}^{всп} = -4,$$

и на участке III ($0 \leq x_3 \leq 3$) (рис. 3.9,в): $M_{III}^{лев} = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 4 \cdot x_3 = 8 - 4 \cdot x_3$

[при $x_3 = 0$ (сечение 5) – $M_5 = 8$ кН·м; при $x_3 = 3$ (сечение 6) – $M_6 = -4$ кН·м];

$$Q_{III}^{лев} = -4; \quad N_{III}^{лев} = 0.$$

Изгибающий момент на участке I изменяется по линейной зависимости,

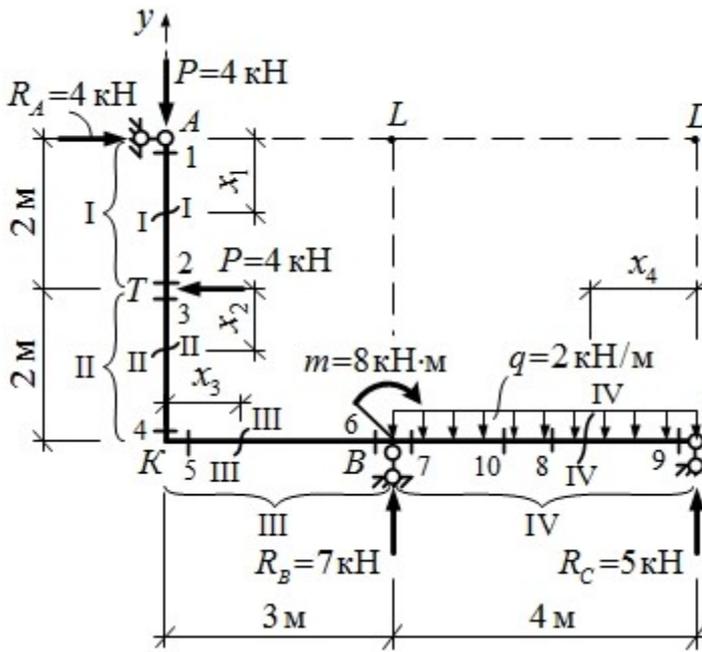


Рис. 3.8

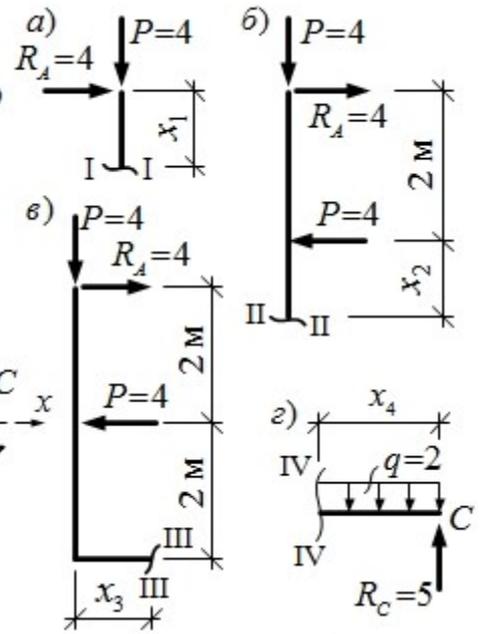


Рис. 3.9

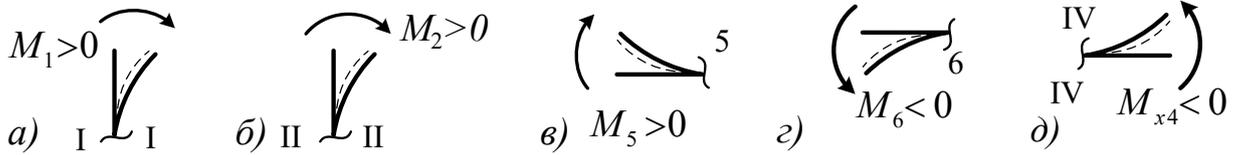


Рис. 3.10. Определение растянутых волокон

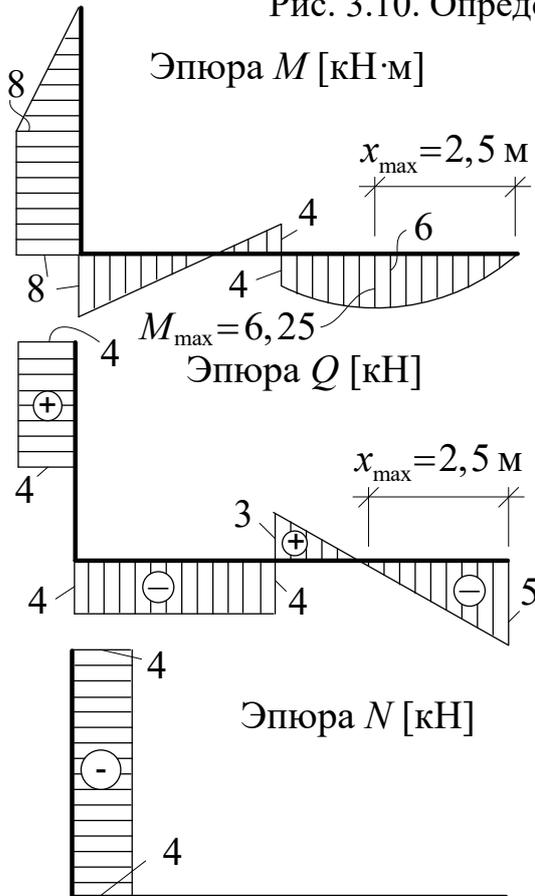


Рис. 3.11

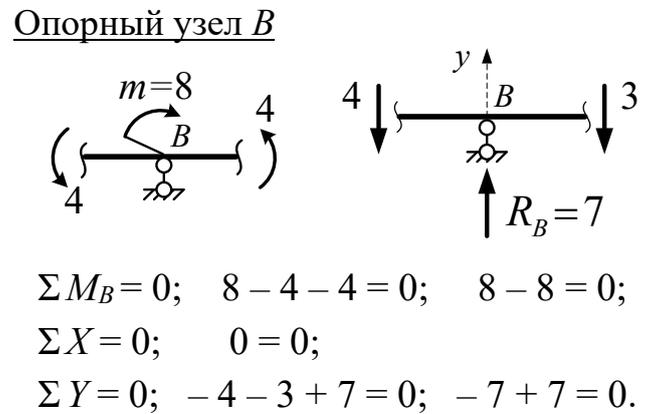


Рис. 3.12

СОДЕРЖАНИЕ

а поперечная и продольные силы – постоянны. Подставляя в выражение изгибающего момента значения x_1 для крайних сечений, найдем:

$$M_1 = M_A = 4 \cdot 0 = 0;$$

$M_2 = 4 \cdot 2 = +8$ кН·м (сечение 2 расположено на бесконечно малом расстоянии сверху от точки T – точки приложения силы P). Растянутые волокна для сечения I–I (и в данном случае для всего участка I) определены на рис. 3.10,а.

Несколько сложнее определяются усилия на участке IV. Проведя произвольное сечение IV–IV, рассмотрим правую часть рамы (рис. 3.8). Выражения для внутренних сил на участке будут иметь вид:

$$M_{IV}^{(npae)} = -5 \cdot x_4 + 2 \cdot x_4 \cdot x_4 / 2 = x_4^2 - 5 \cdot x_4; \quad Q_{IV}^{(npae)} = -5 + 2 \cdot x_4; \quad N_{IV}^{(npae)} = 0.$$

Видно, что изгибающий момент на участке IV изменяется по параболической зависимости, а поперечная сила – линейна (но не постоянна в отличие от участков I, II, III). Для построения эпюры M на этом участке, таким образом, необходимо вычислить значения изгибающих моментов минимум в трех точках – например, по краям участка (в сечениях 7 и 9) и в середине его (в сечении 8):

$$\text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; \quad M_7 = 4^2 - 5 \cdot 4 = -4 \text{ кН·м};$$

$$\text{сеч. 8} - x_8 = 2 \text{ м}; \quad M_8 = 2^2 - 5 \cdot 2 = -6 \text{ кН·м}; \quad \text{сеч. 9} - x_9 = 0; \quad M_9 = 0.$$

Растянутые волокна на участке IV по полученным значениям изгибающих моментов определены на рис. 3.10,з, а сама эпюра M представлена на рис. 3.11.

Для построения эпюры поперечных сил на участке IV достаточно вычислить значения Q в двух сечениях (т. к. через две точки всегда можно провести прямую линию) – обычно вычисляют эти значения в крайних сечениях участков:

$$\text{сеч. 7} - x_7 = 4 \text{ м}; \quad Q_7 = -5 + 2 \cdot 4 = +3 \text{ кН};$$

$$\text{сеч. 9} - x_9 = 0; \quad Q_9 = -5 + 2 \cdot 0 = -5 \text{ кН}.$$

Следует иметь в виду, что на участках действия равномерно распределенных нагрузок, на которых изгибающие моменты изменяются по параболическим зависимостям, эпюра M может иметь экстремумы (максимальные или минимальные значения), которые являются важной характеристикой эпюр и должны определяться дополнительно. Если выполнить анализ выражений для M_{IV} и Q_{IV} , учитывая условие экстремальности функций (согласно которому экстремум функции находится в точке, для которой ее первая производная равна нулю) и известную дифференциальную зависимость $Q = dM/dx$ несложно заметить, что экстремальные значения изгибающие моменты принимают в сечениях, в которых поперечные силы равны нулю. Эти сечения могут быть определены из выражений для Q (в нашем примере – $Q_{IV} = 2 \cdot x_4 - 5 = 0$; $x_{\max} = 2,5$ м), или по эпюрам Q из геометрических соображений ($5/x_{\max} = 3/(4 - x_{\max})$; $x_{\max} = 2,5$ м). Максимальный изгибающий момент на участке IV рассматриваемой рамы, таким образом, имеет место в сечении 10 ($x_{\max} = 2,5$ м) и из рассмотрения правой части рамы равен:

$$M_{10} = M_{IV\max} = (2 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - 5 \cdot 2,5 = -6,25 \text{ кН·м}.$$

Окончательные эпюры M , Q , N в рассматриваемой раме представлены на рис. 3.11.

Все узлы рамы, включая опорные, должны находиться в равновесии. Под узлами здесь будем понимать точки излома либо разветвления стержней рамы, а

СОДЕРЖАНИЕ

также точки примыкания стержней через шарниры. Поэтому после построения в раме эпюр M , Q и N целесообразно выполнить проверку равновесия ее узлов. Для этого узлы выделяем (вырезаем) из рамы, изображаем отдельно (для наглядности показываем и элементы примыкающих к узлам стержней) и прикладываем к ним усилия, возникающие в сечениях, бесконечно близких к узлам, и внешние сосредоточенные нагрузки – силы и моменты, действующие в узлах (если они есть). После этого составляем уравнения равновесия всех сил, приложенных к узлам ($\sum M_y=0$; $\sum X=0$; $\sum Y=0$) и проверяем их выполнение. Для рассмотренной рамы проверка равновесия узлов показана на рис. 3.12.

ⓘ Анализ полученных эпюр внутренних сил позволяет установить ряд **общих закономерностей в изменении эпюр M , Q , N** , которые должны всегда соблюдаться для стержневых систем:

1) на прямолинейном ненагруженном участке эпюра изгибающих моментов всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (обычно для крайних сечений участка), а эпюры Q и N – постоянны (во всех сечениях одинаковы);

2) на участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра M всегда изменяется по параболическому закону и должна строиться минимум по трем ординатам (обычно для крайних и среднего сечений на участке; при необходимости не составляет никаких трудностей найти усилия в дополнительных сечениях); выпуклость эпюры M при этом всегда направлена в сторону действия равномерно распределенной нагрузки; эпюра Q на таком участке линейна и может быть построена по двум ординатам (для крайних сечений);

3) в точке приложения сосредоточенной силы эпюра M всегда имеет излом, направленный в сторону действия силы, эпюра Q – скачок (разрыв) на величину произведения этой силы на косинус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня, а эпюра N – скачок на величину произведения этой силы на синус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня; если внешняя сила перпендикулярна к оси стержня, то скачок на эпюре Q будет равен величине самой силы, а на эпюре N скачка не будет;

4) в точке приложения сосредоточенного момента эпюра M всегда имеет скачок (разрыв) на величину этого момента;

5) в шарнире изгибающий момент всегда равен нулю (не следует путать сечение в шарнире и сечение, бесконечно близкое к шарниру; так если в сечении, бесконечно близком к шарниру, приложен сосредоточенный момент, то на эпюре M в этом сечении, согласно предыдущему положению, будет скачок с нуля в шарнире до значения сосредоточенного момента в точке его приложения);

6) на участке действия распределенной нагрузки в сечении, в котором поперечная сила равна нулю, изгибающий момент всегда имеет экстремум (минимум, максимум);

7) при принятых подходах знак эпюры Q можно определить (проверить) по эпюре M по следующему правилу: эпюра Q на участке положительна, если для совмещения по кратчайшему пути оси стержня с касательной к эпюре M на участке ось стержня необходимо поворачивать по часовой стрелке; если для

СОДЕРЖАНИЕ

указанного совмещения ось стержня нужно поворачивать против часовой стрелки, то эпюра Q на участке будет иметь отрицательный знак.

Используя изложенные закономерности в изменении эпюр M , Q , N , эти эпюры можно строить, не составляя зависимостей для изгибающих моментов, поперечных и продольных сил на участках, а ограничиваясь вычислением значений указанных усилий в характерных сечениях рамы.

Для иллюстрации такого подхода построения эпюр M , Q , N рассмотрим раму, изображенную на рис. 3.13.

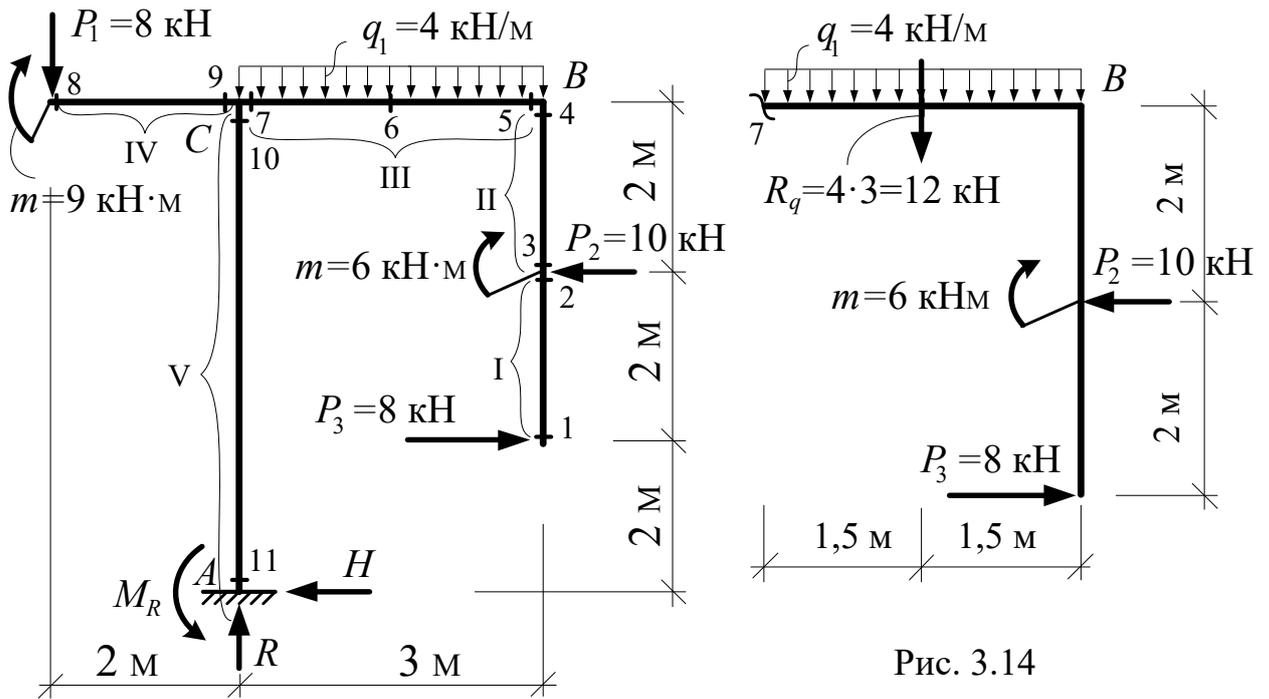


Рис. 3.14

Рис. 3.13. Расчетная схема рамы

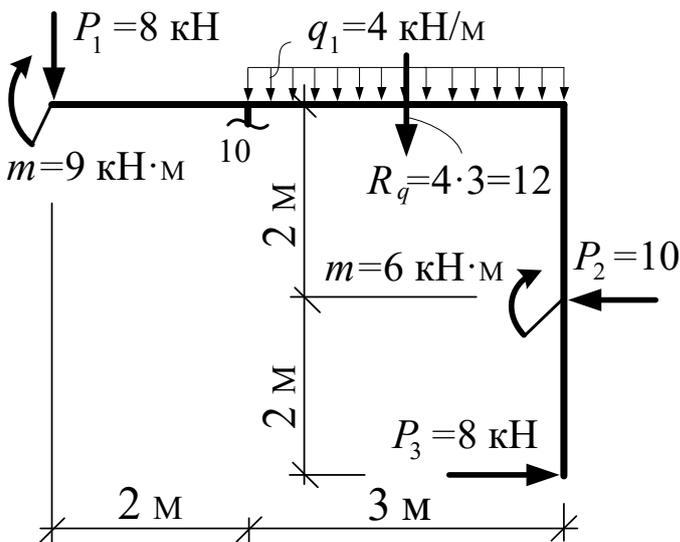


Рис. 3.15

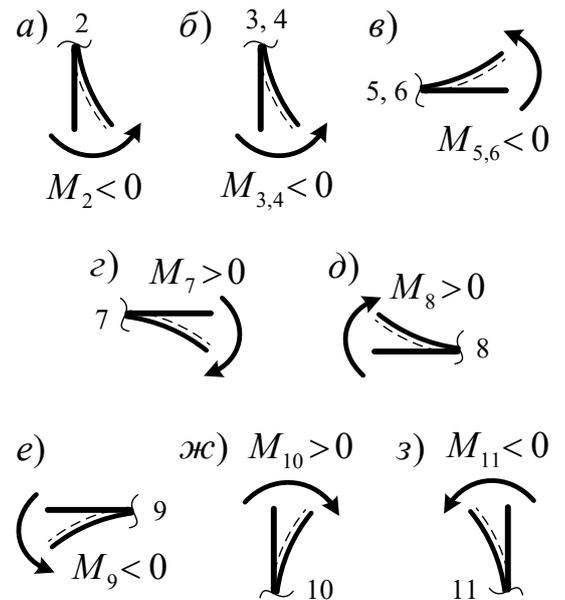


Рис. 3.16. Определение растянутых волокон

СОДЕРЖАНИЕ

Рама является консольной и при вычислении усилий в любом ее сечении можно обойтись без определения опорных реакций, если рассматривать для всех сечений равновесие отсеченных консольных частей рамы. Таким образом, при построении эпюр усилий в таких рамах опорные реакции можно не определять, если это не требуется специально. С другой стороны, зная опорные реакции, мы всегда имеем возможность выполнить проверку правильности предыдущих расчетов (рассматривая равновесие отсеченной части рамы со стороны опоры и равновесие опорного узла).

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на 5 участков (рис. 3.13). При построении эпюры изгибающих моментов учтем, что на участках I, II, IV, V рамы эпюра M будет изменяться по линейному закону и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11. На участке III, на который действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра M будет изменяться по параболическому закону и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты в сечениях 5, 6, 7. Выполним вычисление усилий в указанных сечениях, рассматривая равновесие консольных частей рамы (на рис. 3.14 и 3.15 показаны соответствующие части для 7 и 10 сечений):

$$M_1 = -8 \cdot 0 = 0; \quad M_2 = -8 \cdot 2 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = -8 \cdot 2 + 6 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M_5 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -1,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7 = -8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = 12 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_8 = +9 - 8 \cdot 0 = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_9 = +9 - 8 \cdot 2 = -7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{10} = +9 - 8 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = -7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{11} = +9 - 8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 - 10 \cdot 4 + 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определение растянутых волокон в сечениях 1–11 по действующим в них изгибающим моментам показано на рис. 3.16. Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме представлена на рис. 3.17,а.

Аналогично рассуждаем и при построении эпюр поперечных и продольных сил. На участках I, II, IV, V поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения на этих участках эпюр Q и N достаточно вычислить значения Q и N в одном (произвольном на участке) сечении:

$$Q_{\text{I}} = Q_1 = Q_2 = -8 \text{ кН}; \quad Q_{\text{II}} = Q_3 = Q_4 = -8 + 10 = +2 \text{ кН};$$

$$Q_{\text{IV}} = Q_8 = Q_9 = -8; \quad Q_{\text{V}} = Q_{10} = Q_{11} = +8 - 10 = -2 \text{ кН};$$

$$N_{\text{I}} = N_1 = N_2 = 0; \quad N_{\text{II}} = N_3 = N_4 = 0;$$

$$N_{\text{IV}} = N_8 = N_9 = 0; \quad N_{\text{V}} = N_{10} = N_{11} = -8 - 4 \cdot 3 = -20 \text{ кН}.$$

На участке III поперечная сила не будет постоянной, но будет изменяться линейно, и для построения эпюры Q на этом участке необходимо вычислить значения Q в двух сечениях – 5 и 7: $Q_5 = 0; \quad Q_7 = 4 \cdot 3 = +12 \text{ кН}.$

Продольная же сила на этом участке будет постоянной: $N_{\text{III}} = 8 - 10 = -2 \text{ кН}.$ Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рис. 3.17,б,в.

СОДЕРЖАНИЕ

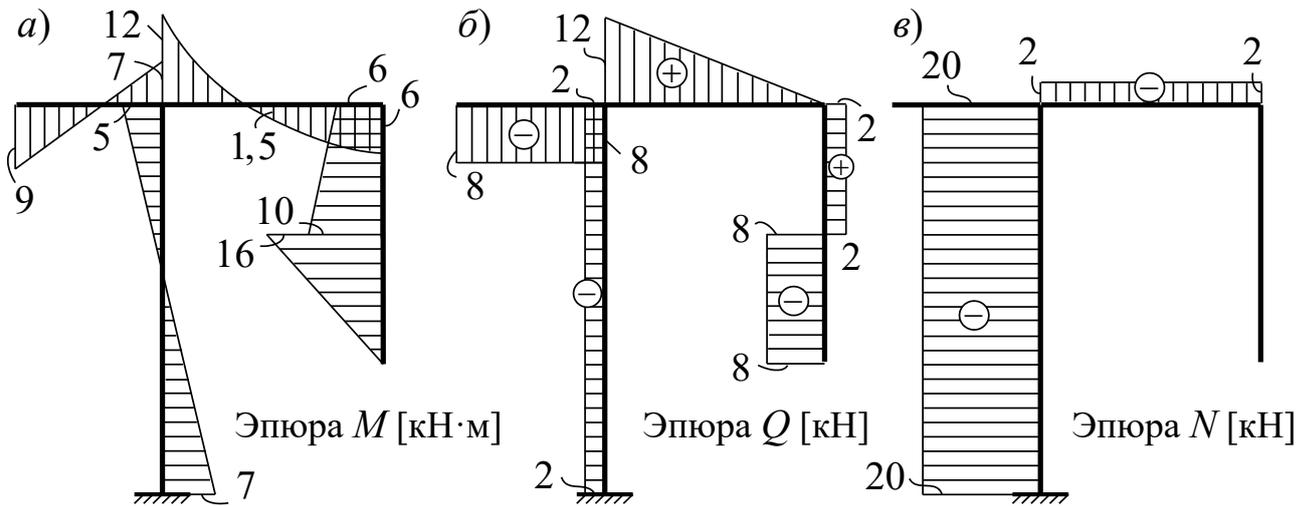


Рис. 3.17. Окончательные эпюры усилий

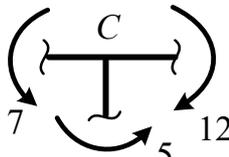
После построения окончательных эпюр M , Q и N выполняется проверка равновесия узлов, показанная для рассмотренной рамы на рис. 3.18.

а) на эпюре M :

Узел C

$$\Sigma M_C = 0;$$

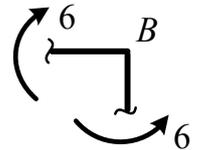
$$12 - 7 - 5 = 0;$$



Узел B

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$6 - 6 = 0;$$



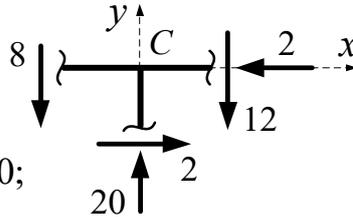
б) по эпюрам Q и N :

Узел C

$$\Sigma X = 0; \quad 2 - 2 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad -8 + 20 - 12 = 0;$$

$$20 - 20 = 0.$$



Узел B

$$\Sigma X = 0; \quad 2 - 2 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad 0 = 0.$$

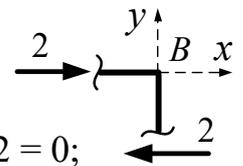


Рис. 3.18. Проверка равновесия узлов

На этом расчет консольной рамы можно и закончить, если нас не интересуют реакции заделки. Следует отметить, что в проектной практике расчета сооружений величины опорных реакций обычно знать необходимо (они используются в расчетах опорных узлов, нижележащих конструкций и т. д.). Поэтому здесь также выполним определение реактивных усилий в заделке, для чего рассмотрим равновесие рамы в целом:

$$\Sigma X = 0; \quad 8 - 10 - H = 0; \quad H = -2 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0; \quad R - 8 - 4 \cdot 3 = 0; \quad R = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad 9 - 8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5 - 10 \cdot 4 + 8 \cdot 2 - M_R = 0; \quad M_R = -7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Несложно увидеть, анализируя окончательные эпюры M , Q и N (рис. 3.17), что значения вычисленных опорных реакций равны соответствующим внутренним усилиям в приопорном сечении 11. Это свидетельствует о том, что опорный узел A находится в равновесии и что расчет рамы выполнен верно.

⚠ Анализ примеров расчета позволяет предложить следующий **порядок построения эпюр усилий M , Q и N** в рамно-стержневых и балочных системах:

СОДЕРЖАНИЕ

1. Показываем предполагаемые направления опорных реакций в системе.
2. Составляем уравнения равновесия системы, решая которые определяем значения опорных реакций.
3. Выполняем проверку правильности определения опорных реакций.
4. Систему разбиваем на расчетные участки (участки между характерными точками) и определяем сечения, в которых необходимо вычислить внутренние силы M , Q и N для построения их эпюр.
5. Вычисляем значения внутренних сил M , Q и N в указанных сечениях (на основе выше изложенных правил) и строим эпюры усилий (с учетом общих закономерностей изменения эпюр на участках); на участках действия равномерно распределенных нагрузок при этом вычисляем экстремальные значения изгибающих моментов (если они есть).
6. Выполняем проверки равновесия узлов и соблюдения общих закономерностей изменения эпюр усилий.

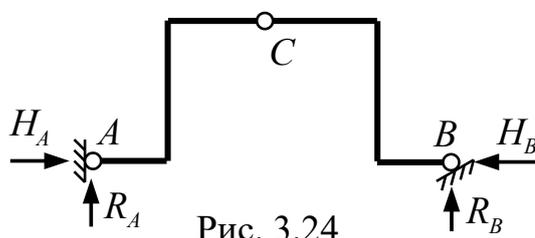
3.4. Особенности расчета трехшарнирных рам

Трехшарнирные рамы (рис. 3.7) имеют обычно более трех внешних опорных реакций (рис. 3.7, а), либо замкнутые контура (рис. 3.7, б), без «разрезания» которых нельзя полностью определить внутренние силы в таких системах.

Поэтому для расчета трехшарнирных рам трех уравнений равновесия всей системы недостаточно, – необходимо составлять дополнительно уравнения равновесия отдельных частей этих систем и определять наряду с внешними опорными реакциями и некоторые внутренние силы – усилия в шарнирах, в затяжках, – после нахождения которых построение эпюр усилий M , Q , N в этих системах можно выполнить по тем же принципам, что и в простых рамах.

Ниже рассмотрим возможные схемы определения внешних опорных реакций и некоторых внутренних сил для ряда видов рам, знания которых достаточно для построения эпюр усилий в этих системах (внешняя нагрузка на рамы может быть любой и на схемах рам не показывается; при наличии особенностей, связанных с приложением нагрузок, они оговариваются отдельно):

I. Трехшарнирная рама с опорами в одном уровне (рис. 3.24).



Возможный порядок расчета:

- 1) $\Sigma M_A = 0$; $R_B = \dots$
- 2) $\Sigma M_B = 0$; $R_A = \dots$
- 3) $\Sigma M_C^{лев} = 0$; $H_A = \dots$
- 4) $\Sigma X = 0$; $H_B = \dots$

Проверка: $\Sigma M_C^{прав} = 0$; ...

II. Трехшарнирная рама с опорами в разных уровнях (рис. 3.25).

Особенность этой рамы в том, что для нее нельзя составить ни одного уравнения равновесия, в которое входило бы только одно неизвестное, и для определения опорных реакций здесь не обойтись без решения системы уравнений:

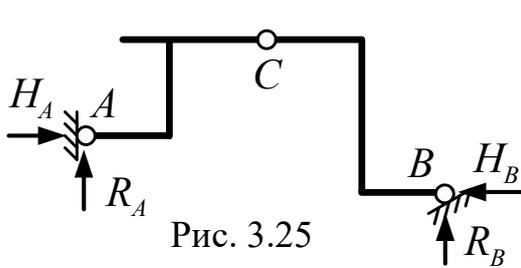


Рис. 3.25

$$\begin{cases} 1) \Sigma M_A = 0; & (R_B, H_B) \\ 2) \Sigma M_C^{праг} = 0; & (R_B, H_B) \\ 3) \Sigma X = 0; & H_A = \dots \\ 4) \Sigma Y = 0; & R_A = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B = \dots \\ H_B = \dots \end{cases}$$

Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0; \dots$

III. Трехшарнирная рама с затяжкой (3.26,а).

Особенностью рамы здесь является наличие в ее структуре замкнутого контура (CDK), который не позволяет в сечениях этого контура определить внутренние силы. Для их определения необходимо разрезать этот контур, что в раме с затяжкой может быть сделано путем разрезания (вырезания) затяжки.

Затяжкой называют прямолинейный стержень, соединяющийся с остальными частями системы по концам шарнирно и работающий при отсутствии на него нагрузки только на растяжение-сжатие.

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 3.26,а. Пусть стержень DK *ненагружен*. Вырежем и рассмотрим его равновесие (рис. 3.21,б):

$$\begin{aligned} \Sigma M_D = 0; \quad Y_K \cdot l = 0; \quad Y_K = 0; & \quad \Sigma M_K = 0; \quad Y_D \cdot l = 0; \quad Y_D = 0; \\ \Sigma X = 0; \quad H_D - H_K = 0; \quad H_D = H_K = H. \end{aligned}$$

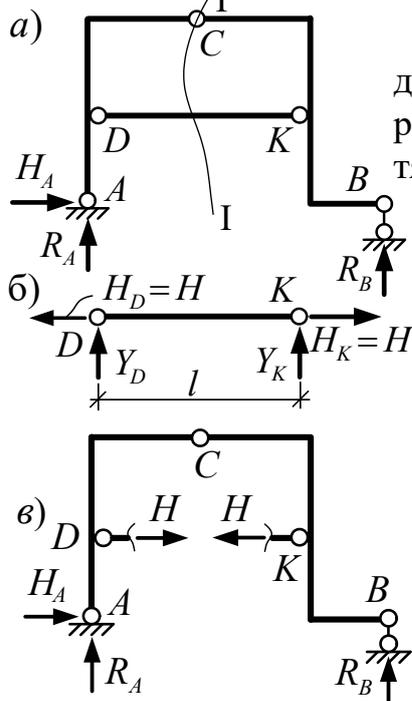


Рис 3.26

Получаем, что в стержне DK возникает только продольная сила, и он соответственно работает только на растяжение-сжатие, то есть стержень DK является затяжкой, продольную силу в которой обозначим H .

Тогда для рамы с ненагруженной затяжкой можно принять следующий порядок расчета:

1) определяем внешние опорные реакции (которых в такой раме – рис. 3.26,а – три, как в обычных простых рамах), например, из уравнений:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; \quad R_B = \dots \quad \Sigma M_B = 0; \quad R_A = \dots \\ \Sigma X = 0; \quad H_A = \dots \quad \text{Проверка: } \Sigma Y = 0; \end{aligned}$$

2) проводим сечение I-I через шарнир C и затяжку DK (рис. 3.26,а), усилие в которой обозначено через H ; рама принимает вид, показанный на рис. 3.26,в; для определения усилия в затяжке рассмотрим равновесие одной из полурам:

$$\Sigma M_C^{праг} = 0; \quad H = \dots$$

3) для проверки используем уравнение равновесия другой части рамы:

$$\Sigma M_C^{лев} = 0.$$

В случае трехшарнирной рамы с нагруженной затяжкой (рис. 3.27,а)

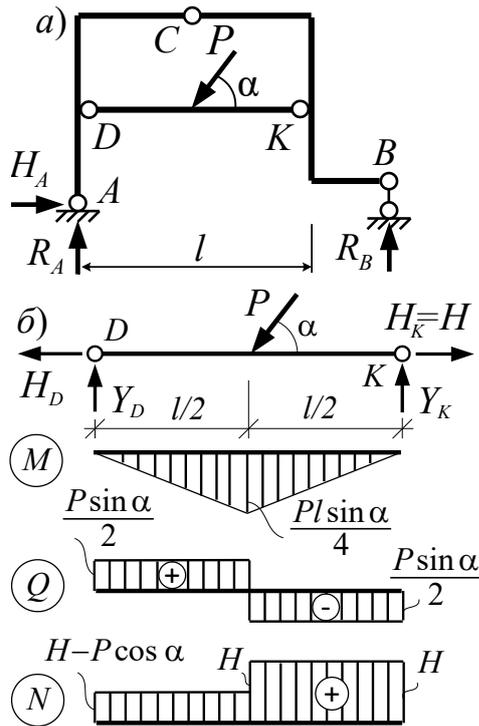


Рис. 3.27

схема ее расчета может быть следующей:

1) внешние опорные реакции R_A , H_A и R_B определяются так же, как и для трехшарнирной рамы с ненагруженной затяжкой (рис. 3.26,а):

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; & \quad R_B = \dots & \quad \Sigma X = 0; & \quad H_A = \dots \\ \Sigma M_B = 0; & \quad R_A = \dots & \quad \text{Проверка: } & \quad \Sigma Y = 0; \end{aligned}$$

2) вырезаем затяжку DK и рассматриваем ее равновесие с учетом действующих на нее нагрузок (рис. 3.27,б); из уравнений равновесия $\Sigma M_D = 0$ и $\Sigma M_K = 0$ определяем вертикальные реактивные усилия Y_D и Y_K в шарнирах D и K , а из уравнения $\Sigma X = 0$ найдем зависимость между H_D и H_K , обозначив одну из этих величин просто H (как усилие в затяжке, которое пока неизвестно).

Например, для нагрузки на затяжку, представленной на рис. 3.27,а, получим:

$$Y_D = Y_K = 0,5 \sin \alpha; \quad H_D = H_K - P \cos \alpha = H - P \cos \alpha.$$

Имея эти величины, можно построить в затяжке окончательные эпюры усилий M , Q и N с точностью до параметра H , определяющего продольные силы в затяжке (рис. 3.27,б);

3) рассматриваем раму ABC без затяжки, но с учетом передаваемых от нее на раму (в обратных направлениях) реактивных сил в шарнирах D и K — Y_D , Y_K , которые уже известны, и усилий H_D , H_K , которые известны с точностью до параметра H (рис. 3.27,в). Найдем этот параметр, рассмотрев равновесие одной из полурам:

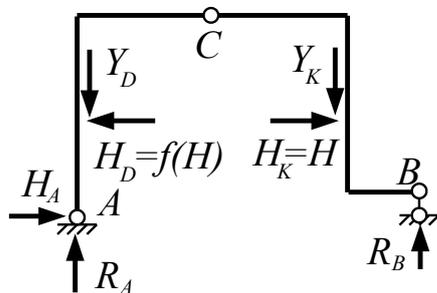


Рис. 3.27,в

3) рассматриваем раму ABC без затяжки, но с учетом передаваемых от нее на раму (в обратных направлениях) реактивных сил в шарнирах D и K — Y_D , Y_K , которые уже известны, и усилий H_D , H_K , которые известны с точностью до параметра H (рис. 3.27,в). Найдем этот параметр, рассмотрев равновесие одной из полурам:

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad H = \dots \quad \text{Проверка: } \Sigma M_C^{лев} = 0.$$

IV. Трехшарнирная рама с двумя параллельными затяжками (рис. 3.28).

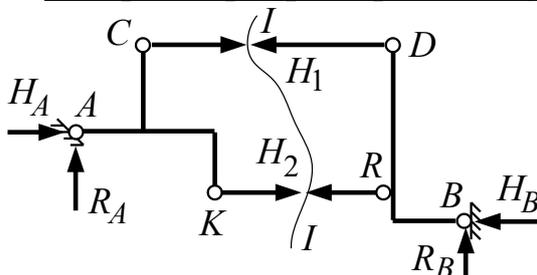


Рис. 3.28

Возможная схема расчета:

1) проводим сечение I-I и рассматриваем равновесие левой и правой частей рамы:

$$\Sigma Y^{лев} = 0; \quad R_A = \dots \quad \Sigma Y^{прав} = 0; \quad R_B = \dots$$

2) рассматриваем равновесие рамы в целом:

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; & \quad H_B = \dots \\ \Sigma M_B = 0; & \quad H_A = \dots \end{aligned}$$

3) рассматривая теперь равновесие левой (либо правой) части, найдем усилия в затяжках: $\Sigma M_K^{лев} = 0; \quad H_2 = \dots \quad \Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_1 = \dots$

4) выполняем проверку правильности определения реакций: $\Sigma M_B^{прав} = 0; \dots$

V. Трехшарнирная рама с двумя пересекающимися затяжками (рис. 3.29).

Возможная схема (порядок) расчета: 1) $\Sigma M_A = 0$; $R_B = \dots$

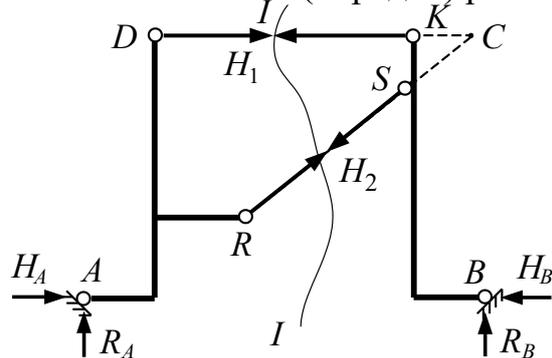


Рис. 3.29

2) $\Sigma M_B = 0$; $R_A = \dots$

3) проводим сечение I–I (рис. 3.29) и рассматриваем равновесие частей рамы:

$$\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad H_A = \dots$$

$$4) \Sigma M_C^{прав} = 0; \quad H_B = \dots$$

$$5) \Sigma M_D^{лев} = 0; \quad H_2 = \dots$$

$$6) \Sigma M_R^{лев} = 0; \quad H_1 = \dots$$

$$7) \text{Проверка: } \Sigma X^{прав} = 0; \dots \Sigma Y^{прав} = 0; \dots$$

VI. Отметим еще одно возможное упрощение в расчетах трехшарнирных и составных рам. Если в структуре рамы имеется диск, который не нагружен и который соединяется с другими дисками (с основанием) с помощью толь-

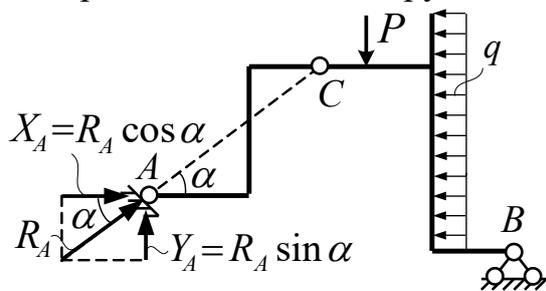


Рис. 3.30

ко двух шарниров (смотри, например, диск AC на рис. 3.30), то можно и нужно использовать условие равновесия такого диска, а такой диск будет находиться в равновесии только в том случае, если реактивные силы в указанных двух шарнирах направлены по прямой, соединяющей шарниры. Это

означает, что мы знаем направление реактивных усилий, действующих на диск, и нет необходимости искать их в виде составляющих. Например, для рамы на рис. 3.30 реакция в шарнирно неподвижной опоре A (R_A) будет направлена по прямой AC, и ее величину легко найти из уравнения: $\Sigma M_B = 0$. Несложно после этого найти и составляющие реакции R_A , если это необходимо.

3.5. Расчет составных рам

Составными называют рамы, состоящие из нескольких трехшарнирных и (или) простых рам (см. рис. 2.3, в, 3.42, а).

При расчете таких рам, аналогично, как и многопролетные балки, их целесообразно разделять (по шарнирам) на отдельные трехшарнирные и (или) простые рамы, одни из которых будут опираться на другие, и расчет которых мы знаем как выполнять; эти простые и трехшарнирные рамы здесь также можно разделить на главные и второстепенные. Расчет, естественно, надо начинать с самой второстепенной рамы (самой верхней), постепенно переходя к расчету нижерасположенных рам и передавая на них реакции (в обратных направлениях) от вышерасположенных рам. Полные эпюры усилий для составной рамы получим путем составления соответствующих эпюр для отдельных рам.

Например, расчет составной рамы, представленной на рис. 3.42, а, следует

СОДЕРЖАНИЕ

выполнять в следующей последовательности:

1. Сечением $I-I$ отрезаем верхнюю часть, которая представляет собой трехшарнирную раму CDO с опорами в разных уровнях (в шарнире C и в фиктивном шарнире O) и определяем реакции в шарнире C и в опорах S и R .

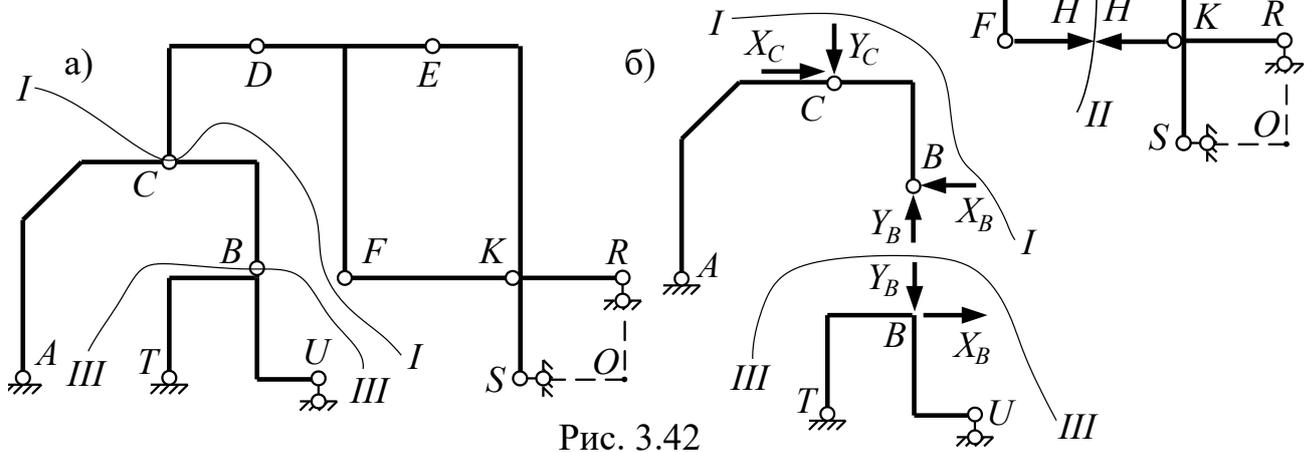


Рис. 3.42

2. Правая полурама DO рассмотренной выше рамы CDO в свою очередь здесь представляет трехшарнирную раму с затяжкой. Поэтому для размыкания замкнутого контура нужно провести сечение $II-II$ (рис. 3.42, б) и найти усилие H в затяжке FK , рассмотрев равновесие левой либо правой части рамы.

3. Проводим сечение $III-III$, выделяя и рассматривая отдельно раму ABC , которая является трехшарнирной рамой с опорами в разных уровнях (A и B).

4. Последней рассматриваем простую раму TBU .

Ниже рассмотрим несколько примеров расчетов составных рам.

Рама, представленная на рис. 3.43, может быть разделена на трехшарнирную раму DCT и два простых консольных стержня AD и BT (рис. 3.44), при этом по структуре трехшарнирная рама DCT опирается на стержни AD и BT .

Рассмотрим вначале трехшарнирную раму DCT , опорные шарниры которой находятся на разных уровнях. Поэтому при определении реактивных усилий в шарнирах D и T необходимо решать систему уравнений:

$$\begin{cases}
 1) \left\{ \begin{aligned} \Sigma M_D = 0; & +22 - 6 \cdot 2 - (4 \cdot 3) \cdot 2,5 + X_T + 4 \cdot Y_T = 0; \\ \Sigma M_C^{пра} = 0; & + (4 \cdot 3) \cdot 1,5 - 3 \cdot X_T + 2 \cdot Y_T = 0; \end{aligned} \right. \Rightarrow \begin{aligned} X_T &= 8 \text{ кН}; \\ Y_T &= 3 \text{ кН}; \end{aligned} \\
 3) \Sigma X = 0; & +X_D + 8 - 4 \cdot 3 = 0; \quad X_D = 4 \text{ кН}; \quad 4) \Sigma Y = 0; \quad Y_D - 6 - 3 = 0; \quad Y_D = 9.
 \end{cases}$$

Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad +22 + 9 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 0; \quad 40 - 40 = 0.$

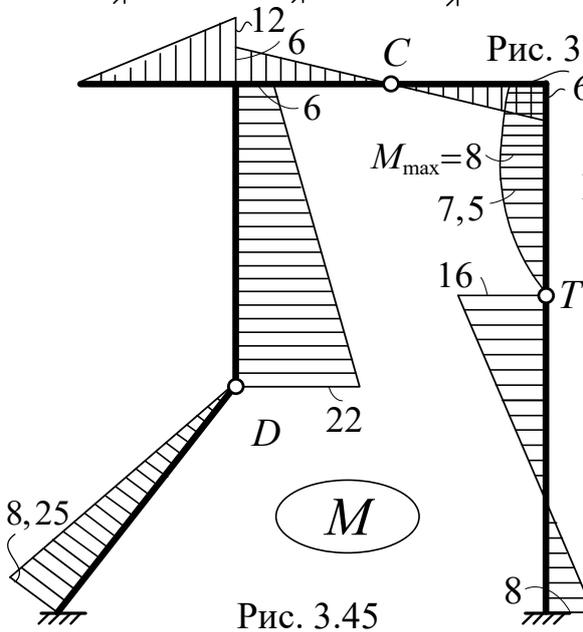
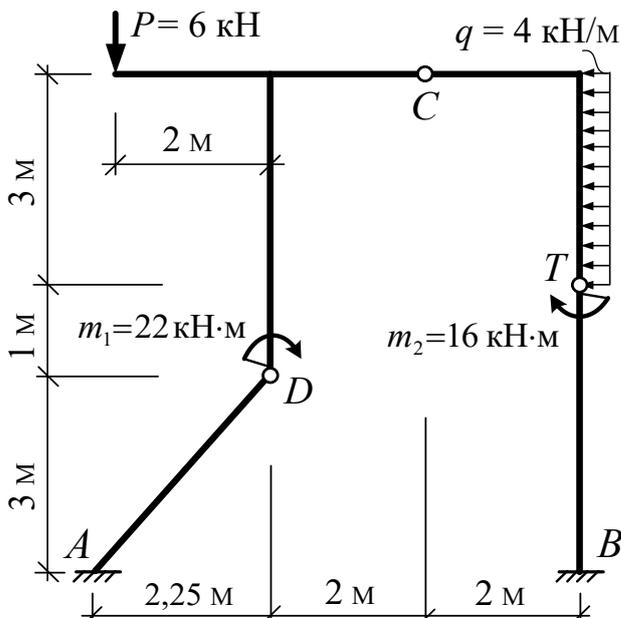


Рис. 3.45

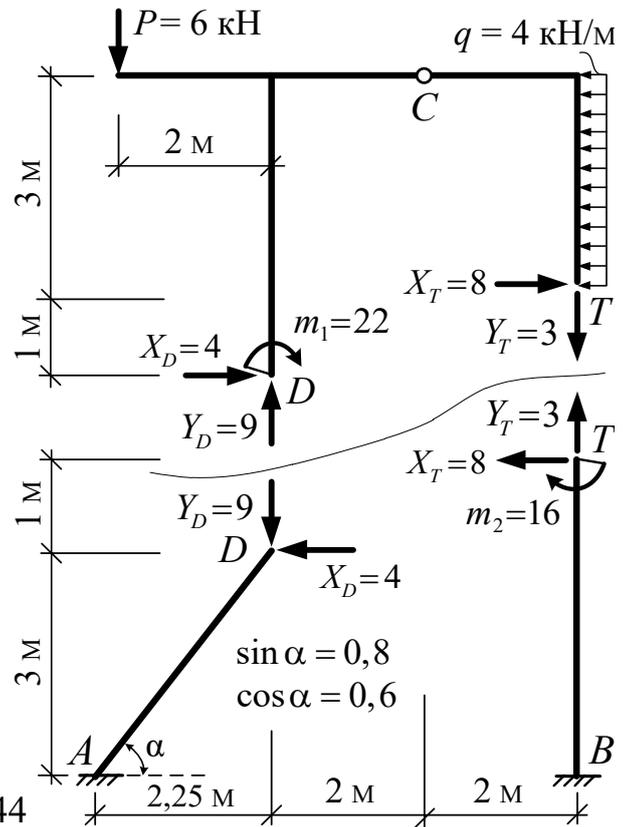


Рис. 3.44

Найденные усилия в шарнирах D и T передаем в обратных направлениях на консольные стержни AD и BT (рис. 3.44). После этого вычисление усилий в сечениях трехшарнирной рамы DCT и консольных стержней AD и BT не представляет никакой сложности. Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в рассматриваемой раме представлены на рис. 3.45–3.47.

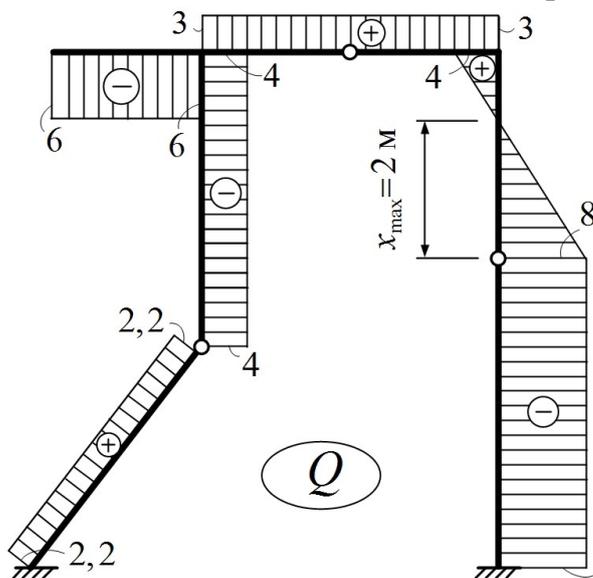


Рис. 3.46

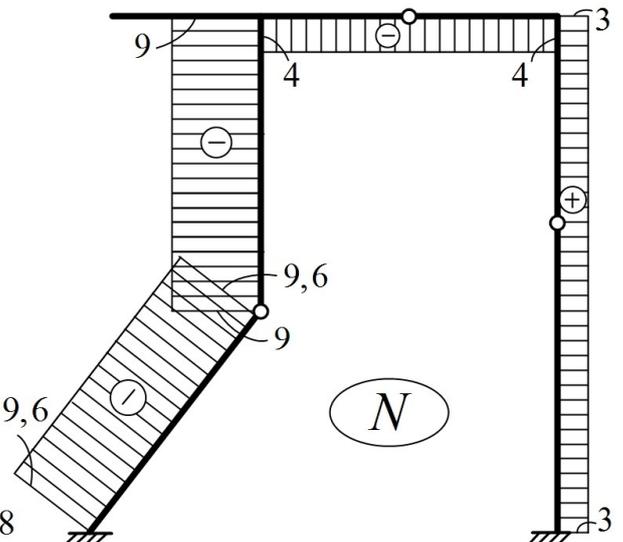


Рис. 3.47

3.6. Расчет статически определимых составных балок

Составными статически определимыми называют балки, состоящие из нескольких простых балок, соединенных между собой по концам шарнирами, как правило, не совпадающими с опорами.

Кинематический анализ таких систем удобно выполнять по формуле:

$$W = (3D - 2Ш - C_0),$$

где D – число дисков в системе, в качестве которых здесь выступают простые балки; $Ш$ – число одиночных (простых) шарниров, соединяющих эти балки; C_0 – число опорных связей в системе.

Геометрический анализ структуры составных балок позволяет ввести для них понятие **поэтажной схемы балки**. Поэтажная схема составной статически определимой балки представляет собой схему взаимодействия отдельных простых балок, образующих составную, между собой (см. рис. 3.59). При этом среди указанных простых балок можно выделить главные и второстепенные балки.

Главными называют простые балки, которые после разрезания составной балки по шарнирам, соединяющим простые балки, могут самостоятельно нести нагрузку (неизменяемы). Учитывая, что балка – это диск, имеющий три степени свободы, главные балки должны иметь три опорные связи, то есть главными будут двухопорные балки и балки с защемлением. Главными в системе составных будут и простые балки, имеющие две вертикальные опорные связи, учитывая, что третьей связью для них – горизонтальной – являются соседние балки (что подтверждает геометрический анализ соответствующей системы).

Второстепенными называют балки, которые после указанного разрезания по шарнирам самостоятельно нести нагрузку не могут, так как будут изменяемы. Эти балки опираются на рядом расположенные балки с помощью связей в шарнирах. При этом одни второстепенные балки могут опираться на другие, то есть и среди второстепенных балок имеется определенная иерархия и соответственно уровень их второстепенности может быть разным. Самыми второстепенными будут балки, расположенные выше всего на поэтажной схеме.

Анализ работы составных балок позволяет выявить **закономерности** в их работе и сформулировать их возможный **порядок расчета**:

- расчет составных статически определимых балок удобно выполнять посредством расчета отдельно простых балок, образующих составные;
- при этом расчет необходимо начинать с самых верхних на поэтажных схемах балок, постепенно переходя к расчету нижерасположенных балок и передавая на них опорные реакции от вышерасположенных балок в обратных направлениях (считая их для нижерасположенных балок нагрузками); последними рассчитываются главные балки;
- усилия от нагрузки по поэтажной схеме передаются только на нижележащие балки и не передаются на вышележащие;
- расчет простых балок выполняется аналогично расчету простых рам;
- при действии на составную статически определимую балку только вертикальных нагрузок продольные силы в ней будут отсутствовать;
- окончательные эпюры усилий в составной балке строятся путем объединения эпюр этих усилий, полученных при расчетах простых балок.

3.7. Особенности расчета трехшарнирных арок на вертикальные нагрузки

Трехшарнирная система, в которой два диска, шарнирно соединенных друг с другом, представляют собой криволинейные стержни, называется трехшарнирной аркой. В трехшарнирных арках, как и в трехшарнирных рамах, возникает четыре составляющие опорных реакций, которые определяются из четырех уравнений равновесия арки в целом и отдельных ее частей (рис. 3.65,а):

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_c^{лев} = 0; \quad \sum X = 0.$$

При этом при действии на трехшарнирные арки только вертикальных нагрузок горизонтальные реакции (распор) слева и справа равны друг другу, а вертикальные реакции определяются аналогично опорным реакциям в простой двухопорной балке, нагруженной той же нагрузкой (рис. 3.65,б).

Внутренние силы в сечениях арок определяются на основе тех же подходов, которые используются в рамах и которые изложены в разделах 3.1–3.4.

Можно усилия в сечениях трехшарнирных арок определять и по формулам:

$$\begin{aligned} M_k &= M_k^o - H \cdot y_k; & Q_k &= Q_k^o \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k; \\ N_k &= -(Q_k^o \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где M_k^o , Q_k^o – изгибающий момент и поперечная сила в сечении k простой двухшарнирной балки (см. рис. 3.65,б), имеющей тот же пролет и нагруженной той же нагрузкой, что и арка; H – величина горизонтальных реакций арки (распор); φ_k – угол наклона касательной к оси арки в сечении k по отношению к горизонтальной оси x ; y_k – ордината центра сечения k относительно оси x , проходящей через опоры (см. рис. 3.65,а).

Заметим, что при заданной системе координат с началом в левой опоре арки (рис. 3.65,а) $\sin \varphi_k$ для левой полуарки положительны, а для правой – отрицательны; $\cos \varphi_k$ для обеих полуарок положительны.

В качестве примера рассмотрим арку параболического очертания, представленную на рис. 3.65,а. Вычислим усилия в сечениях K_1 и K_2 арки.

Вначале определим опорные реакции от заданной внешней нагрузки:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \quad 12 \cdot 2 + (3 \cdot 8) \cdot 6 + 10 \cdot 12 + 8 \cdot 17 + (4 \cdot 3) \cdot 18,5 - R_B \cdot 20 = 0; & R_B &= 32,3 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0; & \quad -12 \cdot 18 - (3 \cdot 8) \cdot 14 - 10 \cdot 8 - 8 \cdot 3 - (4 \cdot 3) \cdot 1,5 + R_A \cdot 20 = 0; & R_A &= 33,7 \text{ кН}; \\ \sum M_c^{лев} = 0; & \quad 33,7 \cdot 10 - 12 \cdot 8 - (3 \cdot 8) \cdot 4 + H \cdot 4 = 0; & H &= 36,25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверяем правильность нахождения опорных реакций:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; & \quad 33,7 + 32,3 - 12 - 3 \cdot 8 - 10 - 8 - 3 \cdot 4 = 0; & 66 - 66 &= 0; \\ \sum M_c^{прав} = 0; & \quad 10 \cdot 2 + 8 \cdot 7 + (4 \cdot 3) \cdot 8,5 + 36,25 \cdot 4 - 32,3 \cdot 10 = 0; & 323 - 323 &= 0. \end{aligned}$$

Определяем ординаты для сечений и параметры углов наклона касательных к оси арки горизонтали:

$$\text{Сечение } K_1: \quad x_{K_1} = 4 \text{ м}; \quad y_{K_1} = \frac{4f}{l^2} x_{K_1} (l - x_{K_1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 4 \cdot (20 - 4) = 2,56 \text{ м};$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$\operatorname{tg} \varphi_{K_1} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K_1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} (20 - 2 \cdot 4) = 0,48; \quad \sin \varphi_{K_1} = 0,4327; \quad \cos \varphi_{K_1} = 0,9015;$$

Сечение K_2 : $x_{K_2} = 15$ м; $y_{K_2} = \frac{4f}{l^2} x_{K_2} (l - x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 15 \cdot (20 - 15) = 3$ м;

$$\operatorname{tg} \varphi_{K_2} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} (20 - 2 \cdot 15) = -0,4; \quad \sin \varphi_{K_2} = -0,3714; \quad \cos \varphi_{K_2} = 0,9285.$$

3) Определяем усилия в сечениях по формулам (3.7):

Сеч. K_1 : $M_{K_1}^0 = 33,7 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 104,8$ кН·м; $Q_{K_1}^0 = 33,7 - 12 - 3 \cdot 2 = 15,7$ кН;

$$M_{K_1} = 104,8 - 36,25 \cdot 2,56 = 12 \text{ кН·м; } - \text{растянутые волокна} - \text{снизу;}$$

$$Q_{K_1} = 15,7 \cdot 0,9015 - 36,25 \cdot 0,4327 = -1,532 \text{ кН;}$$

$$N_{K_1} = -(15,7 \cdot 0,4327 + 36,25 \cdot 0,9015) = -39,473 \text{ кН;}$$

Сечение K_2 :

$$M_{K_2} = (32,3 \cdot 5 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 3,5) - 36,25 \cdot 3 = -5,25 \text{ кН·м; } - \text{растян. волокна} - \text{сверху;}$$

$$Q_{K_2} = (-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot 0,9285 - 36,25 \cdot (-0,3714) = 2,043 \text{ кН;}$$

$$N_{K_2} = -[(-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot (-0,3714) + 36,25 \cdot 0,9285] = -38,226 \text{ кН.}$$

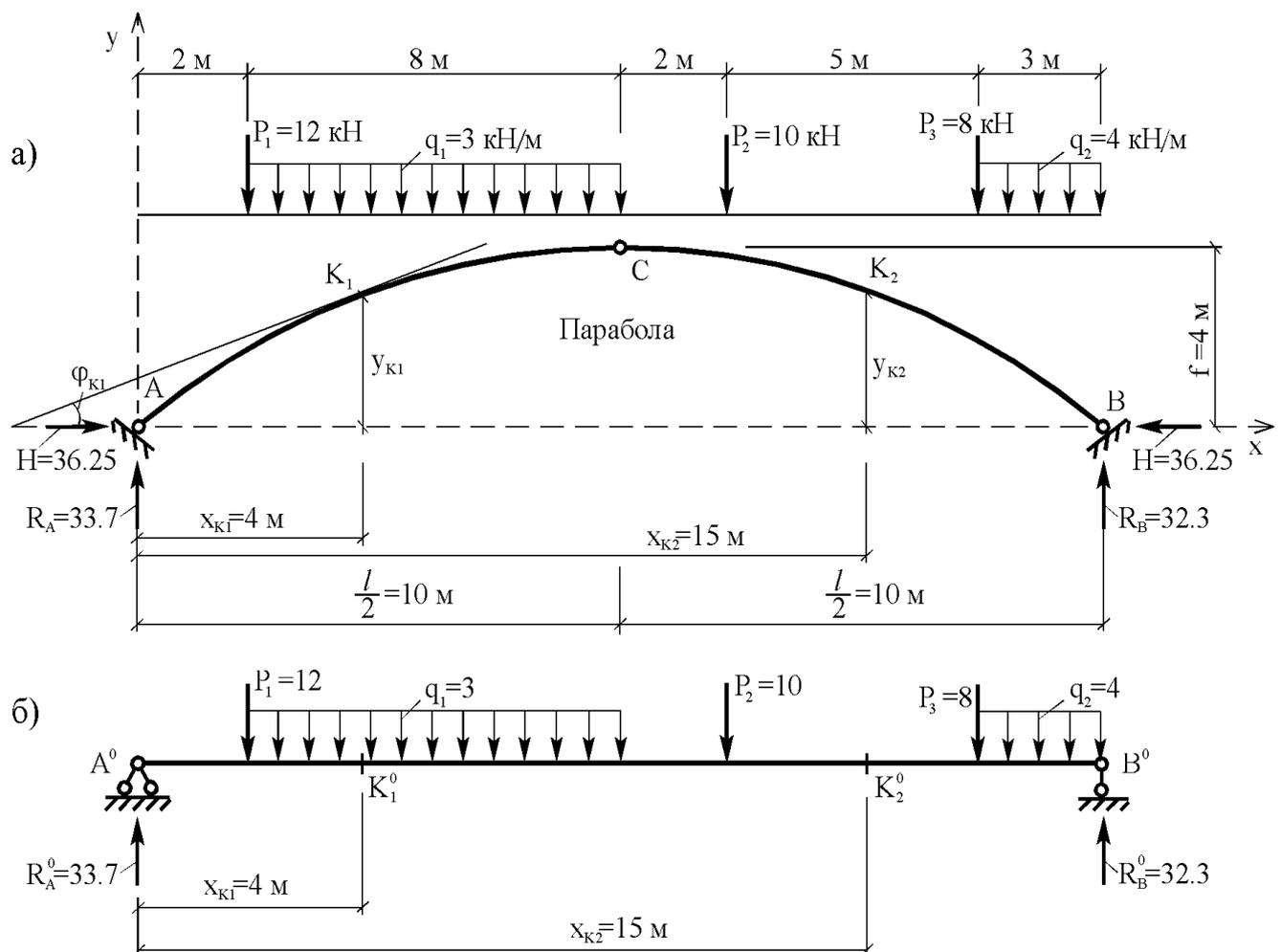


Рис. 3.65

Учитывая, что оси арок криволинейны, эпюры усилий в арках также изменяются по криволинейным зависимостям, и точное представление их формы достаточно сложно. Эпюры усилий в арках обычно строят по некоторому числу ординат, разбивая пролет арки на определенное число (чаще всего равных) частей и вычисляя ординаты эпюр в граничных точках, соединяя их затем плавными кривыми. При этом обязательно необходимо вычислять ординаты эпюр усилий и в характерных сечениях – под сосредоточенными силами и моментами. Чем больше будет расчетных ординат, тем точнее можно представить форму эпюры усилий. На рис. 3.65 представлены результаты расчета арки при разбивке пролета на десять равных частей. Представленные значения усилий в расчетных и характерных сечениях можно использовать для самостоятельного изучения процедуры расчета арок, учитывая, что результаты известны.

3.8. Определение усилий в фермах

Статически определимая шарнирная ферма – это геометрически неизменяемая система, расчетная схема которой состоит из прямых стержней, соединенных в узлах шарнирно (рис. 3.66). Число степеней свободы у нее, определенное, например, по формуле $W = 2U - C - C_0$, равно нулю. При узловой передаче нагрузок стержни шарнирных ферм работают только на растяжение-сжатие. К таким расчетным схемам могут быть приведены и стропильные фермы с жестким соединением элементов в узлах, в которых при узловой передаче нагрузок величины изгибающих моментов и поперечных сил в стержнях незначительны (и ими соответственно можно пренебречь). Жесткие узлы на расчетных схемах таких ферм заменяются шарнирными.

Определим ряд понятий для ферм, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Расстояние между опорами называют пролетом фермы (l), наибольший вертикальный размер – высотой фермы (h).

Совокупность элементов (стержней) фермы, образующих ее верхний и нижний контуры, называют соответственно верхним и нижним поясами фермы (рис. 3.66). Стержни, расположенные между поясами и соединяющие их, называют решеткой фермы. Среди стержней решетки различают раскосы и стойки. Расстояния между соседними узлами поясов фермы (по горизонтали) называют панелями. Различают панели нижнего и верхнего поясов.

Передача нагрузок в узлы ферм осуществляется через, так называемые, передаточные балочки, в качестве которых в реальных сооружениях могут выступать перекрытия по прогонам, балкам; плиты покрытия и т. п. На расчетных схемах передаточные балочки представляются в виде простых двухопорных балок с пролетом, равным длине панелей загруженного пояса фермы.

Основным методом определения усилий в стержнях статически определимых ферм является метод сечений. Ферма сквозным или замкнутым сечением (рис. 3.67,а) разрезается (разделяется) на две или несколько частей так, чтобы был рассечен стержень, в котором определяется усилие. После этого рассматривается равновесие одной из частей, действие на которую отброшенной части (частей) фермы заменяется пока неизвестными продольными силами. Направляют эти продольные силы обычно от узлов (от сечений), что соответствует

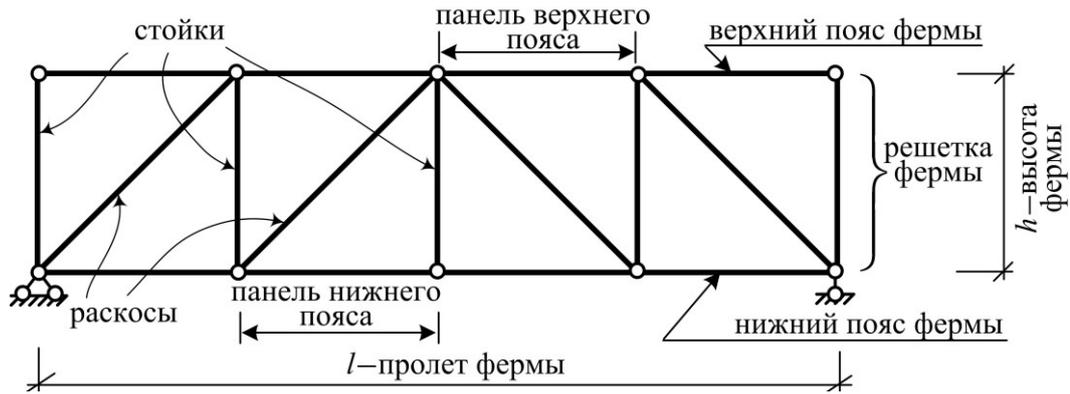


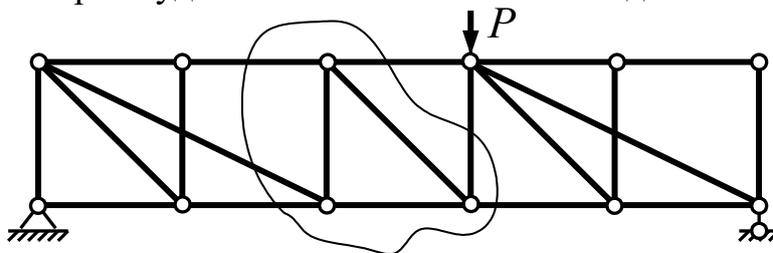
Рис. 3.66. Расчетная схема фермы и ее элементы

положительным для них направлениям, при которых в стержнях возникает растяжение (рис. 3.67,б). Из уравнений равновесия определяются искомые продольные силы и устанавливается истинный знак усилий (если усилие получилось отрицательным, значит оно будет направлено в противоположную сторону и в стержне будет иметь место сжатие). Метод сечений для ферм реализуется с помощью способов вырезания узлов, моментной точки и проекции.

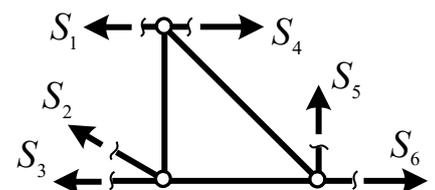
Способ вырезания узлов. Замкнутым сечением вырезается узел фермы. Усилия в рассеченных стержнях, соединяющихся в узле, представляют систему сил, сходящихся в одной точке, для равновесия которой можно составить два независимых уравнения в виде сумм проекций сил на две оси:

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \text{или} \quad \Sigma Z_1 = 0; \quad \Sigma Z_2 = 0. \quad (3.8)$$

Направлять эти оси можно произвольно, исключая только их параллельность. С точки зрения рациональности расчета выбирать направления осей следует так, чтобы в каждое из уравнений (3.8) входило по возможности только одно неизвестное усилие. Вырезать можно те узлы, в которых число неизвестных усилий не превышает двух и эти усилия не направлены по одной прямой. В отдельных случаях возникает необходимость вырезания узлов и с большим числом неизвестных – например, если это позволяет найти усилие хотя бы в одном из стержней (в случае, если в трехстержневом узле два стержня направлены по одной прямой, то можно найти усилие в третьем стержне – см. узлы 2 и 7 на рис. 3.26), либо позволяет найти зависимость между некоторыми усилиями, которая будет потом использоваться в дальнейших расчетах.



а) схема фермы и возможный вариант сечения



б) отсеченная рассматриваемая часть фермы

Рис. 3.67. Применение метода сечений

СОДЕРЖАНИЕ

Например, для фермы на рис. 3.68,а сначала можно вырезать узел 1 (рис. 3.68,б), из рассмотрения равновесия которого найдем:

$$\Sigma Y = 0; \quad S_{1-3} \sin \alpha - P = 0; \quad S_{1-3} = \frac{P}{\sin \alpha};$$

$$\Sigma X = 0; \quad S_{1-2} + S_{1-3} \cos \alpha = 0; \quad S_{1-2} = -S_{1-3} \cos \alpha = -\frac{P}{\sin \alpha} \cos \alpha = -P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Угол α и его тригонометрические функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ находятся из геометрических соображений.

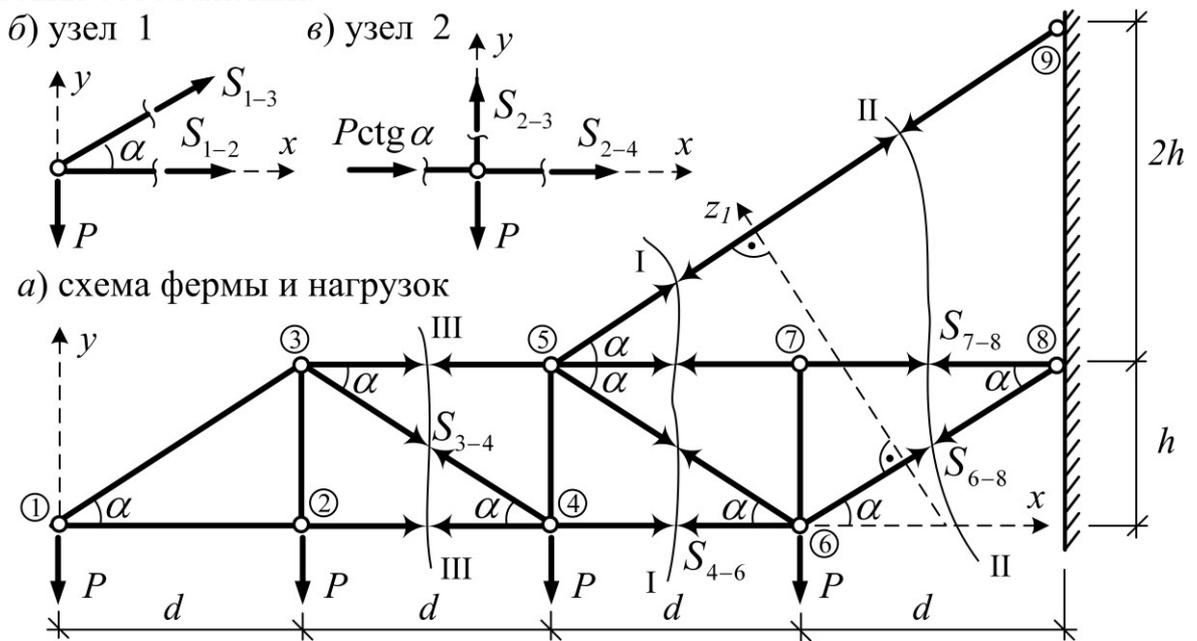


Рис. 3.68

Затем вырезаем узел 2 (рис. 3.68,в). При этом в стержне 1–2 прикладываем уже известное усилие $S_{1-2} = -P \operatorname{ctg} \alpha$. Из рассмотрения равновесия узла найдём:

$$\Sigma X = 0; \quad P \operatorname{ctg} \alpha + S_{2-4} = 0; \quad S_{2-4} = -P \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad S_{2-3} - P = 0; \quad S_{2-3} = P.$$

Дальнейшая процедура расчета фермы предполагает вырезание узлов 3 и 4, из уравнений равновесия которых найдём усилия в стержнях 3–4, 3–5, 4–5 и 4–6. Вырезав узел 7, из уравнения $\Sigma Y = 0$ найдем усилие в стержне 7–6 (оно в данном случае нулевое). Для определения усилий в остальных стержнях способ вырезания узлов здесь не применим, так как в оставшихся узлах сходится более двух стержней с неизвестными усилиями.

Способ вырезания узлов позволяет сформулировать **признаки «нулевых» стержней**, с помощью которых легко находить стержни, в которых усилия равны нулю:

1) в двухстержневом незагруженном узле, в котором стержни не лежат на одной прямой (рис. 3.69, поз. 1), усилия в обоих стержнях равны нулю:

$$\Sigma Z_1 = 0; \quad -S_2 \cos \alpha = 0; \quad S_2 = 0;$$

$$\Sigma Z_2 = 0; \quad -S_1 \cos \beta = 0; \quad S_1 = 0;$$

СОДЕРЖАНИЕ

2) в трехстержневом незагруженном узле, в котором два стержня лежат на одной прямой, а третий под углом к ним (рис. 3.69, поз. 2), усилие в третьем стержне равно нулю, а усилия в первых двух стержнях равны друг другу:

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0; & \quad S_3 \sin \alpha = 0; \quad S_3 = 0; \\ \Sigma X = 0; & \quad -S_1 + S_2 + 0 = 0; \quad S_1 = S_2; \end{aligned}$$

3) в двухстержневом узле, в котором стержни не лежат на одной прямой и по направлению одного из стержней приложена сила (рис. 3.69, поз. 3), усилие во втором стержне будет равно нулю, а усилие в первом – указанной внешней силе:

$$\begin{aligned} \Sigma Z_1 = 0; & \quad -S_2 \cos \alpha = 0; \quad S_2 = 0; \\ \Sigma Z_2 = 0; & \quad -S_1 - P = 0; \quad S_1 = -P. \end{aligned}$$

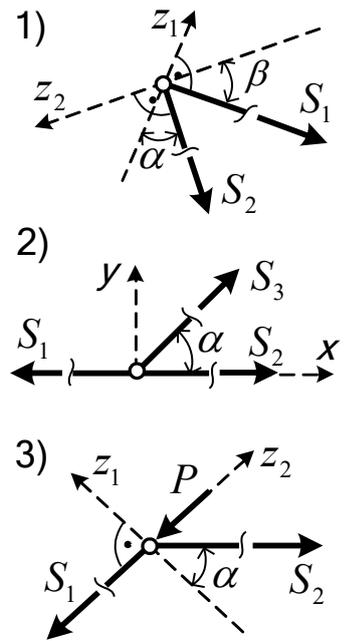


Рис. 3.69

Достоинство способа – его простота. *Недостатками* являются:

1) то, что часто нельзя сразу (без предварительного последовательного расчета ряда узлов и иногда довольно большого их количества) найти усилие в интересующем нас стержне внутри фермы;

2) то, что в процессе последовательного вырезания узлов погрешности расчетов передаются от предыдущих узлов к последующим, постепенно накапливаясь и увеличиваясь.

Способ моментной точки. Ферма рассекается на две части или вырезается часть ее таким образом (если это, конечно, возможно), чтобы оси всех рассеченных стержней с неизвестными усилиями, кроме одного (того, в котором ищется усилие), пересекались в одной точке; эта точка принимается за моментную и относительно ее составляется сумма моментов всех сил для рассматриваемой части фермы; из полученного уравнения определяется искомое усилие.

Например, для фермы на рис. 3.68 для определения усилия в стержне 4–6 необходимо провести сечение I–I и рассмотреть равновесие левой части фермы. Моментной для усилия S_{4-6} будет точка в узле 5, в котором пересекаются оставшиеся три стержня, рассеченные сечением I–I, то есть стержни 5–6, 5–7 и 5–9. Искомое усилие найдется из уравнения:

$$\Sigma M_5^{лев} = 0; \quad -P \cdot 2d - P \cdot d - S_{4-6} \cdot h = 0; \quad S_{4-6} = -\frac{3d}{h} P.$$

Усилие в стержне 6–8 найдем, проведя сечение II–II и рассмотрев равновесие левой части фермы, с учетом того, что моментной точкой в этом случае будет также точка в узле 5, в которой пересекаются оси стержней 5–9 и 7–8, разрезанные сечением вместе со стержнем 6–8:

$$\Sigma M_5^{лев} = 0; \quad -2P \cdot d + P \cdot d - P \cdot d - S_{6-8} \cos \alpha \cdot h - S_{6-8} \sin \alpha \cdot d = 0;$$

$$S_{6-8} = -\frac{2d}{h \cos \alpha + d \sin \alpha} P.$$

Способ проекций. Ферма рассекается на две части или вырезается часть ее таким образом (если это, конечно, возможно), чтобы все стержни с неизвестными усилиями, кроме одного (того, в котором ищется усилие), были параллельны друг другу. Для рассматриваемой части фермы составляется сумма проекций всех сил на ось, перпендикулярную к указанным параллельным стержням. Из полученного уравнения определяется искомое усилие.

Например, для фермы на рис. 3.68 для определения усилия в стержне 7–8 можно использовать уже проведенное ранее сечение II–II; стержни 6–8 и 5–9, рассеченные сечением вместе со стержнем 7–8, параллельны друг другу; поэтому, если составить уравнение проекций всех сил, например, левой части фермы на ось Z_1 , перпендикулярную стержням 6–8 и 5–9, то неизвестные усилия в этих стержнях не войдут в рассматриваемое уравнение равновесия (их проекции на ось Z_1 равны нулю); в уравнении будет только одно неизвестное – усилие S_{7-8} , которое и найдется из решения уравнения:

$$\Sigma Z_1 = 0; \quad -4P \cos \alpha - S_{7-8} \sin \alpha = 0; \quad S_{7-8} = -4P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Аналогично можно найти усилие в стержне 3–4 (рис. 3.68,а), проведя сечение III–III и составив для левой части фермы сумму проекций сил на вертикальную ось Y (стержни 3–5 и 2–4 горизонтальны):

$$\Sigma Y = 0; \quad -2P - S_{3-4} \sin \alpha = 0; \quad S_{3-4} = -\frac{2P}{\sin \alpha}.$$

Достоинствами способов моментной точки и проекций является то, что в большинстве случаев с их помощью усилия в стержнях можно выразить только через внешние нагрузки и опорные реакции (не выражая через другие усилия).

Применяя совместно способы моментной точки, проекций и вырезания узлов, для большинства ферм можно найти усилия во всех стержнях.

3.9. Определение перемещений в изгибаемых системах

3.9.1. Определение перемещений, вызываемых силовыми нагрузками

Определение перемещений в стержневых системах от действия внешних нагрузок удобно выполнять по формуле Мора. Для изгибаемых систем (рам, балок) при этом обычно учитывают только изгибающие моменты (ввиду незначительности влияния на величины перемещений в таких системах поперечных и продольных сил). Формула Мора в этом случае принимает вид:

$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ}; \quad (3.9)$$

где: \bar{M}_i – изгибающие моменты в системе от действия единичной «силы», приложенной в сечении (точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого (i -го) перемещения; M_P – изгибающие моменты

СОДЕРЖАНИЕ

в системе от действия заданной нагрузки; EJ – изгибная жесткость стержней (участков) системы; n – число участков, на которые разбивается система для вычисления интегралов Мора; l – длины этих участков.

Порядок определения перемещений по формуле Мора:

1. Определяются изгибающие моменты в системе от действия заданной нагрузки (находятся аналитические зависимости их изменения в пределах каждого участка либо строится эпюра M_P).

2. В сечении (точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого перемещения прикладывается единичная «сила»; при этом в зависимости от вида определяемого перемещения эта «сила» может быть разной:

а) если определяется линейное (горизонтальное, вертикальное, в произвольном направлении) перемещение, то прикладывается единичная сосредоточенная сила $P = 1$ (рис. 3.70,а);

б) если определяется взаимное сближение (расхождение) двух точек, то к этим точкам прикладываются две единичные силы, направленные по прямой, соединяющей указанные точки, навстречу друг другу (друг от друга) (рис. 3.70,б);

в) если определяется угол поворота сечения, то прикладывается единичный сосредоточенный момент $m = 1$ (рис. 3.70,в);

г) если определяется взаимный угол поворота двух сечений (изменение величины угла между сечениями), то к этим сечениям прикладываются два единичных момента, действующих навстречу друг другу (рис. 3.70,г).

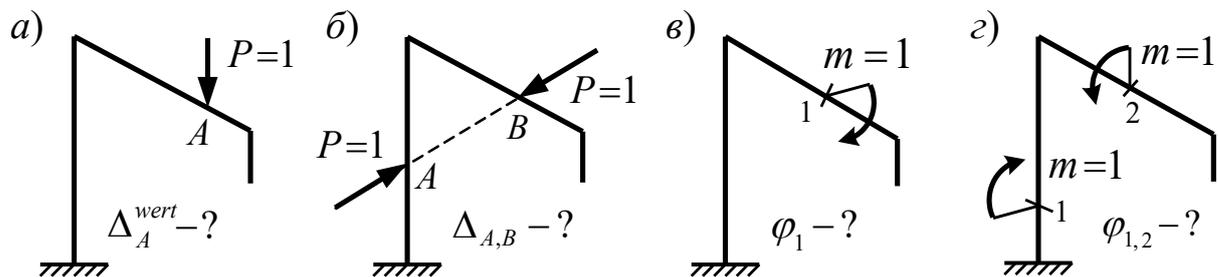


Рис. 3.70

3. От действия единичной «силы» (приложенной согласно пункту 2) определяются изгибающие моменты в системе (находятся зависимости изменения изгибающих моментов в пределах каждого участка либо строится эпюра \bar{M}_i).

4. Вычисляется искомое перемещение по формуле Мора (3.9). При этом вычисление интегралов Мора может производиться:

- непосредственным интегрированием (что не всегда просто);
- по правилу Верещагина;
- по формулам трапеций, Симпсона;
- численным способом, когда интегрирование заменяется суммированием по малым конечным участкам, и другими способами.

Заметим, что вычисление интегралов Мора по правилу Верещагина, по формулам трапеций и Симпсона часто условно называют «перемножением эпюр».

Правило Верещагина. Для вычисления интеграла Мора $\int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ}$ на участке постоянной жесткости, в пределах которого характер изменения эпюр \bar{M}_i и M_P не меняется, нужно площадь одной из эпюр Ω умножить на ординату, взятую под центром тяжести этой площади из другой эпюры y_c (если одна из эпюр криволинейна, то обязательно берется площадь криволинейной эпюры):

$$\frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_i M_P dx = \frac{1}{EJ} \Omega \cdot y_c. \quad (3.10)$$

Таким образом, для эпюры, площадь которой берется, необходимо уметь вычислять эту площадь и уметь находить (знать) положение ее центра тяжести.

Правило знаков: Если центр тяжести «перемножаемой» эпюры и соответствующая ему ордината из другой эпюры расположены по одну сторону от оси стержня (растянутые волокна находятся с одной стороны стержня), то результат «перемножения» принимается со знаком «плюс».

Приведем несколько примеров применения правила Верещагина.

Для эпюр, представленных на рис. 3.71, вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина может быть выполнено четырьмя разными способами, которые будут давать один и тот же результат:

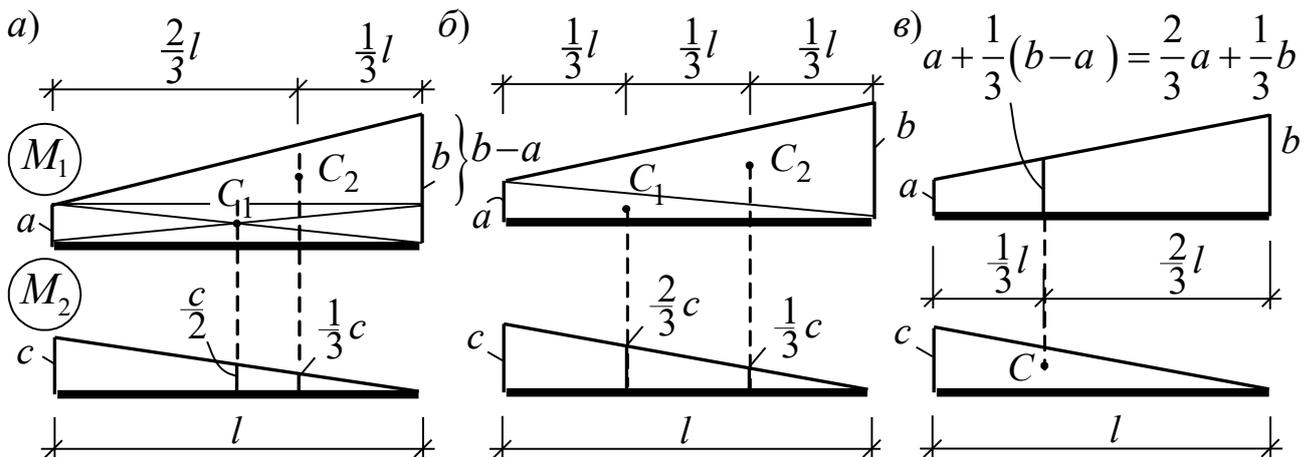


Рис. 3.71

а) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее (для быстрого и удобного определения положения центров тяжести) на прямоугольник $a \times l$ и треугольник $(b - a) \times l$ (рис. 3.71,а) будем иметь:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[(a \cdot l) \cdot \frac{c}{2} + \frac{1}{2} (b - a) l \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

б) при вычислении площади эпюры M_1 и разбивке ее на два треугольника $a \times l$ и $b \times l$ (рис. 3.71,б) получим:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{a \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} c + \left(\frac{b \cdot l}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} c \right];$$

в) при вычислении площади эпюры M_2 (так как обе эпюры M_1 и M_2 линейны, то не имеет значения площадь какой из них брать) (рис. 3.71,в) можно записать:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left[a + \frac{1}{3} (b - a) \right], \text{ или } = \frac{1}{EJ} \left(\frac{c \cdot l}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} a + \frac{1}{3} b \right).$$

если эюру M_1 разобьем на
прямоугольник и треугольник;

если эюру M_1 разобьем на
два треугольника.

Формула трапеций – применяется для «перемножения» только линейных эюр (рис. 3.72):

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{l}{6EJ} (2a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + 2b_1 \cdot b_2). \quad (3.11)$$

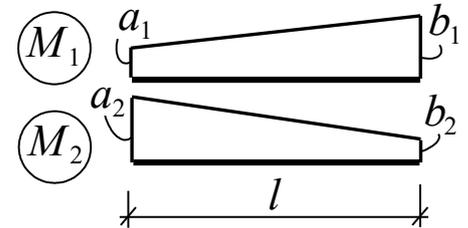


Рис. 3.72

Формула Симпсона может применяться для вычисления интегралов Мора путем соответствующего «перемножения» как линейных эюр, так и эюр, одна из которых криволинейна (изменяется по параболическому закону) (рис. 3.73). Формула Симпсона имеет вид:

$$\int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EJ} = \frac{l}{6EJ} (a_1 \cdot a_2 + 4c_1 \cdot c_2 + b_1 \cdot b_2). \quad (3.12)$$

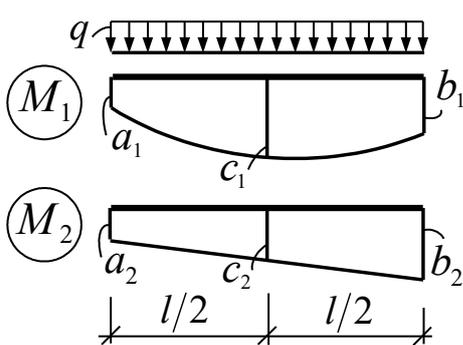


Рис. 3.73 ординаты находятся с разных сторон от оси стержня.

Правило знаков. В формулах Симпсона и трапеций произведения «перемножаемых» ординат принимаются со знаком «плюс», если ординаты находятся с одной стороны от оси стержня, и со знаком «минус», если эти

Рекомендации к вычислению интегралов Мора в рамно-балочных системах:

- для эюр усилий (изгибающих моментов), имеющих линейный характер изменения и простую форму (прямоугольную, треугольную), предлагается использовать правило Верещагина;
- для эюр усилий, имеющих линейный характер изменения, но более сложную форму (трапецеидальную), рекомендуется использовать формулу трапеций;
- для эюр усилий (изгибающих моментов), одна из которых криволинейна, необходимо использовать формулу Симпсона.

При этом отметим, что формула Симпсона является наиболее общей и ее можно применять и для всех случаев обоих линейных эюр усилий.

Следует заметить, что при использовании для вычисления интегралов Мора указанных способов обе «перемножаемые» эюры на участке должны удовлетворять следующим требованиям:

- жесткость стержня на участке должна быть постоянной;
- зависимости изменения обеих эюр (характер их изменения) не должны изменяться в пределах участка, или, по другому, – в пределах участка «пере-

множения» эпюры не должны иметь изломов, разрывов (скачков) и переходов к другим зависимостям изменения усилий.

Если одно из этих требований не соблюдается, то такой участок следует разбить на более мелкие участки, и сделать это надо таким образом, чтобы указанные требования выполнялись. Границами рассматриваемых участков интегрирования в рамно-стержневых системах будут точки (сечения) излома и разветвления стержней, приложения сосредоточенных нагрузок (сил, моментов), действия опорных реакций, начала и конца распределенных нагрузок.

Вычисление перемещений от действия заданных нагрузок по формуле Мора (3.9), производится, таким образом, путем суммирования результатов вычисления интегралов Мора рассмотренными способами по всем участкам одновременной непрерывности эпюр системы.

3.9.2. Определение перемещений, вызываемых изменением температур

Деформирование элементов при температурных (тепловых) изменениях определяется, так называемым, коэффициентом линейного температурного расширения материала α , из которого изготовлен элемент, и который показывает насколько удлиняется элемент единичной длины при его равномерном нагревании на один градус. Этот коэффициент для различных материалов можно найти в справочниках. Приведем его для ряда материалов:

для бетона (в зависимости от структуры бетона) – $\alpha_b = 1,0 \dots 1,4 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$;

для стали (в зависимости от марки стали) – $\alpha_{ст} = 1,1 \dots 1,25 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$;

для алюминия – $\alpha_{ал} = 2,38 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$.

Деформирование бесконечно малого элемента бруса длиной ds при изменении температур с одной (на t_1) и с другой (на t_2) сторон элемента (при этом принимаем, что $t_2 > t_1 > 0$) показано на рисунке 3.74.

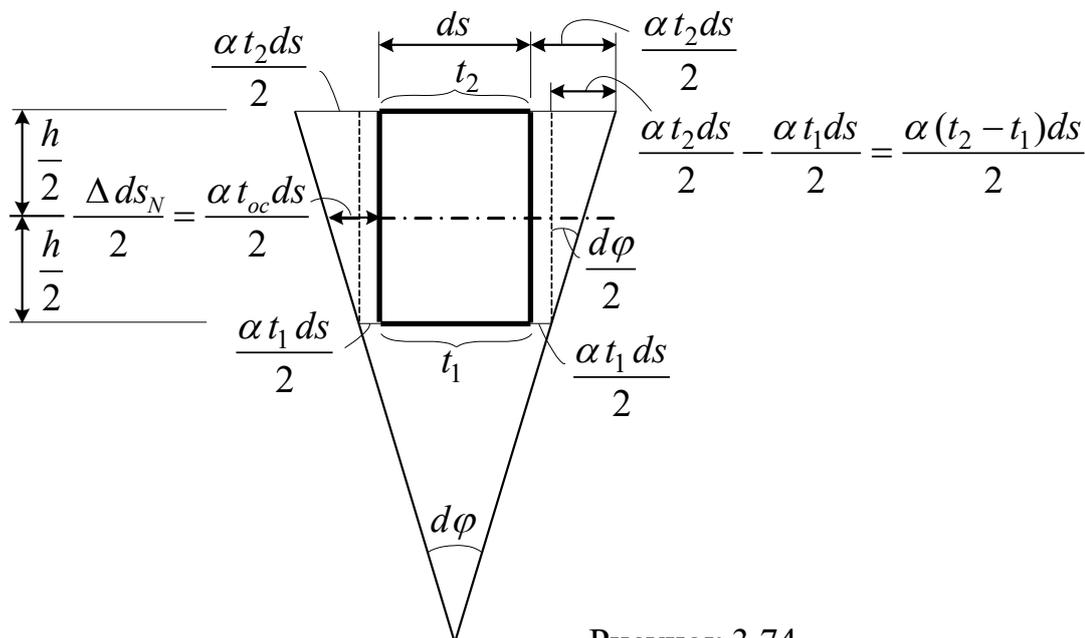


Рисунок 3.74

Определение перемещений от внешней нагрузки выполняется по формуле:

$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \bar{M}_i \frac{M_P ds}{EJ} + \sum_1^n \int_0^l \bar{Q}_i \eta \frac{Q_P ds}{GA} + \sum_1^n \int_0^l \bar{N}_i \frac{N_P ds}{EA},$$

или

$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \bar{M}_i \Delta ds_M + \sum_1^n \int_0^l \bar{Q}_i \Delta ds_Q + \sum_1^n \int_0^l \bar{N}_i \Delta ds_N$$

Если заменить деформации для бесконечно малого элемента бруса на деформации от температурного воздействия, то получим для определения перемещений в статически определимых системах, вызываемых изменением температур, выражение в виде:

$$\Delta_{it} = \sum_1^n \int_0^l \bar{M}_i \Delta ds_t^M + \sum_1^n \int_0^l \bar{Q}_i \Delta ds_t^Q + \sum_1^n \int_0^l \bar{N}_i \Delta ds_t^N \quad (3.13)$$

Деформации сдвига при температурном воздействии малы и ими можно пренебречь, то есть принимаем: $\Delta ds_t^Q = 0$. Перемещения бесконечно малого элемента бруса, связанные с изгибными и продольными деформациями, как видно из рис. 3.79, равны:

$$\Delta ds_t^M = d\varphi \approx \operatorname{tg}(d\varphi) = 2 \cdot \frac{\frac{\alpha t_2 ds}{h} - \frac{\alpha t_1 ds}{h}}{2} = \frac{\alpha(t_2 - t_1) ds}{h};$$

$$\Delta ds_t^N = \alpha t_{oc} ds.$$

Подставляя эти выражения в (3.13), получим формулу для определения перемещений, вызываемых изменением температур, в виде:

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha |t_2 - t_1|}{d} \Omega_{\bar{M}_i} + \sum \alpha t_{oc} \Omega_{\bar{N}_i}, \quad (3.14)$$

где: d – высота сечения элемента;

t_1, t_2 – изменения температур с одной и с другой сторон элемента;

t_{oc} – изменение температуры на центральной оси элемента (для симметричных сечений равно $t_{oc} = \frac{t_1 + t_2}{2}$);

$\Omega_{\bar{M}_i}, \Omega_{\bar{N}_i}$ – площади на рассматриваемых участках единичных эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, построенных от действия единичной «силы» в точке (в сечении), для которой определяется перемещение, в направлении искомого перемещения.

При вычислении перемещений по формуле (3.10) следует руководствоваться правилом знаков:

если деформации на участке от действия изменения температур и от действия единичной «силы» совпадают (одинаковы), то слагаемые в формуле (3.14) на участке принимаются со знаком «плюс», если же указанные деформации не совпадают (противоположны), то соответствующие слагаемые принимаются со знаком «минус».

При этом надо учитывать, что:

- растянутые волокна от действия температуры в стержне будут располагаться с той стороны стержня, где температура выше;
- стержень от действия температуры удлиняется, если температура на оси стержня увеличивается ($t_{oc} > 0$), и укорачивается, если изменение температуры на центральной оси стержня отрицательно.

Порядок определения перемещений от изменений температур может быть следующим:

1. В точке (в сечении), для которой определяется перемещение, прикладывается единичная «сила» в направлении искомого перемещения (делается это также, как и при определении перемещений от силовых нагрузок).
2. От действия этой единичной «силы» строятся эпюры изгибающих моментов и продольных сил – эпюры \bar{M}_i , \bar{N}_i .
3. Вычисляется искомое перемещение по формуле (3.14).

3.9.3. Определение перемещений, вызываемых смещением опор.

В общем случае произвольного числа смещений опор для определения перемещения используется формула:

$$\Delta_{ic} = -\sum (\bar{R}_j \cdot c_j) = -\sum_{j=1}^{n_{cm}} (\bar{R}_{ji} \cdot c_j), \quad (3.15)$$

где: c_j – величина смещения опоры в j -ом направлении;

n_{cm} – число смещений опор;

\bar{R}_{ji} – реакция в смещаемой опоре в i -ом направлении от действия единичной «силы», приложенной в направлении искомого перемещения (i -ом).

Заметим, что произведение $(R_{ji} \cdot c_{ji})$ принимается со знаком «+», если направления R_j и c_j совпадают, и со знаком «-», если эти направления противоположны.

Порядок определения перемещений от смещений опор:

1. В точке, для которой определяется перемещение, прикладывается единичная «сила» в направлении искомого перемещения.
2. От действия приложенной согласно пункту 1 единичной «силы» определяются реакции в опорах, которые смещаются, в направлениях их смещений.
3. Вычисляется искомое перемещение по формуле (3.15).

4. РАБОТА СИЛ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ СИСТЕМЫ

4.1. Понятие о работе сил

Строительные сооружения предназначены воспринимать внешние нагрузки и воздействия, под действием которых они деформируются, накапливая таким образом потенциальную энергию деформации. Деформация сооружений вызывает возникновение в элементах сооружений внутренних сил, которые сопротивляются деформированию сооружений и при соблюдении условий прочности уравнивают действие внешних сил. В процессе деформирования сооружений внешние силовые нагрузки совершают работу на перемещениях точек приложения сил по их направлениям, эта работа будет положительной. Работа внешних сил (будем обозначать ее буквой A) преобразовывается в потенциальную энергию деформации (ее будем обозначать буквой U) и для идеально упругих систем в соответствии с законом сохранения энергии будет равна ей ($A = U$). Внутренние же силы совершают работу на деформациях сооружений и эта работа будет равна по величине работе внешних сил, но будет отрицательной, ее будем обозначать буквой W . Таким образом, работа внешних сил переходит в потенциальную энергию деформации системы, которая проявляется в системе через работу внутренних сил:

$$A = U = -W. \quad (4.1)$$

Работа внешних и внутренних сил может быть действительной и возможной. Действительной является работа сил, которая совершается на перемещениях и деформациях, вызванных этими же силами. Возможной называют работу, которая совершается на перемещениях и деформациях, вызванных другими силами (или воздействиями).

4.2. Действительная работа внешних сил. Теорему Клапейрона

Если к упругой системе приложить статически силу P_i , то под ее действием система будет деформироваться (рис. 4.1, *a*), причем соответственно с возрастанием силы P_i будет согласно закону Гука пропорционально увеличиваться и перемещение точки приложения силы по ее направлению (обозначим его Δ_{ii}). Таким образом, действительная работа будет равна площади заштрихованного треугольника, то есть половине произведения силы P_i на соответствующее перемещение Δ_{ii} (рис. 4.1, *б*):

$$A_{ii} = \frac{1}{2} P_i \cdot \Delta_{ii}. \quad (4.2)$$

СОДЕРЖАНИЕ

Эту зависимость называют теоремой Клапейрона (по имени ученого, который первым ее сформулировал).

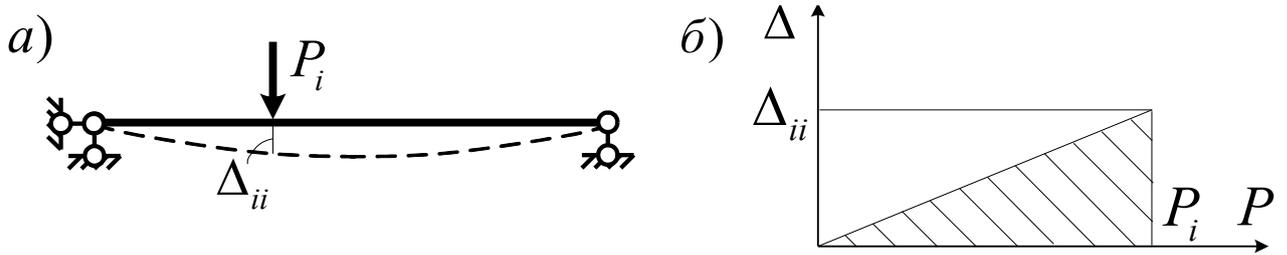


Рис. 4.1

Если в качестве внешней нагрузки будет выступать сосредоточенный момент, то его действительная работа будет определяться выражением:

$$A_{ii} = \frac{1}{2} M_i \cdot \varphi_{ii}. \quad (4.3)$$

Если сил будет несколько (произвольное количество), то в соответствии с принципом независимости действия сил работы всех сил суммируются.

4.3. Возможная работа внешних сил

Если к системе, ранее деформированной силой P_i , приложить другую силу P_k , то точка приложения силы P_i переместится дополнительно на величину Δ_{ik} (рис. 3.76) и работа силы P_i на перемещение Δ_{ik} называют возможной. При этом перемещение Δ_{ik} будет происходить при постоянном значении силы P_i , и соответственно возможная работа A_{ik} силы P_i на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_k , будет равна произведению силы P_i на соответствующее перемещение:

$$A_{ik} = P_i \cdot \Delta_{ik}. \quad (4.4)$$

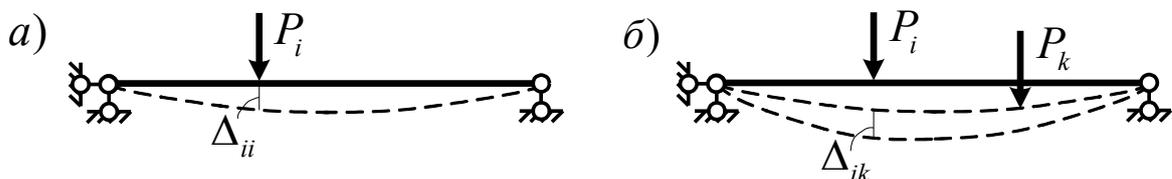


Рис. 4.2

Возможная работа может совершаться также на перемещениях, вызываемых изменением температур, осадками опор и другими факторами.

4.4. Действительная работа внутренних сил

Рассмотрим упругую изгибаемую систему, в любом сечении которой под действием внешней нагрузки в качестве внутренних сил будут возникать изги-

СОДЕРЖАНИЕ

бающие моменты, поперечные и продольные силы и соответственно им появляются деформации изгиба, сдвига и растяжения–сжатия.

Выделим из этой системы бесконечно малый элемент длиной ds , заменив действие отброшенных частей рамы на этот элемент усилиями M , Q и N , которые по отношению ко всей системе являются внутренними, а по отношению к элементу ds будут выступать как внешние силы. Следовательно, рассматривая их работу, можно использовать теорему Клапейрона.

Определим работу каждого из силовых факторов отдельно:

а) работа продольных сил:

Бесконечно малый элемент ds под действием продольных сил N получит удлинение Δds , которое согласно закону Гука определяется выражением:

$$\Delta ds = \frac{N ds}{EA};$$

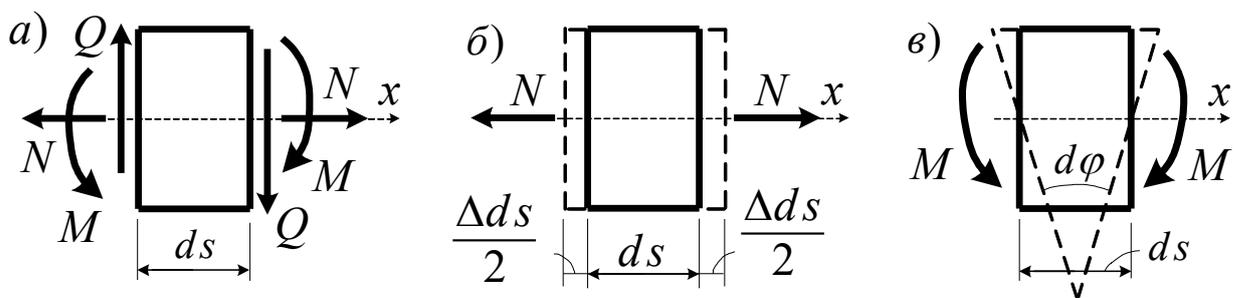


Рис. 4.3

Работа продольных сил N для этого элемента на указанном удлинении будет согласно теореме Клапейрона равна:

$$dW_N = -\frac{N \cdot \Delta ds}{2} \quad \text{или} \quad dW_N = -\frac{N^2 \Delta ds}{2EA}; \quad (4.5)$$

б) работа изгибающих моментов:

Элементарная работа изгибающих моментов для бесконечно малого элемента ds на взаимном повороте сечений элемента $d\varphi$ определяется зависимостью:

$$dW_M = -\frac{M \cdot \Delta d\varphi}{2},$$

где $\Delta d\varphi$ согласно закону Гука при изгибе определяется выражением:

$$d\varphi = \frac{M d\varphi}{EJ},$$

с учетом которого элементарную работу изгибающих моментов получим в виде:

$$dW_M = -\frac{M^2 ds}{2EJ}; \quad (4.6)$$

в) работа поперечных сил:

Деформация от действия продольных сил и изгибающих моментов постоянна по высоте сечения, от действия же поперечных сил деформации (углы сдвига γ и величины сдвигов Δ_Q) по высоте меняются, поэтому вывод выражений работы здесь сложнее.

Получим вначале выражение работы для элементарного участка сечения, которое затем проинтегрируем по всему сечению (по всей высоте сечения). Элемент длиной ds под действием поперечных сил будет деформироваться следующим образом:

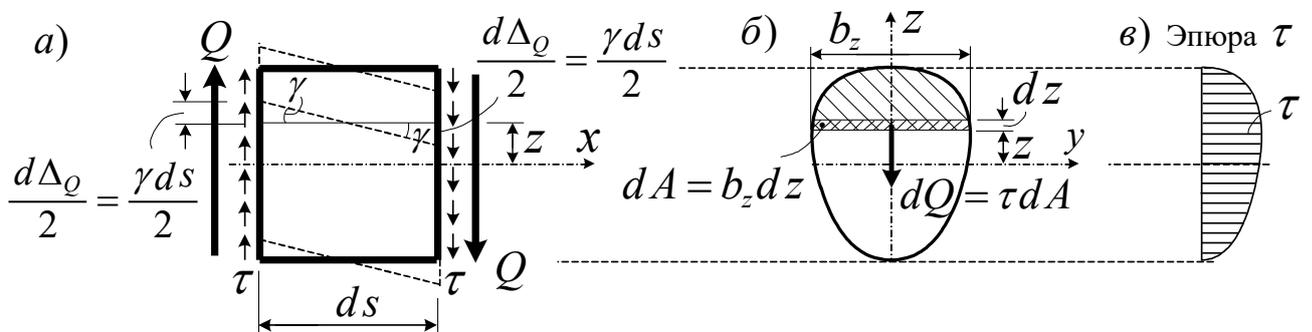


Рис. 4.4

Для элементарной части сечения площадью $dA = b_z dz$ работа элементарной поперечной силы $dQ = \tau \cdot dA$ на этой части сечения по формуле Клапейрона равна:

$$\Delta dW_Q = -\frac{1}{2} dQ \cdot d\Delta_Q = -\frac{1}{2} \cdot (\tau dA) \cdot (\gamma ds), \quad (4.7)$$

где $d\Delta_Q = \gamma ds$.

Подставляем в выражение (3.22) закон Гука при сдвиге:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{или} \quad \tau = \gamma G \quad (4.8)$$

и выражение для напряжений, определяемых при сдвиге по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q S_y^{\text{отс}}}{J b_z}, \quad (4.9)$$

получим:

$$\Delta dW_Q = -\frac{1}{2} \tau^2 \frac{1}{G} dA ds = -\frac{Q^2 (S_y^{\text{отс}})^2}{2 \cdot G J^2 b_z^2} dA ds = -\frac{Q^2 dS}{2 \cdot GA} \cdot \frac{A}{J^2} \cdot \frac{(S_y^{\text{отс}})^2}{b_z^2} dA.$$

Работа поперечной силы по всему сечению для участка ds тогда будет равна:

$$dW_Q = \int_A \Delta dW_Q = -\frac{Q^2 ds}{2GA} \cdot \frac{A}{J^2} \cdot \int_A \frac{(S_y^{\text{отс}})^2}{b_z^2} dA = -\eta \frac{Q^2 ds}{2 \cdot GA}. \quad (4.10)$$

Здесь: $S_y^{\text{отс}}$ – статический момент отсеченной части относительно нейтральной оси сечения (оси y);

b_z – ширина сечения на высоте z ;

J – момент инерции сечения.

η – коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе; этот коэффициент является безразмерным, зависит от формы поперечного сечения и определяется по формуле:

$$\eta = \frac{A}{J^2} \int_A \frac{(S_y^{\text{отс}})^2}{b_z^2} dA. \quad (4.11)$$

Приведем значения коэффициента η для ряда форм сечений:

– для прямоугольного и треугольного сечений η равен 1,2;

– для прокатных двутавров – ориентировочно равен 1,17.

Для других форм сечений этот коэффициент можно найти в справочниках.

Таким образом, для бесконечно малого элемента ds будем иметь следующее выражение действительной работы внутренних сил:

$$dW = dW_M + dW_Q + dW_N = -\frac{M^2 ds}{2EJ} - \eta \frac{Q^2 ds}{2GA} - \frac{N^2 ds}{2EA}.$$

Интегрируя это выражение по длинам каждого из участков стержневой системы и суммируя результаты по всем участкам, получим действительную работу внутренних сил для стержневой системы в виде:

$$W = -\sum \int \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum \int \eta \frac{Q^2 ds}{2GA} - \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA}. \quad (4.12)$$

4.5. Возможная работа внутренних сил

Вывод возможной работы внутренних сил несущественно отличается от приведенного вывода действительной работы внутренних сил и отличается только выражением работы, в котором не будет коэффициента $\frac{1}{2}$, учитывая, что здесь рассматривается возможная работа, и тем, что деформации в направлениях i -тых сил здесь вызываются другими силами – k -ми.

В результате получим выражение возможной работы внутренних сил для стержневой системы в виде:

$$W_{ik} = -\sum \int \frac{M_i M_k ds}{EJ} - \sum \int \eta \frac{Q_i Q_k ds}{GA} - \sum \int \frac{N_i N_k ds}{EA} \quad (4.13)$$

4.6. Потенциальная энергия деформации системы

Учитывая соотношение между потенциальной энергией деформации системы и работой внутренних сил

$$U = -W.$$

потенциальную энергию деформации системы получим в виде:

$$U = \sum \int \frac{M^2 ds}{2EJ} + \sum \int \eta \frac{Q^2 ds}{2GA} + \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA}. \quad (4.14)$$

Анализируя это выражение можно сделать следующие выводы:

- 1) энергия деформирования системы всегда положительна;
- 2) принцип независимости действия сил не применим к энергия деформирования системы, то есть работа системы сил не равна сумме работ каждой силы в отдельности (так как сумма квадратов не равна квадрату суммы);
- 3) количество потенциальной энергии системы не зависит от последовательности ее загрузки (так как от последовательности загрузки системы не зависят значения внутренних сил M , Q , N в системе), а определяется конечным состоянием нагрузки на сооружение;
- 4) а значит, что и действительные работы внешних и внутренних сил не зависят от последовательности нагружения системы.

4.7. Теоремы о взаимности возможных работ и взаимности единичных перемещений

Работа сил i -го состояния на перемещениях по направлениям этих сил, вызванных силами k -го состояния равна работе сил k -го состояния на перемещениях по направлениям этих сил, вызванных силами i -го состояния:

$$W_{ik} = W_{ki}.$$

Аналогично, перемещение по направлению i -ой силы, вызванное k -ой силой единичной величины, равно перемещению по направлению k -ой силы, вызванному i -ой силой единичной величины:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

5.2. Степень статической неопределимости системы

Степенью статической неопределимости системы называют количество «лишних» связей, удаление которых обращает систему в статически определимую. Число же «лишних» связей равно степени свободы системы с обратным знаком: $L = -W$. Формулы для определения степени свободы системы приведены и обсуждаются в разделе «Кинематический анализ сооружений»).

Степень статической неопределимости рам можно определить по формулам:

$$L = 3K - Ш; \quad (5.2)$$

$$L = -(3D - 2Ш - C_0). \quad (5.3)$$

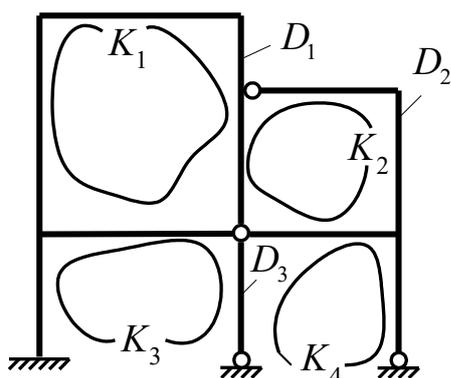


Рис. 5.1

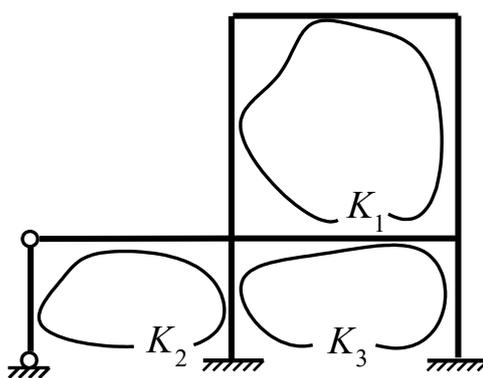


Рис. 5.2

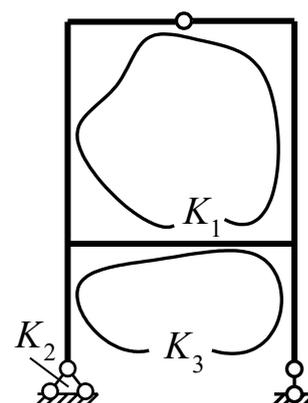


Рис. 5.3

Вычислим число лишних связей для рам, представленных на рис. 5.1÷5.3:

а) для рамы на рис. 5.1: $L = 3K - Ш = 3 \cdot 4 - 6 = 6;$

$$L = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 7) = 6.$$

б) для рамы на рис. 5.2:

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 2 = 7;$$

рама содержит в себе жесткие замкнутые контуры и по формуле

$$L = -(3D - 2Ш - C_0) \text{ лишние связи в ней рассчитывать нельзя;}$$

в) для рамы на рис. 5.3: $L = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 7 = 2;$

$$L = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 3) = 2.$$

5.3. Выбор основной системы метода сил

Основной системой (О.С.) метода сил называется статически определимая, геометрически неизменяемая система, получаемая из заданной статически неопределимой системы путем отбрасывания «лишних» связей и замены их неизвестными усилиями, которые могут возникать в этих связях.

Геометрическая неизменяемость определяется с помощью кинематического анализа основной системы, а точнее, с помощью геометрического анализа структуры системы (см. разд. «Кинематический анализ сооружений», с. 11–13).

Рассмотрим несколько примеров выбора основных систем метода сил.

СОДЕРЖАНИЕ

Пример 5.1. Рама, представленная на рис. 5.4,а, имеет две «лишние» связи – $L = 3K - Ш = 3 \cdot 1 - 1 = 2$ или $L = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 6) = 2$, и для нее могут быть выбраны основные системы (О.С.) метода сил, показанные на рис. 4.4,б–4.4,д, и не может быть принята система, изображенная на рис. 4.4,е, так как она мгновенно изменяема в верхней части по первому признаку мгновенной изменяемости – три диска соединены тремя шарнирами, лежащими на одной прямой.

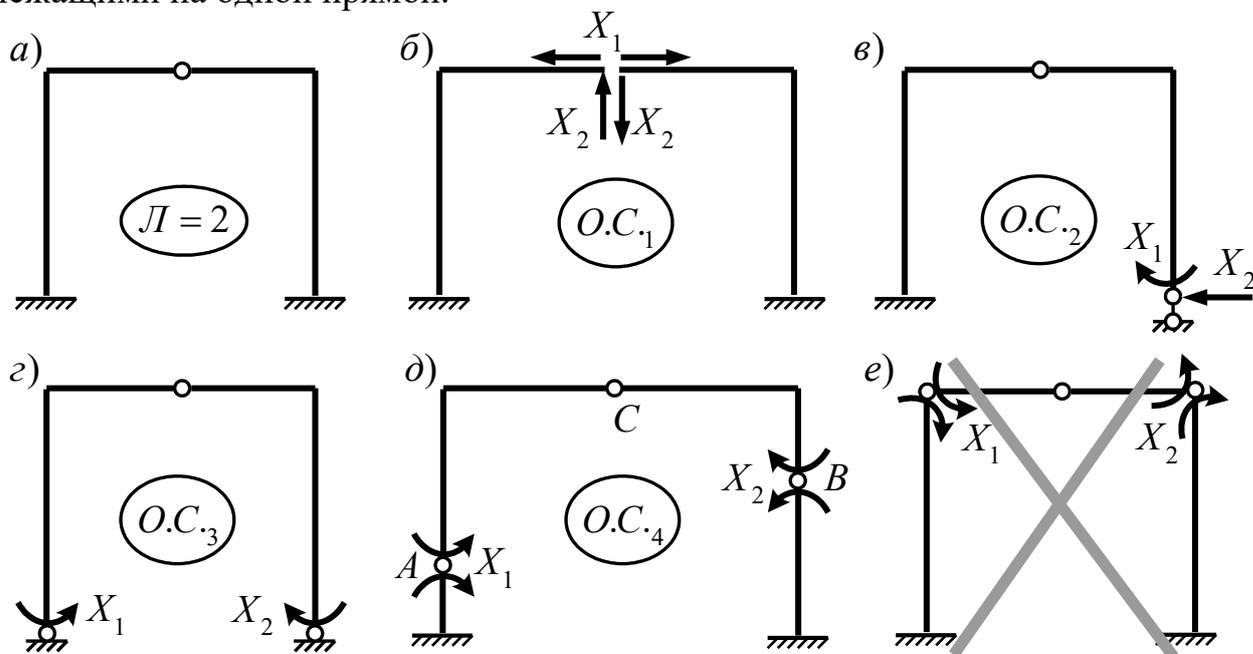


Рис. 5.4

Пример 5.2. Для рамы, представленной на рис. 5.6,а и имеющей три «лишние» связи – $L = 3K - Ш = 3 \cdot 1 - 0 = 3$, возможные варианты основных систем метода сил показаны на рис. 5.6,б–5.6,е.

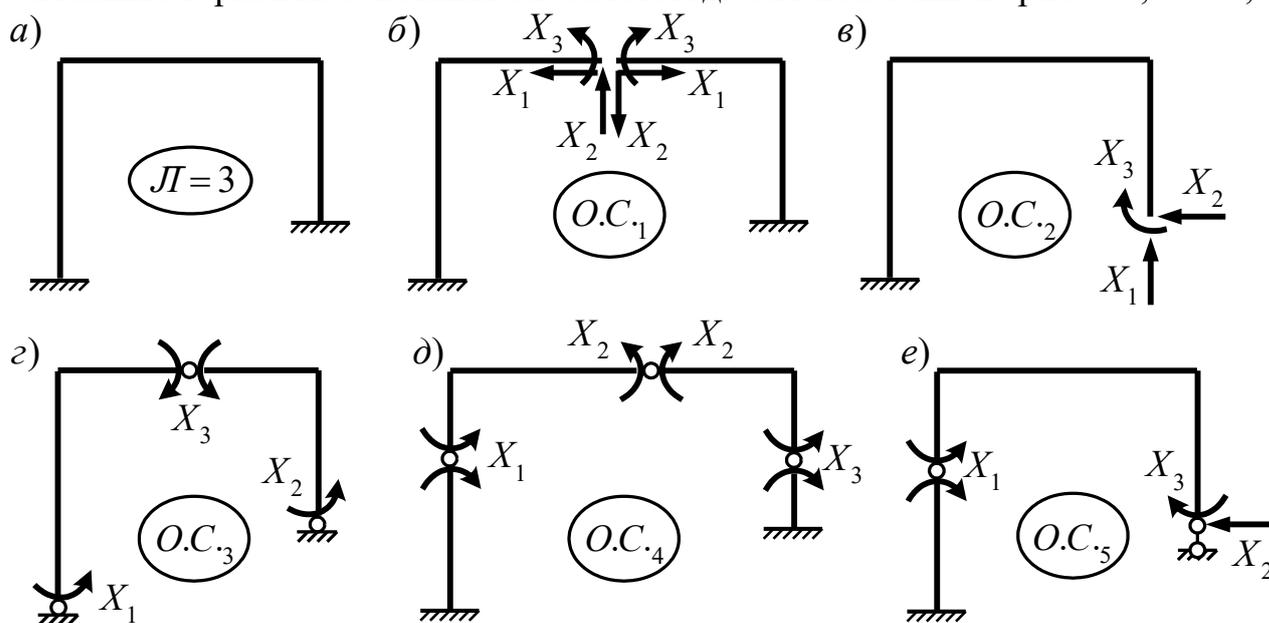


Рис. 5.6

Как видно из примеров, для получения основных систем метода сил можно использовать следующие подходы в отбрасывании «лишних» связей:

- отбрасывание опор (удаляется одна связь при отбрасывании шарнирно подвижной опоры, две связи – при отбрасывании шарнирно неподвижной опоры и три связи – при отбрасывании заделки) (см., например, рис. 5.6,в);
- отбрасывание отдельных опорных связей в опорах (количество удаляемых связей равно числу отброшенных опорных связей) (см., например, рис. 5.6,з,е);
- разрезание затяжек (удаляется одна связь, действующая вдоль затяжки);
- врезание шарниров (удаляется одна связь – угловая) (см. рис. 5.6,д);
- разрезание шарниров (удаляются две связи при разрезании одного простого шарнира) (см., например, рис. 5.5,д);
- разрезание стержней (удаляются три связи) (см., например, рис. 5.6,б).

Анализ представленных основных систем метода сил позволяет сделать следующий вывод:

⚠ Для любой статически неопределимой системы существует бесконечно большое число основных систем метода сил.

Для расчета же методом сил должна быть выбрана одна основная система, которую будем называть расчетной основной системой метода сил.

В качестве расчетной О.С. следует принимать наиболее рациональную.

Рациональность основных систем определяется следующими положениями:

- 1) в расчетной основной системе метода сил определение опорных реакций и построение эпюр внутренних усилий должно быть как можно более простым;
- 2) эпюры внутренних сил (изгибающих моментов) также должны быть как можно более простыми;
- 3) для симметричных рам следует выбирать симметричные расчетные основные системы.

Для рамы на рис. 5.4 в качестве расчетной целесообразнее всего принять О.С.₁, для рамы на рис. 5.5 – О.С.₁, для рамы на рис. 5.6 – О.С.₁ либо О.С.₂.

5.4. Система канонических уравнений метода сил

Основная система (О.С.) метода сил, принимаемая для расчета, как уже указывалось (раздел 5.1), должна быть эквивалентна заданной статически неопределимой системе, а это будет, если эти системы будут одинаково деформироваться и иметь одинаковые перемещения всех точек. И соответственно перемещения в О.С. в направлениях отброшенных связей должны быть равны нулю (5.1), так как в статически неопределимой системе эти связи есть.

Запишем условие эквивалентности основной системы, нагруженной неизвестными метода сил $X_1, X_2, X_3, \dots, X_L$ и заданной нагрузкой, статически неопределимой системе с L лишними связями (5.1) в развернутой форме, используя принцип независимости действия сил. В результате перемещение по направлению i -ой отброшенной связи будет иметь вид

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \Delta_{i3} + \dots + \Delta_{ik} + \dots + \Delta_{iL} + \Delta_{iP} = 0,$$

где: Δ_{ik} – перемещение по направлению i -ой отброшенной связи, вызванное

момента, приложенные в этих сечениях навстречу друг другу.

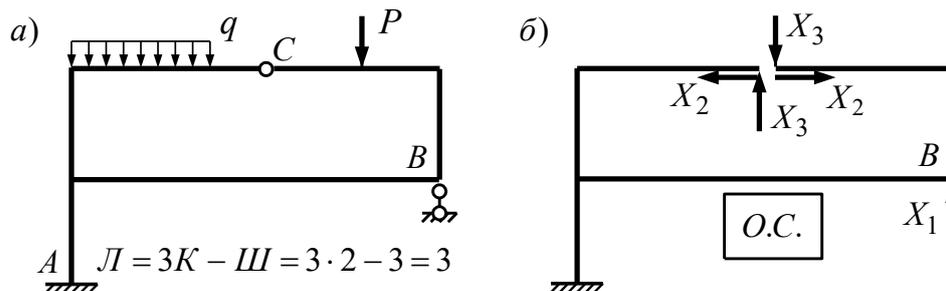


Рис. 5.7

Например, для рамы, изображенной на рис. 5.7,а, при выборе основной системы метода сил в виде, представленном на рис. 5.7,б, будем иметь систему трех уравнений вида (5.4).

Физический смысл коэффициентов этой системы (на примере нескольких коэффициентов) будет следующим:

δ_{11} – вертикальное перемещение точки B в основной системе (О.С.) от действия силы X_1 единичной величины;

δ_{23} – взаимное расхождение в О.С. сечений слева и справа от шарнира C по горизонтали от действия сил X_3 , равных единице;

Δ_{3P} – взаимное расхождение в О.С. сечений слева и справа от шарнира C по вертикали от действия заданных нагрузок.

Физический смысл уравнений в целом будет:

1-го уравнения – вертикальное перемещение точки B от действия сил X_1 , X_2 , X_3 и внешних нагрузок должно равняться нулю, так как в заданной статически неопределимой системе (рис. 5.7,а) в точке B имеется вертикальная связь;

2-ое уравнение представляет собой взаимное расхождение сечений слева и справа от шарнира C по горизонтали от действия сил X_1 , X_2 , X_3 и внешних нагрузок, которое должно равняться нулю, так как указанные сечения соединены между собой шарниром C (рис. 5.7,а) и не могут расходиться.

Физический смысл 3-его уравнения аналогичен смыслу 2-го с разницей в направлении взаимного расхождения сечений (по вертикали).

5.5. Вычисление коэффициентов и свободных членов уравнений и их проверки

Коэффициенты и свободные члены уравнений метода сил (5.4) являются по физическому смыслу перемещениями и могут быть вычислены по формуле Мора (3.2). При этом для рам, как изгибаемых систем, в формуле Мора обычно пренебрегают влиянием поперечных и продольных сил, которое для таких систем незначительно, опуская соответствующие слагаемые. В результате выражения для определения коэффициентов и свободных членов систем канонических уравнений метода сил будем иметь в виде:

$$\delta_{ii} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i^2 dx}{EJ}; \quad \delta_{ik} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k dx}{EJ}; \quad \Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ}, \quad (5.6)$$

где: \bar{M}_i (\bar{M}_k) – закон изменения (эпюра) изгибающих моментов в О.С. от действия силы $X_i = 1$ ($X_k = 1$); M_P – закон изменения (эпюра) изгибающих моментов в О.С. от действия внешних нагрузок; EJ – жесткость стержня (участка) при изгибе, n – число участков интегрирования, l – длины этих участков.

Таким образом, для вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил мы должны в основной системе построить единичные эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i ($i = 1 \dots L$) от действия неизвестных ($X_i = 1$) и грузовую эпюру изгибающих моментов M_P от действия заданных нагрузок. После этого сможем приступить к определению искомых величин.

Принципы вычисления интегралов Мора (5.6) изложены в разделе 3.5.

После вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений по формулам (5.6) необходимо выполнить проверки правильности выполнения расчетов, в качестве которых могут быть использованы:

а) универсальная проверка правильности вычисления единичных коэффициентов:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S^2 dx}{EJ} = \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^L \delta_{ik}, \quad (5.7)$$

где правая часть представляет собой сумму всех коэффициентов системы уравнений (5), а $\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots$ – суммарная единичная эпюра.

б) если универсальная проверка коэффициентов не выполняется, то для определения того, в каком уравнении (какой строке) находятся неверно вычисленные коэффициенты, можно сделать построчные проверки, записываемые

в виде:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_S dx}{EJ} = \sum_{k=1}^L \delta_{ik}, \quad (k = 1 \dots L) \quad (5.8)$$

где правая часть представляет собой сумму всех коэффициентов в i -ом уравнении системы (5.4).

Анализ выполнения или невыполнения отдельных построчных проверок позволяет определить (по крайней мере, ориентировочно), какой из коэффициентов δ_{ik} , возможно, вычислен неверно.

Как несложно видеть, все (L) построчные проверки заменяют собой универсальную, и наоборот.

в) столбцовая проверка правильности вычисления свободных членов (грузовых перемещений) системы уравнений – записывается в виде:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S M_P dx}{EJ} = \sum_{i=1}^L \Delta_{iP}, \quad (5.9)$$

где правая часть выражения представляет собой сумму всех свободных членов системы уравнений.

5.6. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки

Вычисленные коэффициенты и свободных члены системы канонических уравнений метода сил δ_{ik} и Δ_{iP} подставляются в систему канонических уравнений метода сил (4.4), которая является неоднородной системой линейных алгебраических уравнений и может быть решена, например, способами подстановки, Гаусса, другими известными способами, с использованием MathCad.

Заметим, что после определения неизвестных метода сил следует обязательно выполнить **проверку правильности решения** системы уравнений путем подстановки найденных значений $X_i (i = 1 \dots L)$ во все уравнения системы. *Если такую проверку не сделать, то может оказаться, что все дальнейшие расчеты и вычисления будут напрасной тратой времени.*

После определения неизвестных метода сил $X_i (i = 1 \dots L)$ построение окончательных эпюр внутренних усилий в рассчитываемой статически неопределимой системе может быть выполнено двумя способами:

1. Можно приложить к *О.С.* метода сил заданные нагрузки и все найденные неизвестные и построить в этой *О.С.*, как в обычной статически определимой системе, эпюры M , Q и N , которые и будут эпюрами усилий в заданной статически неопределимой системе.

2. Учитывая, что от действия каждого из неизвестных метода сил X_i единичной величины и от действия внешних нагрузок эпюры изгибающих моментов в *О.С.* уже построены (перед вычислением коэффициентов системы уравнений – см. раздел 5.5), ими можно воспользоваться. В этом случае окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе можно построить, используя принцип независимости действия сил, по формуле:

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \bar{M}_3 \cdot X_3 + \dots + \bar{M}_L \cdot X_L + M_P. \quad (5.10)$$

Так как здесь используются результаты расчетов и построений эпюр, уже выполненных ранее (и которые в первом подходе, по существу, надо повторять), то этот подход получается более простым и быстрее приводит к цели, и поэтому далее используется только такой подход.

Правильность расчетов и построения эпюр изгибающих моментов проверяется с помощью **деформационной (кинематической) проверки**, которая может быть представлена в двух вариантах:

1) **полная деформационная проверка** – записывается в виде

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S M dx}{EJ} = 0 \quad (5.11)$$

и по физическому смыслу представляет собой суммарное перемещение по направлениям всех неизвестных метода сил $X_i (i = 1 \dots L)$ от действия этих неизвестных и заданных нагрузок, которое должно равняться нулю, так как в заданной статически неопределимой системе в направлении этих неизвестных (X_i) есть связи (этот физический смысл совпадает с физическим смыслом всех вместе взятых канонических уравнений метода сил – см. раздел 5.4);

2) *построчные деформационные (кинематические) проверки* – имеют вид

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M dx}{EJ} = 0, \quad i = 1 \dots L; \quad (5.12)$$

физический смысл каждой из этих проверок заключается в равенстве нулю перемещений от действия всех X_i и заданных нагрузок по направлениям каждого из неизвестных метода сил X_i , так как по этим направлениям в статически неопределимой системе есть связи (и это соответствует физическому смыслу соответствующих канонических уравнений метода сил – см. раздел 5.4).

Все вместе построчные деформационные проверки (5.12) соответствуют полной деформационной проверке (5.11), и если полная проверка выполняется, то не имеет смысла выполнять построчные проверки. Их целесообразно производить при невыполнении полной деформационной проверки для того, чтобы выявить, в каком из направлений (уравнений) искать ошибку.

Эпюра поперечных сил Q может быть построена по эпюре изгибающих моментов M с использованием известной дифференциальной зависимости $Q = \frac{dM}{dx}$, которая для линейных участков эпюры M может быть представлена в виде:

$$Q = \pm \left| \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l} \right|, \quad (5.13)$$

где: $M_{\text{лев}}$, $M_{\text{прав}}$ – величины изгибающих моментов по концам участка; если растянутые волокна у этих изгибающих моментов находятся с разных сторон стержня, то одна из них принимается положительной, а вторая – отрицательной.

Знак перед абсолютной величиной в формуле (5.13) принимается **по правилу**:

если для совмещения стержня, на котором построена эпюра M , с касательной к этой эпюре стержень необходимо поворачивать по часовой стрелке (при угле поворота меньше 90°), то принимается знак «+», если против часовой стрелки, то принимается знак «-».

Для криволинейных (параболических) участков эпюры M дифференциальная зависимость $Q = \frac{dM}{dx}$ может быть записана в следующем виде:

$$Q = Q_0 \pm \left| \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l} \right|, \quad (5.14)$$

где второе слагаемое представляет собой поперечную силу $Q_{\text{лин}}$ от линейной части эпюры M на участке, а первое слагаемое Q_0 учитывает криволинейную часть этой эпюры и представляет собой эпюру (зависимость изменения) поперечных сил на участке, рассматриваемом в виде простой двухопорной балки, от действия равномерно распределенной нагрузки (см. рис. 5.8).

Например, для эпюры M на рис. 5.9, представленной тремя участками с различными законами ее изменения, поперечные силы на этих участках (слева направо) будут равны:

$$Q_1^{\text{лев, прав}} = \pm \frac{ql_1}{2} - \left| \frac{4 - (-12)}{4} \right| = \pm \frac{3 \cdot 4}{2} - 4 = \pm 6 - 4; \quad Q_1^{\text{лев}} = +2; \quad Q_1^{\text{прав}} = -10;$$

$$Q_2 = - \left| \frac{11 - 4}{3,5} \right| = -2; \quad Q_3 = + \left| \frac{-7 - 11}{3} \right| = +6.$$

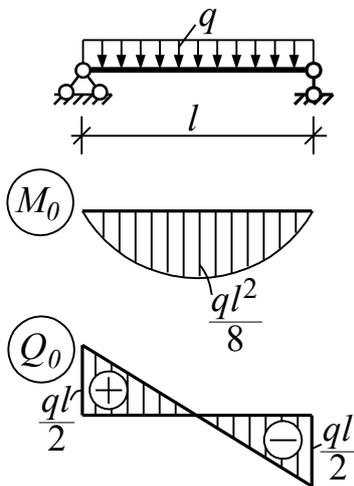


Рис. 4.8

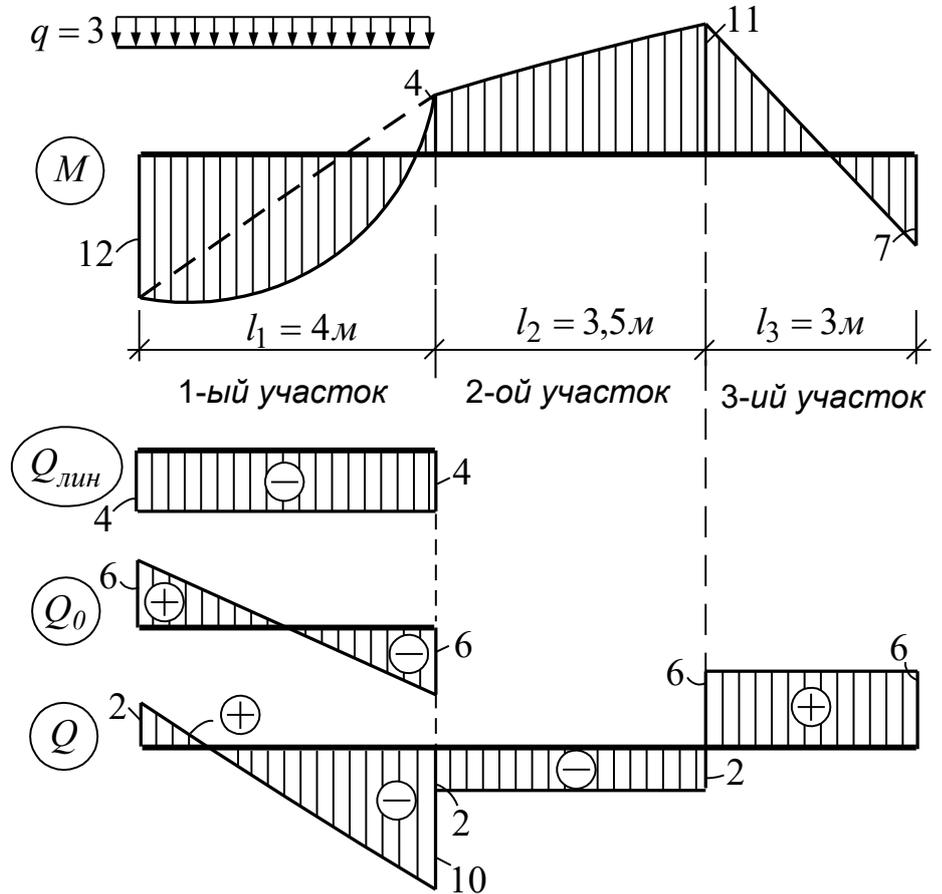


Рис. 5.9

Эпюры продольных сил N строят по эпюре Q способом вырезания узлов, то есть вырезают узлы рамы, прикладывая в сечениях уже известные поперечные силы и неизвестные (а также известные) продольные силы (если в узле приложены внешние сосредоточенные силы, то они также должны быть учтены). Неизвестные продольные силы при этом принимаются положительными, направляются от сечений (от узлов). Затем составляются уравнения равновесия узлов ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$), из которых определяются неизвестные продольные силы.

После построения эпюр внутренних сил, вырезая опорные узлы и рассматривая их равновесие, можно найти реакции в опорах рамы, после чего нужно выполнить статическую проверку равновесия рамы в целом с использованием, например, уравнений:

$$\begin{aligned} \sum X_{\text{оп.реакций}} + \sum X_{\text{вн.нагрузок}} &= 0; \\ \sum Y_{\text{оп.реакций}} + \sum Y_{\text{вн.нагрузок}} &= 0; \\ \sum M_{T.\text{оп.реакций}} + \sum M_{T.\text{вн.нагрузок}} &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

5.7. Порядок расчета рам методом сил

Таким образом, на основе изложенного предлагается следующий порядок расчета рам методом сил:

1. Определяем степень статической неопределимости рамы (то есть число «лишних» связей в раме – L), используя, например, формулы (5.2, 5.3).
2. Выбираем расчетную основную систему метода сил (О.С.), представив предварительно несколько возможных вариантов основных систем.
3. Записываем в общем виде систему канонических уравнений метода сил (4.4) и выясняем физический смысл этих уравнений и входящих в них величин.
4. В расчетной О.С. метода сил строим единичные $(\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_L)$ и грузовую (M_p) эпюры изгибающих моментов.
5. Вычисляем все единичные коэффициенты (δ_{ik}) и свободные члены (Δ_{iP}) системы канонических уравнений метода сил (5.6).
6. Выполняем проверки правильности вычисления единичных коэффициентов (5.7 либо 5.8) и свободных членов системы уравнений (5.9).
7. Решаем систему канонических уравнений и находим неизвестные метода сил X_1, X_2, \dots, X_L ; выполняем проверку правильности решения системы уравнений, подставляя найденные неизвестные во все уравнения.
8. Строим в заданной статически неопределимой раме окончательную эпюру изгибающих моментов M (5.10).
9. Выполняем деформационную проверку эпюры M (см. 5.12 либо 5.11).
10. По эпюре M строим окончательную эпюру поперечных сил Q (используя зависимости 5.13 либо 5.14).
11. Способом вырезания узлов на эпюре Q с учетом действующих в узлах нагрузок строим в заданной раме эпюру продольных сил N .
12. Вырезая опорные узлы, определяем опорные реакции, и выполняем статическую проверку равновесия рамы в целом (5.15).

5.8. Упрощения в расчетах методом сил симметричных рам

5.8.1. Общие понятия и определения

Симметричными называют рамы, обладающие симметрией относительно некоторой оси в конфигурации стержней, в расположении и действии опорных связей и в жесткостях стержней.

В симметричных рамах будем различать три вида эпюр усилий:

- произвольные эпюры;
- симметричные эпюры;
- кососимметричные или обратносимметричные эпюры.

Симметричными будем называть **эпюры**, которые относительно оси симметрии рамы обладают симметрией по ординатам усилий и по деформациям (для эпюры M по растянутым волокнам).

Следует заметить, что симметричная эпюра поперечных сил Q будет иметь в симметричных сечениях противоположные знаки (физическое же действие поперечных сил при этом будет, что несложно проверить, симметричным).

Кососимметричными или **обратносимметричными** называют **эпюры**, которые относительно оси симметрии рамы обладают симметрией в величинах ординат усилий, но противоположны по деформациям. Если в таких эпюрах с одной из сторон от оси симметрии поменять деформации на противоположные, то эти эпюры станут симметричными. Заметим, что кососимметричная эпюра Q в симметричных сечениях будет иметь одинаковые знаки.

Нагрузки, силы (в том числе неизвестные метода сил) и воздействия, от действия которых получаются симметричные эпюры усилий, будем называть **симметричными нагрузками, силами и воздействиями**.

Соответственно нагрузки, силы и воздействия, от действия которых получаются кососимметричные эпюры усилий, будем называть **кососимметричными (обратносимметричными) нагрузками, силами и воздействиями**.

В расчетах симметричных рам методом сил при выборе определенного вида основных систем – симметричных основных систем – и в зависимости от вида действующих нагрузок возможен целый ряд довольно существенных упрощений расчетов, которые представлены ниже.

5.8.2. Разделение системы уравнений на две независимые группы

Рассмотрим симметричную раму, изображенную на рис. 5.16,а, и имеющую четыре лишние связи: $L = 3K - III = 3 \cdot 2 - 2 = 4$

$$\text{или } L = -(3D - 2III - C_o) = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 6) = 4.$$

Если для этой рамы выбрать О.С. метода сил, показанную на рис. 5.16,б, то система канонических уравнений метода сил будет иметь вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0; \\ \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0. \end{cases} \quad (5.17)$$

СОДЕРЖАНИЕ

Если же выбрать основную систему в виде, представленном на рис. 5.16, в, то систему уравнений (5.17) можно существенно упростить. Построим в этой О.С. единичные эпюры изгибающих моментов (см. рис. 5.16,з÷5.16,ж) и вычислим один из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений (21):

$$\delta_{14} = \delta_{41} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_4 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} (a \cdot h) \cdot \frac{h+2h}{2} - \frac{1}{EJ} (a \cdot h) \cdot \frac{h+2h}{2} = 0.$$

Такой результат, как показывает анализ «перемножаемых» (по правилу Верещагина) эпюр и вычисления, обусловлен тем, что эпюра \bar{M}_1 является симметричной, а эпюра \bar{M}_4 – кососимметричной.

И данный результат будет иметь место всегда в подобных случаях, то есть **⚠ Перемещения, получаемые «перемножением» в соответствии с формулой Мора симметричных эпюр на кососимметричные (либо наоборот) будут всегда равны нулю.**

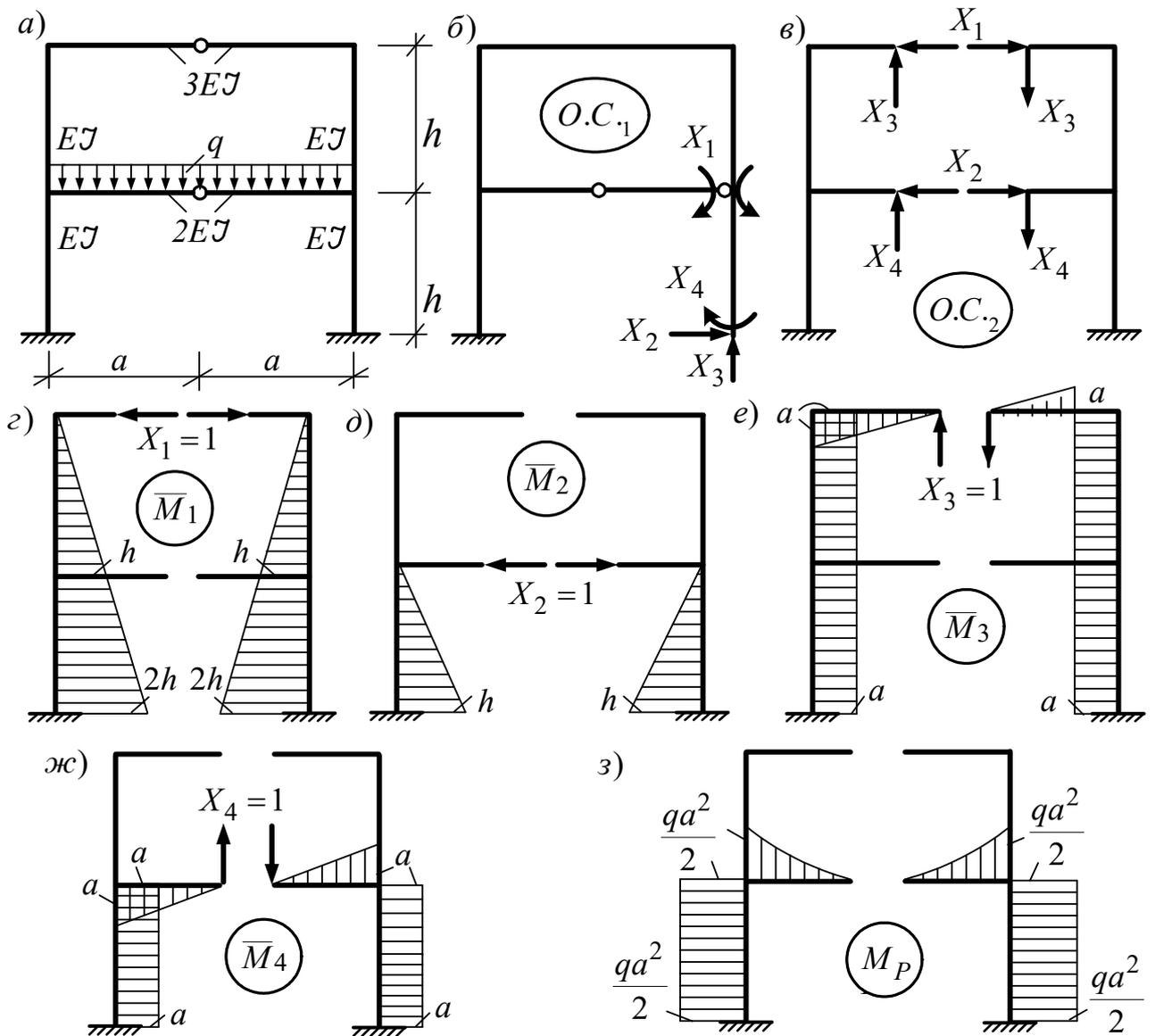


Рис. 5.16

В нашем случае соответственно равны нулю будут еще следующие единичные коэффициенты: $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$; $\delta_{23} = \delta_{32} = 0$; $\delta_{24} = \delta_{42} = 0$.

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0; \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Так как произведения всех этих нулевых единичных коэффициентов на неизвестные в системе уравнений (5.17) будут также давать ноль, то целый ряд слагаемых в этих уравнениях выпадет, и в результате система уравнений (5.17), по существу, разделится на две независимые группы:

5.8.3. Упрощения при нагружении симметричных рам симметричными (кососимметричными) нагрузками

Если симметричная статически неопределимая рама будет нагружена симметричной внешней нагрузкой, как, например, рама на рис. 5.16,а, то при выборе симметричной основной системы (см., например, рис 5.16,в) грузовая эпюра в О.С. (M_P) будет также симметричной (5.16,з). А это значит (см. выводы предыдущего раздела), что грузовые перемещения Δ_{3P} и Δ_{4P} будут равны нулю, как получаемые «перемножением» симметричной эпюры (M_P) на кососимметричные (\bar{M}_3 и \bar{M}_4). В результате вторая группа (система) уравнений в (5.18) становится однородной алгебраической системой уравнений, и решением ее будут нулевые значения неизвестных ($X_3 = 0$; $X_4 = 0$). В результате неизвестными в расчете остаются только симметричные неизвестные (X_1 и X_2).

Аналогичные рассуждения можно провести для случая нагружения симметричной рамы кососимметричной внешней нагрузкой, и тогда получим, что симметричные неизвестные обратятся в нуль, а останутся только кососимметричные неизвестные.

Вывод: При выборе для симметричной статически неопределимой рамы симметричной О.С. метода сил с симметричными и кососимметричными неизвестными

и в случае симметричного ее нагружения все кососимметричные неизвестные будут равны нулю,

в случае же кососимметричного ее нагружения все симметричные неизвестные будут равны нулю.

5.8.4. Группировка неизвестных

В ряде случаев при расчете симметричных рам (например, для рам, имеющих несколько пролетов) (см., например, раму, изображенную на рис. 5.17,а), часто сложно или даже невозможно выбрать симметричную основную систему метода сил, в которой и неизвестные сразу удовлетворяли бы условиям симметрии, то есть были бы либо симметричными, либо кососимметричными. Это можно сделать только в случаях, когда все «лишние» связи можно отбросить в

СОДЕРЖАНИЕ

точках (сечениях), лежащих на оси симметрии рамы. В остальных случаях, когда при выборе симметричной по конфигурации и структуре О.С., неизвестные метода сил сразу не удовлетворяют условиям симметрии, эти неизвестные можно преобразовать к симметричным и кососимметричным. Основой для такого преобразования является то, что полученные неизвестные будут действовать в симметричных точках (сечениях) и в симметричных направлениях. Это позволяет путем разбивки (разделения) таких неизвестных специальным образом и последующей группировки их частей привести эти неизвестные к удовлетворению условиям симметрии.

Например, для рамы на рис. 5.17,а, симметричной относительно средней вертикальной оси и имеющей четыре лишние связи ($L = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 5 = 4$), О.С. метода сил может быть выбрана в виде, изображенном на рис. 5.17,б, где сама рама симметрична, а неизвестные X'_1 , X'_2 и X'_3 , X'_4 не являются ни симметричными, ни кососимметричными. При этом эти неизвестные действуют в точках (сечениях) и направлениях, симметричных относительно оси симметрии рамы.

Сделаем замену таких неизвестных в соответствии с зависимостями:

$$\begin{cases} X'_1 = X_1 + X_4; \\ X'_2 = X_2 + X_3; \\ X'_3 = X_2 - X_3; \\ X'_4 = X_1 - X_4; \end{cases} \quad (5.19)$$

которые с математической точки зрения дают однозначное соответствие величин, входящих в левые и правые их части этих зависимостей, как систем двух уравнений с двумя неизвестными.

Группируя одноименные неизвестные с обеих сторон от оси симметрии, получаем О.С. метода сил, в которой неизвестные теперь будут либо симметричными, либо кососимметричными. В данном случае неизвестные X_1 и X_2 являются симметричными, а неизвестные X_3 и X_4 – кососимметричными. После такого преобразования, называемого **группировкой неизвестных**, в расчете могут быть применены все выше рассмотренные упрощения.

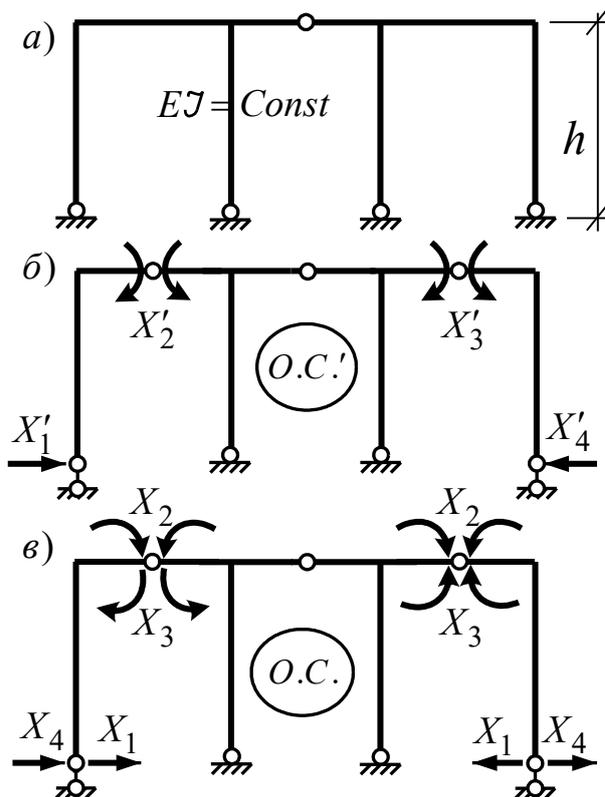


Рис. 5.17

5.8.5. Разложение внешней нагрузки на симметричную и кососимметричную

Любая внешняя нагрузка, действующая на симметричную систему, может быть представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной (обратно-симметричной) нагрузок. И делается это следующим образом:

1) заданную нагрузку (см., например, рис. 5.18, а) представляют в виде двух одинаковых половинок (рис. 5.18, б);

2) в симметричных точках относительно оси симметрии рамы по отношению к тем, в которых действует заданная внешняя нагрузка, прикладываемые такие же половинки нагрузок (рис. 5.18, б), но только в разные стороны (рис. 5.18, в); добавленные таким образом половинки нагрузок в сумме взаимно уничтожаются и, таким образом, не изменяют заданного нагружения;

3) группируем эти половинки с одной и с другой сторон относительно оси симметрии рамы, получая сумму симметричной (рис. 5.18, г) и кососимметричной (рис. 5.18, д) нагрузок.

$$L = 3K - 3I = 3 \cdot 2 - 2 = 4,$$

Если теперь для рассматриваемой рамы (рис. 25, а), имеющей четыре лишних связи выбрать симметричную основную систему метода сил, например, в виде, показанном на рис. 5.18, е, то в соответствии с выше изложенными положениями (упрощениями расчета симметричных рам) и принципом независимости действия сил, расчет рассматриваемой рамы разделится по существу на два расчета.

Отдельно можно выполнить расчет **на симметричную нагрузку**, в котором будем иметь систему двух уравнений вида

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P}^{\text{СИМ}} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P}^{\text{СИМ}} = 0, \end{cases}$$

и в котором эпюра изгибающих моментов в статически неопределимой системе может быть построена по формуле

$$M^{\text{СИМ}} = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_P^{\text{СИМ}}.$$

И отдельно можно рассчитать раму **на кососимметричную нагрузку**, и в этом расчете система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P}^{\text{КОС}} = 0; \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P}^{\text{КОС}} = 0, \end{cases}$$

а эпюра изгибающих моментов будет строиться по формуле

$$M^{\text{КОС}} = \bar{M}_3 \cdot X_3 + \bar{M}_4 \cdot X_4 + M_P^{\text{КОС}}.$$

Эпюра изгибающих моментов, соответствующая исходной нагрузке, про-

СОДЕРЖАНИЕ

извольной с точки зрения симметрии, в итоге может быть получена по формуле:

$$M = M^{\text{сим}} + M^{\text{кос}}.$$

Анализ изложенной процедуры расчета в сравнении с вариантом без разложения внешних нагрузок, показывает, что упрощение в этом варианте связано с уменьшением (приблизительно в два раза) объема вычислений свободных членов (грузовых перемещений) системы канонических уравнений метода сил. А учитывая, что вычисление грузовых перемещений по формуле Мора обычно является наиболее трудоемким в сравнении с вычислением единичных перемещений (так как грузовые эпюры M_P в большинстве случаев существенно сложнее единичных эпюр \bar{M}_i), то разложение внешних нагрузок на симметричные и кососимметричные (обратносимметричные) часто имеет смысл.

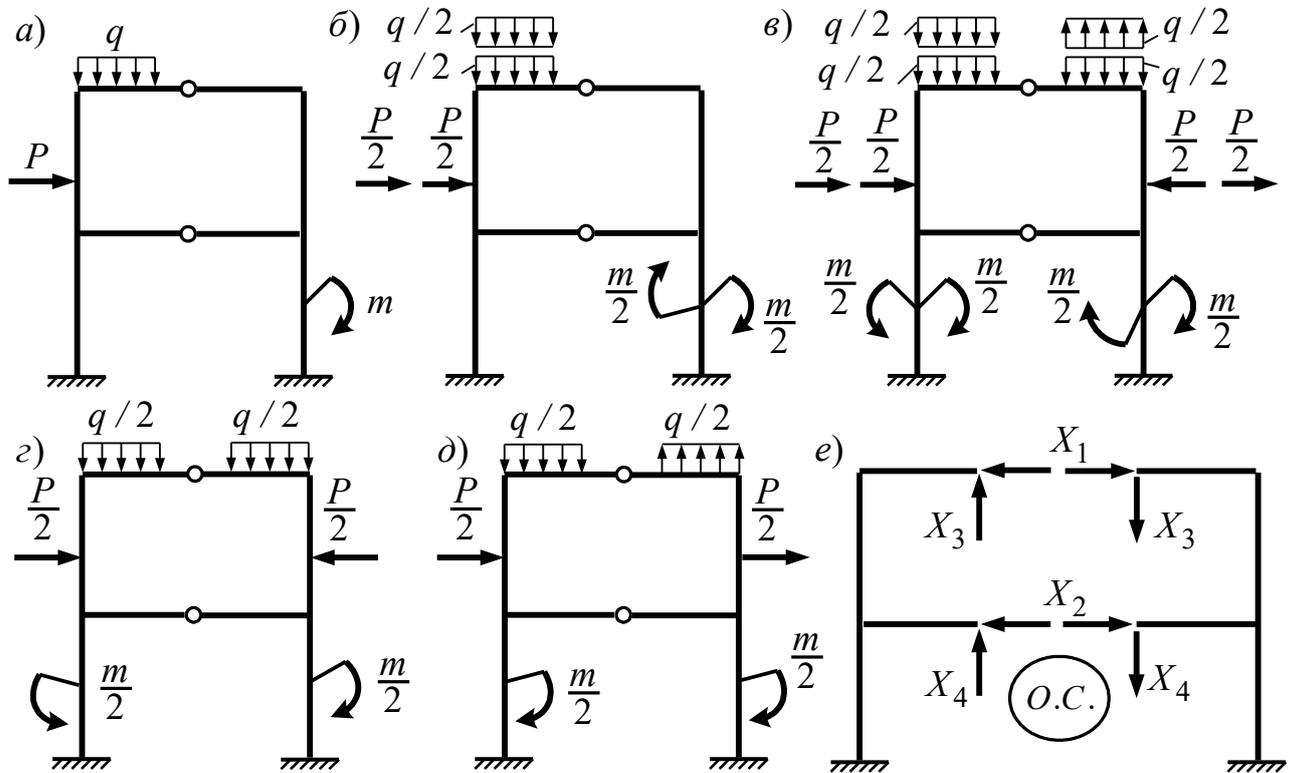


Рис. 5.18

6. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. СМЕШАННЫЙ МЕТОД

6.1. Подходы и допущения, положенные в основу метода перемещений

При расчете статически неопределимых систем методом сил за неизвестные принимаются усилия в лишних связях, после определения которых легко находятся внутренние силы (M , Q , N) в сечениях системы и перемещения ее точек.

Но задача может быть решена и в обратном направлении. Если сначала определить деформированный вид системы (перемещения точек), то затем можно установить и соответствующее им распределение внутренних сил, что иллюстрирует и широко известная зависимость

$$M = EJ \cdot y''.$$

Именно такой подход и используется в методе перемещений. При этом анализ показывает, что деформированный вид системы полностью определен, если известны угловые и линейные перемещения ее узлов. Это объясняется тем, что перемещения узлов равны перемещениям концов стержней, соединяющихся в этих узлах, а деформации стержней полностью и однозначно определяются перемещениями концов стержней. Последнее относится и к загруженным стержням, для которых, правда, деформированный вид будет зависеть дополнительно еще и от действующих на них нагрузок.

Рассмотрим, например, раму, изображенную на рис. 6.1,а. Деформированное состояние этой рамы определяется линейными и угловыми перемещениями узлов 1 и 2; при этом число этих перемещений зависит от допущений, используемых в методе. Так, в общем случае число перемещений, определяющих деформации рамы, здесь равно пяти (рис. 6.1,б); в случае же неучета поперечных и продольных деформаций и неучета изменения длин стержней при их изгибе (влиянием этих величин для изгибаемых рамно-стержневых систем ввиду их малости обычно пренебрегают – классическая постановка задачи) число этих неизвестных перемещений равно двум (рис. 6.1,в) – Δ и φ .

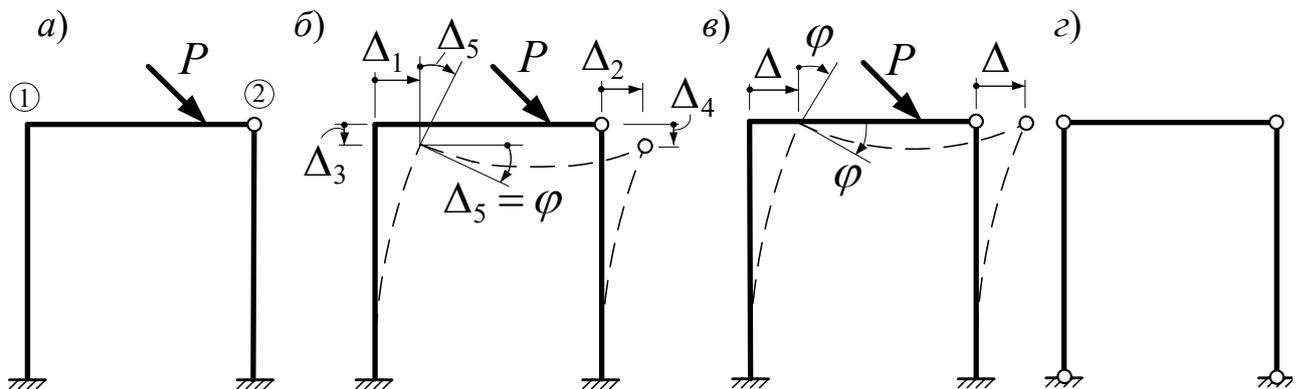


Рис. 6.1

□ Число независимых угловых и линейных смещений узлов, полностью и однозначно определяющих деформированный вид системы, называется

степень ее кинематической неопределимости.

Все эти независимые перемещения узлов и принимаются за неизвестные в методе перемещений. Отсюда пошло и название метода – метод перемещений.

Отметим, что в классической форме метода перемещений, как, впрочем, и в методе сил, используются следующие допущения:

а) пренебрегается поперечными и продольными деформациями элементов системы при ее деформировании;

б) принимается, что проекция изогнутого (деформированного) стержня на его первоначальное направление равна первоначальной длине стержня (рис. 6.2);

в) считается, что величина углов в жестких узлах в процессе деформирования системы не изменяется;

г) углы поворота узлов и сечений стержней при деформации систем в виду их малости принимаются равными тангенсам этих углов.

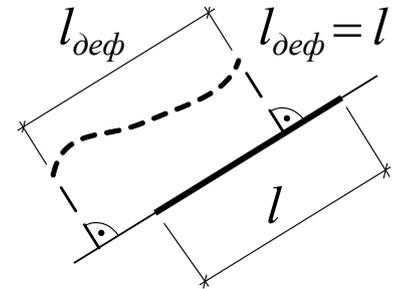


Рис. 6.2

Следует отметить, что для ряда статически неопределимых систем степень кинематической неопределимости ниже, чем степень статической неопределимости, а также, что метод перемещений при равном числе неизвестных несколько проще в расчете, чем метод сил.

6.2. Определение степени кинематической неопределимости рам

Степень кинематической неопределимости системы, то есть число неизвестных независимых угловых и линейных смещений узлов, величины которых надо найти для определения деформированной схемы системы и соответственно для вычисления внутренних усилий, находится по формуле:

$$n = n_y + n_l. \quad (6.1)$$

Здесь: n_y – число неизвестных независимых угловых смещений узлов, определяемое по числу жестких узлов метода перемещений в системе;

при этом под жесткими узлами метода перемещений (далее их будем называть просто жесткими узлами) здесь понимают такие, в которых соблюдается два условия:

- в которых жестко соединяются под любым углом два и более стержня;
- в которых происходит изменение внутренних сил (изгибающих моментов), неопределяемое исходя из обычных уравнений равновесия (статики).

Например, в раме, изображенной на рис. 6.3,а, жесткими узлами, удовлетворяющими указанным условиям, будут узлы 1, 2, 3 ($n_y = 3$); для узлов же А, В, С не выполняется второе условие, так как они относятся, по существу, к статически определимым частям системы, в которых все усилия можно определить с помощью обычных методов расчета статически определимых систем;

n_l – число независимых неизвестных линейных смещений узлов системы, которое можно определять двумя способами:

СОДЕРЖАНИЕ

1. По числу возможных независимых линейных смещений жестких (см. определение n_y) и шарнирных узлов системы на основе анализа ее возможного упругого деформирования с учетом принятых допущений (раздел 6.1).

Например, в раме на рис. 6.3,а необходимо проанализировать возможность и независимость линейных смещений жестких узлов 1, 2, 3 и шарнирных узлов 4, 5 при произвольном возможном упругом деформировании этой системы:

– узел 1 по вертикали смещаться не может, так как закреплен от этого смещения с помощью стержня 1–D, который на основе допущений *a* и *б* (разд. 6.1) не допускает расхождения (сближения) точек 1 и D, и опоры в точке D;

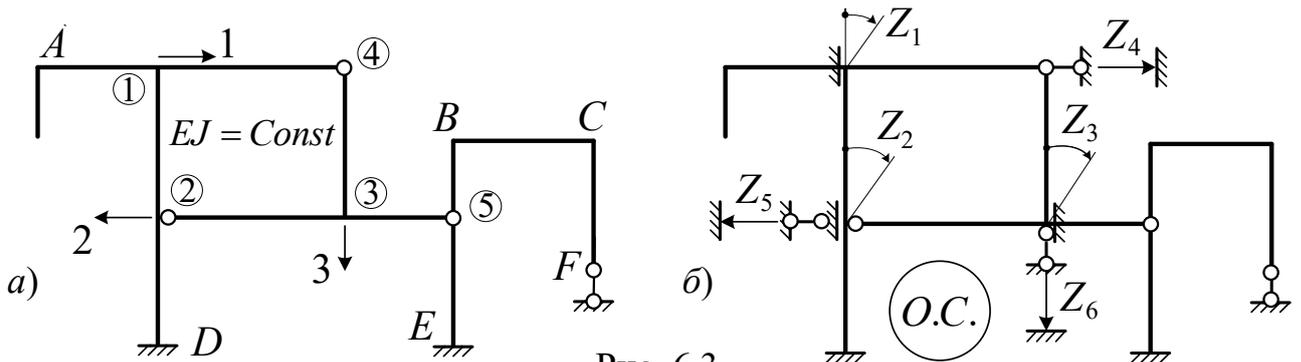


Рис. 6.3

– по горизонтали узел 1 может смещаться, так как стержни 1–2 и 4–3 могут изгибаться (горизонтальное перемещение узла 1 показано стрелкой с цифрой 1);

– узел 2 по вертикали смещаться не может на основе тех же рассуждений, что и для узла 1;

– по горизонтали же узел 2 может смещаться, учитывая, что стержни 1–2, 2–D, 4–3 и 5–E могут изгибаться (горизонтальное смещение узла 2 обозначено стрелкой с цифрой 2);

– узел 3 по горизонтали может смещаться (по аналогии с узлом 2), но это его смещение будет таким же, как и горизонтальное смещение узла 2, так как стержень 2–3, соединяющий узлы 2 и 3, на основе допущений *a* и *б* (раздел 6.1), не позволяет изменяться расстоянию между этими узлами;

– по вертикали узел 3, учитывая возможность упругого деформирования стержней 1–4, 2–3 и 3–5, может смещаться (показано стрелкой с цифрой 3);

– шарнирный узел 4 в данном случае может смещаться как по горизонтали (но одинаково с узлом 1, так как стержень 1–4 на основе допущений *a* и *б* (раздел 6.1) не дает возможности точкам 1 и 4 разойтись), так и по вертикали (но вместе с узлом 3 – вследствие наличия стержня 3–4);

– шарнирный узел 5 по аналогии вертикально перемещаться не может, а по горизонтали он будет смещаться на такую же величину, как узлы 2 и 3.

Таким образом, для рамы на рис. 6.3 имеем три независимых линейных смещения узлов ($n_l = 3$), а всего в итоге получаем шесть неизвестных перемещений при расчете рамы методом перемещений:

$$n = n_y + n_l = 3 + 3 = 6.$$

2. В ряде учебников для определения n_l предлагается формула:

$$n_l = W_{\text{шарнирной схемы рамы}} = 3D - 2Ш - C_0, \quad (6.2)$$

согласно которой n_l равно степени свободы шарнирной схемы рамы, получаемой путем введения (врезания) шарниров во все жесткие узлы системы, включая опорные (в жесткие заделки).

Например, для рамы на рис. 6.1а шарнирная схема имеет вид, представленный на рис. 6.1,з, в соответствии которому получим

$$n_l = W_{\text{ш. сх. р.}} = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1.$$

Для рамы же на рис. 6.4,а, шарнирная схема которой представлена на рис. 6.4,б, будем иметь:

$$n_l = W_{\text{ш. сх. р.}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Однако анализ возможного деформирования рамы по первому способу показывает, что узлы 1 и 2 могут горизонтально смещаться. Таким образом, применение формулы (6.2) приводит здесь к неверному результату, причиной которого является мгновенная изменяемость шарнирной схемы рассматриваемой рамы (рис. 6.4,б).

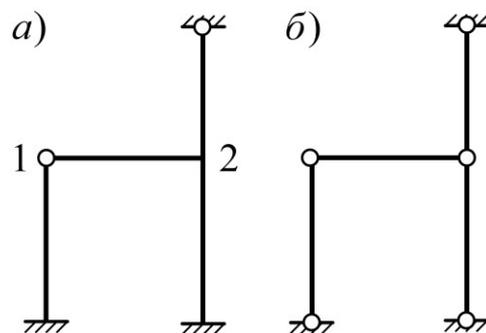


Рис. 6.4

Такая ситуация может встречаться часто, и формула (6.2) будет всегда давать

неверные результаты в случаях, когда в шарнирной схеме рамы есть мгновенная изменяемость. Учитывая это, пользоваться этим вариантом вычисления n_l не рекомендуется, а предлагается во всех случаях применять первый вариант определения n_l , который и прост, и надежен.

6.3. Основная система метода перемещений

Основная система метода перемещений получается введением **дополнительных** связей, закрепляющих узлы от их возможных угловых и линейных смещений, которые были выявлены ранее (при определении степени кинематической неопределимости n). То есть во все жесткие узлы, которые могут поворачиваться (n_y), устанавливаются дополнительные жесткие заделки, закрепляющие их от поворота, а все узлы (жесткие и шарнирные), которые могут линейно смещаться (n_l), закрепляются от этих смещений с помощью постановки дополнительных линейных связей. В качестве неизвестных при этом принимаются перемещения этих дополнительных связей (вместе, конечно, с узлами). Обозначаются эти перемещения через Z_i ($i = 1 \dots n$). Следует отметить, что дополнительная заделка в отличие от действительной заделки обладает только одной связью, закрепляющей узел от поворота (от линейных смещений узлы она не закрепляет).

СОДЕРЖАНИЕ

Для рамы, изображенной на рис. 6.1,а, основная система (О.С.) метода перемещений имеет вид, представленный на рис. 5.5.

С учетом принятых допущений и установленных дополнительных связей узлы основных систем метода перемещений будут неподвижными.

Учитывая, что в классической форме метода перемещений пренебрегается поперечными и продольными силами, в О.С. метода перемещений далее будем строить только эпюры изгибающих моментов. При этом воздействия на участки основной системы (внешние нагрузки, принудительные перемещения узлов) будут вызывать изгибающие моменты только на тех участках, которые непосредственно подвержены этим воздействиям; то есть через заделки в жестких узлах и через шарнирные узлы основной системы воздействия изгиба передаваться не будут.

□ Таким образом, О.С. метода перемещений будет представлять собой совокупность отдельных независимых друг от друга стержней (однопролетных балочек). Эти стержни в зависимости от условий присоединения их концов к узлам (от условий опирания) могут быть трех типов:

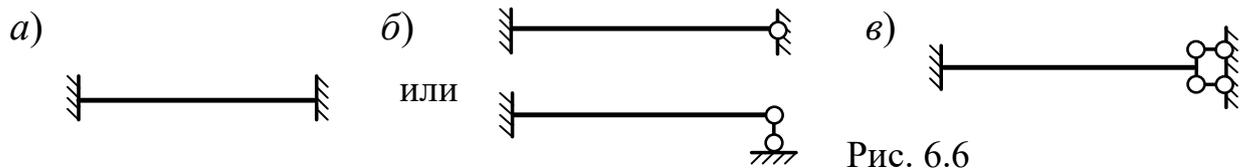


Рис. 6.6

Для рамы на рис. 6.3,а основная система (О.С.) метода перемещений представлена рис. 6.3,б.

6.4. Канонические уравнения метода перемещений

Расчет рам методом перемещений выполняется с использованием основной системы этого метода, получаемой закреплением узлов, которые могут смещаться, от этих смещений путем установки дополнительных связей. При этом основная система должна работать так же как исходная система, в которой нет указанных дополнительных связей. В качестве условий, приравнивающих работу О.С. к работе заданной системы, принимается равенство нулю реакций (R) в дополнительных связях, так как их в исходной системе нет. Например, для рамы на рис. 6.5 следует записать $R_1 = 0$, $R_2 = 0$. Учитывая, что реакции в О.С. возникают от внешней нагрузки и перемещений узлов, получим:

$$R_1(Z_1, Z_2, P) = 0, \quad R_2(Z_1, Z_2, P) = 0.$$

Пользуясь принципом независимости действия сил и воздействий (перемещений), эти выражения можно представить в виде:

$$\begin{cases} R_1(Z_1) + R_1(Z_2) + R_1(P) = 0; \\ R_2(Z_1) + R_2(Z_2) + R_2(P) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} R_{1Z_1} + R_{1Z_2} + R_{1P} = 0; \\ R_{2Z_1} + R_{2Z_2} + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

Так как перемещения Z_1 и Z_2 не известны, то реакции от их действия

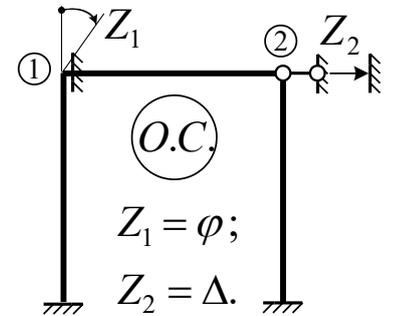


Рис. 6.5

СОДЕРЖАНИЕ

выражают через соответствующие единичные реакции – $R_{iZ_k} = r_{ik}Z_k$.

В результате получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

Такая форма записи уравнений метода перемещений называется канонической. В общем случае система канонических уравнений метода перемещений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + \dots + r_{1k}Z_k + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + \dots + r_{2k}Z_k + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} = 0; \\ \text{-----} \\ r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + r_{i3}Z_3 + \dots + r_{ik}Z_k + \dots + r_{in}Z_n + R_{iP} = 0; \\ \text{-----} \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + r_{n3}Z_3 + \dots + r_{nk}Z_k + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0; \end{cases} \quad (6.3)$$

Здесь: n – число неизвестных (угловых и линейных) смещений узлов в системе, или степень кинематической неопределимости системы; Z_k ($k=1\dots n$) – неизвестные (угловые и линейные) смещения узлов; r_{ik} – реактивное усилие (момент, сила) в i -ой дополнительной связи (заделке, линейной связи) от перемещения (углового, линейного) k -ой дополнительной связи (заделки, линейной связи) на единичную величину ($Z_k=1$);

R_{iP} – реактивное усилие (момент, сила) в i -ой дополнительной связи (заделке, линейной связи) от действия внешней нагрузки.

Физический смысл уравнений (для i -го уравнения): реактивное усилие (момент, сила) в i -ой дополнительной связи (заделке, линейной связи) от перемещений всех дополнительных связей (угловых и линейных) Z_1, Z_2, \dots, Z_n и заданной нагрузки равняется нулю, так как этой i -ой связи в исходной (рассчитываемой) системе нет.

Приведем примеры физического смысла коэффициентов и уравнений в целом, например, для О.С. метода перемещений, представленной на рис. 6.3:

r_{11} – реактивный момент в 1-ой дополнительной заделке от ее же поворота на единичный угол;

r_{53} – реактивная сила в 5-ой дополнительной линейной связи от поворота 3-ей дополнительной заделки на угол, равный единице;

r_{26} – реактивный момент во 2-ой дополнительной заделке от единичного линейного смещения 6-ой дополнительной линейной связи;

R_{4P} – реактивная сила в 4-ой дополнительной линейной связи от действия внешней нагрузки;

3-е уравнение: $r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + \dots + r_{3n}Z_n + R_{3P} = 0$; – реактивный

СОДЕРЖАНИЕ

момент в 3-ей дополнительной заделке от перемещений всех дополнительных связей на величины Z_1, Z_2, \dots, Z_6 и от действия внешней нагрузки равняется нулю, так как в заданной системе (рис. 6.3,а) этой (3-ей) заделки нет.

Отметим, что коэффициенты r_{ik} , имеющие одинаковые индексы (r_{11}, r_{22}), называют *главными*, а остальные – *побочными*; главные коэффициенты не могут быть отрицательными и нулевыми, а побочные коэффициенты должны удовлетворять теореме о взаимности единичных реакций ($r_{ik} = r_{ki}$).

6.5. Табличные эпюры метода перемещений

Для определения реактивных усилий r_{ik} и R_{iP} необходимо уметь определять внутренние силы (строить их эпюры) в основной системе метода перемещений от единичных перемещений дополнительных связей (вместе, конечно, с соответствующими узлами) и от действия внешних нагрузок. Построение этих эпюр усилий, в связи с тем, что О.С. метода перемещений представляет собой совокупность отдельных балочек, совершенно не зависящих друг от друга, связано с умением рассчитывать эти балочки (рис. 6.6). В качестве внешних воздействий здесь будут выступать повороты заделок, линейные смещения заделок и шарнирных опор и силовые факторы (сосредоточенные силы, сосредоточенные моменты, распределенные нагрузки). Расчет таких балочек выполняется обычно методом сил, а результаты расчета сводят в таблицы (см. табл. 6.1).

Таблица 5.1

	$M_A = 3i;$ <p style="text-align: center;">где</p> $i = \frac{EJ}{l}.$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l},$
	$M_A = \frac{3i}{l};$ <p style="text-align: center;">где</p> $i = \frac{EJ}{l}.$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l^2},$

	$M_A = 4i;$ $M_B = 2i;$ <p style="text-align: center;">где</p>	$R_A = R_B = \frac{6i}{l},$ $i = \frac{EJ}{l}.$
	$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$ <p style="text-align: center;">где</p>	$R_A = R_B = \frac{12i}{l^2},$ $i = \frac{EJ}{l}.$
	$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12};$ $M^* = \frac{ql^2}{8};$ $M_{\text{нб}} = \frac{ql^2}{24};$	$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$
	$M_A = 2qcl \left[\frac{1}{2l} \left(a + \frac{c}{2} \right) + (\beta - \gamma) \right];$ $M_B = 2qcl(\gamma - 2\beta);$ $R_B = 2qc(2\gamma - 3\beta);$ $M_C = 2qc \left[(l - 2a)\gamma + (3a - l)\beta - \frac{c}{4} \right];$ $M_D = 2qc \left[(2b - l)\gamma + (2l - 3b)\beta \right];$ $R_A = qc - R_B = qc \left[1 - 2(2\gamma - 3\beta) \right];$ <p style="text-align: center;">где:</p> $\beta = \frac{1}{2l^2} \left[\frac{c^2}{3} + \gamma(l - b) \right];$	$\gamma = \frac{1}{2l^3} \left[c^2 \left(b + \frac{3}{4}c \right) + la^2 + a(2l - a) \left(l + \frac{c}{2} - b \right) \right].$

	$M_A = \frac{Pab^2}{l^2}; M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}; M^* = \frac{Pab}{l};$ $M_C = \frac{Pab}{l} \left[1 - \frac{a}{l} - \frac{(b-a)b}{l^2} \right];$ $R_A = \frac{Pb^2}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l} \right);$ $R_B = \frac{Pa^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l} \right).$ <p>При $a = b = l/2$: $R_A = R_B = \frac{P}{2};$</p> $M_A = M_B = M_C = \frac{Pl}{8}; M^* = \frac{Pl}{4}.$
	$M_A = M_B = Pa \left(1 - \frac{a}{l} \right);$ $M^* = Pa; M_C = M_D = \frac{Pa^2}{l};$ $R_A = R_B = P.$
	$M_A = \frac{mb}{l^2} (3a - l); M_B = \frac{ma}{l^2} (3b - l);$ $M_C^{лев} = \frac{mb}{l^3} (l^2 - 3al + 6a^2);$ $M_C^{np} = \frac{ma}{l^3} (l^2 - 3bl + 6b^2);$ $R_A = R_B = \frac{6ab}{l^3} m.$ <p>При $a = b = l/2$: $M_A = M_B = \frac{m}{4};$</p> $M_C^{лев} = M_C^{np} = \frac{m}{2}; R_A = R_B = \frac{3m}{2l}.$

<p>Diagram of a beam of length l with a unit load i at support A. The beam is fixed at A and has a roller support at B. The bending moment diagram shows a constant moment i at both ends. The deflection curve is a dashed line.</p>	$M_A = M_B = i;$ $R_A = 0.$ <p>где $i = \frac{EJ}{l}$.</p>	
<p>Diagram of a beam of length l with unit loads i at both supports A and B. The beam is fixed at A and has a roller support at B. The bending moment diagram is linear, increasing from i at A to $\frac{6i}{l}$ at B. The deflection curve is a dashed line.</p>	$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$ $R_A = \frac{12i}{l^2}.$ <p>где $i = \frac{EJ}{l}$.</p>	
<p>Diagram of a beam of length l with a uniformly distributed load q. The beam is fixed at A and has a roller support at B. The bending moment diagram is parabolic, with values $\frac{ql^2}{3}$ at A and $\frac{ql^2}{6}$ at B. The deflection curve is a dashed line.</p>	$M_A = \frac{ql^2}{3};$ $M_B = \frac{ql^2}{6};$ $R_A = ql.$	
<p>Diagram of a beam of length l with a point load P at distance a from support A. The beam is fixed at A and has a roller support at B. The bending moment diagram is linear, with values $\frac{Pa^2}{2l}$ at A and $\frac{Pa^2}{2l}$ at B. The deflection curve is a dashed line.</p>	$M_A = \frac{Pa^2}{2l} \left(\frac{2l}{a} - 1 \right);$ $M_B = \frac{Pa^2}{2l};$ $R_A = P.$	
<p>Diagram of a beam of length l with a moment m at distance a from support A. The beam is fixed at A and has a roller support at B. The bending moment diagram is constant, with values $\frac{mb}{l}$ at A and $\frac{ma}{l}$ at B. The deflection curve is a dashed line.</p>	$M_A = \frac{mb}{l};$ $M_B = \frac{ma}{l};$ $R_A = 0.$	

6.6. Построение единичных и грузовых эпюр усилий в основной системе метода перемещений

Построение единичных и грузовых эпюр усилий (изгибающих моментов) в основной системе метода перемещений выполняется с использованием готовых (табличных) эпюр усилий для отдельных участков основной системы (см. табл. 6.1), каждый из которых работает независимо от других, на действующее непосредственно на него воздействие, в соответствии которому табличная эпюра с учетом конкретных параметров данного участка переносится на этот участок. При этом при построении единичных эпюр усилий вначале целесообразно представить схему деформирования основной системы от соответствующего перемещения узла, которая позволяет выявить, какие элементы (участки) основной системы работают, как они работают и с какой стороны растянуты волокна, а с какой сжаты (эпюры изгибающих моментов должны строиться со стороны растянутых волокон). Ординаты единичных эпюр, как видно из табличных эпюр, выражаются через погонные жесткости участков, представляющих собой отношения действительных жесткостей участков к их длинам $i_s = EJ_s / l_s$, что в случае задания жесткостей в общем виде может вызывать некоторые трудности со сравнением ординат единичных эпюр на разных участках. Чтобы избежать этих трудностей, можно поступать по-разному:

– можно одну из погонных жесткостей участков выбрать за базовую (обозначив ее, например, через i) и через нее затем выразить погонные жесткости остальных участков системы; так, для рамы на рис. 6.10,*a* погонные жесткости участков записываются следующим образом:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{EJ}{h}; \quad i_{12} = \frac{EJ_{12}}{l} = \frac{kEJ}{\alpha \cdot h} = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{EJ}{h},$$

и если обозначить $\frac{EJ}{h} = i$ или $EJ = i \cdot h$, то получим: $i_{01} = i_{23} = i$; $i_{12} = \frac{k}{\alpha} i$

(далее в этом пособии используется именно этот подход выражения погонных жесткостей участков);

– можно выражать погонные жесткости участков через некоторую величину EJ , общую для всех участков – $EJ_s = \beta_s EJ$; в этом случае для рамы на рис. 6.10,*a* получим:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{EJ}{h}; \quad i_{12} = \frac{k}{\alpha h} EJ;$$

– можно для величин i , EJ задаться и некоторыми численными значениями, удобными, с нашей точки зрения, для дальнейших расчетов; это можно сделать в связи с тем, что впоследствии при построении окончательных эпюр усилий величины i , EJ , являющиеся общими для всех участков, сокращаются, поэтому их величины не влияют на результаты расчета (значение имеют соотношения жесткостей участков); для рамы на рис. 6.10, *a* удобно, например, принять:

$$EJ = ah, \text{ а } i = \alpha.$$

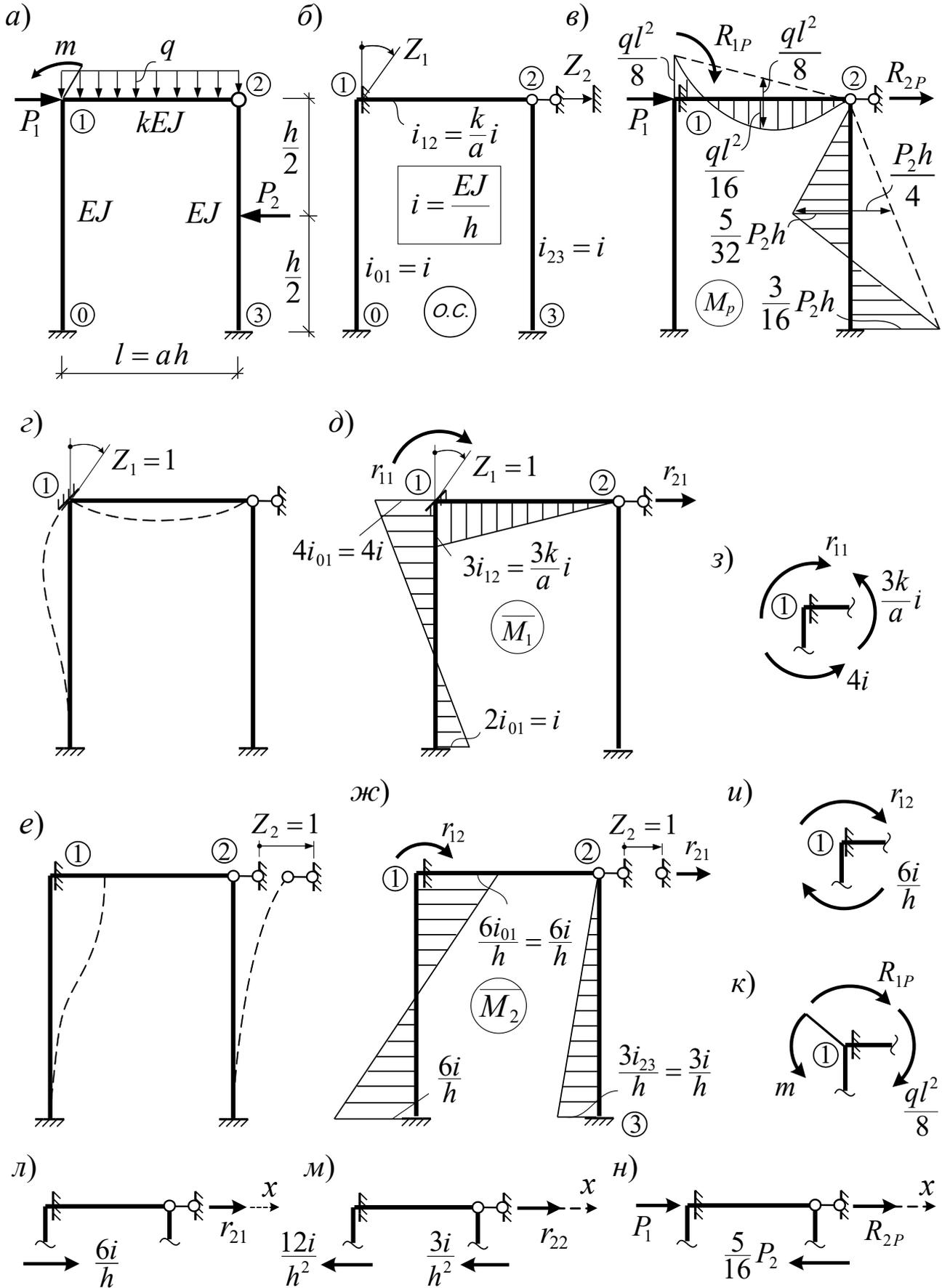


Рис. 6.10

Рама, представленная на рис. 6.10,а, как определено ранее (рис. 6.1), имеет в методе перемещений два неизвестных (степень ее кинематической неопределимости равна двум), и основная система метода перемещений для нее имеет вид, показанный на рис. 6.10,б, а единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов (а также соответствующие единичным перемещениям и эпюрам схемы деформаций) представлены на рис. 6.10,в – 6.10,ж.

6.7. Определение коэффициентов и свободных членов системы уравнений

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений метода перемещений r_{ik} и R_{iP} по физическому смыслу, как уже отмечалось, могут быть двух видов – реактивные моменты в дополнительных заделках и реактивные силы в дополнительных линейных связях. Их определение, как определение любых реакций, может быть выполнено на основе уравнений равновесия либо всей системы, либо какой-то части (статический способ). Как показывает опыт, удобнее рассматривать равновесие отдельных частей основной системы метода перемещений, находящейся под тем воздействием, от которого определяется искомое реактивное усилие. При этом для реактивных усилий в дополнительных связях в методе перемещений применяется следующее правило знаков – реактивное усилие считается положительным, если его направление совпадает с направлением перемещения соответствующей дополнительной связи. При определении неизвестных реактивных усилий всегда следует направлять в положительных направлениях, используя их далее с полученными знаками.

В соответствии с изложенным, определение величин r_{ik} и R_{iP} , представляющих по смыслу реактивные моменты в заделках, удобнее всего выполнять на основе рассмотрения равновесия узлов, в которых установлены соответствующие дополнительные заделки, предварительно вырезав эти узлы. В качестве уравнений равновесия при этом составляются суммы всех моментов в узлах. Из этих уравнений и определяются искомые реактивные моменты.

Так, для рамы на рис. 6.10 при определении коэффициента r_{11} , представляющего собой реактивный момент в 1-ой дополнительной заделке от ее же поворота на единичный угол, необходимо вырезать узел 1 из эпюры \overline{M}_1 (построенной от поворота 1-ой заделки на единичный угол) (см. рис. 6.10,з), из равновесия которого получим:

$$\sum M_1 = 0; \quad r_{11} - 4i - \frac{3k}{\alpha}i = 0; \quad r_{11} = 4i + \frac{3k}{\alpha}i.$$

Коэффициент r_{12} найдем из вырезания узла 1 на эпюре \overline{M}_2 (рис.6.10,у):

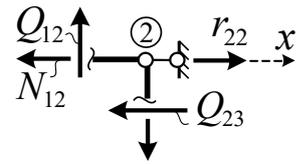
$$\sum M_1 = 0; \quad r_{12} + \frac{6i}{h} = 0; \quad r_{12} = -\frac{6i}{h}.$$

Для определений свободного члена R_{1P} необходимо вырезать узел 1 на эпюре M_P (рис. 6.10,к):

$$\sum M_1 = 0; \quad R_{1P} + \frac{ql^2}{8} - m = 0; \quad R_{1P} = m - \frac{ql^2}{8}.$$

Таким образом, первый индекс искомого коэффициента или свободного члена здесь, по существу, показывает номер узла, который надо вырезать для определения этого коэффициента или свободного члена, а второй индекс указывает на эпюру, из которой этот узел надо вырезать.

Казалось бы, что и коэффициенты (свободные члены) канонических уравнений, представляющие по смыслу реактивные силы в дополнительных линейных связях, также будет удобно определять из вырезания узлов, в которых эти связи установлены. Но, оказывается, это не совсем так. Например, для определения коэффициента r_{22} , являющегося реактивной силой во 2-ой дополнительной линейной связи от ее же единичного смещения, можно, конечно, вырезать узел 2 на эпюре \overline{M}_2 (рис. 5.11); в результате чего получим:



$$\sum X = 0; \quad r_{22} - Q_{23} - N_{12} = 0; \quad r_{22} = Q_{22} + N_{12}.$$

Рис. 6.11

Величину Q_{23} легко определить по эпюре \overline{M}_2 , используя, например, формулу:

$$Q = Q_0 \pm \left| \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l} \right|, \quad (6.4)$$

где: Q_0 учитывает действие распределенной нагрузки q на участке, т.е. это эпюра поперечных сил на участке, как в простой двухопорной балке (если q нет, то $Q_0 = 0$); $M_{\text{прав}}$, $M_{\text{лев}}$ – ординаты изгибающих моментов справа и слева по концам участка; l – длина участка;

знак перед абсолютной величиной принимается **по следующему правилу**: если стержень, на котором построена рассматриваемая эпюра M , необходимо поворачивать до совмещения с прямой, соединяющей ординаты $M_{\text{прав}}$ и $M_{\text{лев}}$ по кратчайшему пути по часовой стрелке, то принимается знак «+», если против часовой стрелки, то – знак «-».

В результате на участке 2–3 (рис. 6.10,ж) получим:

$$Q_{23} = 0 + \left| \frac{3i/h - 0}{h} \right| = \frac{3i}{h^2}.$$

Следует заметить, что величину Q_{23} можно получить и через опорную реакцию в стержне 2–3 от действия заданного смещения $Z_2 = 1$, учитывая, что поперечная сила в приопорном сечении равна по величине реакции соответствующей опоры, которая приведена в табличных эпюрах; знак же поперечной силы при этом определяется по обычному правилу знаков для Q или по эпюре M . Для определения же величины продольной силы N_{1-2} в стержне 1–2 необходимо вначале по эпюре \overline{M}_2 , используя формулу (6.4), построить эпюру поперечных сил \overline{Q}_2 , после чего можно будет найти из вырезания узлов величину N_{1-2} . Этот процесс, как видим, достаточно трудоемок.

СОДЕРЖАНИЕ

Проще будет процедура определения коэффициентов r_{ik} , R_{iP} представляющих собой реакции в линейных связях, если вырезать не узлы, а части основной системы метода перемещений таким образом, чтобы в уравнения равновесия входили только поперечные силы; при этом в качестве уравнений равновесия удобнее всего использовать сумму проекций сил на ось, параллельную искомой реактивной силе.

Так, для определения коэффициента r_{22} удобно вырезать из эпюры \bar{M}_1 верхнюю часть, показанную на рис. 10,л, из равновесия которой получим:

$$\sum X = 0; \quad r_{21} + \frac{6i}{h} = 0; \quad r_{21} = -\frac{6i}{h}.$$

Аналогично найдем коэффициент r_{22} (рис. 5.10,м) и свободный член R_{2P} (рис. 10,н), вырезав соответствующие части основной системы из эпюр \bar{M}_2 и M_P :

$$\sum X = 0; \quad r_{22} - \frac{12i}{h^2} = \frac{3i}{h^2} = 0; \quad r_{22} = \frac{15i}{h^2};$$

$$\sum X = 0; \quad R_{2P} + P_1 - \frac{5}{16}P_2 = 0; \quad R_{2P} = \frac{5}{16}P_2 - P_1.$$

Следует отметить, что значения r_{ik} и R_{iP} можно определить и с помощью формулы Мора [1]. При этом величины r_{ik} и r_{ii} вычисляются по формулам:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ}; \quad r_{ii} = \sum \int \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EJ}; \quad (6.5)$$

а величины свободных членов R_{iP} по формуле

$$R_{iP} = -\sum \int \frac{\bar{M}_i M'_P ds}{EJ}, \quad (6.6)$$

где M'_P – эпюра изгибающих моментов от действия внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или О.С. метода перемещений удалением лишних связей, в том числе обязательно той связи, реакция которой определяется.

Вычислим таким способом для рассматриваемого примера (рис. 6.10), например, коэффициенты r_{12} , r_{22} и свободный член R_{1P} . Единичные эпюры в О.С. метода перемещений показаны на рис. 6.10, а один из возможных вариантов эпюры M'_P – на рис. 6.12.

Учитывая, что $\frac{h}{EJ} = \frac{1}{i}$, а $\frac{1}{kJ} = \frac{\alpha h}{kJ} = \frac{\alpha}{ki}$, получим:

$$r_{12} = r_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left(-\frac{6i}{h} \cdot 2i - 4i \cdot \frac{6i}{h} \right) = -\frac{6i}{h};$$

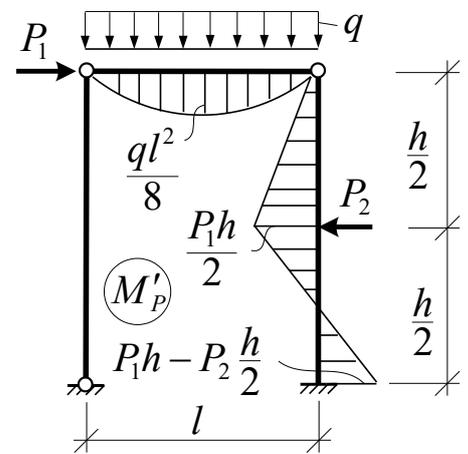


Рис. 6.12

$$r_{22} = \sum \int \frac{\overline{M}_2^2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left[\left(\frac{6i}{h} \right)^2 + \left(\frac{6i}{h} \right)^2 \right] + \frac{h}{6EJ} \left[\left(\frac{3i}{h} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1,5i}{h} \right)^2 \right] = \frac{15i}{h^2};$$

$$R_{1P} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M'_P ds}{EJ} = -\frac{l}{6kEJ} \left(4 \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{15k}{\alpha} i \right) = -\frac{\alpha}{6ki} \left(\frac{ql^2}{2} \cdot 1,5 \frac{ki}{\alpha} \right) = -\frac{ql^2}{8};$$

вычисленные здесь значения совпадают с найденными ранее статическим способом.

6.8. Проверки коэффициентов и свободных членов системы уравнений

Проверка правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений выполняется аналогично проверке коэффициентов уравнений в методе сил. При этом для выполнения проверок должна быть построена единичная суммарная эпюра \overline{M}_s , представляющая сумму всех единичных эпюр \overline{M}_i в основной системе метода перемещений:

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + \dots + \overline{M}_n. \quad (6.7)$$

После этого в методе перемещений могут быть выполнены следующие проверки:

а) универсальная проверка

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^2 ds}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik}, \quad (6.8)$$

где $\sum \sum r_{ik}$ – сумма всех единичных коэффициентов метода перемещений (сумма единичных коэффициентов по всем уравнениям метода перемещений):

$$\sum \sum r_{ik} = (r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}) + (r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n}) + \dots + (r_{n1} + r_{n2} + \dots + r_{nn}).$$

Если универсальная проверка выполняется, то это подтверждает правильность вычислений единичных коэффициентов; если же универсальная проверка не выполняется, то для выяснения, в какой группе единичных коэффициентов находится ошибка, можно сделать так называемые построчные проверки.

б) построчные проверки, то есть проверки коэффициентов, входящих в каждое из уравнений (1-ое, 2-ое, ... n -ое) метода перемещений имеют вид:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_s ds}{EJ} = \sum_{k=1}^n r_{ik} \quad (i = 1 \dots n), \quad (6.9)$$

где: $\sum r_{ik}$ – сумма коэффициентов, входящих в i -ое уравнение.

Таких проверок, как видно, может быть n ; какие-то из них будут выполняться (значит, соответствующие коэффициенты вычислены верно), а какие-то – могут не выполняться; анализ полученных результатов позволяет выявить те коэффициенты, при вычислениях которых были допущены ошибки.

Заметим, что если универсальная проверка выполняется, то необходимости в выполнении построчных проверок нет.

в) столбцовая проверка – служит для проверки грузовых коэффициентов и выполняется по формуле:

$$-\sum \int \frac{\bar{M}_s M'_p ds}{EJ} = \sum_{i=1}^n R_{iP}, \quad (6.10)$$

где: $R_{iP} = R_{1P} + R_{2P} + \dots + R_{nP}$ – сумма всех грузовых коэффициентов (свободных членов системы уравнений);

M'_p – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или основной системы метода перемещений путем отбрасывания лишних связей, в том числе обязательно дополнительных связей, в которых определяются реакции R_{iP} (см., например, рис. 6.12).

6.9. Построение окончательных эпюр усилий и их проверки

Найденные значения единичных и грузовых коэффициентов подставляются в систему канонических уравнений метода перемещений (6.3), решая которую определим неизвестные метода перемещений Z_i ($i = 1 \dots n$). После этого окончательная эпюра изгибающих моментов может быть построена на основе принципа независимости действия сил и воздействий (перемещений) по формуле:

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p. \quad (6.11)$$

Окончательная эпюра поперечных сил строится по эпюре M с использованием формулы (6.4). Окончательная эпюра продольных сил строится по эпюре Q способом вырезания узлов. Для подтверждения правильности расчета и построения окончательных эпюр M , Q и N выполняются следующие проверки:

а) проверка равновесия узлов на эпюре M ; эта проверка при расчете рам методом перемещений имеет важное значение, так как на единичных (\bar{M}_i) и грузовых (M_p) эпюрах в О.С. метода перемещений без учета дополнительных заделок (которых в системе действительно нет) равновесие узлов не выполняется; в окончательной же эпюре M равновесие узлов должно выполняться;

б) деформационная (кинематическая) проверка эпюры M ; эта проверка здесь производится так же, как и методе сил; но здесь для ее выполнения вначале необходимо для заданной системы выбрать основную систему метода сил (предварительно определив число лишних связей), в которой нужно построить суммарную единичную эпюру $\bar{M}_s^{мет.сил}$ от единичных значений всех неизвестных метода сил (или хотя бы одну из единичных эпюр $\bar{M}_i^{мет.сил}$), которая охватывала бы максимальное число участков системы; после этого деформационная

проверка выполняется по формуле:

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^{\text{мет.сил}} M ds}{EJ} = 0 \quad \left(\text{или} \quad \sum \int \frac{\overline{M}_i^{\text{мет.сил}} M ds}{EJ} = 0 \right). \quad (6.12)$$

Физический смысл этой проверки здесь такой же, как и в методе сил;

в) проверка равновесия узлов при построении эпюры N по эпюре Q ; эпюра N строится, как уже отмечалось, по эпюре Q способом вырезания узлов, т.е. продольные силы находятся из уравнений равновесия сил в узлах (уравнений проекций на две любые оси); соблюдение равновесия всех узлов при этом свидетельствует о правильности расчета; если же хотя бы в одном из узлов хотя бы одно из уравнений равновесия не будет выполняться, то это значит, что в расчете допущена ошибка; чаще всего эта ошибка бывает связана с неверным определением коэффициентов или свободных членов, представляющих собой реактивные силы в линейных дополнительных связях;

г) статическая проверка; выполняется так же, как и в методе сил, то есть вычисляются суммы проекций всех заданных нагрузок и опорных реакций на две любые оси и сумма моментов этих же сил и опорных реакций относительно любой точки, которые должны быть равны нулю.

6.10. Упрощения при расчетах симметричных рам

При расчете симметричных рам методом перемещений следует применять и использовать те же подходы, приводящие к упрощениям, что и в методе сил.

Основная система метода перемещений при расчете симметричных рам должна удовлетворять всем условиям симметрии, включая разделение всех неизвестных перемещений на симметричные и кососимметричные. Неизвестные, не удовлетворяющие условиям симметрии, необходимо группировать.

В результате система канонических уравнений метода перемещений распадется на две независимые системы, в одну из которых будут входить только симметричные, а во вторую – только кососимметричные неизвестные.

Если на раму при этом будет действовать симметричная внешняя нагрузка, то все кососимметричные (обратносимметричные) неизвестные, как и в методе сил, обратятся в нуль; если внешние нагрузки будут кососимметричны, то все симметричные неизвестные будут равны нулю.

Рассмотрим, например, симметричную раму, изображенную на рис. 6.13а, степень кинематической неопределимости которой равна пяти ($n = n_o + n_e = 2 + 3 = 5$).

Основная система для этой рамы в общем случае представлена на рис. 18б, а с учетом группировки неизвестных:

$$\begin{cases} Z'_1 = Z_1 + Z_2; \\ Z'_2 = Z_1 - Z_2; \end{cases} \quad \begin{cases} Z'_4 = Z_4 + Z_5; \\ Z'_5 = Z_4 - Z_5; \end{cases} \quad Z'_3 = Z_3$$

на рис. 6.13в. В результате будем иметь два симметричных (Z_2, Z_4) и три кососимметричных (Z_1, Z_3, Z_5) неизвестных перемещения.

Общая система уравнений при этом распадается на две независимые системы вида

$$\begin{cases} r_{22} \cdot Z_2 + r_{24} \cdot Z_4 + R_{2P} = 0; \\ r_{42} \cdot Z_2 + r_{44} \cdot Z_4 + R_{4P} = 0; \end{cases} \quad (13) \quad \begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{13} \cdot Z_3 + r_{15} \cdot Z_5 + R_{1P} = 0; \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{33} \cdot Z_3 + r_{35} \cdot Z_5 + R_{3P} = 0; \\ r_{51} \cdot Z_1 + r_{53} \cdot Z_3 + r_{55} \cdot Z_5 + R_{5P} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

При симметричном нагружении рамы все кососимметричные неизвестные будут равны нулю, т.е. $Z_1 = Z_3 = Z_5 = 0$, останутся только симметричные неизвестные Z_2, Z_4 и основная система метода перемещений примет вид, показанный на рис. 6.13з. Единичные эпюры изгибающих моментов при этом и соответствующие им схемы деформаций показаны на рис. 6.13,д–з (построение эпюры \overline{M}_2 на среднем участке нижнего стержня сразу от двух поворотов заделок навстречу друг другу показано на рис. 5.13u). Значения единичных коэффициентов в этом случае будут:

$$r_{22} = 10i_1 + 6i_2; \quad r_{24} = r_{42} = -\frac{6i_1}{a}; \quad r_{44} = \frac{6i_1}{a^2}.$$

При кососимметричной нагрузке на раму на рис. 6.13а все симметричные неизвестные станут равны нулю ($Z_2 = Z_4 = 0$), останутся неизвестными перемещения Z_1, Z_3, Z_5 и основная система метода перемещений примет вид, показанный на рис. 6.14а. Единичные эпюры изгибающих моментов и соответствующие им схемы деформаций показаны на рис. 6.14,в–з. Построение эпюр \overline{M}_1 и \overline{M}_5 на среднем нижнем стержне от одновременного поворота двух заделок по часовой стрелке и их смещения в противоположные стороны представлены на рис. 6.14б, 6.14u. Значения единичных реакций будут равны:

$$\begin{aligned} r_{11} = 18i_1 + 6i_2; \quad r_{13} = r_{31} = -\frac{6i_2}{h}; \quad r_{15} = r_{51} = \frac{18i_1}{a}; \\ r_{33} = -\frac{6i_2}{h^2}; \quad r_{35} = r_{53} = 0; \quad r_{55} = \frac{54i_1}{a^2}. \end{aligned}$$

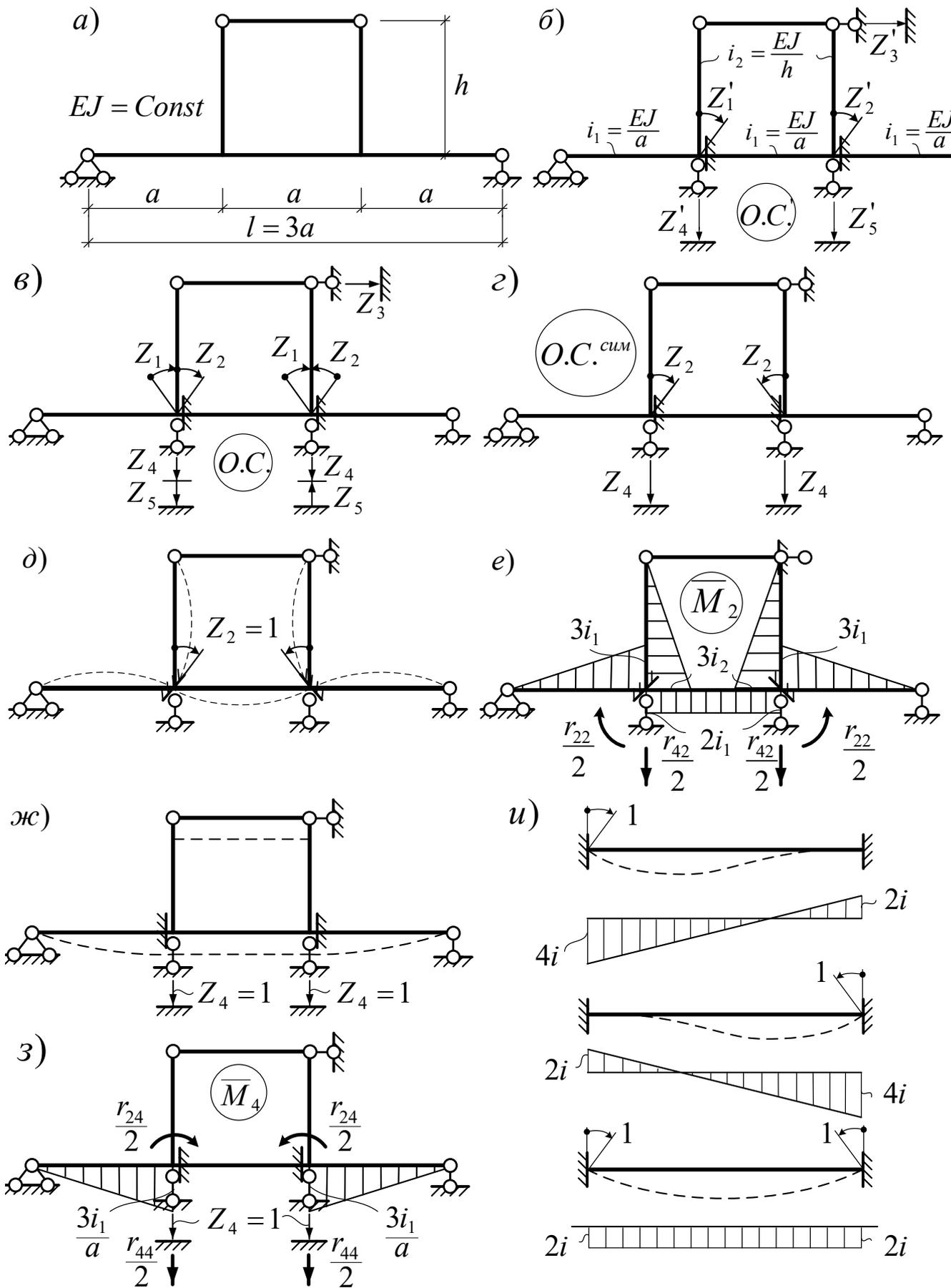


Рис. 6.13

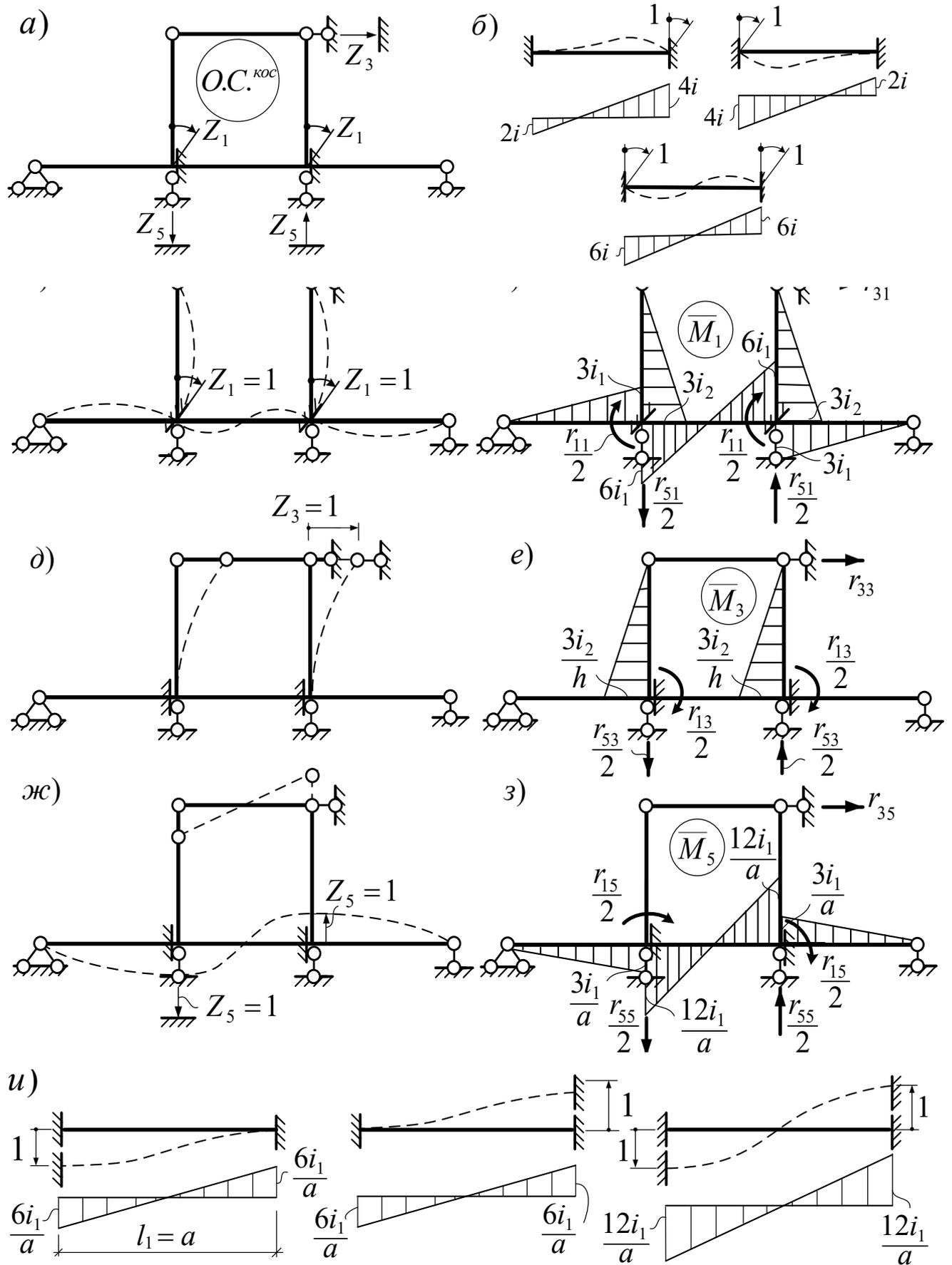


Рис. 6.14

СОДЕРЖАНИЕ

Для симметричных рам при их симметричном нагружении эпюры усилий будут симметричными, а при кососимметричном их нагружении – кососимметричными. И если получить эпюры для половины рамы, то их можно просто отобразить на вторую половину соответственно нагрузке симметрично либо кососимметрично. Эпюры усилий для половины рамы можно построить на основе расчета половины рамы. При этом надо выбрать расчетную схему поло-

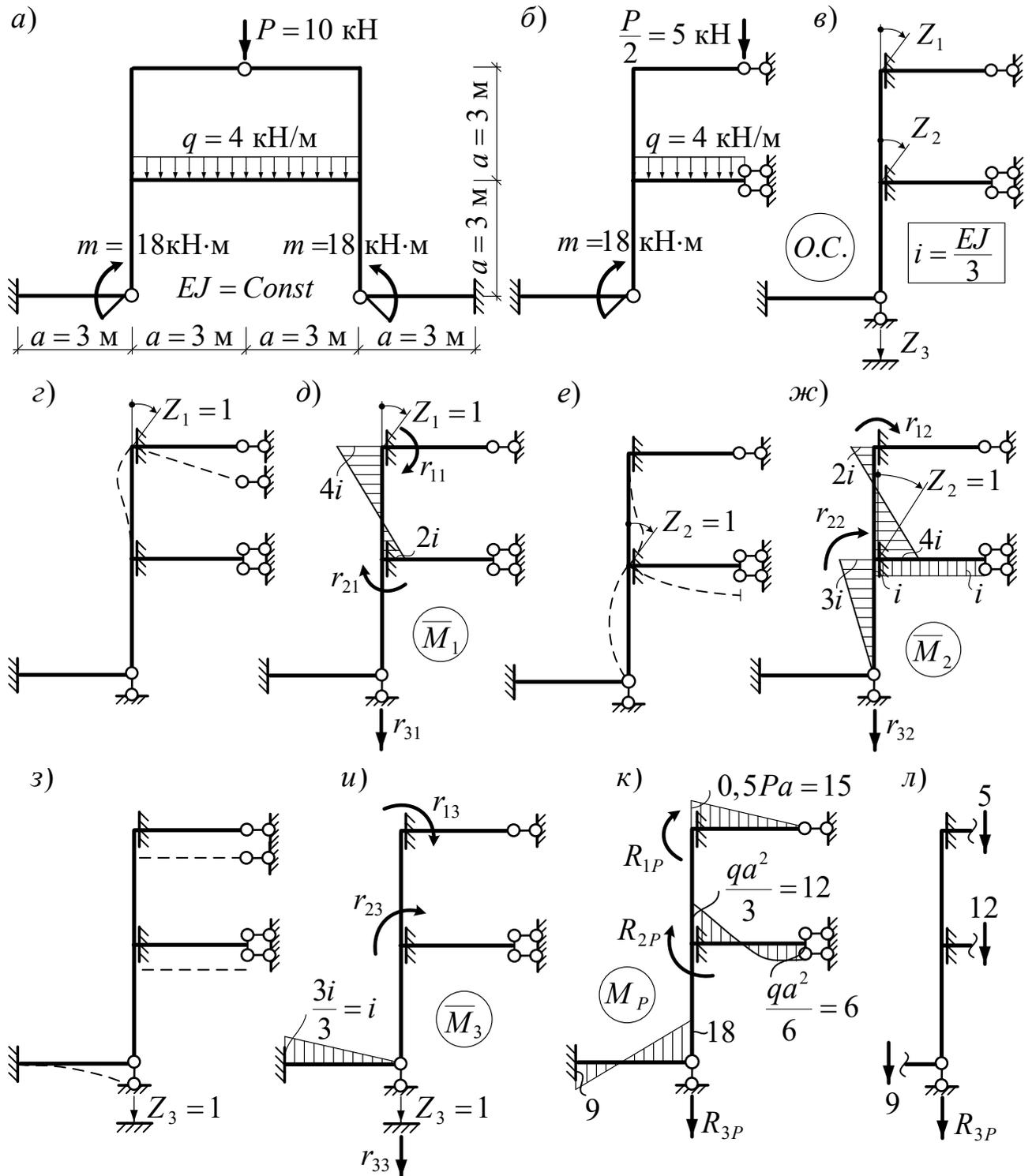


Рис. 6.15

вины рамы. Рама разрезается по оси симметрии и в соответствии с условиями деформирования полной рамы в местах разреза устанавливаются связи, закрепляющие сечения от тех перемещений, которых соответственно при симметричном либо кососимметричном деформировании рамы не может быть (подробно вопросы выбора расчетных схем половин рам обсуждались в работе [8] при рассмотрении расчетов симметричных рам методом сил). Далее выполняется обычный расчет полученной половины рамы методом перемещений.

Например, для симметричной рамы, представленной на рис. 6.15а, при ее симметричном нагружении расчетная схема половины рамы показана на рис. 6.15б. Степень кинематической неопределимости этой половины рамы равна трем ($n = n_y + n_{\bar{e}} = 2 + 1 = 3$). Основная система метода перемещений изображена на рис. 6.15в. На рис. 6.15,г – и представлены схемы деформирования расчетной схемы и эпюры изгибающих моментов в ней от воздействий единичных перемещений дополнительных связей Z_1, Z_2, Z_3 . Грузовая эпюра изгибающих моментов от действия внешних нагрузок показана на рис. 6.15к. Реактивные усилия в дополнительных связях от всех этих воздействий равны:

$$r_{11} = 4i; \quad r_{12} = r_{21} = 2i; \quad r_{13} = r_{31} = 0; \quad r_{22} = 8i; \quad r_{23} = r_{32} = 0;$$

$$r_{33} = 0,333i; \quad R_{1P} = -15; \quad R_{2P} = -12; \quad R_{3P} = -26 \text{ (рис. 20л).}$$

6.11. Смешанный метод расчета статически неопределимых рам. Комбинированное применение метода сил и метода перемещений

Смешанным называется метод расчета статически неопределимых рам, когда для одной части рамы за неизвестные принимаются силы, а для другой части – перемещения.

При этом основная система смешанного метода (О.С.) получается отбрасыванием лишних связей для первой части рамы (как в методе сил) и введением дополнительных связей для другой части рамы (как в методе перемещений).

Таким образом, два метода расчета – метод сил и метод перемещения – здесь не просто дополняют друг друга, а смешиваются друг с другом (это хорошо видно в системе уравнений), образуя новый метод.

Познакомимся ближе со смешанным методом на примере рамы, представленной на рисунке 6.1.

Разделим раму условно на две части, представленные на рисунке 6.1, и при определении неизвестных будем определять как на общее число неизвестных в раме, так и число неизвестных в каждой из частей рамы.

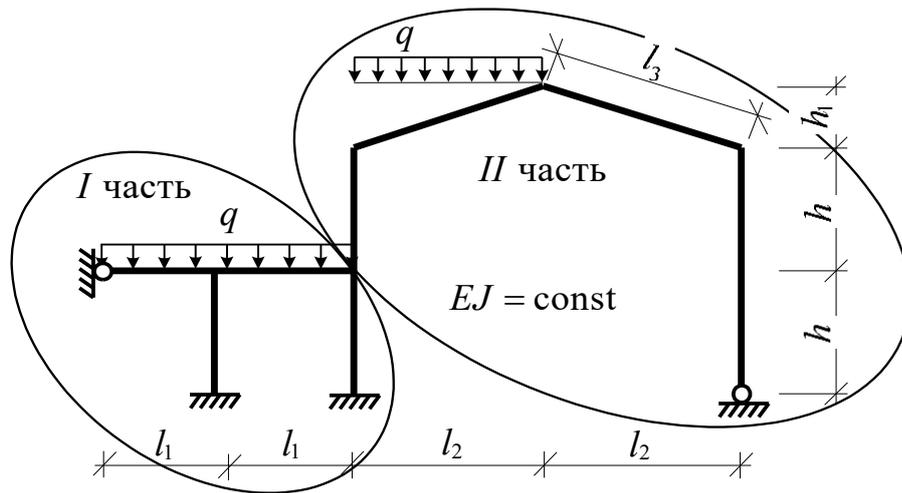


Рисунок 6.1

Для анализа числа неизвестных для каждого из методов расчета внесем данные о числе неизвестных в таблицу 6.1:

а) применение методом сил: $L = 3K - \text{Ш} = 3 \cdot 3 - 2 = 7$;

Основную систему (О.С.) метода сил можно выбрать разными способами; здесь следует выбирать О.С., ориентируясь сразу на возможный вариант применения смешанного метода, – например, как показано на рисунке 6.2.

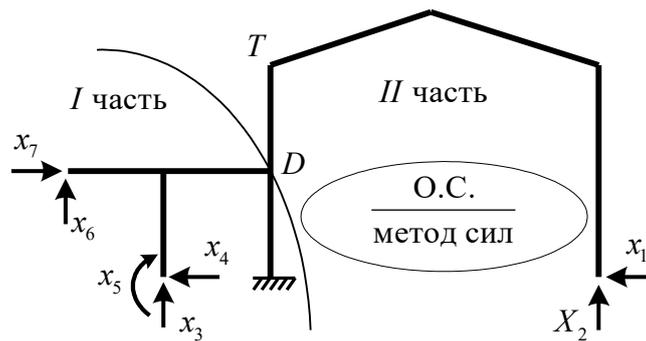


Рисунок 6.2

б) применение метода перемещений: $n = n_y + n_n = 5 + 2 = 7$;

Основная система метода перемещений будет иметь вид:

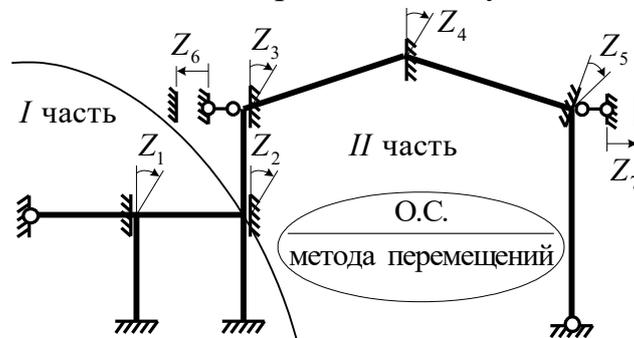


Рисунок 6.3

Сравнение методов расчета

Рама и ее части	Метод сил. Степень статич. неопределимости	Метод перемещений. Степень кинематич. неопределимости	Смешанный метод. Число неизвестных
I часть	5	2	2 (метод перемещен.)
II часть	2	5	2 (метод сил)
Рама в целом	7	7	4

в) применение смешанного метода: видно, что для первой части рамы за неизвестные лучше принять неизвестные метода перемещений (их два), а для второй части – неизвестные метода сил (их здесь тоже два), – в сумме получим четыре неизвестных вместо семи для метода сил и семи для метода перемещений.

О.С. смешанного метода для рассматриваемой рамы будет иметь вид:

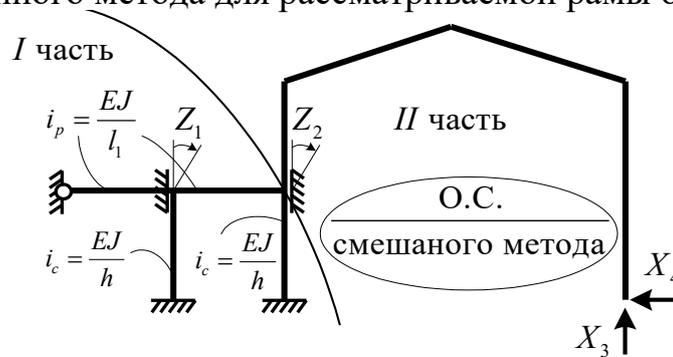


Рисунок 6.4

Анализ выбора О.С. смешанного метода и ее возможных вариантов показывает, что для смешанного метода перемещения узлов в качестве неизвестных следует принимать для той части рамы, которая образована прямолинейными элементами и имеет большое число связей, а усилия в лишних связях следует принимать за неизвестные для той части рамы, которая образована ломаными и криволинейными элементами и имеет меньшее число связей. При этом разделение рамы на две части и О.С. смешанного метода, естественно, должно быть выбрано таким образом, чтобы общее число неизвестных смешанного метода для расчета рамы было минимальным.

Система канонических уравнения смешанного метода будет иметь вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}^*X_3 + r_{14}^*X_4 + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}^*X_3 + r_{24}^*X_4 + R_{2P} = 0; \\ \delta_{31}^*Z_1 + \delta_{32}^*Z_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0; \\ \delta_{41}^*Z_1 + \delta_{42}^*Z_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0; \end{cases} \quad (6.1)$$

Система содержит два вида уравнений:

– первые два уравнения являются уравнениями метода перемещений, и их физический смысл такой же, как в методе перемещений, то есть они представляют реакции в дополнительных связях 1 и 2 от действия всех неизвестных Z_1, Z_2, X_3, X_4 и внешней нагрузки, и эти реакции должны равняться нулю, так как в

СОДЕРЖАНИЕ

исходной системе этих дополнительных связей нет;

– вторые два уравнения являются по существу уравнениями метода сил и их физический смысл соответствующий, они представляют собой перемещения по направлениям неизвестных сил X_3 и X_4 от действия всех неизвестных метода расчета (Z_1, Z_2, X_3, X_4) и внешних нагрузок, которые должны равняться нулю, так как в исходной системе в направлениях этих сил есть связи.

Например, физический смысл 1-го уравнения: реакция в 1-ой дополнительной связи от действия всех неизвестных Z_1, Z_2, X_3, X_4 и внешней нагрузки равна нулю, так как в рассчитываемой системе этой связи нет (рис. 6.1);

Физический смысл 3-его уравнения: перемещение по направлению силы X_3 от действия всех неизвестных метода расчета (Z_1, Z_2, X_3, X_4) и внешних нагрузок должно равняться нулю, так как в рассматриваемой системе в направлении этой силы есть связь (рис. 6.1).

Все коэффициенты канонических уравнений смешанного метода по физическому смыслу и способам определения можно разделить на четыре группы:

1) r_{ik}, R_{iP} ($r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, R_{1P}, R_{2P}$) – коэффициенты чисто метода перемещений;
 2) δ_{ik}, Δ_{ip} ($\delta_{33}, \delta_{34}, \delta_{43}, \delta_{44}, \Delta_{3p}, \Delta_{4p}$) – коэффициенты чисто метода сил;
 3) r_{ik}^* ($r_{13}^*, r_{14}^*, r_{23}^*, r_{24}^*$) – реактивные усилия в дополнительных связях от действия единичных значений неизвестных усилий в лишних связях II части, то есть от действия сил X_3 и X_4 единичной величины.

4) δ_{ik}^* ($\delta_{31}^*, \delta_{32}^*, \delta_{41}^*, \delta_{42}^*$) – перемещения в направлениях сил X_i (X_3, X_4), вызванные перемещениями дополнительных связей; определяются, как перемещения в статически определимых системах от смещений опор (раздел 3.10.3).

Отметим, что для коэффициентов со звездочкой должна соблюдаться следующая зависимость:

$$r_{ik}^* = -\delta_{ki}^*. \quad (6.2)$$

Ниже рассмотрим примеры определения коэффициентов системы уравнений смешанного метода, для чего необходимо в О.С. смешенного метода построить эпюры изгибающих моментов (рис. 6.5–6.8). При этом для части рамы, где используются неизвестные метода перемещений, необходимо определить

погонные жесткости участков: стоек $\left(i_c = \frac{EJ}{h}\right)$ и ригелей $\left(i_p = \frac{EJ}{l_1}\right)$.

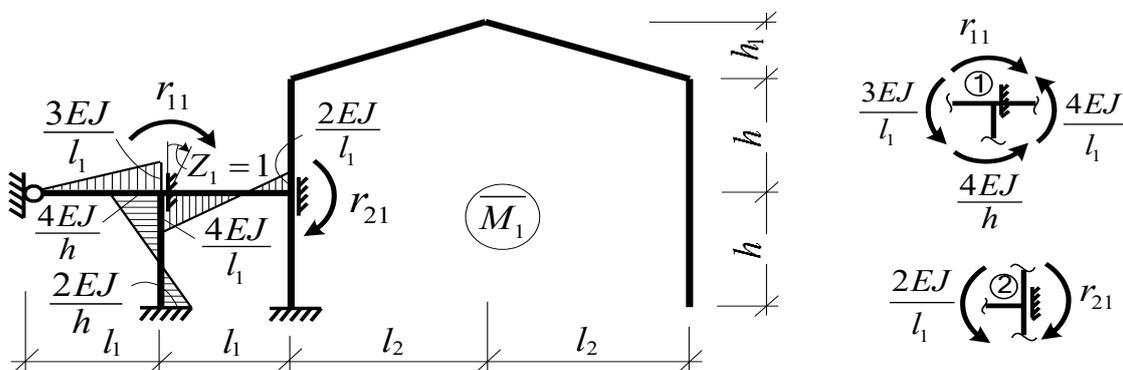
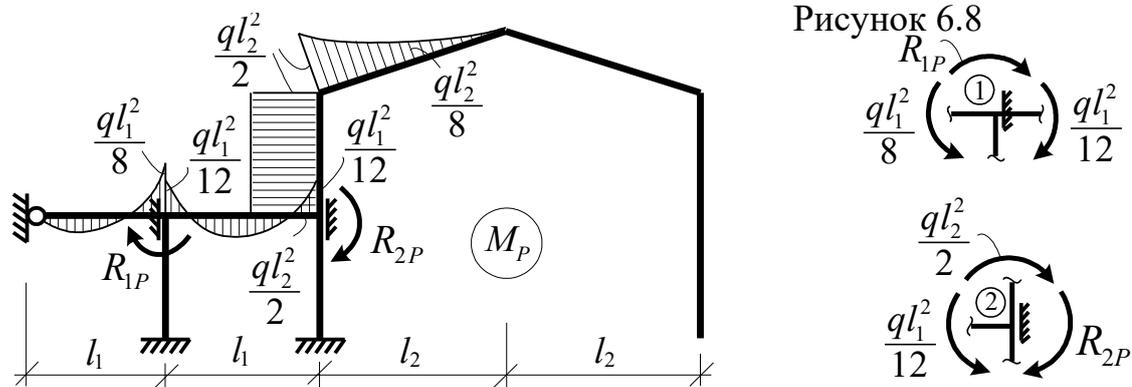
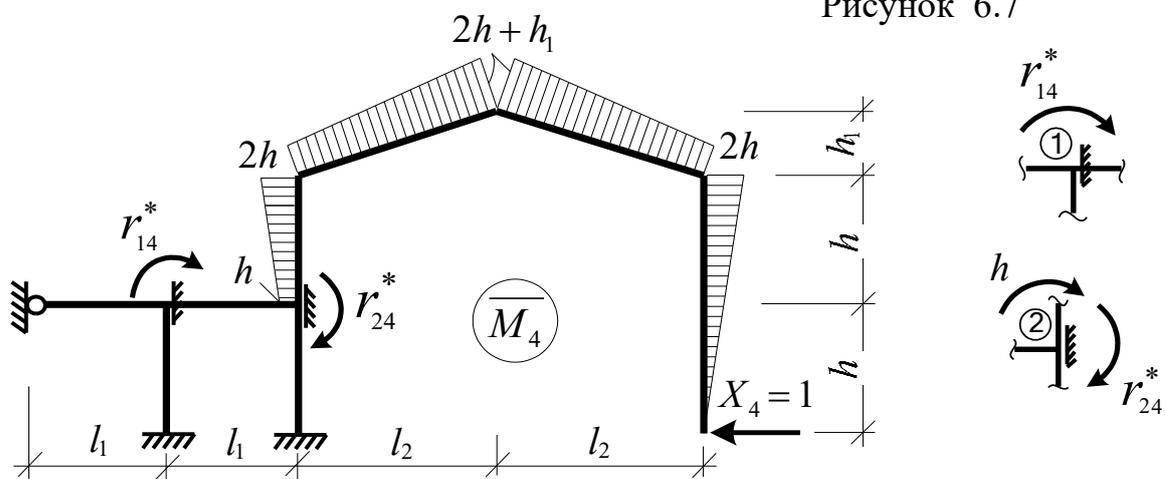
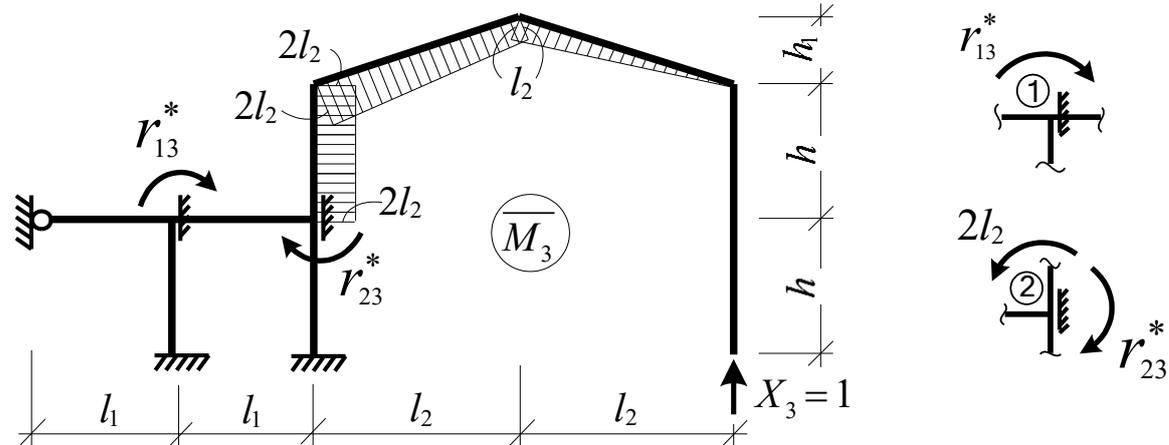
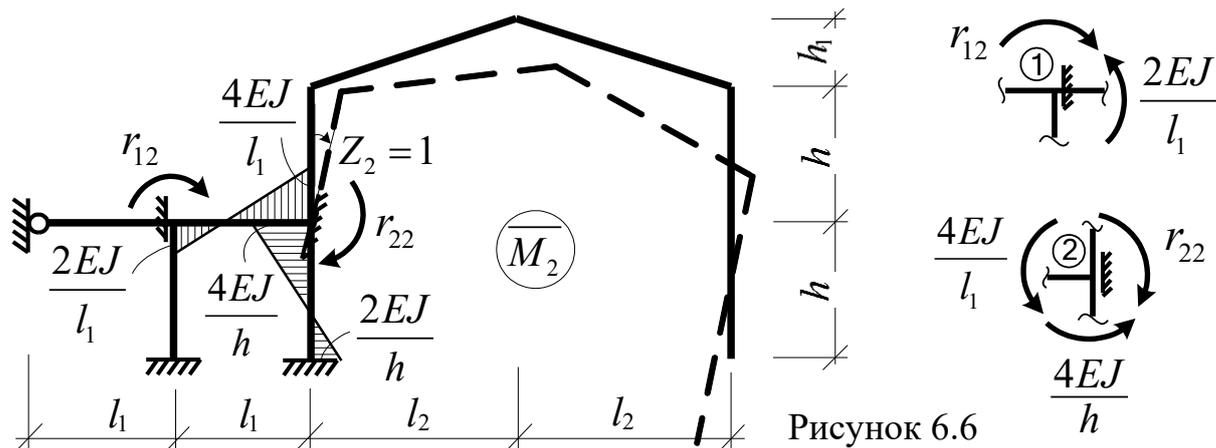


Рисунок 6.5



Определяем коэффициенты канонических уравнений смешанного метода.

Коэффициенты чисто метода перемещений находим как в методе перемещений – из вырезания соответствующих узлов – см. рис. 6.5, 6.6, 6.9:

$$r_{11} = EJ \left(\frac{7}{l_1} + \frac{4}{h} \right); \quad r_{12} = r_{21} = \frac{2EJ}{l_1}; \quad r_{22} = 4EJ \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{h} \right); \quad R_{1P} = \frac{ql_1^2}{24}; \quad R_{2P} = \frac{ql_1^2}{12} - \frac{ql_2^2}{2}.$$

Коэффициенты чисто метода сил вычисляем по формулам Мора с использованием правила Верещагина и формулы Симпсона – см. рис. 6.7, 6.8, 6.9:

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \Sigma \int \frac{\bar{M}_3^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{l_2 \cdot l_3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} l_2 + \frac{l_3}{6EJ} \left[(2l_2)^2 + 4 \cdot (1,5l_2)^2 + (l_2)^2 \right] + \left(\frac{2l_2 \cdot h}{2} \right) \cdot 2l_2; \\ \delta_{34} = \delta_{43} &= \Sigma \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EJ} = \frac{l_3}{6EJ} \left[-l_2 \cdot (2h + h_1) - 4 \cdot \left(\frac{l_2}{2} \right) \cdot \left(\frac{4h + h_1}{2} \right) \right] + \\ &+ \frac{l_3}{6EJ} \left[-2l_2 \cdot 2h - 4 \cdot (1,5l_2) \cdot \left(\frac{4h + h_1}{2} \right) - l_2 \cdot (h + h_1) \right]; \\ \delta_{44} &= \Sigma \int \frac{\bar{M}_4^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{2h \cdot 2h}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 2h + \frac{l_3}{6EJ} \left[(2h)^2 + 4 \cdot \left(\frac{4h + h_1}{2} \right)^2 + (4h + h_1)^2 \right] \cdot 2 + \\ &+ \frac{h}{6EJ} \left[h^2 + 4 \cdot (1,5h)^2 + (2h)^2 \right]; \\ \Delta_{3P} &= \Sigma \int \frac{\bar{M}_3 M_P dx}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{ql_2}{2} \cdot h \right) \cdot 2l_2 - \frac{l_3}{6EJ} \left(\frac{ql_2}{2} \cdot 2l_2 + 4 \cdot \frac{ql_2}{8} \cdot 1,5l_2 \right); \\ \Delta_{4P} &= \Sigma \int \frac{\bar{M}_4 M_P dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql_2}{2} \cdot h \right) \cdot 1,5h + \frac{l_3}{6EJ} \left(\frac{ql_2}{2} \cdot 2h + 4 \cdot \frac{ql_2}{8} \cdot \frac{4h + h_1}{2} \right). \end{aligned}$$

Реактивные усилия в дополнительных связях от действия единичных значений неизвестных усилий в лишних связях II части, то есть от сил X_3 и X_4 , равных единице, определим также, как в методе перемещений, т.е. из вырезания соответствующих узлов – см. рис. 6.6, 6.7:

$$r_{13}^* = 0; \quad r_{23}^* = 2l_2; \quad r_{14}^* = 0; \quad r_{24}^* = -h;$$

Перемещения в направлениях сил X_3 и X_4 , вызванные смещениями дополнительных связей Z_1 и Z_2 , определяются, как перемещения в статически определимых системах от смещений опор – см. раздел 3.10.3 и рис. 6.5–6.6:

$$\delta_{ik}^* = -\Sigma (\bar{R}_{ki} \cdot c_k) = -(\bar{R}_{ki} \cdot Z_k) = -(\bar{R}_{ki} \cdot 1), \quad (6.3)$$

где \bar{R}_{ki} – реакция в k -ой дополнительной связи от действия силы $X_i = 1$; произведение $\bar{R}_{ki} \cdot 1$ принимается со знаком «+», если направления реакции \bar{R}_{ki} и перемещения $Z_k = 1$ совпадают, и со знаком «-», если не совпадают.

Поворот дополнительной заделки в узле 1 не будет вызывать никакого воздействия на II часть рамы (рис. 6.5) (деформация рамы от этого поворота не может передаваться через дополнительную заделку в узле 2), поэтому II часть рамы не будет иметь никаких деформаций и перемещений, то есть будем иметь:

$$\delta_{31}^* = 0; \quad \delta_{41}^* = 0.$$

Поворот же дополнительной заделки в узле 2 ($Z_2 = 1$) вызовет поворот правой (II-ой) части рамы (рис. 6.6). Для определения искомых перемещений согласно (6.3) приложим ко II-ой части рамы по направлениям искомых перемещений единичные силы (как показано на рисунках 6.10 – 6.11) и определим от их действия реакции во 2-ой заделке:

$$\Sigma M_2 = 0; \quad \bar{R}_{23} - 1 \cdot 2l_2 = 0; \quad \bar{R}_{23} = 2l_2;$$

$$\Sigma M_2 = 0; \quad -\bar{R}_{24} + 1 \cdot h = 0; \quad \bar{R}_{24} = h.$$

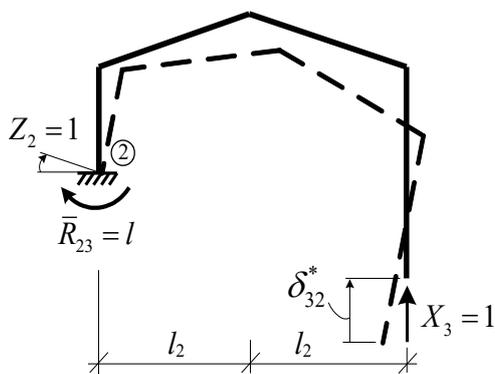


Рисунок 6.10

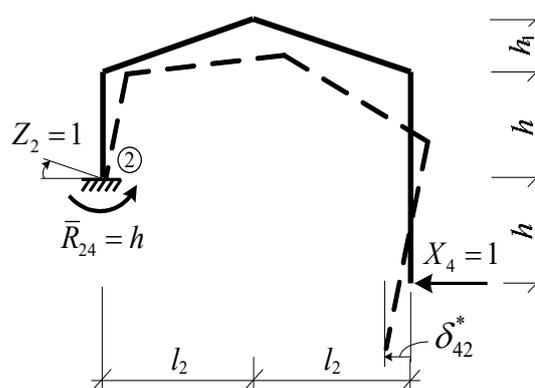


Рисунок 6.11

Теперь находим единичные перемещения:

$$\delta_{32}^* = -(\bar{R}_{23} \cdot 1) = -(+2l_2 \cdot 1) = -2l_2;$$

$$\delta_{42}^* = -(\bar{R}_{24} \cdot 1) = -(-h \cdot 1) = +h.$$

Подставляем все найденные коэффициенты и свободные члены в систему канонических уравнений (6.1), решаем ее, и определяем неизвестные смешанного метода. После этого окончательная эпюра изгибающих моментов строится по формуле:

$$M = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \bar{M}_3 \cdot X_3 + \bar{M}_4 \cdot X_4 + M_p. \quad (6.4)$$

Далее процедура расчета и построения эпюр поперечных и продольных сил не отличается от соответствующей процедуры в методе перемещений.

6.12. Комбинированное применение метода сил и метода перемещений

Рассмотрим симметричную раму с произвольно действующей на нее нагрузкой (рис. 6.12, а). Разложим нагрузку на симметричную и кососимметричную (рис. 6.12, б, в) и рассмотрим расчет рамы отдельно на каждую из этих нагрузок.

При расчете рамы методом сил и выборе симметричной основной системы в виде, показанном на рис. 6.12, г, будем иметь четыре симметричных (X_1, X_2, X_3, X_4) и два кососимметричных (X_5, X_6) неизвестных. Соответственно при расчете на симметричную нагрузку будем иметь два неизвестных X_5 и X_6 (кососимметричные неизвестные равняются нулю), а при расчете на кососимметричную нагрузку будет четыре неизвестных X_1, X_2, X_3 и X_4 (симметричные неизвестные

СОДЕРЖАНИЕ

равны нулю). Для удобства дальнейшего анализа данные результаты занесем в таблицу 6.12.

При расчете рамы методом перемещений основная система метода после группировки неизвестных показана на рис. 6.12, д, е. В результате при расчете на симметричную нагрузку будем иметь два неизвестных симметричных перемещения Z_1 и Z_2 (кососимметричные неизвестные равны нулю), а при расчете на кососимметричную нагрузку будем иметь четыре неизвестных кососимметричных перемещения Z_3, Z_4, Z_5 и Z_6 (симметричные неизвестные равны нулю). Эти результаты также внесем в таблицу 6.

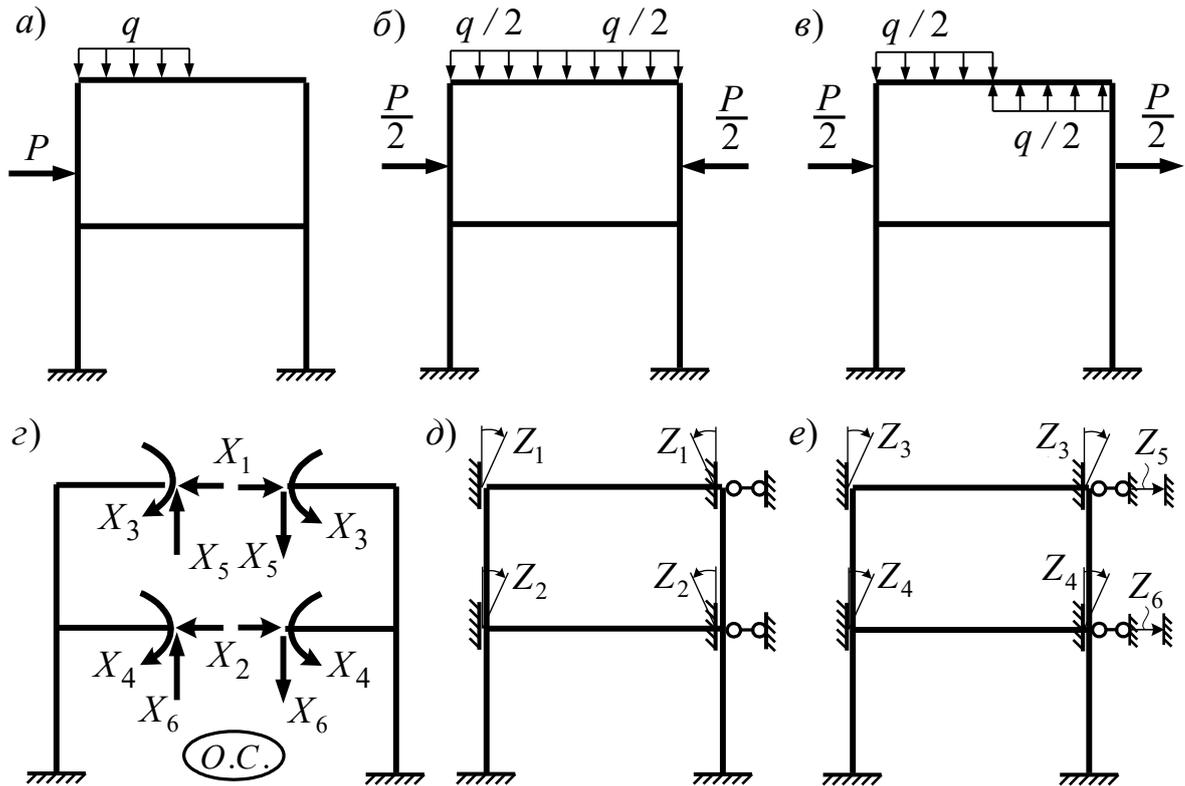


Рис. 6.12

Таблица 6.2

Число уравнений, которое необходимо решить для расчета системы			
при методе расчета	для полной нагрузки	при симметричной нагрузке	при кососимметричной нагрузке
Метод сил	6	4	2
Метод перемещений	6	2	4
Комбинированное применение метода сил и метода перемещений	4	2	2

Анализ полученных результатов, представленных в таблице 6.12, позволяет сделать вывод о том, что на симметричное нагружение расчет рамы следует выполнять методом перемещений, а на кососимметричное нагружение – методом сил. При этом следует отметить, что этот вывод справедлив для любых симметричных рам, а не только для рассматриваемой рамы.

7. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

7.1. Общие понятия

Рассмотренные в предыдущих главах методы расчета статически определимых и статически неопределимых систем позволяют определять внутренние силы и перемещения только тогда, когда материал их элементов подчиняется закону Гука. Такой подход не позволяет определить полную несущую способность сооружения, так как разрушение сооружений обычно происходит за пределами упругости, при появлении в элементах сооружений пластических деформаций. Более точную картину может дать упругопластический расчет, учитывающий появление пластических деформаций. На таком подходе основан метод предельного равновесия, который позволяет определить предельную несущую способность конструкций и сооружений. В основе метода лежит рассмотрение сооружения в состоянии, непосредственно предшествующем разрушению, в котором еще соблюдаются уравнения равновесия внешних и внутренних сил, достигших предельных значений.

Рассмотрим только физические предельные состояния равновесия, связанные с разрушением сооружений вследствие появления в элементах пластических деформаций, приводящих к превращению систем в изменяемые.

Расчеты за пределами упругости, связанные с определением предельных нагрузок, основываются на использовании упрощенных диаграмм деформирования, устанавливающих зависимость между напряжениями σ и продольными деформациями материала ε . Так, для достаточно пластичных материалов, например, строительных сталей, действительная диаграмма $\sigma - \varepsilon$ имеет вид, представленный на рис. 6.1,а. В начальной стадии нагружения соблюдается линейная зависимость между σ и ε , то есть действует закон Гука. При достижении напряжениями предела пропорциональности σ_{pr} линейная зависимость нарушается. На диаграмме $\sigma - \varepsilon$ появляется, так называемая, площадка текучести, соответствующая деформированию элемента при постоянном напряжении (материал течет). Соответствующее напряжение σ_y называется пределом текучести материала (R_{yn}). Площадка текучести переходит в кривую упрочнения. Максимальное напряжение σ_u , достигаемое в элементе, называется временным сопротивлением, или пределом прочности (R_{um}).

В методе расчета по предельным состояниям принимается упрощенная диаграмма $\sigma - \varepsilon$. Закон Гука соблюдается до тех пор, пока напряжения не достигнут предела текучести, после чего они остаются постоянными и равными пределу текучести, то есть площадка текучести принимается бесконечной (рис. 6.1,б). Таким образом, материал принимается идеально упругопластическим, а соответствующую диаграмму называют диаграммой Прандтля.

Дальнейшее упрощение практических расчетов по методу предельного равновесия связано с понятием диаграммы жесткопластического материала (рис. 7.1, в).

СОДЕРЖАНИЕ

Для материалов, у которых площадка текучести отсутствует, после достижения напряжениями определенного значения σ^* (рис. 7.1,г) изменяется характер зависимости $\sigma - \varepsilon$. Для таких материалов за предел текучести условно принимают напряжения, при которых относительные остаточные деформации составляют 0,2%.

При исследовании несущей способности конструкций и сооружений с использованием метода предельного равновесия следует различать предельное состояние сечения и предельное состояние сооружения в целом.

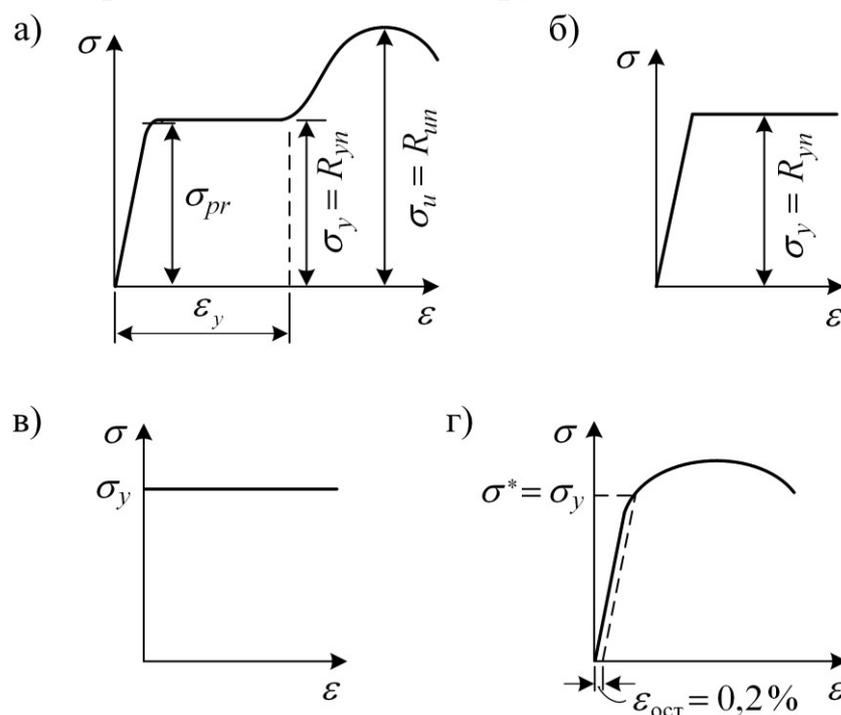


Рис. 7.1

Под предельным состоянием сечения будем понимать такое его состояние, при котором напряжения во всех его волокнах достигают предельных напряжений (предела текучести) и дальнейшее увеличение напряжений в этом сечении невозможно.

Под предельным состоянием сооружения будем понимать такое его состояние, при котором сооружение не может воспринимать дальнейший рост нагрузки и превращается в механизм, т. е. становится геометрически изменяемой системой. Нагрузку, которая соответствует предельному состоянию сооружений, называют предельной.

Рассмотрим предельные состояния сечений и сооружений подробнее.

7.2. Предельное состояние сжато-растянутого элемента по нормальному сечению

В элементах, работающих только на растяжение-сжатие (как, например, стержни ферм), напряжения по сечению распределяются равномерно (рис. 7.2,а,б,в), и с ростом нагрузки напряжения σ могут достигать предельной величины σ_y одновременно во всех волокнах сечения (рис. 7.2,г). Соответственно

предельное значение продольного усилия, которое может быть воспринято сечением, равно

$$N_{пред} = \sigma_y A. \quad (7.1)$$

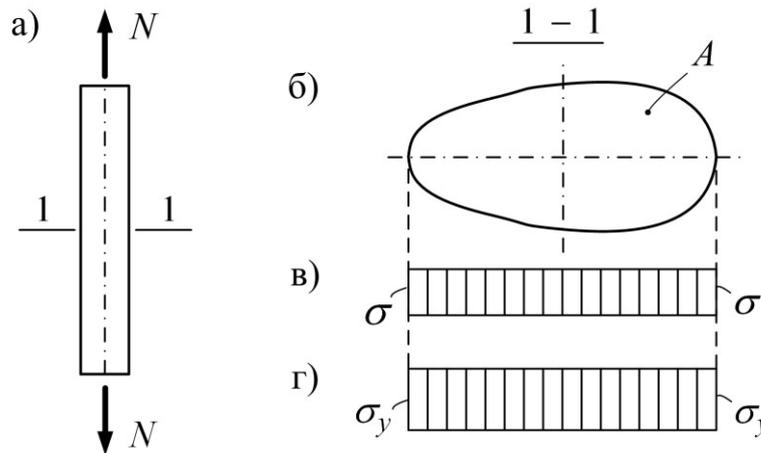


Рис. 7.2

7.3. Предельное состояние изгибаемого элемента по нормальному сечению

Несущая способность элементов, работающих на изгиб, определяется значением изгибающего момента, который может быть воспринят наиболее напряженным сечением. Напряжения по сечению, работающему в пределах упругости, как известно, определяются зависимостью (рис. 7.3,б)

$$\sigma = \frac{Mz}{J}.$$

С ростом нагрузки максимальные напряжения в крайних волокнах в определенный момент достигнут предела текучести. В общем случае пределы текучести материала при растяжении σ_y и сжатии σ_y^* могут быть разными. На рис. 7.3,в показана эпюра напряжений при достижении предела текучести напряжениями в растянутой зоне (при $\sigma_y < \sigma_y^*$). Это состояние будет соответствовать предельной нагрузке при расчете по допускаемым напряжениям. На этом заканчивается упругая работа сечения. Дальнейшее увеличение нагрузки будет приводить к распространению пластических деформаций вглубь сечения, к достижению пределов текучести σ_y и σ_y^* во внутренних волокнах сечения (рис. 7.3,г,д). При достижении нагрузкой определенного значения пластические деформации появятся во всех волокнах сечения, и эпюра напряжений для элемента примет вид, представленный на рис. 7.3,е. Это состояние и будет предельным для сечения элемента, работающего на изгиб, так как все резервы сечения исчерпаны, и дальнейшего роста нагрузки оно воспринимать уже не может. Ось, разделяющую растянутую и сжатую зоны сечения в предельном состоянии, называют нейтральной. Положение нейтральной оси не всегда совпадает с положением центральной оси сечения y (это будет соблюдаться только для сим-

СОДЕРЖАНИЕ

метричных относительно оси y сечений при $\sigma_y = \sigma_y^*$). Для определения положения нейтральной оси, считая $\sigma_y = \sigma_y^*$, составим сумму проекций сил на горизонтальную ось:

$$\sum X = 0; \quad R_p - R_{сж} = 0; \quad \sigma_y A_p - \sigma_y A_{сж} = 0.$$

Сократив полученное уравнение на σ_y , получим

$$A_p = A_{сж}. \quad (7.2)$$

Таким образом, положение нейтральной оси при $\sigma_y = \sigma_y^*$ определяется из условия равенства площадей сжатой и растянутой зон сечения.

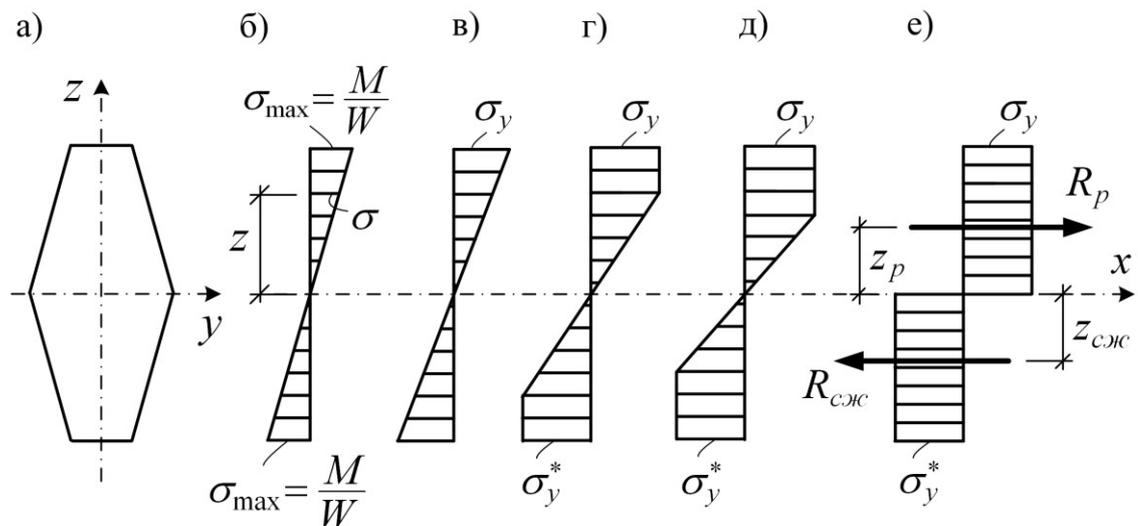


Рис. 17.3

Рис. 7.3

Предельный изгибающий момент, возникающий в сечении при $\sigma_y = \sigma_y^*$, найдем как сумму моментов внутренних сил относительно нейтральной оси (рис. 7.3,е)

$$\begin{aligned} M_{пред} &= R_p z_p + R_{сж} z_{сж} = \\ &= \sigma_y A_p z_p + \sigma_y A_{сж} z_{сж} = \sigma_y (A_p z_p + A_{сж} z_{сж}) \end{aligned}$$

В скобках записана сумма статических моментов сжатой и растянутой зон (площадей) сечения

$$S_p + S_{сж} = A_p z_p + A_{сж} z_{сж},$$

которую называют пластическим моментом сопротивления сечения и вводят обозначение

$$W_{пред} = S_p + S_{пл}. \quad (7.3)$$

С учетом (7.3) значение предельного момента в сечении равно

$$M_{пред} = \sigma_y W_{пл}. \quad (7.4)$$

СОДЕРЖАНИЕ

Для симметричных относительно оси y сечений статические моменты сжатой и растянутой зон сечения одинаковы ($S_p = S_{cae} = S_0$) и пластический момент сопротивления будет определяться выражением

$$W_{nl} = 2S_0.$$

Для прямоугольного сечения пластический момент сопротивления равен (рис. 7.4)

$$W_{nl} = 2S_0 = 2\left(\frac{bh}{2}\right)\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}.$$

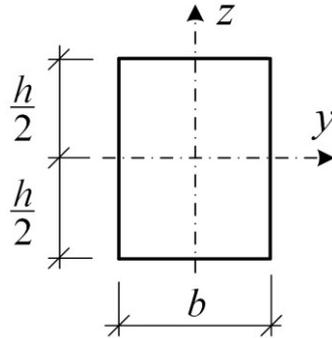


Рис. 7.4

Упругий момент сопротивления для прямоугольного сечения, как известно, равен $bh^2/6$. Следовательно, несущая способность элемента, имеющего прямоугольное сечение, при его работе в пластической стадии в 1,5 раза выше, чем при его работе в пределах упругости. Обозначив отношение пластического момента сопротивления W_{nl} к упругому W через γ , получим

$$W_{nl} = \gamma W. \quad (7.5)$$

Коэффициент γ для всех форм сечений больше единицы. Приведем его значение для ряда распространенных форм сечений: для прямоугольного сечения – $\gamma=1,5$; для сплошного круглого сечения – $\gamma=1,7$; для тонкостенного кольца – $\gamma=1,27$; для прокатных двутавров – $\gamma=1,15 \dots 1,17$.

Полученная для предельного момента формула (16.4) справедлива для чистого изгиба ($Q = N = 0$). В случае поперечного изгиба, при действии в сечении изгибающего момента и поперечной силы, эта формула несколько изменится и ее можно записать в виде

$$M_{пред} = \nu \sigma_y W_{nl},$$

где ν – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения элемента.

Следует отметить, что при расчете балок и рам поперечные силы не оказывают большого влияния на несущую способность сечения и поэтому ими можно пренебречь, приняв $\nu = 1$.

При разных значениях пределов σ_y и σ_y^* текучести материала элемента предельный момент в сечении элемента будет определяться выражением

$$M_{пред} = \sigma_y A_p z_p + \sigma_y^* A_{сж} z_{сж} = \sigma_y \left(S_p + \frac{\sigma_y^*}{\sigma_y} S_{сж} \right) = \sigma_y W_{пл}^*, \quad (7.6)$$

где

$$W_{пл}^* = S_p + \frac{\sigma_y^*}{\sigma_y} S_{сж}.$$

Положение нейтральной оси в этом случае можно найти из уравнения

$$\sigma_y A_p = \sigma_y^* A_{сж}.$$

Следует заметить, что для несимметричных относительно оси изгиба y сечений при неодинаковых пределах текучести материала на растяжение и сжатие предельные моменты, вычисленные по формуле (7.6), будут разными в зависимости от направления изгибающего момента. Для симметричных сечений эти предельные моменты одинаковы.

Состояние сечения при изгибе, при котором во всех его волокнах напряжения достигают предела текучести (рис. 7.3,е), называют пластическим шарниром. Пластический шарнир в отличие от обычного является односторонним и исчезает (закрывается) при снятии нагрузки или при перемене ее направления. Существенным и важным отличием пластического шарнира от обычного является то, что в этом сечении действует изгибающий момент, равный предельному моменту $M_{пред}$ (7.4). На кинематической схеме сооружения $M_{пред}$ изображается в виде двух сосредоточенных моментов, приложенных к элементам, примыкающим к шарниру. В дальнейшем, на расчетных схемах пластический шарнир в отличие от действительного шарнира, будем обозначать полностью затушеванным с двумя черточками со стороны растянутых волокон, которые показывают направление раскрытия шарнира (рис. 7.5).

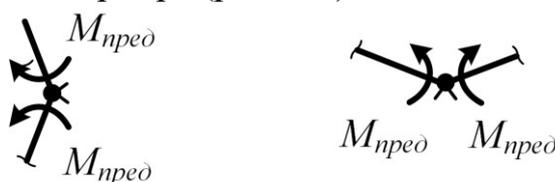


Рис. 7.5

Таким образом, предельный изгибающий момент, который может быть воспринят сечением, работающим на изгиб, определяется выражениями (6.4), (6.6), и условие прочности элемента по нормальному сечению имеет вид $M \leq M_{пред}$.

7.4. Предельное состояние систем и методы расчета

Под предельным состоянием системы будем понимать такое ее состояние, при достижении которого становится невозможной ее эксплуатация вследствие полной или частичной потери несущей способности. Это связано с превращением системы в механизм при образовании в ее элементах определенного количества пластических шарниров.

Статически определимые системы имеют минимально необходимое число связей для сохранения их неизменяемости. При выключении из работы хотя бы

СОДЕРЖАНИЕ

одной связи, эти системы становятся геометрически изменяемыми. А это значит, что для перехода таких систем в предельное состояние достаточно, чтобы хотя бы в одном сечении элемента возникло предельное состояние (текучесть при растяжении-сжатии элемента либо пластический шарнир при его изгибе).

Статически неопределимые системы имеют лишние связи. Для превращения их в механизм необходимо допустить, в общем случае, образование в них $L+1$ пластических шарниров.

Следует иметь в виду, что в некоторых частных случаях системы могут переходить в предельное состояние при появлении в них меньшего, чем $L+1$, числа пластических шарниров. В этом случае имеет место частичное разрушение системы (рис. 7.6). При выключении из работы большего числа связей (рис. 7.7) говорят об избыточном разрушении системы.

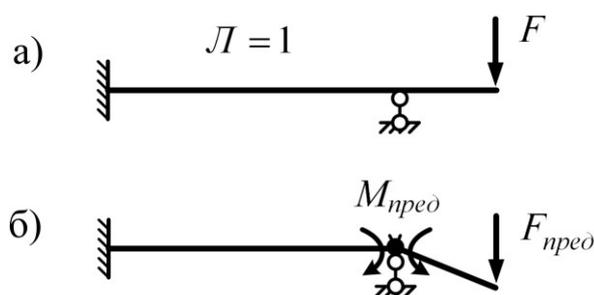


Рис. 7.6

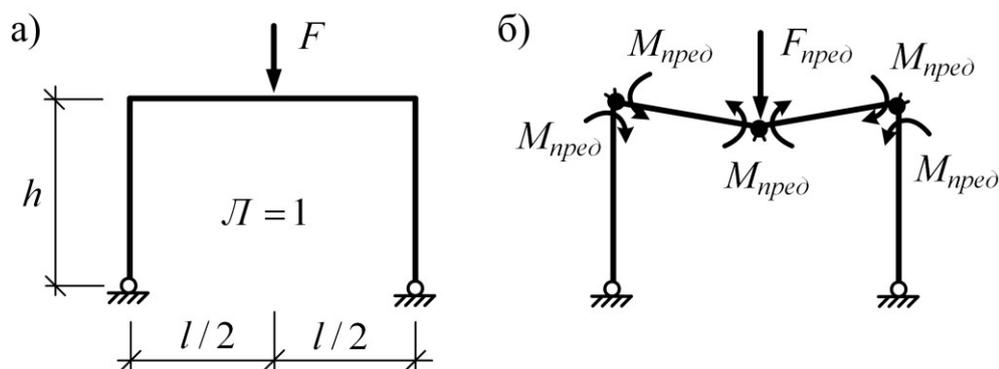


Рис. 7.7

Для выявления предельного состояния системы надо определить, где (в каких сечениях, элементах) образуются пластические шарниры (текучесть при растяжении-сжатии), которые превратят систему в механизм. Эта задача для статически неопределимых систем не является простой. Приходится учитывать наличие большого числа лишних связей и большого числа характерных сечений в системе.

В зависимости от поставленной задачи различают два вида расчетов на прочность: прямое проектирование (проектный расчет) и проверочный расчет. При решении задачи прямого проектирования по заданной нагрузке подбираются сечения элементов сооружения. При проверочном расчете определяется пре-

СОДЕРЖАНИЕ

дельная (разрушающая) нагрузка, которую может выдержать сооружение, то есть проверяется несущая способность сооружения.

Действующие на сооружение нагрузки могут быть взаимозависимыми и характеризоваться изменением одного параметра. Такую нагрузку называют однопараметрической или простой. В случае независимых (многопараметрических) нагрузок решение задачи существенно усложняется.

Расчет сооружений по методу предельного равновесия производится статическим и кинематическим методами, которые основываются на статической и кинематической теоремах. При этом предполагается, что материал сооружения является идеальным жесткопластическим.

Для заданной статически неопределимой системы при заданной нагрузке существует множество вариантов распределения усилий. В соответствии со статической теоремой истинным является то распределение усилий, которому соответствует наибольшая предельная нагрузка. Следуя статической теореме, для системы нужно рассмотреть все возможные схемы распределения усилий, и из условий равновесия найти предельную нагрузку для каждой схемы. Наибольшая из них принимается за предельную нагрузку для заданной системы. При этом должна быть уверенность, что рассмотрены все возможные распределения усилий. Статическая теорема дает нижнюю оценку для разрушающей нагрузки. Статический метод оказался удобным (простым) для ограниченного класса задач и поэтому не получил широкого практического применения.

Кинематическая теорема гласит, что из всех форм разрушения (механизмов разрушения), которые возможны для заданной статически неопределимой системы при заданной нагрузке, истинной является та, которой соответствует наименьшая предельная нагрузка. В общем случае, когда нельзя быть уверенным, что рассмотрены все возможные механизмы разрушения, кинематическая теорема дает верхнюю оценку предельной нагрузки.

Кинематический метод расчета сооружений базируется на принципе возможных перемещений.

Условия равновесия для кинематически возможных механизмов разрушения записываются в виде равенства нулю суммы работ внешних сил на соответствующих им возможных перемещениях и внутренних сил на возможных деформациях, вызванных этими перемещениями. Работа внешних нагрузок вычисляется произведением внешних сил $F_{i\text{пред}}$ на соответствующие перемещения точек приложения сил по направлениям их действия. К внутренним силам относятся предельные моменты $M_{\text{пред}}$ в пластических шарнирах изгибаемых систем и предельные силы $N_{\text{пред}}$ в элементах, работающих на растяжение-сжатие. Работа предельных моментов $M_{\text{пред}}$ равна произведению их на углы поворота торцевых сечений элементов, примыкающих к пластическим шарнирам, и будет отрицательной. Работа предельных сил $N_{\text{пред}}$ равна произведению их на удлинения элементов Δ_N , в которых возникает текучесть, и также будет отрицатель-

ной.

Уравнение возможных работ внешних и внутренних сил для механизмов разрушения записывается в виде

$$\sum F_{i\text{пред}} \Delta_i - \sum M_{j\text{пред}} \theta_j - \sum N_{s\text{пред}} \Delta_{Ns} = 0. \quad (7.7)$$

Исследуемые механизмы разрушения будут иметь одну степень свободы. Линейные Δ_i , Δ_{Ns} и угловые θ_j перемещения можно выразить через один общий параметр (Δ или θ). Из выражения (7.7) находится предельная нагрузка $F_{s\text{пред}}$ для рассматриваемого (s -го) механизма разрушения (при проверочном расчете) или параметр сечения для заданной нагрузки (при подборе сечений). Для изгибаемых систем, в которых нет элементов, работающих на растяжение-сжатие, в выражении (7.7) будет отсутствовать третье слагаемое. Аналогично для систем, работающих только на растяжение-сжатие, в (7.7) будет отсутствовать второе слагаемое.

Действительной форме разрушения, которая должна реализовываться в системе, будет соответствовать тот механизм, для которого $F_{\text{пред}}$ минимальна. За расчетную предельную нагрузку принимается наименьшая из всех $F_{s\text{пред}}$, полученных для n возможных механизмов разрушения

$$F_{\text{пред}} = \min (F_{1\text{пред}}, F_{2\text{пред}}, \dots). \quad (7.8)$$

7.5. Расчет статически определимых систем по несущей способности

Статически определимые системы, как уже указывалось, имеют минимально необходимое число связей для сохранения неизменяемости. Для перехода их в предельное состояние достаточно, чтобы в одном сечении возникло предельное состояние (текучесть при растяжении-сжатии, либо пластический шарнир при изгибе). Таким сечением будет то, в котором напряжения в процессе возрастания нагрузки в первую очередь достигнут наибольших значений.

С учетом этого можно принять следующий порядок расчета статически определимых систем по несущей способности:

1. Определяем усилия (строим их эпюры) в системе с использованием обычных способов расчета статически определимых систем.
2. Выявляем характерные сечения (элементы) в системе, в которых напряжения могут быть наибольшими.
3. Определяем напряжения в характерных сечениях.
4. Находим сечение, в котором возможно возникновение предельного состояния.
5. Используя статический или кинематический метод, определяем предельную нагрузку на сооружение, либо подбираем сечение по заданной нагрузке.

СОДЕРЖАНИЕ

Рассмотрим несколько примеров расчета статически определимых систем по предельному состоянию.

Пример 1. Определим предельную нагрузку для статически определимой шарнирно-стержневой системы, представленной на рис. 7.8, находящейся под действием двух сил F (простое нагружение). Считаем, что стержни выполнены из одного и того же. Площади сечений стержней приняты пропорциональными некоторому значению A и показаны для каждого из стержней на рисунке.

Усилия в стержнях определяем способом вырезания узлов (рис. 7.9):

$$N_1 = 1,333F, \quad N_2 = -1,667F; \quad N_3 = 2,3094F; \quad N_4 = -2,488F.$$

Напряжения в каждом из стержней будут равны:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{1,333F}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -1,667 \frac{F}{A};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{2,3094}{1,5A} = 1,54F; \quad \sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = -\frac{2,488F}{2A} = -1,244F.$$

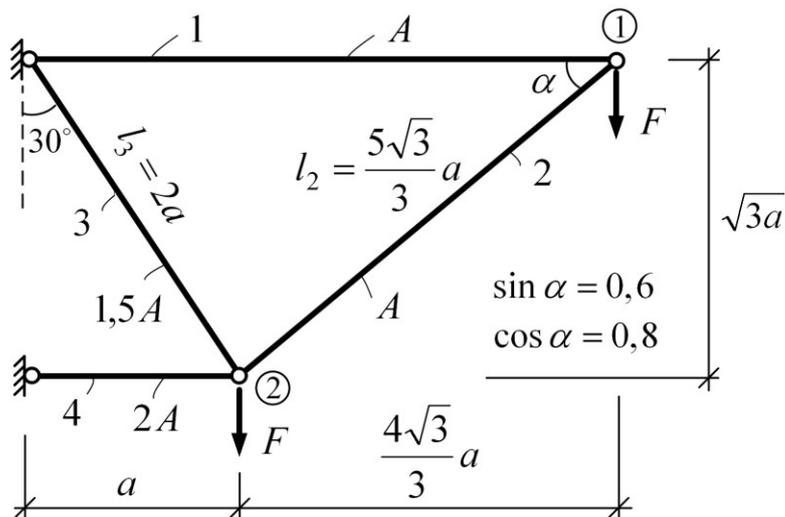


Рис. 7.8

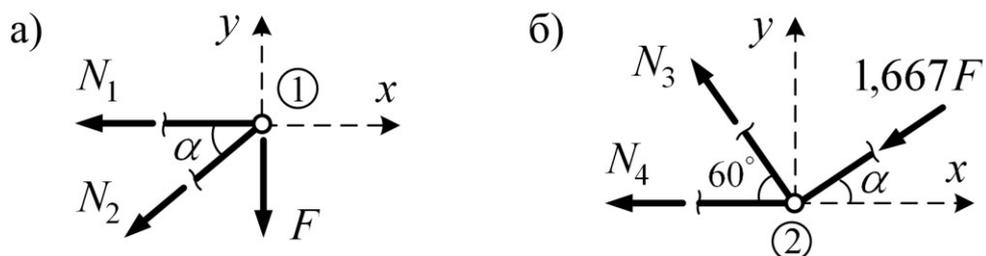


Рис. 7.9

Наибольшее по абсолютной величине напряжение возникает во втором стержне, и значит именно в этом стержне напряжения в первую очередь достигнут предела текучести σ_y , а продольная сила предельного значения. Продоль-

СОДЕРЖАНИЕ

ная сила во втором стержне равна $-1,667F$. Приравняв это выражение предельной продольной силе для второго стержня

$$-1,667F = N_{пред} = -\sigma_y A,$$

получим предельную нагрузку для рассматриваемой системы

$$F_{пред} = \frac{\sigma_y A}{1,667} = 0,6\sigma_y A.$$

Пример 2. Определим предельную нагрузку для простой статически определимой балки постоянной жесткости (рис. 7.10), загруженной тремя одинаковыми силами F . Предел текучести материала балки одинаков при растяжении и сжатии и равен σ_y . Форму и размеры поперечного сечения балки считаем известными, поэтому при известном пластическом моменте сопротивления сечения $W_{пл}$ можно найти предельный момент (6.4):

$$M_{пред} = \sigma_y W_{пл}.$$

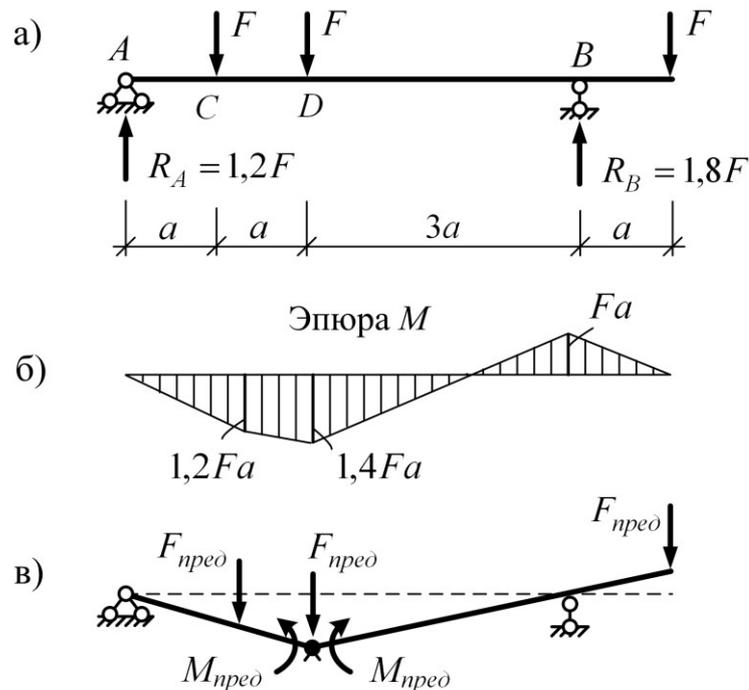


Рис. 7.10

Из эпюры изгибающих моментов (рис. 7.10,б) следует, что расчетным является сечение D . С ростом нагрузки (сил F) изгибающий момент в этом сечении станет равным предельному. В сечении появится пластический шарнир и система превратится в механизм (рис. 7.10,в). Приравняв момент в сечении D предельному

$$1,4Fa = M_{пред},$$

получим уравнение, из которого найдем предельную (разрушающую) нагрузку

для балки

$$F_{пред} = \frac{M_{пред}}{1,4a} = 0,714 \frac{M_{пред}}{a}.$$

При упругом расчете предельная нагрузка для этой балки равнялась бы

$$F_{пред}^{уп} = \frac{\sigma_y W}{1,4a}.$$

Учитывая, что $M_{пред} = \sigma_y W_{пл}$, а $W_{пл} = \gamma W$ (7.5), отношение предельных нагрузок будет равно

$$\frac{F_{пред}}{F_{пред}^{уп}} = \gamma,$$

то есть предельная нагрузка при пластическом расчете статически определимой изгибаемой системы в γ раз превышает соответствующую нагрузку упругого расчета.

7.6. Расчет статически неопределимых систем по несущей способности

Для перехода статически неопределимой системы в предельное состояние необходимо образование в ней $L+1$ пластического шарнира.

Рассмотрим сначала способ последовательных расчетов, основанный на статическом анализе состояния систем при увеличении нагрузок.

В способе последовательных расчетов последовательно выявляются сечения (одно за другим), в которых с возрастанием нагрузки возникают предельные состояния. Расчет продолжается до тех пор, пока не будет определено предельное состояние сооружения.

Последовательность действий при этом сводится к следующему.

1. Определяем число лишних связей L и требуемое число сечений $L+1$, которые должны перейти в предельные состояния, чтобы вся система перешла в предельное состояние. Не забываем и о том, что возможны частичное и избыточное разрушения системы.

2. Строим в системе эпюру внутренних сил (эпюру M – для изгибаемых систем, либо эпюру N – для систем, работающих на растяжение-сжатие), используя один из методов расчета статически неопределимых систем (метод сил, метод перемещений, смешанный метод и т. д.)

3. Определяем сечение, в котором напряжение (а при одинаковой жесткости всех элементов – усилие) будет максимальным, и которое в первую очередь перейдет в предельное состояние. В этом сечении усилие станет равным предельному для данного сечения – $N_{пред}$ (7.1), либо $M_{пред}$ (7.4), (7.6).

4. Так как система после этого может воспринимать дальнейший рост нагрузки, выполняем ее новый расчет. При этом учитываем, что число лишних связей уменьшилось на единицу и что сечение, в котором возникло предельное

СОДЕРЖАНИЕ

состояние, не воспринимает дальнейшего роста нагрузки, а воспринимает только ту ее часть, которая определяется предельной величиной усилия ($N_{пред}$, $M_{пред}$) в сечении. На основе этого расчета определяем сечение, в котором появится очередной пластический шарнир (текучесть).

5. Затем выполняется новый перерасчет системы, как описано в пункте 4. Такие расчеты повторяются до тех пор, пока окончательно не выявится предельное состояние системы в целом. При этом необходимо проверять возможности частичного и избыточного разрушений системы.

6. Записывается уравнение, характеризующее систему в предельном состоянии. Чаще всего в качестве такого уравнения используется равенство усилия в сечении, в котором предельное состояние возникло в последнюю очередь, предельному усилию в этом сечении. Решая уравнение, найдем либо предельную нагрузку, либо по заданной нагрузке сечения элементов.

Рассмотрим два примера расчета сооружений с использованием способа последовательных расчетов.

Пример 1. Определим предельную нагрузку для статически неопределимой фермы, представленной на рис. 7.11,а и имеющей одну лишнюю связь. Считаем, что все стержни фермы изготовлены из одного материала, характеризующегося величиной предела текучести, равной σ_y . Площади поперечных сечений стержней, выраженные через общий параметр A , показаны на рисунке.

Число стержней фермы, напряжения в которых должны достичь предела текучести σ_y для перехода фермы в целом в предельное состояние, равно двум:

$$L+1 = 1+1 = 2.$$

Соответственно, для определения предельного состояния фермы необходимо выполнить два этапа расчета.

Первый этап расчета выполним методом сил, основную систему которого получим, разрезая стержень 2–4 (рис. 7.1,б,в). Уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

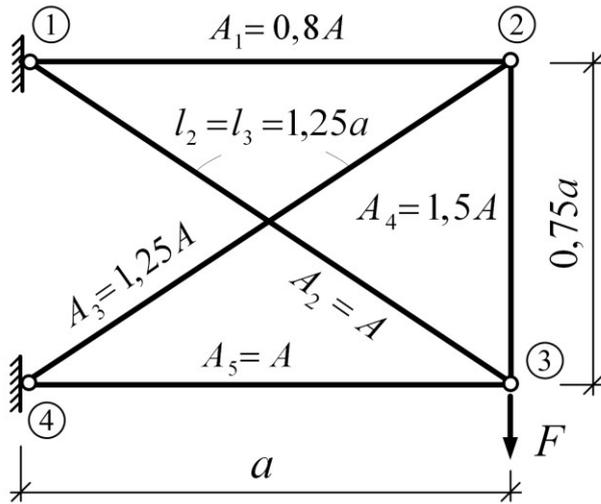
Усилия в основной системе определим, вырезая узлы 2 и 3. Значения продольных сил \bar{N}_1 от действия сил $X_1 = 1$ показаны на рис. 7.11,б. Значения продольных сил N_F от действия внешней нагрузки представлены на рис. 7.11,в. Коэффициент и свободный член уравнения метода сил будут равны:

$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^s \frac{\bar{N}_{1j}^2 l_j}{EA_j} = \frac{3,87a}{EA}; \quad \Delta_{1F} = \sum_{j=1}^s \frac{\bar{N}_{1j} N_{Fj} l_j}{EA_j} = \frac{3,15Fa}{EA}.$$

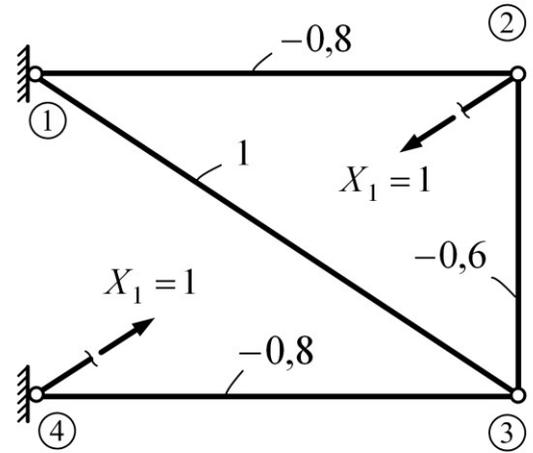
Решая уравнение, найдем неизвестное метода сил

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -0,814F.$$

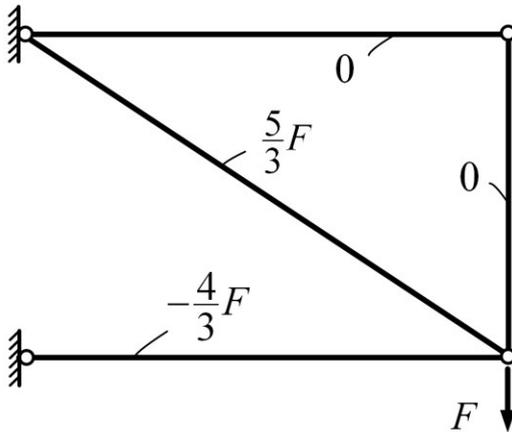
а) рассматриваемая система



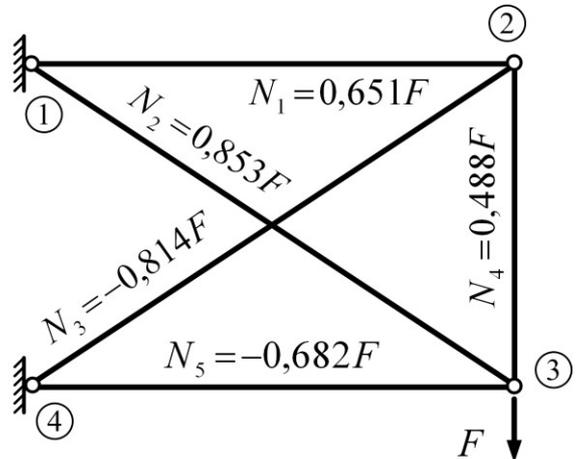
в) усилия \bar{N}_1



г) усилия N_F



д) усилия по результатам первого расчета



е) усилия по результатам второго расчета

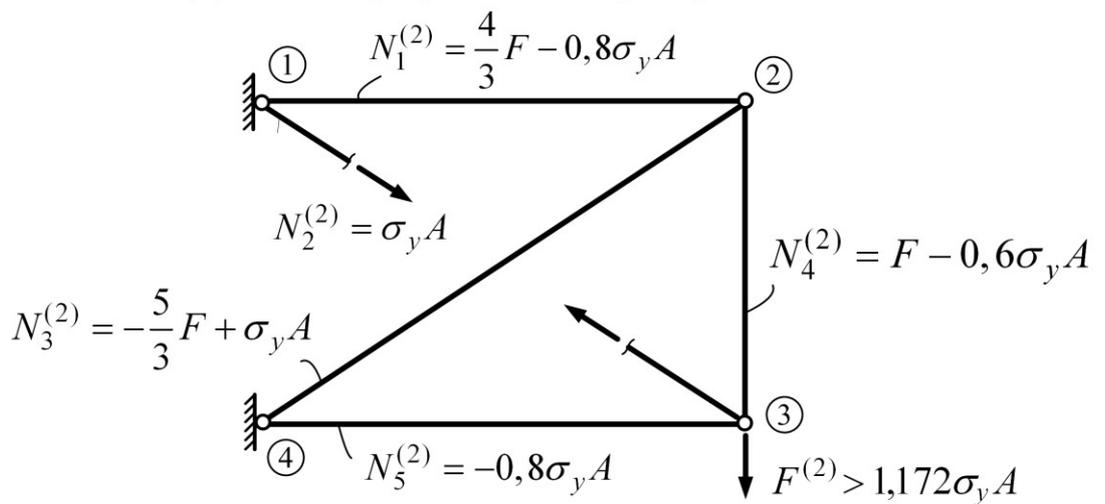


Рис. 7.11

СОДЕРЖАНИЕ

Продольные силы в рассматриваемой статически неопределимой ферме получим согласно выражению

$$N_j = \bar{N}_{1j} X_1 + N_{Fj},$$

их значения показаны на рис. 7.11, г.

Величины напряжений в стержнях системы равны:

$$\sigma_1 = \frac{0,651F}{0,8A} = 0,814 \frac{F}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{0,853F}{A} = 0,853 \frac{F}{A}; \quad \sigma_3 = \frac{-0,814F}{1,25A} = -0,651 \frac{F}{A};$$

$$\sigma_4 = \frac{0,488F}{1,5} = 0,325 \frac{F}{A}; \quad \sigma_5 = \frac{-0,682F}{A} = -0,682 \frac{F}{A}.$$

Наибольшим по абсолютной величине является напряжение во втором стержне (1–3). Значит с ростом нагрузки F именно в стержне 1–3 напряжения первыми достигнут предела текучести. Предельное усилие в нем будет равно

$$N_{2пред} = \sigma_y A_2 = \sigma_y A$$

Нагрузку, соответствующую этому состоянию системы найдем, приравняв выражение усилия во втором стержне предельному значению усилия:

$$0,853F = \sigma_y A; \quad F_{пред}^{(1)} = \frac{\sigma_y A}{0,853} = 1,172 \sigma_y A.$$

При дальнейшем росте нагрузки, когда

$$F > F_{пред}^{(1)} = 1,172 \sigma_y A, \quad (7.9)$$

усилие во втором стержне увеличиваться не будет. Число связей в системе уменьшилось на единицу и ферма превратилась в статически определимую. Предельное усилие во втором стержне будет равно $\sigma_y A$ (рис. 7.11, д).

Расчет полученной статически определимой фермы (второй этап расчета) выполним, последовательно вырезая узлы 3 и 2. Усилия в стержнях показаны на рис. 7.11, д.

Если приращение нагрузки по отношению к $F_{пред}^{(1)}$ (7.9) обозначить через $\Delta F^{(2)}$, то нагрузку для второго этапа расчета системы можно представить в виде

$$F^{(2)} = 1,172 \sigma_y A + \Delta F^{(2)}. \quad (7.10)$$

Подставив это значение силы (7.10) в выражения продольных сил в стержнях (рис. 7.11, е), получим:

$$N_1^{(2)} = 1,333 \Delta F^{(2)} + 0,763 \sigma_y A;$$

$$N_3^{(2)} = -(1,667 \Delta F^{(2)} + 0,953 \sigma_y A);$$

$$N_4^{(2)} = \Delta F^{(2)} + 0,572 \sigma_y A; \quad N_5^{(2)} = -0,8 \sigma_y A.$$

Напряжения в этих стержнях равны:

$$\sigma_1^{(2)} = \frac{N_1^{(2)}}{A_1} = 1,667 \frac{\Delta F^{(2)}}{A} + 0,953 \sigma_y;$$

$$\sigma_3^{(2)} = \frac{N_3^{(2)}}{A_3} = - \left(1,333 \frac{\Delta F^{(2)}}{A} + 0,763 \sigma_y \right);$$

$$\sigma_4^{(2)} = \frac{N_4^{(2)}}{A_1} = 0,667 \frac{\Delta F^{(2)}}{A} + 0,381 \sigma_y;$$

$$\sigma_5^{(2)} = \frac{N_5^{(2)}}{A_5} = \frac{-0,8 \sigma_y A}{A} = -0,8 \sigma_y.$$

Наибольшим (по абсолютной величине) является напряжение в первом стержне (в стержне 1–2), и с ростом нагрузки в нем появится текучесть.

Ферма (рис. 7.11,а) имела одну лишнюю связь, появление текучести в двух стержнях превращает ее в механизм. Предельное состояние фермы определено.

Полученное в процессе второго расчета (рис. 7.11, д) усилие в первом стержне

$$N_1^{(2)} = 1,333 F - 0,8 \sigma_y A,$$

Приравняем предельному усилию, которое может быть воспринято этим стержнем,

$$N_{1пред} = \sigma_y A_1 = 0,8 \sigma_y A.$$

Из уравнения

$$1,333 F_{пред} - 0,8 \sigma_y A = 0,8 \sigma_y A,$$

найдем предельную нагрузку для рассматриваемой фермы

$$F_{пред} = \frac{1,62 \sigma_y A}{1,333} = 1,2 \sigma_y A.$$

Пример 2. Рассмотрим статически неопределимую раму, представленную на рис. 7.12,а. Принимаем, что все стержни рамы имеют одинаковую жесткость и изготовлены из одного материала, предел текучести которого при сжатии-растяжении равен σ_y .

СОДЕРЖАНИЕ

Рама имеет одну лишнюю связь и для перехода ее в предельное состояние необходимо появление в ней двух пластических шарниров ($L+1 = 2$). Для определения положения сечений, в которых эти пластические шарниры появятся, выполним, как и в предыдущей задаче, два последовательных этапа расчета.

Первый этап расчета рамы как статически неопределимой системы выполним методом сил. Основная система представлена на рис. 7.12,б. Каноническое уравнение метода сил имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Строим в основной системе метода сил единичную (рис. 7.12,в) и грузовую (рис. 7.12,г) эпюры изгибающих моментов, и вычисляем единичное и грузовое перемещения:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} = \frac{5 h^3}{3 EJ}; \quad \Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_F dx}{EJ} = \frac{23F h^3}{48 EJ}.$$

Определяем основное неизвестное

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = 0,2875F.$$

Эпюру изгибающих моментов строим по формуле

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_F.$$

Окончательный вид эпюры представлен на рис 7.12, д.

Наибольший изгибающий момент имеет место в сечении *C*. В нем и появится первый пластический шарнир. Предельный момент в сечении будет равен

$$M_{пред} = \sigma_y W_{nl}.$$

Число лишних связей в раме уменьшилось на единицу, и рама стала статически определимой (рис. 7.12,е). Приравняв изгибающий момент в сечении *C* предельному

$$0,3563 F_{пред}^I h = \sigma_y W_{nl}.$$

найдем значение силы $F_{пред}^I$

$$F_{пред}^I = \frac{\sigma_y W_{nl}}{0,3563 h} = 2,8066 \frac{\sigma_y W_{nl}}{h}. \quad (7.11)$$

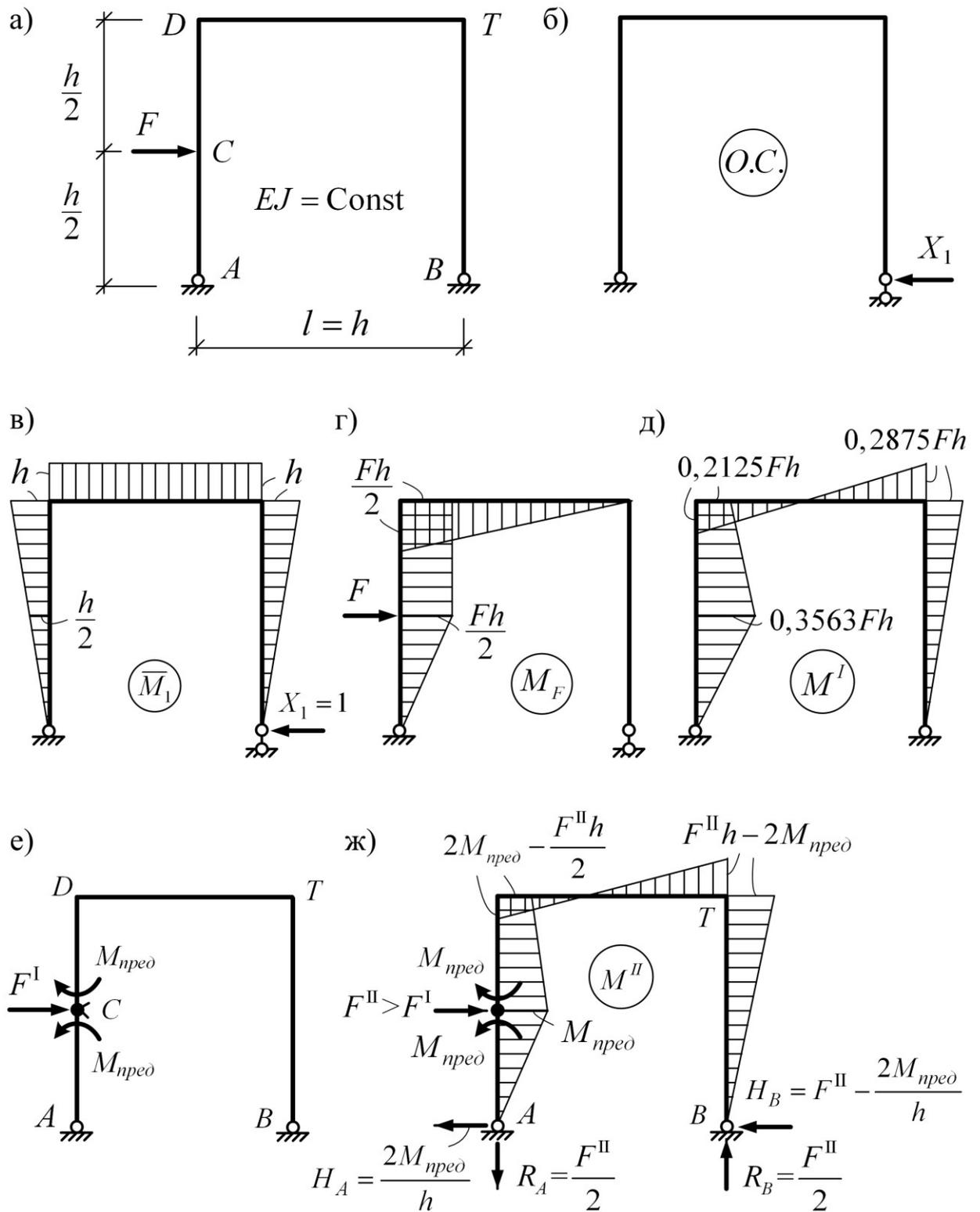


Рис. 7.12

Второй этап расчета выполним для полученной статически определимой рамы (рис. 6.12,е) при нагрузке

$$F^II > F^I_{пред} = 2,8066 \frac{\sigma_y W_{nl}}{h} = \frac{2,8066 M_{пред}}{h}. \quad (7.12)$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 7.12,ж.

СОДЕРЖАНИЕ

Для более удобного сравнения изгибающих моментов представим нагрузку на втором этапе расчета (7.12) в виде

$$F^{\text{II}} = \frac{2,8066M_{\text{пред}}}{h} + \Delta F^{(2)},$$

где $\Delta F^{(2)}$ – приращение нагрузки по отношению к $F_{\text{пред}}^{\text{I}}$ (7.11).

Подставив значение F^{II} в выражения моментов в узлах, получим:

$$M_D = 0,5967M_{\text{пред}} - \frac{\Delta F^{(2)}h}{2}; \quad M_T = 0,8066M_{\text{пред}} + \Delta F^{(2)}h.$$

Наибольшим (по модулю) является изгибающий момент в узле T . Поэтому именно в узле T появится второй пластический шарнир, с возникновением которого рама превратится в изменяемую систему, т. е. достигнет предельного состояния. Предельную нагрузку найдем, приравняв выражение изгибающего момента в узле T предельному моменту

$$F^{\text{II}}h - 2M_{\text{пред}} = M_{\text{пред}}.$$

Отсюда следует, что

$$F_{\text{пред}} = F^{\text{II}} = \frac{3M_{\text{пред}}}{h}.$$

При большом числе лишних связей способ последовательных расчетов является достаточно трудоемким методом расчета.

Рассмотрим кинематический метод.

Пластические шарниры в рамах и балках будут возникать в сечениях, где изгибающие моменты и напряжения могут достигать наибольших значений. Механизмы разрушения получим, предполагая, что в $L+1$ сечениях могут возникнуть пластические шарниры. Следует рассмотреть все возможные комбинации появления пластических шарниров в характерных сечениях.

Порядок расчета статически неопределимых изгибаемых систем кинематическим методом может быть следующим:

1. Определяется число лишних связей L , и выполняется предварительный анализ системы (при необходимости, строится эпюра изгибающих моментов), позволяющий установить возможное положение $L+1$ пластических шарниров.

2. Составляются возможные варианты превращения системы в механизмы. При этом следует иметь в виду, что потеря несущей способности системы может произойти и при образовании меньшего количества пластических шарниров, чем это необходимо для превращения системы в механизм в целом (частичное разрушение), а также при образовании большего количества шарниров (избыточное разрушение).

3. Для каждого из возможных механизмов составляется уравнения равен-

СОДЕРЖАНИЕ

ства работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях системы (7.7).

4. Решая полученные уравнения, для каждого из возможных механизмов разрушения определяют значение предельной нагрузки.

5. За расчетную предельную нагрузку принимается наименьшая из всех предельных нагрузок, полученных в пункте 4 (7.8).

Рассмотрим применение кинематического метода на примере расчета рамы, приведенной на рис. 7.13. Рама один раз статически неопределима. Для ее перехода в предельное состояние необходимо образование, как минимум, двух пластических шарниров. Характерными сечениями, в которых изгибающие моменты могут достигать экстремальных значений и в которых соответственно могут возникнуть пластические шарниры, являются сечения C , D и T .

Составим возможные комбинации появления пластических шарниров в этих сечениях, которые будут превращать раму в механизмы:

- I) в сечениях C и D ;
- II) в сечениях D и T ;
- III) в сечениях C и T .

Рассмотрим каждый из трех вариантов.

Первый вариант. Предполагаем, что пластические шарниры возникнут в сечениях C и D . Механизм разрушения показан на рис. 7.13,б. Такой механизм разрушения, когда три шарнира лежат на одной прямой (один из них действительный), называют балочным. Обозначим углы поворота стержней AC и CD через θ . Учитывая, что рассматриваются малые перемещения и соответственно малые углы, для которых тангенсы углов можно считать равными самим углам ($\operatorname{tg} \theta \approx \theta$), перемещение точки C получим в виде

$$\Delta_C = \frac{h}{2} \operatorname{tg} \theta \approx \frac{h}{2} \theta.$$

Уравнение суммы работ внешних и внутренних сил (17.8) принимает вид

$$F_{\text{пред}}^I \Delta_C - 3M_{\text{пред}} \theta = 0 \quad \text{или} \quad F_{\text{пред}}^I \frac{h\theta}{2} - 3M_{\text{пред}} \theta = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$F_{\text{пред}}^I = \frac{6M_{\text{пред}}}{h}.$$

Второй вариант. Предполагаем, что пластические шарниры возникнут в узловых сечениях D и T (или с одной из сторон от этих узловых точек, что тоже самое). Механизм разрушения будет иметь вид, представленный на рис. 7.13,в. Такой механизм разрушения называют механизмом бокового смещения. Обозначив угол поворота стержня ACD через θ , получим перемещения характерных точек

$$\Delta_C = \frac{h\theta}{2}; \quad \Delta_D = h\theta; \quad \Delta_T = \Delta_D = h\theta.$$

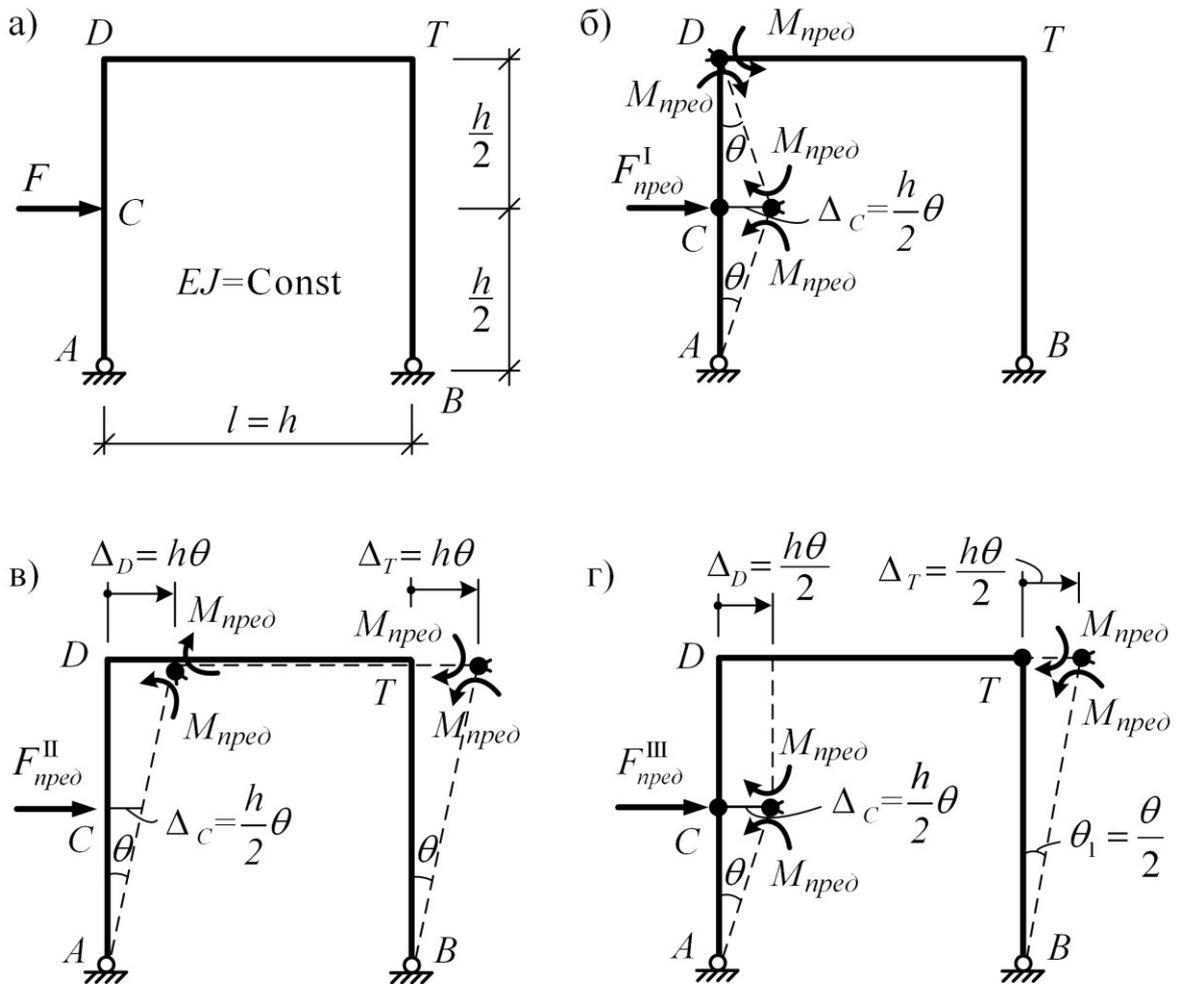


Рис. 7.13

Уравнение суммы работ внешних и внутренних сил для рассматриваемого механизма разрушения на возможных перемещениях записывается в виде

$$F_{пред}^{II} \Delta_C - M_{пред} \theta - M_{пред} \theta = 0 \quad \text{или} \quad F_{пред}^{II} \frac{h\theta}{2} - 2M_{пред} \theta = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$F_{пред}^{II} = \frac{4M_{пред}}{h}.$$

Третий вариант. Пластические шарниры возникают в сечениях C и T . Механизм разрушения будет иметь вид, представленный на рис. 7.13,г. Этот механизм также можно называть механизмом бокового смещения. Обозначим угол поворота стержня AC через θ . Тогда смещение точки C будет равно $h\theta/2$. Таковыми же будут смещения точек D и T . Угол поворота θ_1 стержня BT равен $\theta/2$.

Уравнение суммы работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях механизма разрушения рамы запишется в виде

$$F_{пред}^{III} \Delta_C - M_{пред} \theta - M_{пред} \theta_1 = 0$$

или

$$F_{пред}^{III} \frac{h\theta}{2} - M_{пред} \theta - M_{пред} \frac{\theta}{2} = 0.$$

После сокращения всех слагаемых уравнения на θ , найдем

$$F_{пред}^{III} = \frac{3M_{пред}}{h}.$$

За расчетную предельную нагрузку для рамы принимается (7.12) наименьшая из предельных нагрузок, полученных для всех возможных механизмов ее разрушения

$$\begin{aligned} F_{пред} &= \min (F_{пред}^I, F_{пред}^{II}, F_{пред}^{III}) = \\ &= \min \left(\frac{6M_{пред}}{h}, \frac{4M_{пред}}{h}, \frac{3M_{пред}}{h} \right) = \frac{3M_{пред}}{h}. \end{aligned}$$

Таким образом, действительным для рассматриваемой рамы является третий механизм разрушения.

Анализ механизмов разрушения сложных сооружений показывает, что в них часто могут реализовываться механизмы с меньшим, чем $L+1$, числом пластических шарниров, представляющие частичное разрушение сооружений. К таким случаям могут приводить появление на одном или нескольких участках системы отдельных балочных механизмов (рис. 7.14,а), либо их комбинаций (рис. 7.14,б,в), механизмов бокового смещения (рис. 7.14,г,д) и их комбинаций (рис. 7.14,е), или комбинации балочных механизмов и механизмов бокового смещения (рис. 7.14,ж).

За расчетную предельную нагрузку для рамы принимается (7.12) наименьшая из предельных нагрузок, полученных для всех возможных механизмов ее разрушения

$$\begin{aligned} F_{пред} &= \min (F_{пред}^I, F_{пред}^{II}, F_{пред}^{III}) = \\ &= \min \left(\frac{6M_{пред}}{h}, \frac{4M_{пред}}{h}, \frac{3M_{пред}}{h} \right) = \frac{3M_{пред}}{h}. \end{aligned}$$

Таким образом, действительным для рассматриваемой рамы является третий механизм разрушения.

Анализ механизмов разрушения сложных сооружений показывает, что в них часто могут реализовываться механизмы с меньшим, чем $L+1$, числом пластических шарниров, представляющие частичное разрушение сооружений. К таким случаям могут приводить появление на одном или нескольких участках системы отдельных балочных механизмов (рис. 7.14,а), либо их комбинаций (рис. 7.14,б,в), механизмов бокового смещения (рис. 7.14,г,д) и их комбинаций (рис. 7.14,е), или комбинации балочных механизмов и механизмов бокового смещения (рис. 7.14,ж).

СОДЕРЖАНИЕ

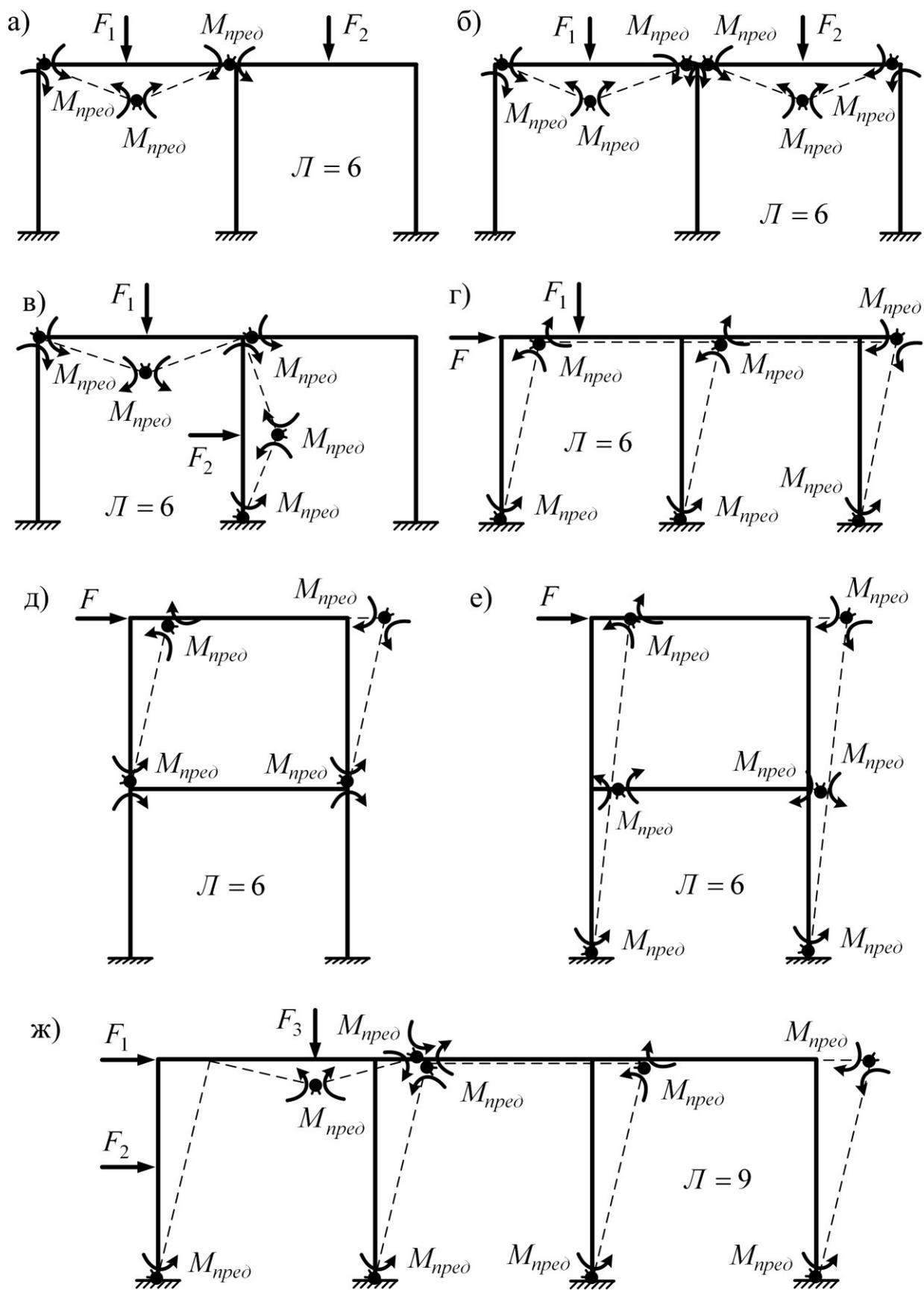


Рис. 7.14

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Пример 1. Требуется выполнить кинематический анализ системы, представленной на рис. 2.18,а.

Определяем степень свободы системы по формулам (2.1) (рис. 2.18,б) и (2.2) (рис. 2.18,в):

$$W = -(3K - Ш) = -(3 \cdot 3 - 9) = 0;$$

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Геометрический анализ структуры системы:

1) диск D_1 соединяется с остальной системой двумя шарнирами A и K (рис. 2.18, в); в каждом из шарниров возникает одна реактивная сила, и таким образом, диск находится под действием двух сил; известно, что в равновесии такой диск может находиться только в том случае, если указанные силы будут направлены по прямой, соединяющей точки приложения сил, навстречу друг другу (друг от друга); то есть диск D_1 работает по существу как стержень AK ;

2) аналогично будет работать и диск D_4 (как стержень UT) (рис. 2.18, в);

3) получается, что диск D_2 соединяется с диском земли двумя стержнями – стержнем AK и вертикальным стержнем шарнирно подвижной опоры B , которые пересекаются в точке S (рис. 2.18, в); такое соединение этих дисков может быть заменено их соединением фиктивным шарниром в точке S (рис. 2.18, г);

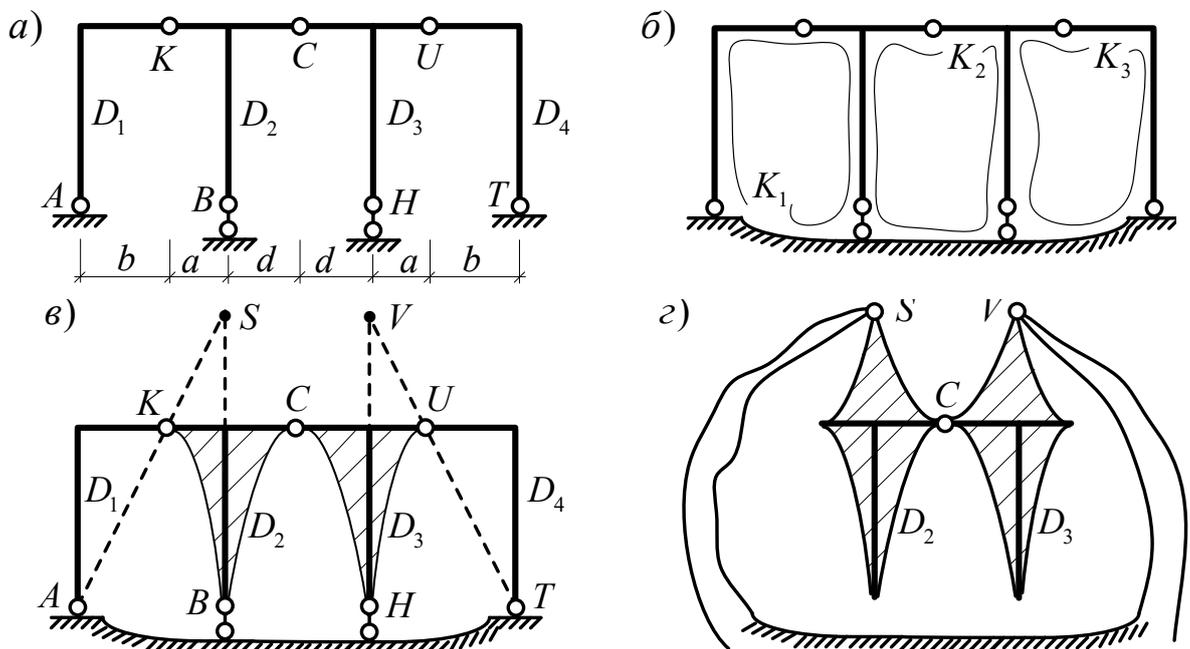


Рис. 2.18

4) аналогично диск D_3 соединяется с диском земли двумя стержнями – стержнем UT и вертикальным стержнем шарнирно подвижной опоры H , кото-

СОДЕРЖАНИЕ

рые пересекаются в точке V (рис. 2.18,в), и такое соединение этих дисков можно заменить их соединением фиктивным шарниром в точке V (рис. 2.18,з);

5) в результате получаем, что три диска – D_2 , D_3 и диск земли соединены друг с другом последовательно тремя шарнирами S , V и C , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости).

Вывод: рассматриваемая система статически определима и неизменяема.

Пример 3. Исследуем систему, представленную на рис. 2.20,а.

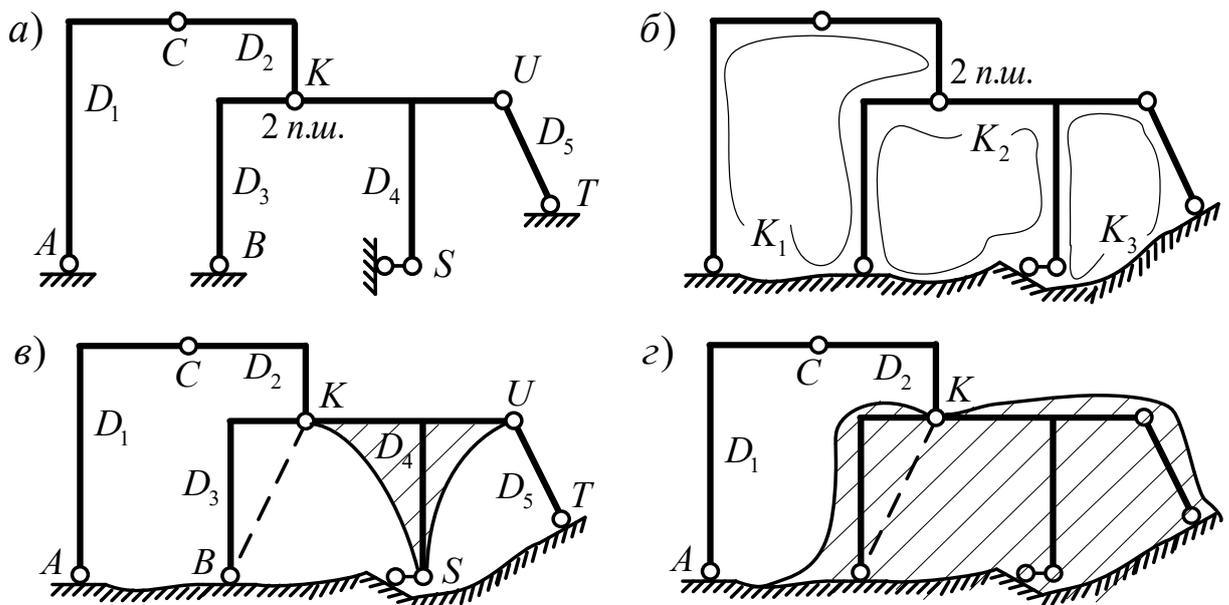


Рис. 2.20

Определим степень свободы системы по формулам (2.1) (рис. 2.20,а) и (2.2) (рис. 2.20,б):

$$W = -(3K - III) = -(3 \cdot 3 - 9) = 0; \quad W = 3D - 2III - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 7 = 0.$$

Геометрический анализ структуры системы:

1) диск D_3 (рис. 2.20,в) соединяется с остальной системой двумя шарнирами B и K ; в каждом из шарниров возникает по реактивной силе, и таким образом, диск находится под действием двух сил; в равновесии диск будет находиться только в том случае, если эти силы будут направлены по прямой BK навстречу друг другу (друг от друга), а в этом случае диск D_3 будет работать как стержень;

2) диск D_4 соединяется с диском земли тремя стержнями – BK , UT и горизонтальным опорным стержнем в точке S , которые не параллельны друг другу и не пересекаются в одной точке, образуя вместе с основанием (с землей) неизменяемую систему, то есть диск (третий признак неизменяемости) (рис. 2.20,з);

3) последний диск и диски D_1 и D_2 соединены последовательно друг с другом тремя шарнирами A , C и K , не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемую систему (первый признак неизменяемости) (рис. 2.20,з).

Вывод: рассматриваемая система статически определима и геометрически неизменяема.

Пример 4. Исследуем систему, представленную на рис. 2.21, а. Определим степень свободы системы по формулам (2.3) и (2.2):

$$W = 2U - C - C_0 = 2 \cdot 8 - 12 - 4 = 0. \quad W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 16 - 4 = 0.$$

Геометрический анализ структуры системы:

1) рассматриваемая ферма в большей части имеет треугольную структуру, представляющую собой группы трех стержней (трех дисков), соединенных последовательно друг с другом тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуя неизменяемые блоки (согласно первому признаку неизменяемости); так, стержни 2–В, В–5 и 2–5 соединяются шарнирами В, 2 и 5, образуя диск; этот диск вместе со стержнями 2–3 и 3–5 соединяется шарнирами 2, 5 и 3, образуя вместе новый диск, который в свою очередь образует неизменяемую систему (диск D_1) вместе со стержнями 3–С и 5–С (рис. 2.21, б), которые соединяются шарнирами 3, 5 и С; аналогично по принципу треугольника соединены друг с другом стержни А–1, А–4 и 1–4 шарнирами А, 1 и 4, образуя диск D_2 ;

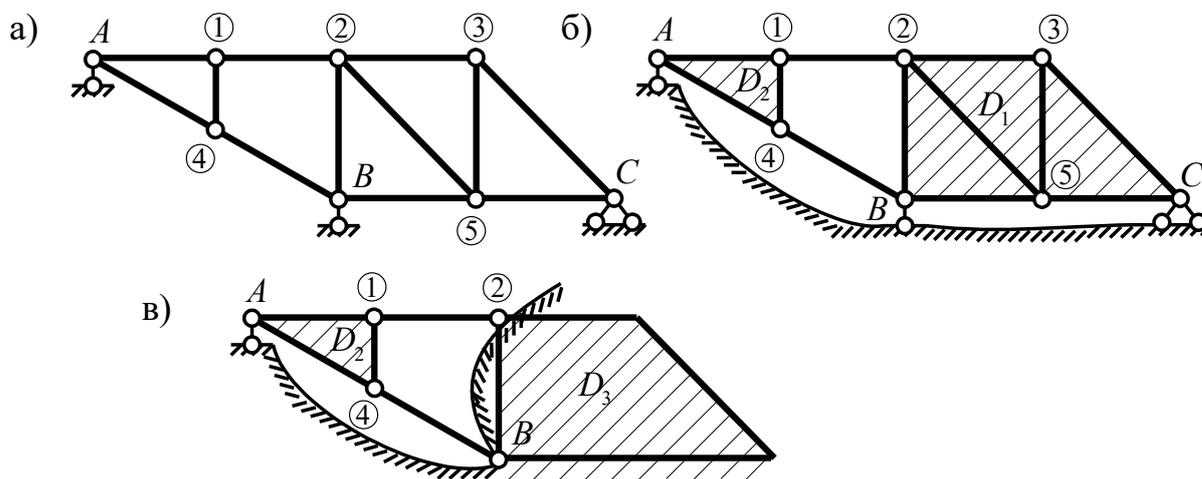


Рис. 2.21

2) диск D_1 соединяется с землей тремя опорными стержнями, не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке, образуя с основанием согласно третьему признаку неизменяемости диск D_3 (рис. 2.21, б, в);

3) теперь диск D_2 и диск D_3 соединены друг с другом тремя стержнями 1–2, 4–В и вертикальным опорным стержнем в узле А, которые пересекаются в одной точке – в узле А, а это значит, что система мгновенно изменяема (третий признак мгновенной изменяемости) (рис. 2.21, в).

Вывод: рассматриваемая система мгновенно изменяема и не может применяться в строительных сооружениях.

2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

2.1. Расчет простых рам

Выполним расчет простой рамы, показанной на рис. 3.19.а.

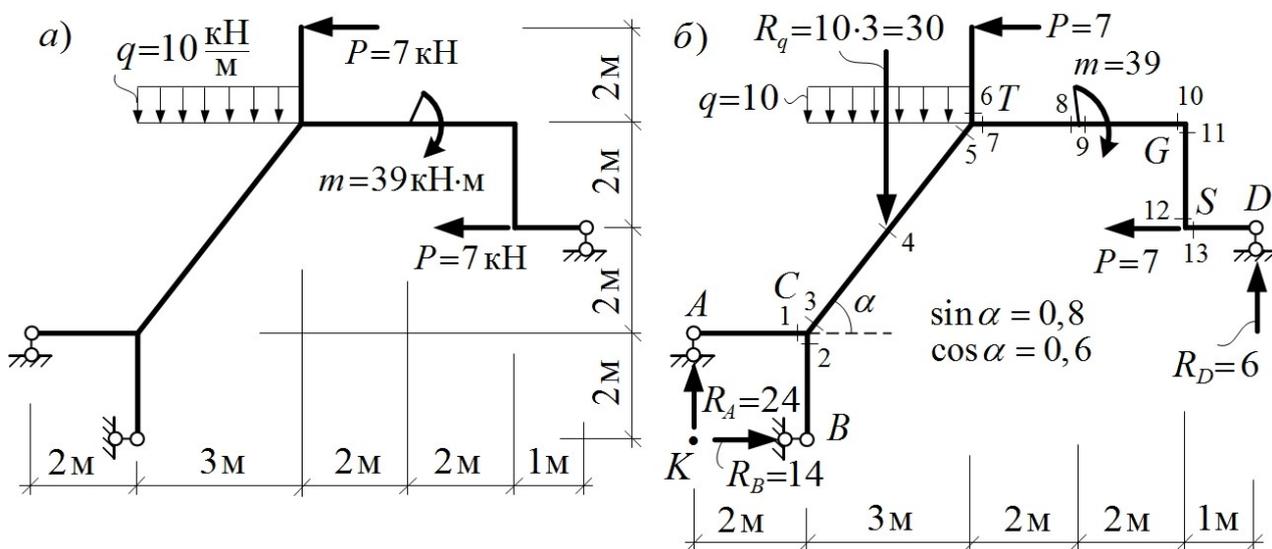


Рис. 3.19

С точки зрения кинематического анализа рама представляет собой один диск (ломано-разветвленный стержень), соединенный с основанием (с землей) тремя стержнями (шарнирно подвижными опорами), не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке.

Определяем опорные реакции (рис. 3.19,б):

$$\Sigma M_K = 0; \quad (10 \cdot 3) \cdot 3,5 - 7 \cdot 8 + 39 - 7 \cdot 4 - R_D \cdot 10 = 0; \quad R_D = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0; \quad R_A - 30 + 6 = 0; \quad R_A = 24 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad R_B - 7 - 7 = 0 \quad R_B = 14 \text{ кН}.$$

Проверка правильности вычисления опорных реакций:

$$\Sigma M_T = 0; \quad 24 \cdot 5 - 14 \cdot 6 - (10 \cdot 3) \cdot 1,5 - 7 \cdot 2 + 39 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = 0; \quad 159 - 159 = 0.$$

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на восемь участков (рис. 3.19,б), на которых выделим 13 сечений, определяющих вид эпюр усилий (на участках опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполнить даже устно и в которых изгибающие моменты равны нулю – это сечения у шарниров и на конце консоли). При этом учитываем, что эпюра изгибающих моментов на участке действия равномерно распределенной нагрузки изменяется параболической зависимостью и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – 3, 4, 5; на остальных участках рамы эпюра M будет изменяться по линейным зависимостям и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в двух крайних точках этих участков.

СОДЕРЖАНИЕ

Вычисление значений изгибающих моментов и определение растянутых волокон в расчетных сечениях (рис. 3.19,б):

$$M_1^{лев} = 24 \cdot 2 = +48 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2^{нижн} = -14 \cdot 2 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{нижн} = 24 \cdot 2 - 14 \cdot 2 = +20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4^{нижн} = 24 \cdot 3,5 - 14 \cdot 4 - (10 \cdot 1,5) \cdot 0,75 = +16,75 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5^{нижн} = 24 \cdot 5 - 14 \cdot 6 - (10 \cdot 3) \cdot 1,5 = -9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6^{верхн} = -7 \cdot 2 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_7^{прав} = +39 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = +23 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_8^{прав} = 39 + 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = +35 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_9^{прав} = 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{10}^{прав} = 7 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{11}^{нижн} = 7 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{12}^{нижн} = 7 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{13}^{прав} = -6 \cdot 1 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенная по результатам расчетов, представлена на рис. 3.21,а.

Аналогично рассуждаем и при построении эпюр поперечных и продольных сил.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюры поперечных и продольных сил будут (могут) изменяться линейно и для построения эпюр Q и N на этом участке необходимо вычислить значения этих усилий в двух сечениях – 3 и 5 (рис. 3.20):

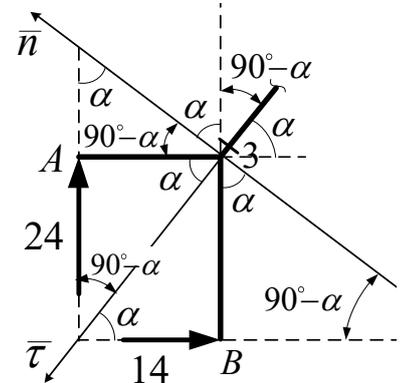


Рис. 3.20

$$Q_3^{нижн} = 24 \cdot \cos \alpha - 14 \cdot \sin \alpha = 24 \cdot 0,6 - 14 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ кН};$$

$$Q_5^{нижн} = 24 \cos \alpha - 14 \sin \alpha - (10 \cdot 3) \cos \alpha = 24 \cdot 0,6 - 14 \cdot 0,8 - (10 \cdot 3) 0,6 = -14,8 \text{ кН};$$

$$N_3^{нижн} = -24 \cdot \sin \alpha - 14 \cdot \cos \alpha = -24 \cdot 0,8 - 14 \cdot 0,6 = -27,6 \text{ кН};$$

$$N_5^{нижн} = -24 \cdot \sin \alpha - 14 \cdot \cos \alpha + (10 \cdot 3) \sin \alpha = 24 \cdot 0,6 - 14 \cdot 0,8 + (10 \cdot 3) 0,8 = -3,6 \text{ кН}.$$

На остальных участках поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения эпюр Q и N на этих участках достаточно вычислить значения этих усилий в одном, произвольном для каждого участка сечении:

$$Q_1^{лев} = 24 \text{ кН}; \quad Q_2^{нижн} = -14 \text{ кН}; \quad Q_6^{верхн} = -7 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = -6 \text{ кН};$$

$$Q_{11}^{верхн} = Q_{12} = +7 \text{ кН}; \quad Q_{13}^{прав} = -6 \text{ кН}; \quad N_1^{лев} = 0; \quad N_2^{нижн} = 0; \quad N_6^{верхн} = 0;$$

$$N_7^{прав} = N_8 = N_9 = N_{10} = -7 \text{ кН}; \quad N_{11}^{верхн} = N_{12} = -6 \text{ кН}; \quad N_{13}^{прав} = 0.$$

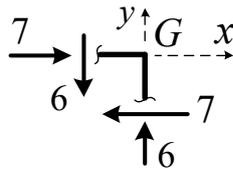
СОДЕРЖАНИЕ

$$\Sigma Y = 0; 3,6 \cdot 0,8 - 14,8 \cdot 0,6 + 6 = 0; 8,88 - 8,88 = 0;$$

Узел G:

$$\Sigma X = 0 \quad 7 - 7 = 0;$$

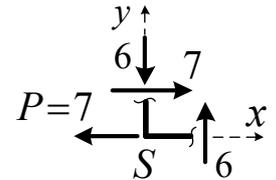
$$\Sigma Y = 0; \quad -6 + 6 = 0;$$



Узел S:

$$\Sigma X = 0; \quad -7 + 7 = 0;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad -6 + 6 = 0.$$



Выполним еще расчет простой рамы, показанной на рис. 3.22,а, которая также представляет собой один диск, соединенный с землей тремя стержнями (шарнирно подвижными опорами), не параллельными друг другу и не пересекающимися в одной точке.

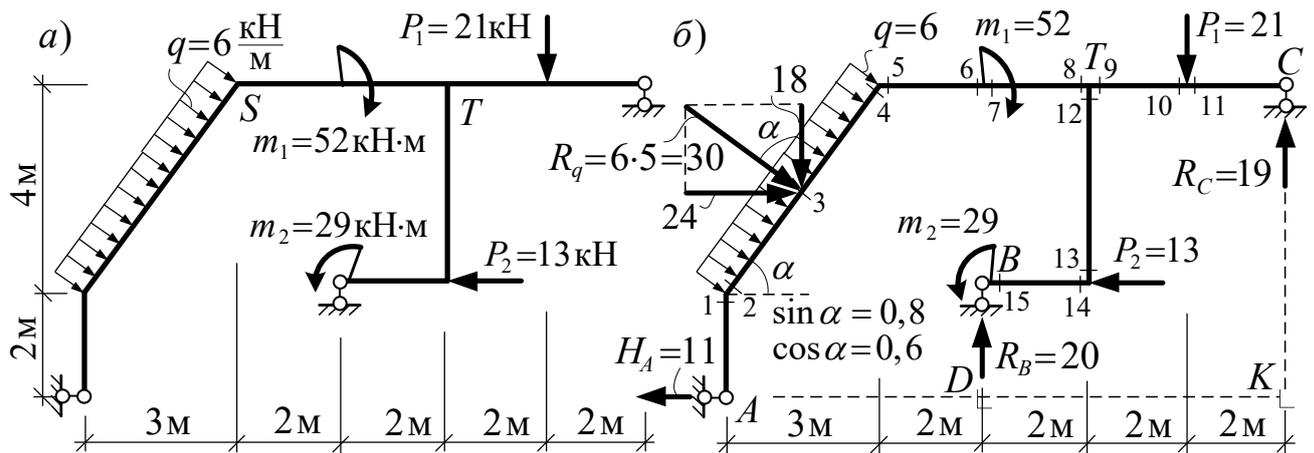


Рис. 3.22

Отметим, что равномерно распределенную нагрузку, действующую на наклонный стержень перпендикулярно к нему, можно учитывать непосредственно, что удобно при вычислении усилий в сечениях, расположенных на этом наклонном стержне (см. далее расчет усилий M , Q и N в сечениях 2, 3 и 4), либо через равнодействующую этой распределенной нагрузки $R_q = 6 \cdot 5 = 30 \text{ кН}$, которую при этом можно разложить на горизонтальную и вертикальную составляющие (рис. 3.22,б), что часто очень удобно, в том числе при определении опорных реакций.

Определяем опорные реакции (рис. 3.22,б):

$$\Sigma M_D = 0; \quad 24 \cdot 4 - 18 \cdot 3,5 + 52 - 29 - 13 \cdot 2 + 21 \cdot 4 - R_C \cdot 6 = 0; \quad R_C = 19 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_K = 0; \quad 24 \cdot 4 - 18 \cdot 9,5 + 52 - 29 - 13 \cdot 2 - 21 \cdot 2 + R_B \cdot 6 = 0; \quad R_B = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma X = 0; \quad -H_A + 24 - 13 = 0 \quad H_A = 11 \text{ кН};$$

Проверка правильности вычисления опорных реакций:

$$\Sigma M_T = 0; \quad 11 \cdot 6 - 24 \cdot 2 - 18 \cdot 5,5 + 52 - 29 + 20 \cdot 2 + 13 \cdot 4 + 21 \cdot 2 - 19 \cdot 4 = 0; \quad 223 - 223 = 0.$$

Для построения эпюр M , Q и N рассматриваемую раму следует разбить на восемь участков (рис. 3.22,б), на которых выделим 15 сечений, определяющих вид эпюр усилий (на участках опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполняется даже устно и в которых изгибающие моменты равны нулю – сечения у шарниров). При этом учитываем, что эпюра изгибающих моментов на участке действия равномерно распределенной нагрузки изменяется по параболи-

СОДЕРЖАНИЕ

ческой зависимости и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – 2, 3, 4; на остальных участках рамы эпюра M изменяется по линейным зависимостям и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в двух крайних точках этих участков.

Вычисление значений изгибающих моментов и определение растянутых волокон в расчетных сечениях:

$$\begin{aligned}
 M_1^{нижн} &= +11 \cdot 2 = -22 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{1} & \text{2} \\
 M_2^{нижн} &= 11 \cdot 2 = +22 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{3} & \\
 M_3^{нижн} &= 11 \cdot 4 - (6 \cdot 2,5) 1,25 = +25,25 \text{ кН}\cdot\text{м}; & & \\
 M_4^{нижн} &= 11 \cdot 6 - (6 \cdot 5) 2,5 = -9 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{4} & \\
 M_5^{лев} &= 11 \cdot 6 - (6 \cdot 5) 2,5 = -9 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{5} & \\
 M_6^{лев} &= 11 \cdot 6 - 24 \cdot 2 - 18 \cdot 3,5 = -45 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{6} & \\
 M_7^{лев} &= 11 \cdot 6 - 24 \cdot 2 - 18 \cdot 3,5 + 52 = +7 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{7} & \\
 M_8^{лев} &= 11 \cdot 6 - 24 \cdot 2 - 18 \cdot 5,5 + 52 = -29 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{8} & \\
 M_9^{прав} &= 21 \cdot 2 - 19 \cdot 4 = -34 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{9} & \\
 M_{10}^{прав} &= M_{11}^{прав} = -19 \cdot 2 = -38 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{10, 11} & \\
 M_{12}^{нижн} &= 13 \cdot 4 + 20 \cdot 2 - 29 = +63 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{12, 13} & \\
 M_{13}^{нижн} &= 13 \cdot 0 + 20 \cdot 2 - 29 = +63 \text{ кН}\cdot\text{м} & & \\
 M_{14}^{лев} &= 20 \cdot 2 - 29 = 11 \text{ кН}\cdot\text{м}; & \text{14} & \\
 M_{15}^{лев} &= 20 \cdot 0 - 29 = -29 \text{ кН}\cdot\text{м}. & \text{15} &
 \end{aligned}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенная по результатам расчетов, представлена на рис. 3.23,а.

Подобно рассуждаем и при построении эпюр поперечных и продольных сил.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки эпюра поперечных сил будет изменяться линейно и для ее построения необходимо вычислить значения Q в двух сечениях – 2 и 4. Эпюра продольных сил N на этом участке вследствие того, что распределенная нагрузка перпендикулярна оси стержня, будет постоянной (одинаковой по длине стержня) и для ее построения можно вычислять продольную силу в произвольном сечении участка (рис. 3.22,б):

$$\begin{aligned}
 Q_2^{нижн} &= 11 \cdot \sin \alpha = 11 \cdot 0,8 = 0,88 \text{ кН}; & Q_4^{нижн} &= 11 \cdot \sin \alpha - 6 \cdot 5 = 11 \cdot 0,8 - 30 = -21,2; \\
 N_2^{нижн} &= N_3^{нижн} = N_4^{нижн} = +11 \cdot \cos \alpha = 11 \cdot 0,6 = +6,6 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

На остальных участках поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения эпюр Q и N на этих участках достаточно вычислить значения этих усилий в одном, произвольном на каждом участке сечении:

$$\begin{aligned}
 Q_1^{нижн} &= +11 \text{ кН}; & Q_5^{лев} &= Q_6^{лев} = Q_7^{лев} = Q_8^{лев} = -18 \text{ кН}; & Q_{11}^{прав} &= -19 \text{ кН}; \\
 Q_9^{прав} &= Q_{10} = 21 - 19 = +2 \text{ кН}; & Q_{15}^{лев} &= Q_{14} = +20 \text{ кН}; & Q_{12}^{нижн} &= Q_{13}^{нижн} = +13 \text{ кН}; \\
 N_1^{нижн} &= 0; & N_5^{лев} &= N_6^{лев} = N_7^{лев} = N_8^{лев} = +11 - 24 = -13 \text{ кН};
 \end{aligned}$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$N_9^{прав} = N_{10} = N_{11} = 0; \quad N_{12}^{нижн} = N_{13}^{нижн} = -20 \text{ кН}; \quad N_{14}^{лев} = N_{15}^{лев} = 0.$$

Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рис. 3.23.

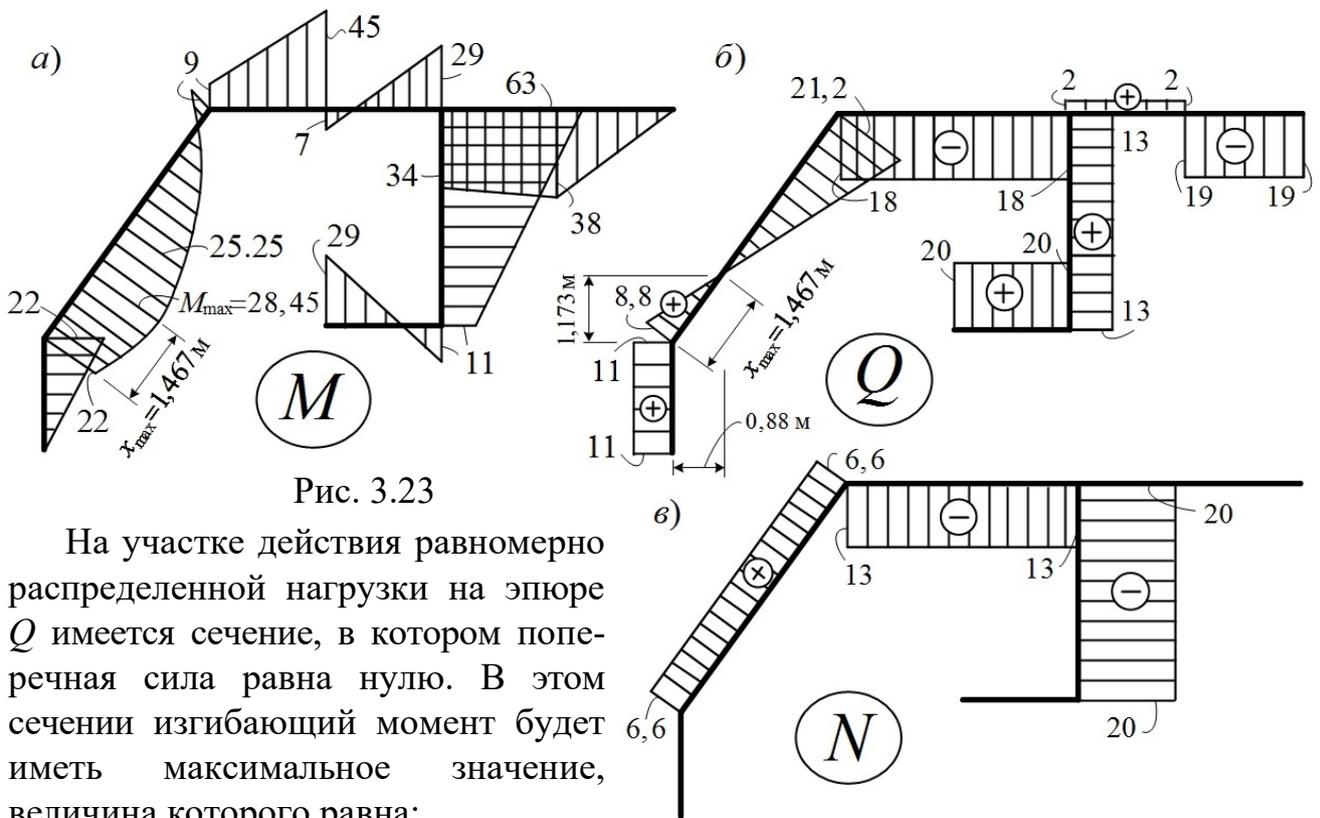


Рис. 3.23

На участке действия равномерно распределенной нагрузки на эпюре Q имеется сечение, в котором поперечная сила равна нулю. В этом сечении изгибающий момент будет иметь максимальное значение, величина которого равна:

$$M_{\max}^{лев} = 24 \cdot (2 + 0,533) - 14 \cdot (2 + 0,711) - (10 \cdot 0,533) \cdot 0,5 \cdot 0,533 = 21,42 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

где положение сечения определяется из соотношения:

$$\frac{3,2}{14,8} = \frac{x_{\max}}{5 - x_{\max}}; \quad 3,2 \cdot (5 - x_{\max}) = 14,8 \cdot x_{\max}; \quad 18 \cdot x_{\max} = 16; \quad x_{\max} = 0,889 \text{ м}.$$

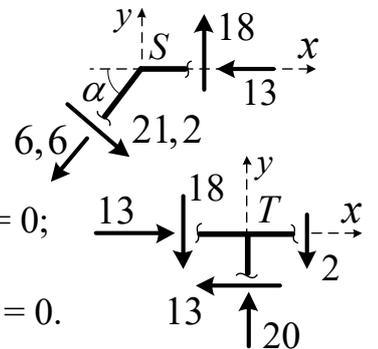
В конце необходимо выполнить проверку равновесия всех узлов по M и по Q и N . Здесь выполним проверку равновесия узлов S и T (рис. 3.22,а):

а) по эпюре M :

$$\begin{aligned} \text{Узел } S: \quad \Sigma M_S = 0; \quad 29 \cdot 9 - 9 \cdot 9 = 0; \quad \text{Узел } T: \quad \Sigma M_T = 0; \quad 63 - 29 - 34 = 0; \end{aligned}$$

б) по эпюрам Q и N :

$$\begin{aligned} \text{Узел } S: \quad \Sigma X = 0; \quad -6,6 \cdot 0,6 + 21,2 \cdot 0,8 - 13 = 0; \quad 16,96 - 16,96 = 0; \\ \Sigma Y = 0; \quad -6,6 \cdot 0,8 - 21,2 \cdot 0,6 + 18 = 0; \quad 18,0 - 18,0 = 0; \\ \text{Узел } T: \quad \Sigma X = 0; \quad 13 - 13 = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad -18 - 2 + 20 = 0. \end{aligned}$$



2.2. Расчет трехшарнирных рам

Рассмотрим расчет рамы, представленной на рис. 3.31,а.

Определим вначале опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0; \quad 10 \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 4 - 10 + R_D \cdot 10 = 0; \quad R_D = 6 \text{ кН};$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad 20 \cdot 2 + 6 \cdot 7 - 10 - R_B \cdot 6 = 0; \quad R_B = 12 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_K = 0; \quad 10 \cdot 4 - 10 - 20 \cdot 4 - 10 + R_A \cdot 10 = 0; \quad R_A = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad 6 \cdot 3 - 10 \cdot 2 - 10 + \cdot 6 = 0; \quad H_A = 2 \text{ кН};$$

Проверка: $\Sigma X = 0; \quad -2 + 10 - 20 + 12 = 0; \quad 22 - 22 = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad -6 + 6 = 0.$

Для построения эшор M , Q и N рассматриваемую раму разобьем на восемь участков (рис. 3.31, б). Учтем, что на участке действия равномерно распределенной нагрузки эшора изгибающих моментов будет изменяться по параболическому закону и для ее построения необходимо вычислить изгибающие моменты, по крайней мере, в трех сечениях – в сечениях 9, 10, 11. На остальных участках эшора M будет изменяться по линейному закону и для ее построения достаточно знать значения изгибающих моментов в крайних точках этих участков, то есть в сечениях 1, 2, 3, 4, 8 и 12, 13, 14 (здесь опущены сечения, в которых расчет усилий легко выполняется даже устно и в которых изгибающие моменты явно равны нулю, – например, сечения у шарниров).

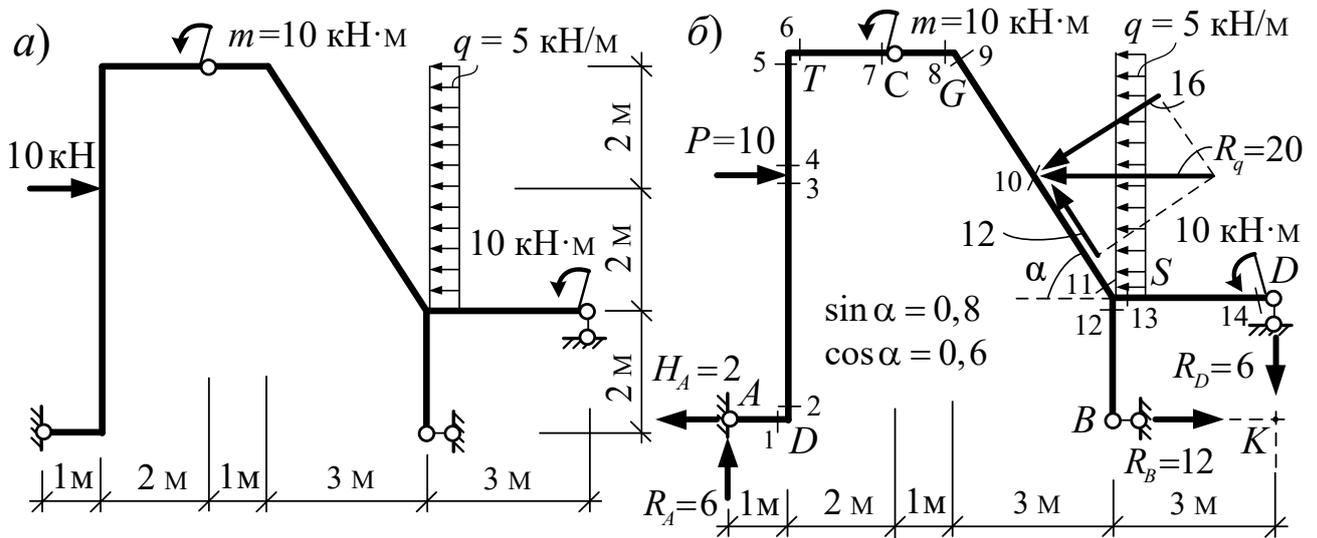


Рис. 3.31

Вычисление усилий в расчетных сечениях (с определением растянутых волокон):

$$M_1^{лев} = 6 \cdot 1 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2^{нижн} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3^{нижн} = M_4 = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = +14; \quad M_5^{нижн} = 6 \cdot 1 + 2 \cdot 6 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6^{лев} = M_5^{нижн} = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_7^{лев} = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - 10 \cdot 2 = +10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_8^{лев} = M_9^{лев} = 6 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 10 \cdot 2 - 10 = +6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_9^{прав} = (5 \cdot 4) \cdot 2 - 10 + 6 \cdot 6 - 12 \cdot 6 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{10}^{прав} = (5 \cdot 2) \cdot 1 - 10 + 6 \cdot 4,5 - 12 \cdot 4 = -21 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{11}^{нижн} = -10 + 6 \cdot 3 - 12 \cdot 2 = -16 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{12}^{нижн} = -12 \cdot 2 = -24 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$M_{13}^{прав} = -10 + 6 \cdot 3 = +8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{14}^{прав} = -10 + 6 \cdot 0 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов в рассматриваемой раме, построенная по результатам расчетов, представлена на рис. 3.32,а.

Аналогично подходим и к построению эпюр поперечных и продольных сил.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки поперечная и продольная силы будут (могут) изменяться линейно и для построения эпюр Q и N на этом участке необходимо вычислить значения этих усилий в двух сечениях – 9 и 11 (рис. 3.31, 3.32,б):

$$Q_9^{нижн} = + (5 \cdot 4) \sin \alpha - 12 \cdot \sin \alpha + 6 \cdot \cos \alpha = (20 - 12) \cdot 0,8 + 6 \cdot 0,6 = +10 \text{ кН};$$

$$Q_{11}^{нижн} = -12 \cdot \sin \alpha + 6 \cdot \cos \alpha = -12 \cdot 0,8 + 6 \cdot 0,6 = -6 \text{ кН};$$

$$N_9^{нижн} = - (5 \cdot 4) \cdot \cos \alpha + 12 \cdot \cos \alpha + 6 \cdot \sin \alpha = (-20 + 12) \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,8 = 0;$$

$$N_{11}^{нижн} = 12 \cdot \cos \alpha + 6 \cdot \sin \alpha = 12 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,8 = +12 \text{ кН}.$$

На остальных участках поперечные и продольные силы будут постоянны и для построения их эпюр на этих участках достаточно вычислить значения Q и N в одном из сечений участков:

$$Q_1^{лев} = +6 \text{ кН}; \quad Q_2^{нижн} = Q_3 = +2 \text{ кН}; \quad Q_4^{нижн} = Q_5 = +2 - 10 = -8 \text{ кН};$$

$$Q_6^{лев} = Q_7 = Q_8 = 6 \text{ кН}; \quad Q_{12}^{нижн} = -12 \text{ кН}; \quad Q_{13}^{прав} = Q_{14} = +6 \text{ кН};$$

$$N_1^{лев} = 0; \quad N_2^{нижн} = N_3 = N_4 = N_5 = -6 \text{ кН}; \quad N_{12}^{нижн} = 0;$$

$$N_6^{лев} = N_7 = N_8 = +2 - 10 = -8 \text{ кН}; \quad N_{13}^{прав} = N_{14} = 0.$$

Построенные по полученным данным эпюры Q и N изображены на рис. 3.33.

На участке действия равномерно распределенной нагрузки на эпюре Q имеется особое сечение, в котором поперечная сила равна нулю. В этом сечении изгибающий момент будет максимальным на участке. Положение этого сечения найдем из соотношения (рис. 3.33,а):

$$\frac{10}{5 - s_{\max}} = \frac{6}{s_{\max}}; \quad 10 \cdot s_{\max} = 6 \cdot (5 - s_{\max}); \quad 16 \cdot s_{\max} = 30; \quad s_{\max} = 1,875 \text{ м}.$$

Горизонтальный и вертикальный размеры положения сечения будут равны:

$$x_{\max} = 1,875 \cdot 0,6 = 1,125 \text{ м}; \quad y_{\max} = 1,875 \cdot 0,8 = 1,5 \text{ м} \quad (\text{см. рис. 3.32}).$$

Величина максимального изгибающего момента равна:

$$M_{\max}^{прав} = (5 \cdot 1,5) \cdot 0,75 - 10 + 6 \cdot (3 + 1,125) - 12 \cdot (2 + 1,5) = -21,625 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

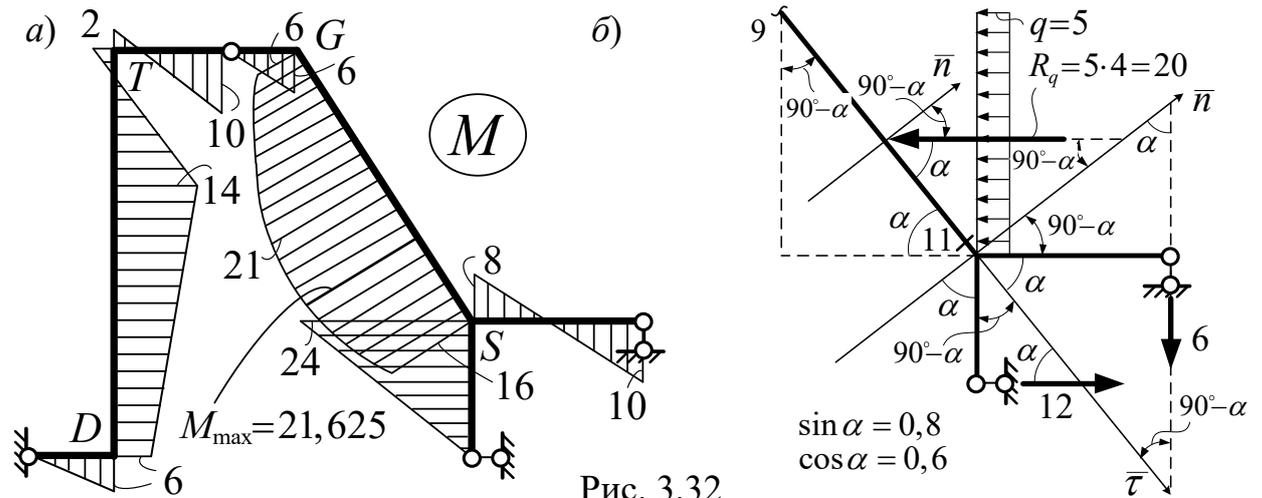


Рис. 3.32

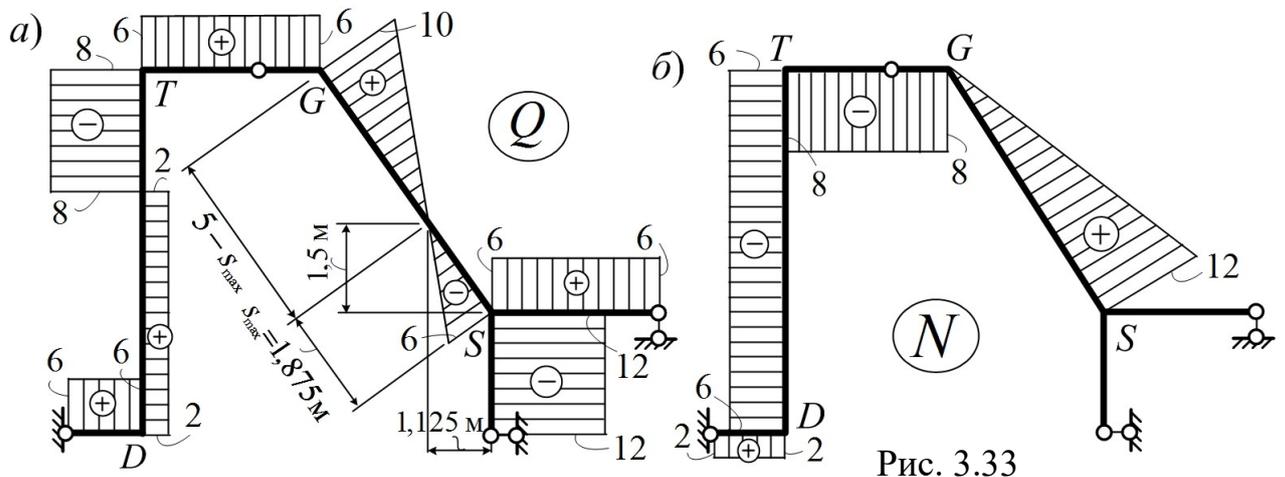


Рис. 3.33

Проверки равновесия узлов для окончательных эпюр M , Q и N :

а) на эпюре M :

$\Sigma M_D = 0;$ $6 - 6 = 0;$	$\Sigma M_T = 0;$ $2 - 2 = 0;$	$\Sigma M_G = 0;$ $6 - 6 = 0;$	$\Sigma M_S = 0;$ $16 + 8 - 24 = 0.$

б) по эпюрам Q и N :

<p><u>Узел D:</u></p> $\Sigma X = 0; -2 + 2 = 0;$ $\Sigma Y = 0; 6 - 6 = 0;$	<p><u>Узел G:</u></p> $\Sigma X = 0; 8 - 10 \cdot 0,8 = 0; 8 - 8 = 0;$ $\Sigma Y = 0; 6 - 10 \cdot 0,6 = 0; 6 - 6 = 0;$
<p><u>Узел T:</u></p> $\Sigma X = 0; 8 - 8 = 0;$ $\Sigma Y = 0; 6 - 6 = 0;$	<p><u>Узел S:</u></p> $\Sigma X = 0; 12 - 12 \cdot 0,6 - 6 \cdot 0,8 = 0; 12 - 12 = 0;$ $\Sigma Y = 0; 12 \cdot 0,8 - 6 \cdot 0,6 - 6 = 0; 9,6 - 9,6 = 0;$

Рассмотрим далее расчет рамы с ненагруженной затяжкой (рис. 3.34).

Внешние опорные реакции определяем из уравнений равновесия всей рамы:

$$\Sigma M_A = 0; -5 - 5 + 8,5 \cdot 2 + 12 \cdot (2,5 + 1,5) - 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2 - R_B \cdot 7 = 0; \quad R_B = 6 \text{ кН};$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$\Sigma X = 0; \quad H_A + 8,5 - 16 - 9,5 = 0; \quad H_A = 17,0 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0; \quad R_A - 12 + 6 = 0; \quad R_A = 6 \text{ кН}.$$

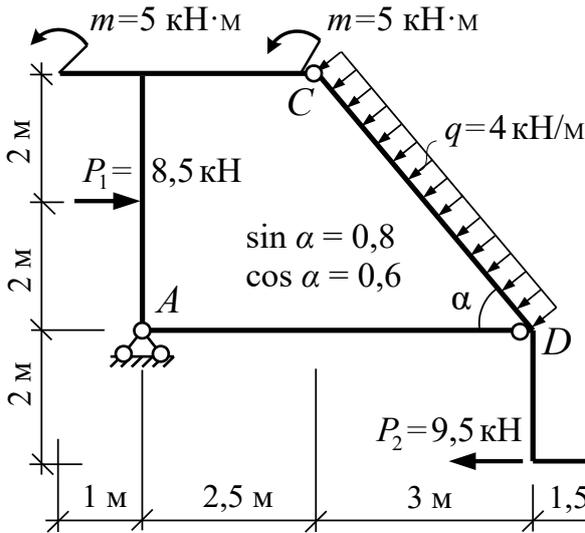


Рис. 3.34

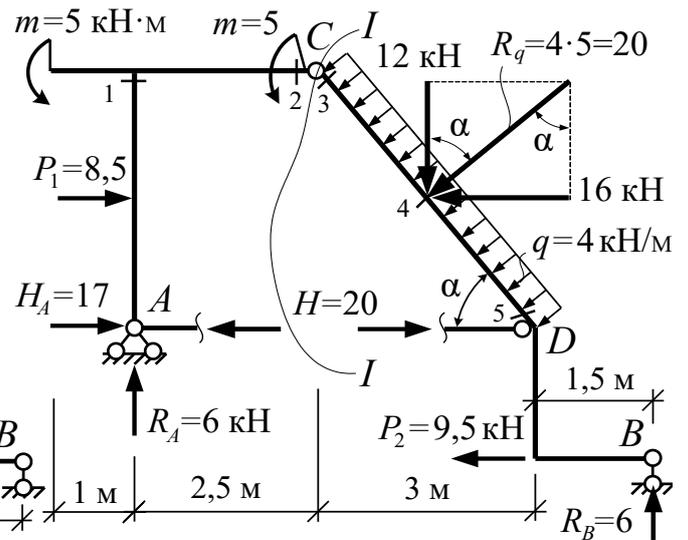


Рис. 3.35

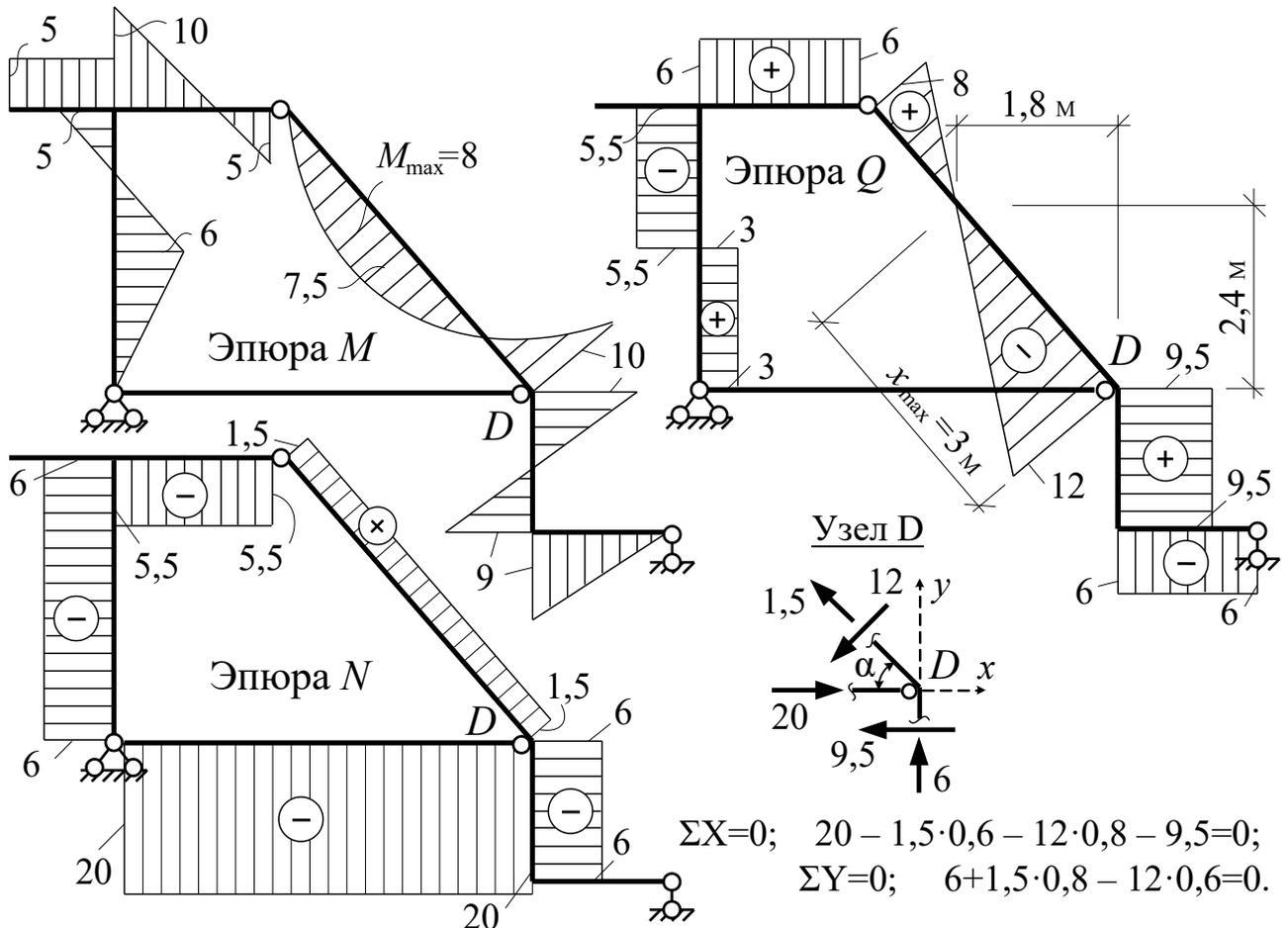


Рис. 3.36

Для определения усилия в затяжке проводим сечение $I-I$ через шарнир C и затяжку и рассматриваем равновесие одной из частей рамы, например, правой:

$$\Sigma M_C^{прав} = 0; \quad 12 \cdot 1,5 + 16 \cdot 2 + 9,5 \cdot 6 - 6 \cdot 4,5 - H \cdot 4 = 0; \quad H = 20 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma M_C^{лев} = 0; \quad 6 \cdot 2,5 + (20 - 17) \cdot 4 - 8,5 \cdot 2 - 5 - 5 = 0; \quad 27 - 27 = 0.$

Покажем вычисление усилий в ряде сечений рамы:

$$M_4^{npa6} = (4 \cdot 2,5) \cdot 1,25 - 20 \cdot 2 + 9,5 \cdot 4 - 6 \cdot (1,5 + 1,5) = -7,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_5^{npa6} = +9,5 \cdot 2 - 20 \cdot 0 - 6 \cdot 1,5 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_3^{npa6} = +(4 \cdot 5) - 20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = 8 \text{ кН};$$

$$Q_5^{npa6} = -20 \sin \alpha + 9,5 \sin \alpha - 6 \cos \alpha = -12 \text{ кН};$$

$$N_3^{npa6} = N_5^{npa6} = 20 \cos \alpha - 9,5 \cos \alpha - 6 \cos \alpha = 15 \text{ кН}.$$

По результатам расчетов строим эпюры изгибающих моментов M , поперечных и продольных сил Q и N (рис 3.36). Там же представлена проверка равновесия узла D по поперечным и продольным силам.

2.3. Расчет составных рам

Рама, представленная на рис. 3.43, может быть разделена на трехшарнирную раму DCT и два простых консольных стержня AD и BT (рис. 3.44), при этом по структуре трехшарнирная рама DCT опирается на стержни AD и BT .

Рассмотрим вначале трехшарнирную раму DCT , опорные шарниры которой находятся на разных уровнях. Поэтому при определении реактивных усилий в шарнирах D и T необходимо решать систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \Sigma M_D = 0; & \quad +22 - 6 \cdot 2 - (4 \cdot 3) \cdot 2,5 + X_T + 4 \cdot Y_T = 0; \\ \Sigma M_C^{npa6} = 0; & \quad + (4 \cdot 3) \cdot 1,5 - 3 \cdot X_T + 2 \cdot Y_T = 0; \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} X_T &= 8 \text{ кН}; \\ Y_T &= 3 \text{ кН}; \end{aligned} \\ 3) \quad & \Sigma X = 0; \quad +X_D + 8 - 4 \cdot 3 = 0; \quad X_D = 4 \text{ кН}; \quad 4) \quad \Sigma Y = 0; \quad Y_D - 6 - 3 = 0; \quad Y_D = 9. \end{aligned}$$

Проверка: $\Sigma M_C^{npa6} = 0; \quad +22 + 9 \cdot 2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 0; \quad 40 - 40 = 0.$

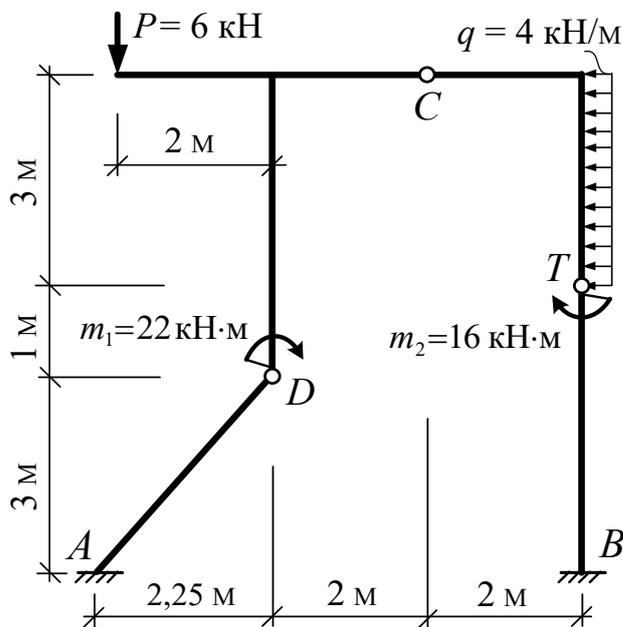


Рис. 3.43

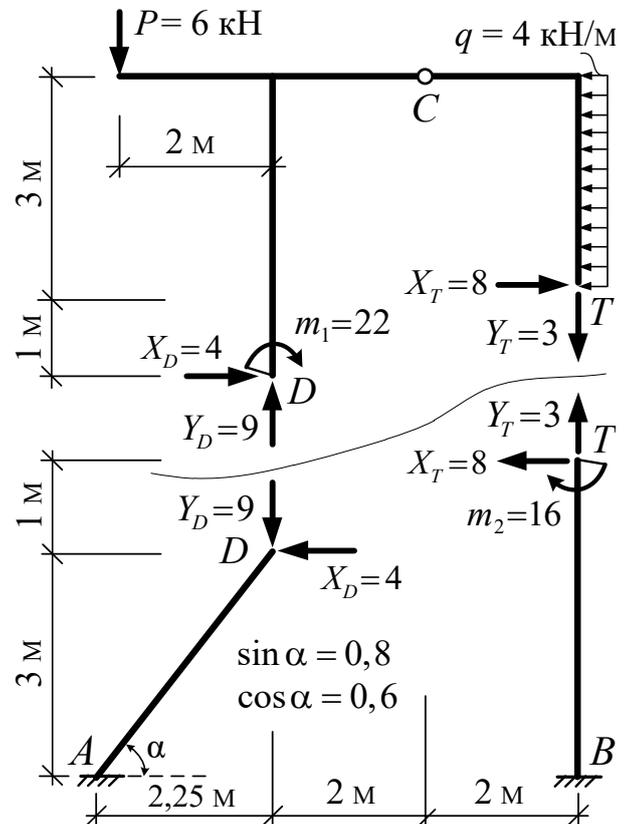
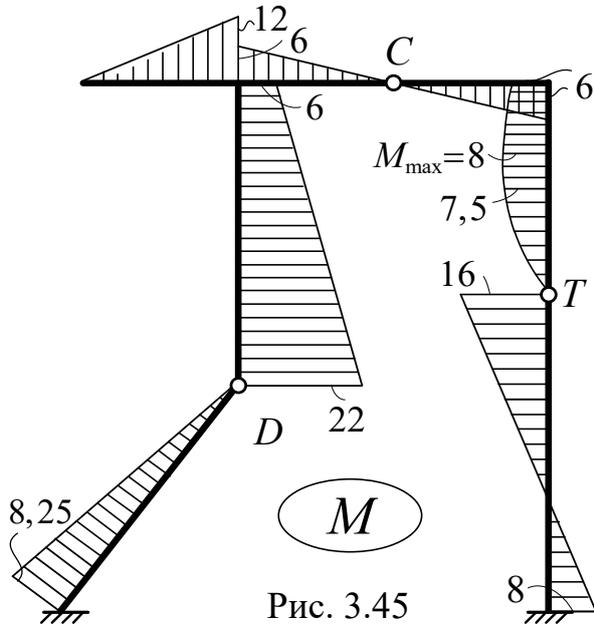
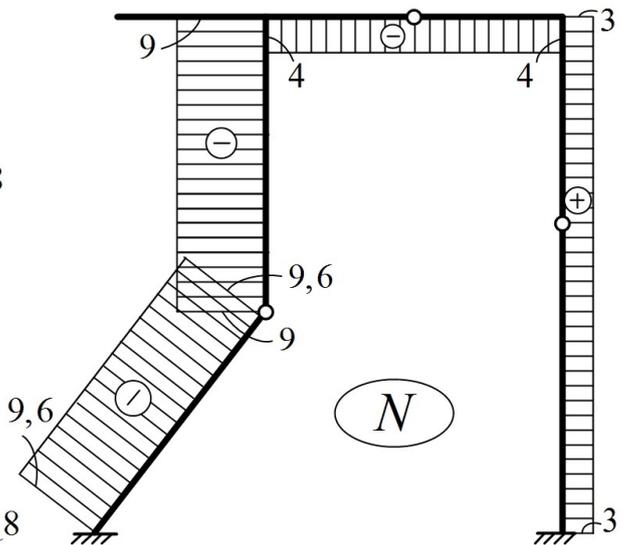
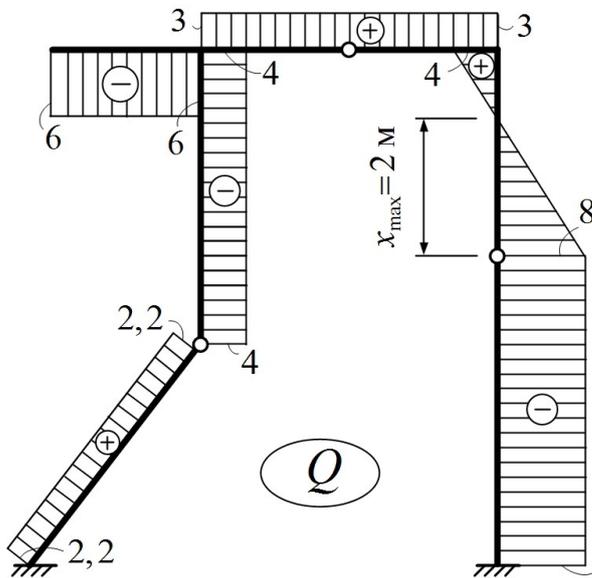


Рис. 3.44

СОДЕРЖАНИЕ



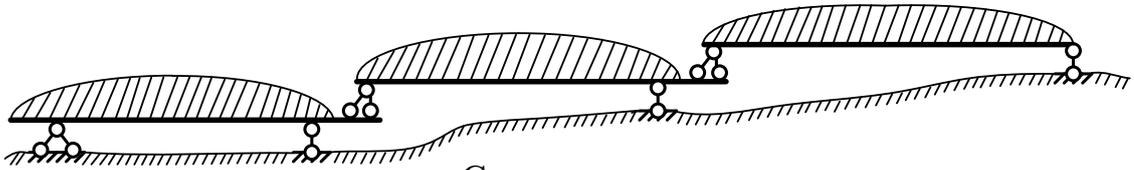
Найденные усилия в шарнирах D и T передаем в обратных направлениях на консольные стержни AD и BT (рис. 3.44). После этого вычисление усилий в сечениях трехшарнирной рамы DCT и консольных стержней AD и BT не представляет никакой сложности. Окончательные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в рассматриваемой раме представлены на рис. 3.45–3.47.



2.4. Расчет статически определимых составных балок

Выполним расчет статически определимой многопролетной балки, представленной на рис. 3.59.

Кинематический анализ системы: $W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$.



Система статически определима и неизменяема.

Определение опорных реакций и построение эпюр внутренних сил:

1) Расчет начинаем с балки EF , самой верхней на поэтажной схеме:

$$\sum M_E = 0; \quad -R_F \cdot 6,6 + 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 + 5 \cdot 8,8 = 0; \quad R_F = 9,6 \text{ кН};$$

$$\sum M_F = 0; \quad R_E \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 + 5 \cdot 2,2 = 0; \quad R_E = 4,2 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка:} \quad \sum Y = 0; \quad 4,2 - 2 \cdot 4,4 + 9,6 - 5 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет ординат эпюры M : $M_1^{лев} = 0$; $M_2^{лев} = 4,2 \cdot 2,2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 1,1 = 4,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

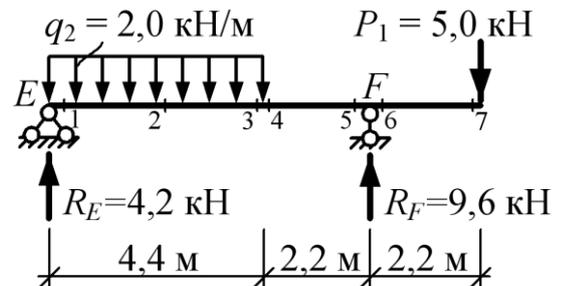
$$M_3^{лев} = 4,2 \cdot 4,4 - 2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 = -0,88 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = -0,88 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_5^{лев} = 4,2 \cdot 6,6 - 2 \cdot 4,4 \cdot 4,4 = -11 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6^{лев} = 5 \cdot 2,2 = 11 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_7^{лев} = 5 \cdot 0 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определение растянутых волокон:



Расчет ординат эпюры Q : $Q_1^{лев} = 4,2 \text{ кН}$; $Q_2^{лев} = Q_4^{лев} = 4,2 - 2 \cdot 4,4 = -4,6 \text{ кН}$;

$$Q_5^{прав} = -9,6 + 5 = -4,6 \text{ кН}; \quad Q_6^{прав} = Q_7^{прав} = 5 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающего момента на участке 1–2:

$$\frac{x_1}{4,2} = \frac{4,4 - x_1}{4,6} \Rightarrow x_1 = 2,1 \text{ м}; \quad M_{\max} = 4,2 \cdot 2,1 - 2 \cdot 2,1 \cdot 1,05 = 4,41 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры M и Q в балке изображаем на общей схеме составной балки (рис. 3.59).

2) Второй рассчитываем балку CDE :

$$\sum M_C = 0; \quad 9,4 \cdot 1,55 + 9,4 \cdot 3,1 - R_D \cdot 4,65 + 4,2 \cdot 6,85 = 0; \quad R_D = 15,587 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; \quad R_C = 7,413 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad 4,65 R_C - 9,4 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 + 4,2 \cdot 2,2 = 0; \quad R_C = 7,413 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка:} \quad \sum Y = 0; \quad 7,413 - 9,4 - 9,4 + 15,587 - 4,2 = 0; \quad 0 = 0.$$

Расчет ординат эпюры изгибающих моментов:

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = 7,413 \cdot 1,55 = 11,49 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3^{лев} = 11,49 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = 7,413 \cdot 3,1 - 9,4 \cdot 1,55 = 8,41 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_5^{лев} = 8,41; \quad M_6^{прав} = -4,2 \cdot 2,2 = -9,24 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$M_7^{прав} = 9,24 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_8^{прав} = 0.$$

Определение растянутых волокон:

$$M_2, M_3, M_4, M_5 \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \quad M_6, M_7$$

Расчет ординат эпюры Q :

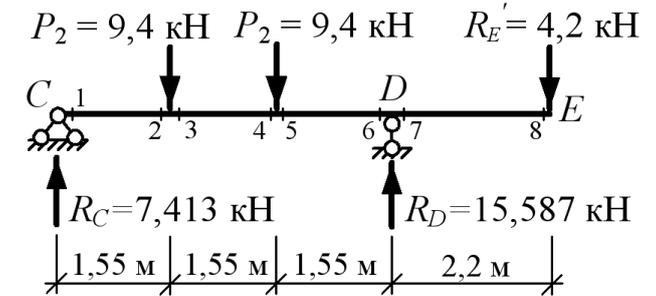
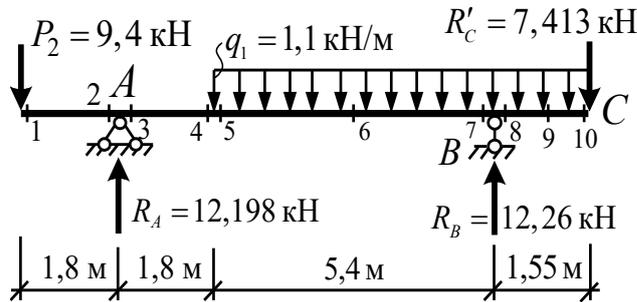
$$Q_1^{лев} = 7,413 \text{ кН}; \quad Q_2^{лев} = 7,413 \text{ кН};$$

$$Q_3^{лев} = Q_4^{лев} = 7,413 - 9,4 = -1,987 \text{ кН};$$

$$Q_5^{прав} = Q_6^{прав} = -15,587 + 4,2 = -11,387 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = Q_8^{прав} = 4,2 \text{ кН}.$$

Эпюры M и Q в балке изображаем на общей схеме составной балки (рис. 3. 59).

3) Последней рассчитываем главную балку ABC : $\Sigma M_A = 0$;



$$-9,4 \cdot 1,8 + 1,1 \cdot 6,95 \cdot 5,275 - R_B \cdot 7,2 + 7,413 \cdot 8,75 = 0; \quad R_B = 12,26 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-9,4 \cdot 9 + R_A \cdot 7,2 - 1,1 \cdot 6,95 \cdot 1,925 + 7,413 \cdot 1,55 = 0; \quad R_A = 12,198 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma Y = 0$; $-9,4 + 12,198 - 1,1 \cdot 6,95 + 12,26 - 7,413 = 0; \quad 0 = 0.$

Расчет ординат эпюры M :

$$M_1^{лев} = 0; \quad M_2^{лев} = -9,4 \cdot 1,8 = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_3^{лев} = M_2^{лев} = -16,92 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_4^{лев} = M_5^{лев} = -9,4 \cdot 3,6 + 12,198 \cdot 1,8 = -11,884 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_6^{лев} = -9,4 \cdot (3,6 + 2,7) + 12,198 \cdot (1,8 + 2,7) - 1,1 \cdot 2,7 \cdot 1,35 = -8,325 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_7^{прав} = M_8^{прав} = 7,413 \cdot 1,55 - 1,1 \cdot 1,55 \cdot 0,775 = 12,812 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_9^{прав} = 7,413 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,55 - (1,1 \cdot 0,775) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,775 = 6,076 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{10}^{прав} = 0.$$

Определение растянутых волокон:

$$M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 \quad \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \quad M_7, \dots$$

Расчет ординат эпюры поперечных сил Q :

$$Q_1^{лев} = Q_2^{лев} = -9,4 \text{ кН}; \quad Q_3^{лев} = -9,4 + 12,198 = 2,798 \text{ кН};$$

$$Q_4^{лев} = Q_5^{лев} = Q_3^{лев} = 2,798 \text{ кН}; \quad Q_7^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 - 12,26 = -3,142 \text{ кН};$$

$$Q_8^{прав} = 7,413 + 1,1 \cdot 1,55 = 9,118 \text{ кН}; \quad Q_9^{прав} = 7,413 \text{ кН}.$$

Расчет экстремального значения изгибающих моментов на участке 5–7:

$$\frac{x_2}{2,798} = \frac{5,4 - x_2}{3,142} \Rightarrow x_2 = 2,544 \text{ м};$$

$$M_{\max} = -9,4 \cdot 6,144 + 12,198 \cdot 4,344 - 2,544 \cdot 1,1 \cdot 2,544 / 2 = -8,325 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры M и Q в балке ABC и объединенные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил представлены на рис. 3. 59.

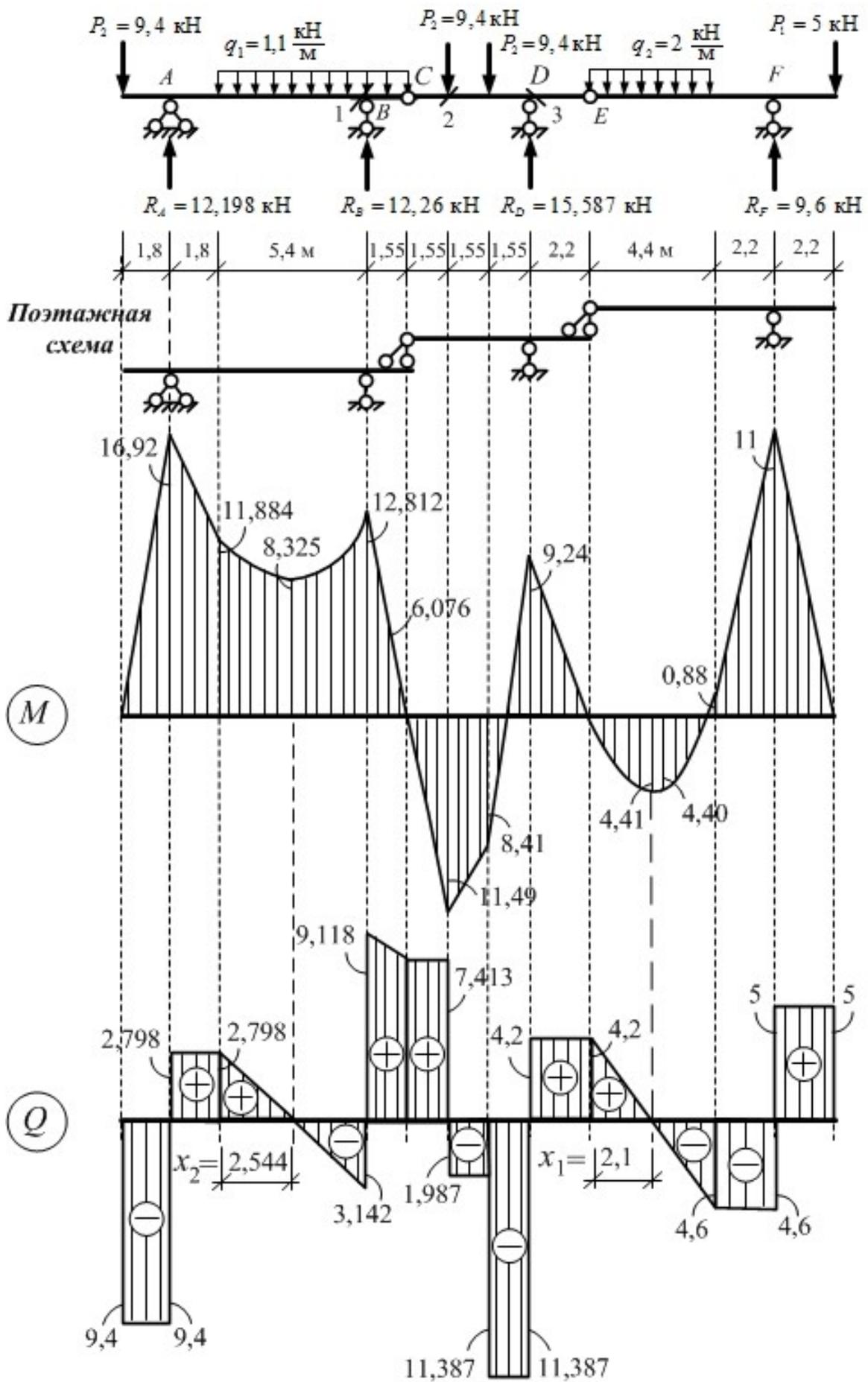
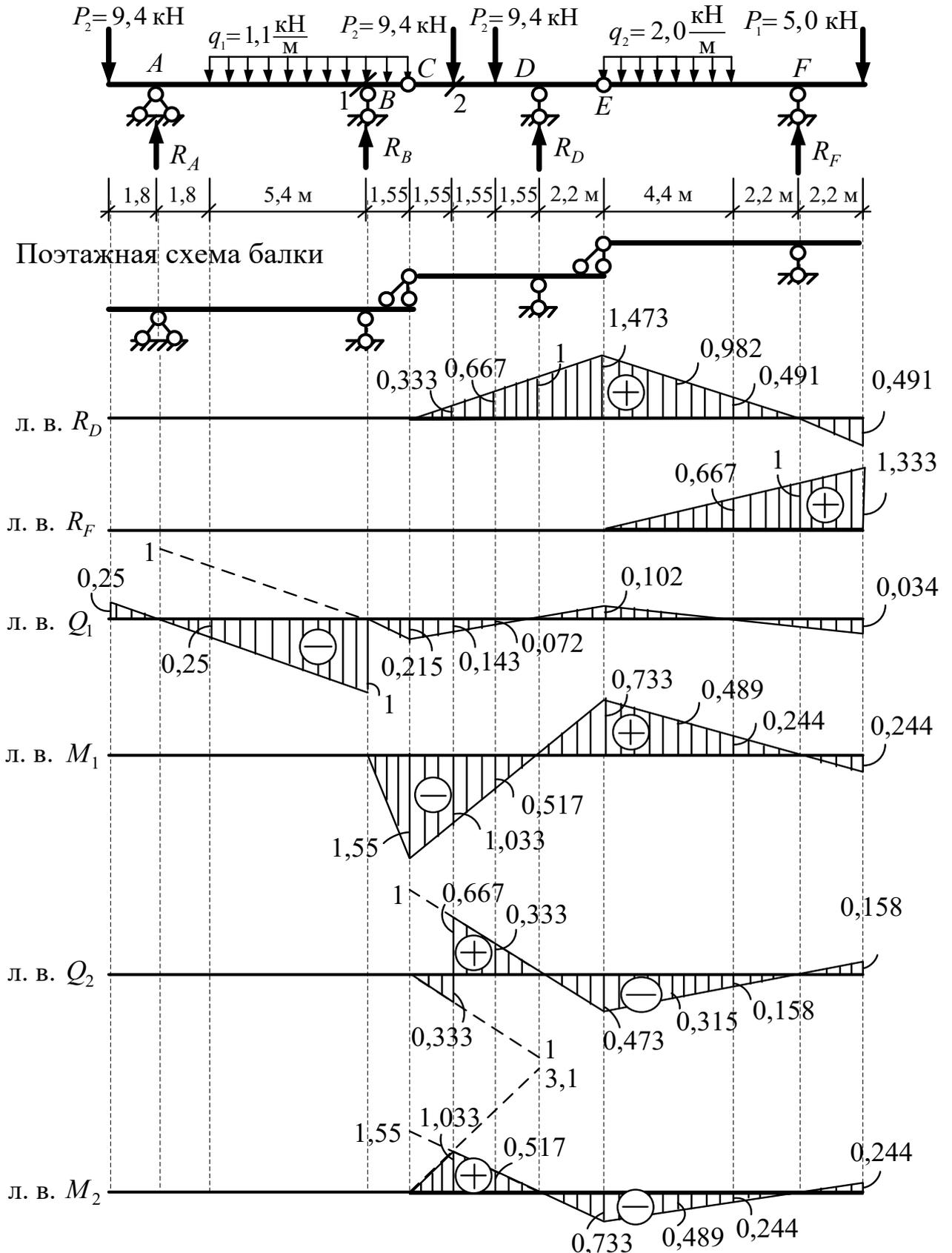


Рис. 3.59

2.5. Линии влияния усилий в балочных системах

Построим линиям влияния усилий в многопролетной балке, представленной на рисунке и определим усилия по линиям влияния от внешних нагрузок.



СОДЕРЖАНИЕ

Вычислим по линиям влияния усилия, для которых построены линии влияния в балке на рис. 3.63, от внешней нагрузки, представленной там же, и сравним их со значениями, взятыми из эпюр усилий, построенных для этой же балки от действия той же нагрузки на рис. 3.59:

$$R_D = 9,4 \cdot 0,333 + 9,4 \cdot 0,667 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,982 - 5 \cdot 0,491 = 15,587 \text{ кН};$$

$$R_F = 2 \cdot 4,4 \cdot 0,333 + 5 \cdot 1,333 = 9,595 \text{ кН};$$

$$M_1 = -1,1 \cdot 1,55 \cdot 1,55/2 - 9,4 \cdot 0,517 - 9,4 \cdot 1,033 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,489 - 5 \cdot 0,244 = -12,808 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_1 = 9,4 \cdot 0,25 - 5,4 \cdot 1,1 \cdot 0,625 - 1,1 \cdot 1,55 \cdot 0,108 - 9,4 \cdot 0,072 - 9,4 \cdot 0,143 + 2 \cdot 4,4 \cdot 0,068 - 5 \cdot 0,034 = -3,139 \text{ кН};$$

$$M_2 = 9,4 \cdot 1,033 + 9,4 \cdot 0,517 - 2 \cdot 4,4 \cdot 0,489 + 5 \cdot 0,244 = 11,487 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_2 = -9,4 \cdot 0,333 - 2 \cdot 0,4 \cdot 4,4 \cdot 0,315 + 5 \cdot 0,158 = 7,427 \text{ кН}.$$

Сравнение значений усилий, полученных по линиям влияния и взятых из эпюр:

Обозначение усилий	Значения усилий, полученные		Расхождение результатов	
	по эпюрам	по л. в.	абсолютное	относительное, в %
R_D	15,587	15,587	0	0
R_F	9,595	9,6	0,005	0,052
M_1	12,812	12,808	0,004	0,030
M_2	11,49	11,487	0,003	0,026
Q_1	3,142	3,139	0,003	0,088
Q_2	7,413	4,427	0,014	0,194

2.6. Особенности расчета трехшарнирных арок на вертикальные нагрузки

Усилия в сечениях трехшарнирных арок определяются по формулам:

$$\begin{aligned} M_k &= M_k^0 - H \cdot y_k; & Q_k &= Q_k^0 \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k; \\ N_k &= -(Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где M_k^0 , Q_k^0 – изгибающий момент и поперечная сила в сечении k простой двухшарнирной балки (см. рис. 3.65,б), имеющей тот же пролет и загруженной той же нагрузкой, что и арка; H – величина горизонтальных реакций арки (распор); φ_k – угол наклона касательной к оси арки в сечении k по отношению к горизонтальной оси x ; y_k – ордината центра сечения k относительно оси x , проходящей через опоры (см. рис. 3.65,а).

Заметим, что при заданной системе координат с началом в левой опоре арки (рис. 3.65,а) $\sin \varphi_k$ для левой полуарки положительны, а для правой – отрицательны; $\cos \varphi_k$ для обеих полуарок положительны.

В качестве примера рассмотрим арку параболического очертания, представленную на рис. 3.65,а. Вычислим усилия в сечениях K_1 и K_2 арки.

Вначале определим опорные реакции от заданной внешней нагрузки:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \quad 12 \cdot 2 + (3 \cdot 8) \cdot 6 + 10 \cdot 12 + 8 \cdot 17 + (4 \cdot 3) \cdot 18,5 - R_B \cdot 20 = 0; & R_B &= 32,3 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0; & \quad -12 \cdot 18 - (3 \cdot 8) \cdot 14 - 10 \cdot 8 - 8 \cdot 3 - (4 \cdot 3) \cdot 1,5 + R_A \cdot 20 = 0; & R_A &= 33,7 \text{ кН}; \end{aligned}$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad 33,7 \cdot 10 - 12 \cdot 8 - (3 \cdot 8) \cdot 4 + H \cdot 4 = 0; \quad H = 36,25 \text{ кН.}$$

Проверяем правильность нахождения опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \quad 33,7 + 32,3 - 12 - 3 \cdot 8 - 10 - 8 - 3 \cdot 4 = 0; \quad 66 - 66 = 0;$$

$$\sum M_C^{прав} = 0; \quad 10 \cdot 2 + 8 \cdot 7 + (4 \cdot 3) \cdot 8,5 + 36,25 \cdot 4 - 32,3 \cdot 10 = 0; \quad 323 - 323 = 0.$$

Определяем ординаты для сечений и параметры углов наклона касательных к оси арки по отношению к горизонтали:

Сечение K_1 : $x_{K_1} = 4 \text{ м}; \quad y_{K_1} = \frac{4f}{l^2} x_{K_1} (l - x_{K_1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 4 \cdot (20 - 4) = 2,56 \text{ м};$

$$\operatorname{tg} \varphi_{K_1} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K_1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} (20 - 2 \cdot 4) = 0,48; \quad \sin \varphi_{K_1} = 0,4327; \quad \cos \varphi_{K_1} = 0,9015;$$

Сечение K_2 : $x_{K_2} = 15 \text{ м}; \quad y_{K_2} = \frac{4f}{l^2} x_{K_2} (l - x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 15 \cdot (20 - 15) = 3 \text{ м};$

$$\operatorname{tg} \varphi_{K_2} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_{K_2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} (20 - 2 \cdot 15) = -0,4; \quad \sin \varphi_{K_2} = -0,3714; \quad \cos \varphi_{K_2} = 0,9285.$$

3) Определяем усилия в сечениях по формулам (3.7):

Сеч. K_1 : $M_{K_1}^0 = 33,7 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 104,8 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad Q_{K_1}^0 = 33,7 - 12 - 3 \cdot 2 = 15,7 \text{ кН};$

$$M_{K_1} = 104,8 - 36,25 \cdot 2,56 = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \text{— растянутые волокна — снизу};$$

$$Q_{K_1} = 15,7 \cdot 0,9015 - 36,25 \cdot 0,4327 = -1,532 \text{ кН};$$

$$N_{K_1} = -(15,7 \cdot 0,4327 + 36,25 \cdot 0,9015) = -39,473 \text{ кН};$$

Сечение K_2 :

$$M_{K_2} = (32,3 \cdot 5 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 3,5) - 36,25 \cdot 3 = -5,25 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad \text{— растян. волокна — сверху};$$

$$Q_{K_2} = (-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot 0,9285 - 36,25 \cdot (-0,3714) = 2,043 \text{ кН};$$

$$N_{K_2} = -[(-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot (-0,3714) + 36,25 \cdot 0,9285] = -38,226 \text{ кН.}$$

Учитывая, что оси арок криволинейны, эпюры усилий в арках также изменяются по криволинейным зависимостям, и точное представление их формы достаточно сложно. Эпюры усилий в арках обычно строят по некоторому числу ординат, разбивая пролет арки на определенное число (чаще всего равных) частей и вычисляя ординаты эпюр в граничных точках, соединяя их затем плавными кривыми. При этом обязательно необходимо вычислять ординаты эпюр усилий и в характерных сечениях — под сосредоточенными силами и моментами. Чем больше будет расчетных ординат, тем точнее можно представить форму эпюры усилий. На рис. 3.65 показаны результаты расчета арки при разбивке пролета на десять равных частей. Представленные значения усилий в расчетных и характерных сечениях можно использовать для самостоятельного изучения процедуры расчета арок, учитывая, что результаты известны.

СОДЕРЖАНИЕ

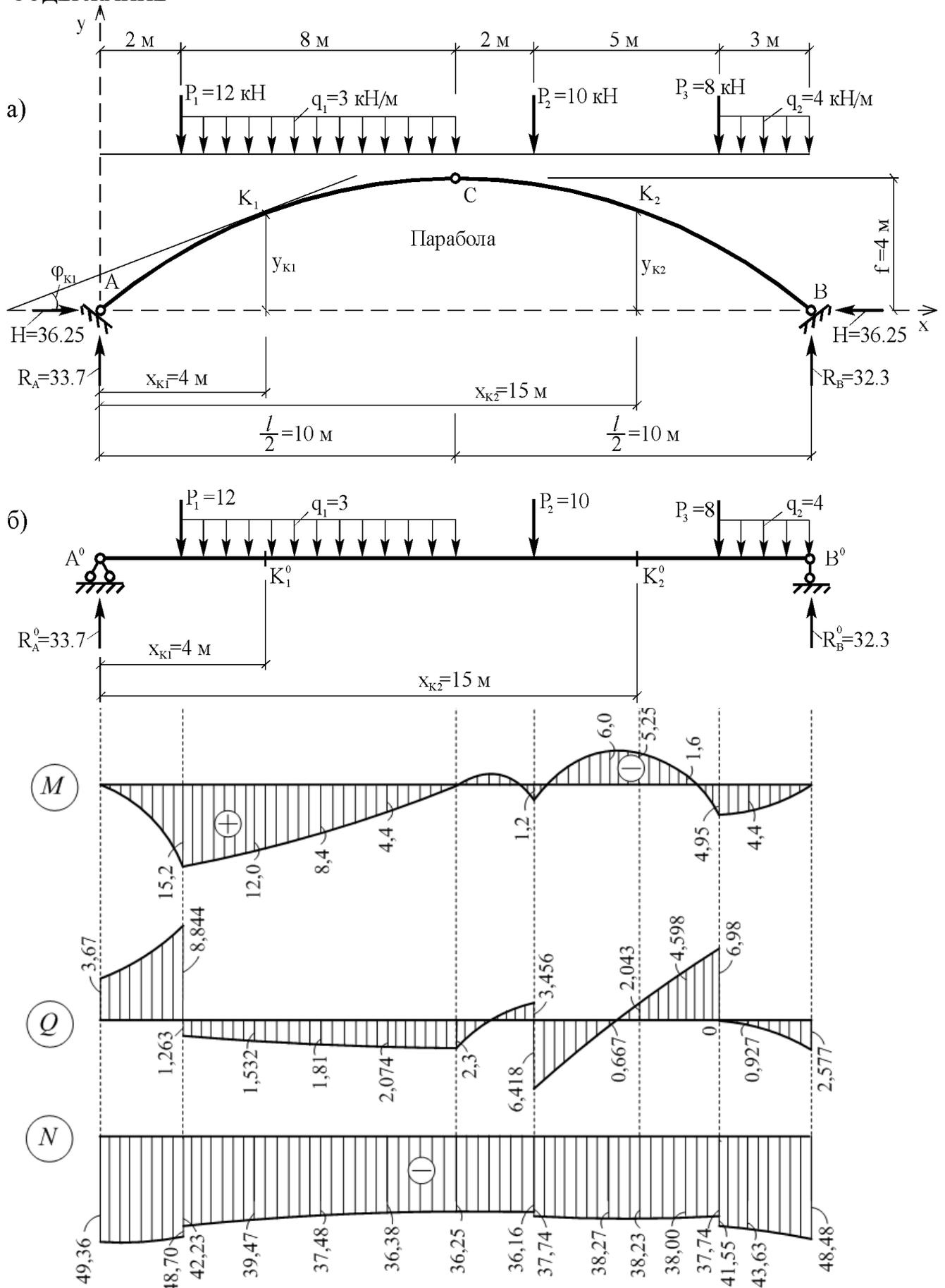


Рис. 3.65

2.7. Определение усилий в фермах

Например, для фермы на рис. 3.68,а сначала можно вырезать узел 1 (рис. 3.68,б), из рассмотрения равновесия которого найдем:

$$\Sigma Y = 0; \quad S_{1-3} \sin \alpha - P = 0; \quad S_{1-3} = \frac{P}{\sin \alpha};$$

$$\Sigma X = 0; \quad S_{1-2} + S_{1-3} \cos \alpha = 0; \quad S_{1-2} = -S_{1-3} \cos \alpha = -\frac{P}{\sin \alpha} \cos \alpha = -P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Угол α и его тригонометрические функции $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ находятся из геометрических соображений.

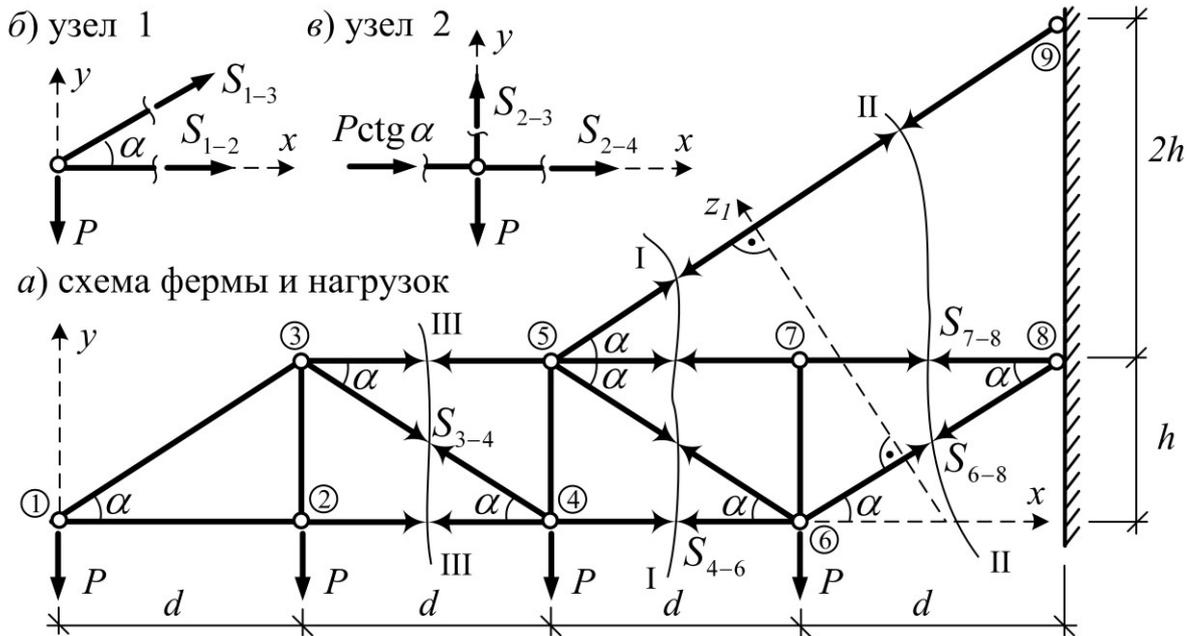


Рис. 3.68

Затем вырезаем узел 2 (рис. 3.68,в). При этом в стержне 1–2 прикладываем уже известное усилие $S_{1-2} = -P \operatorname{ctg} \alpha$. Из рассмотрения равновесия узла найдём:

$$\Sigma X = 0; \quad P \operatorname{ctg} \alpha + S_{2-4} = 0; \quad S_{2-4} = -P \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\Sigma Y = 0; \quad S_{2-3} - P = 0; \quad S_{2-3} = P.$$

Дальнейшая процедура расчета фермы предполагает вырезание узлов 3 и 4, из уравнений равновесия которых найдём усилия в стержнях 3–4, 3–5, 4–5 и 4–6. Вырезав узел 7, из уравнения $\Sigma Y = 0$ найдем усилие в стержне 7–6 (оно в данном случае нулевое). Для определения усилий в остальных стержнях способ вырезания узлов здесь не применим, так как в оставшихся узлах сходится более двух стержней с неизвестными усилиями.

Способ моментной точки. Ферма рассекается на две части или вырезается часть ее таким образом (если это, конечно, возможно), чтобы оси всех рассеченных стержней с неизвестными усилиями, кроме одного (того, в котором ищется усилие), пересекались в одной точке; эта точка принимается за моментную и относительно ее составляется сумма моментов всех сил для рассматриваемой части фермы; из полученного уравнения определяется искомое усилие.

Например, для фермы на рис. 3.68 для определения усилия в стержне 4–6

СОДЕРЖАНИЕ

необходимо провести сечение I–I и рассмотреть равновесие левой части фермы. Моментной для усилия S_{4-6} будет точка в узле 5, в котором пересекаются оставшиеся три стержня, рассеченные сечением I–I, то есть стержни 5–6, 5–7 и 5–9. Искомое усилие найдется из уравнения:

$$\Sigma M_5^{лев} = 0; \quad -P \cdot 2d - P \cdot d - S_{4-6} \cdot h = 0; \quad S_{4-6} = -\frac{3d}{h}P.$$

Усилие в стержне 6–8 найдем, проведя сечение II–II и рассмотрев равновесие левой части фермы, с учетом того, что моментной точкой в этом случае будет также точка в узле 5, в которой пересекаются оси стержней 5–9 и 7–8, разрезанные сечением вместе со стержнем 6–8:

$$\Sigma M_5^{лев} = 0; \quad -2P \cdot d + P \cdot d - P \cdot d - S_{6-8} \cos \alpha \cdot h - S_{6-8} \sin \alpha \cdot d = 0;$$

$$S_{6-8} = -\frac{2d}{h \cos \alpha + d \sin \alpha} P.$$

Способ проекций. Ферма рассекается на две части или вырезается часть ее таким образом (если это, конечно, возможно), чтобы все стержни с неизвестными усилиями, кроме одного (того, в котором ищется усилие), были параллельны друг другу. Для рассматриваемой части фермы составляется сумма проекций всех сил на ось, перпендикулярную к указанным параллельным стержням. Из полученного уравнения определяется искомое усилие.

Например, для фермы на рис. 3.68 для определения усилия в стержне 7–8 можно использовать уже проведенное ранее сечение II–II; стержни 6–8 и 5–9, рассеченные сечением вместе со стержнем 7–8, параллельны друг другу; поэтому, если составить уравнение проекций всех сил, например, левой части фермы на ось Z_1 , перпендикулярную стержням 6–8 и 5–9, то неизвестные усилия в этих стержнях не войдут в рассматриваемое уравнение равновесия (их проекции на ось Z_1 равны нулю); в уравнении будет только одно неизвестное – усилие S_{7-8} , которое и найдется из решения уравнения:

$$\Sigma Z_1 = 0; \quad -4P \cos \alpha - S_{7-8} \sin \alpha = 0; \quad S_{7-8} = -4P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Аналогично можно найти усилие в стержне 3–4 (рис. 3.68,а), проведя сечение III–III и составив для левой части фермы сумму проекций сил на вертикальную ось Y (стержни 3–5 и 2–4 горизонтальны):

$$\Sigma Y = 0; \quad -2P - S_{3-4} \sin \alpha = 0; \quad S_{3-4} = -\frac{2P}{\sin \alpha}.$$

Достоинствами способов моментной точки и проекций является то, что в большинстве случаев с их помощью усилия в стержнях можно выразить только через внешние нагрузки и опорные реакции (не выражая через другие усилия).

Применяя совместно способы моментной точки, проекций и вырезания узлов, для большинства ферм можно найти усилия во всех стержнях.

2.8. Определение перемещений в изгибаемых системах

2.8.1. Определение перемещений, вызываемых силовыми нагрузками

Определение перемещений в стержневых системах от действия внешних нагрузок удобно выполнять по формуле Мора. Для изгибаемых систем (рам, балок) при этом обычно учитывают только изгибающие моменты (ввиду незначительности влияния на величины перемещений в таких системах поперечных и продольных сил). Формула Мора в этом случае принимает вид:

$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EJ}; \quad (3.9)$$

где: \bar{M}_i – изгибающие моменты в системе от действия единичной «силы», приложенной в сечении (точке), для которого определяется перемещение, в направлении искомого (i -го) перемещения; M_P – изгибающие моменты в системе от действия заданной нагрузки; EJ – изгибная жесткость стержней (участков) системы; n – число участков, на которые разбивается система для вычисления интегралов Мора; l – длины этих участков.

Порядок определения перемещений по формуле Мора:

Рассмотрим определение вертикального перемещения точки C от действия заданной нагрузки в трехшарнирной раме, представленной на рис. 3.74,а.

Вычисление опорных реакций и построение эпюры изгибающих моментов в раме выполняем на основе подходов, изложенных в разделах 3.1–3.3.

Эпюра изгибающих моментов от действия заданной нагрузки имеет вид, показанный на рис. 3.74,б.

Так как определяется вертикальное перемещение точки C , то в этой точке в вертикальном направлении прикладываем единичную сосредоточенную силу и направляем ее вниз, предполагая, что точка C будет смещаться вниз.

От действия этой силы строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рис. 3.74,в). После этого выделяем в раме участки одновременной непрерывности эпюр, в пределах которых жесткость стержней постоянна и обе эпюры изменяются непрерывно (рис. 3.74,г), и вычисляем искомое перемещение по формуле Мора (3.9):

$$\begin{aligned} \Delta_C^{всп} = \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = & -\frac{1}{EJ} \left(\frac{2,5 \cdot 2,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} + 0 + \\ & + \frac{2,5}{6 \cdot 3EJ} \left(9,5 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \frac{6,5}{6} \cdot 16,75 + 24 \cdot \frac{8}{6} \right) + \frac{2}{6EJ} \left(2 \cdot 24 \cdot \frac{8}{6} + \frac{8}{6} \cdot 10 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 10 \cdot 0 \right) - \\ & - \frac{1}{EJ} \left(\frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} \left(-14 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 0 \cdot 6 - 14 \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{EJ} \left(\frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10,333}{EJ}. \end{aligned}$$

Отметим, что на участках I, V и VII вычисление производилось по правилу Верещагина (3.10), на участке IV – по формуле трапеций (3.11), а на участках III и VI – по формуле Симпсона (3.12). На участке II единичная эпюра изгиба-

СОДЕРЖАНИЕ

ющих моментов (рис. 3.74,б) нулевая, поэтому и результат вычисления интеграла Мора – ноль.

Значение перемещения положительно, следовательно, точка *C* действительно перемещается вниз.

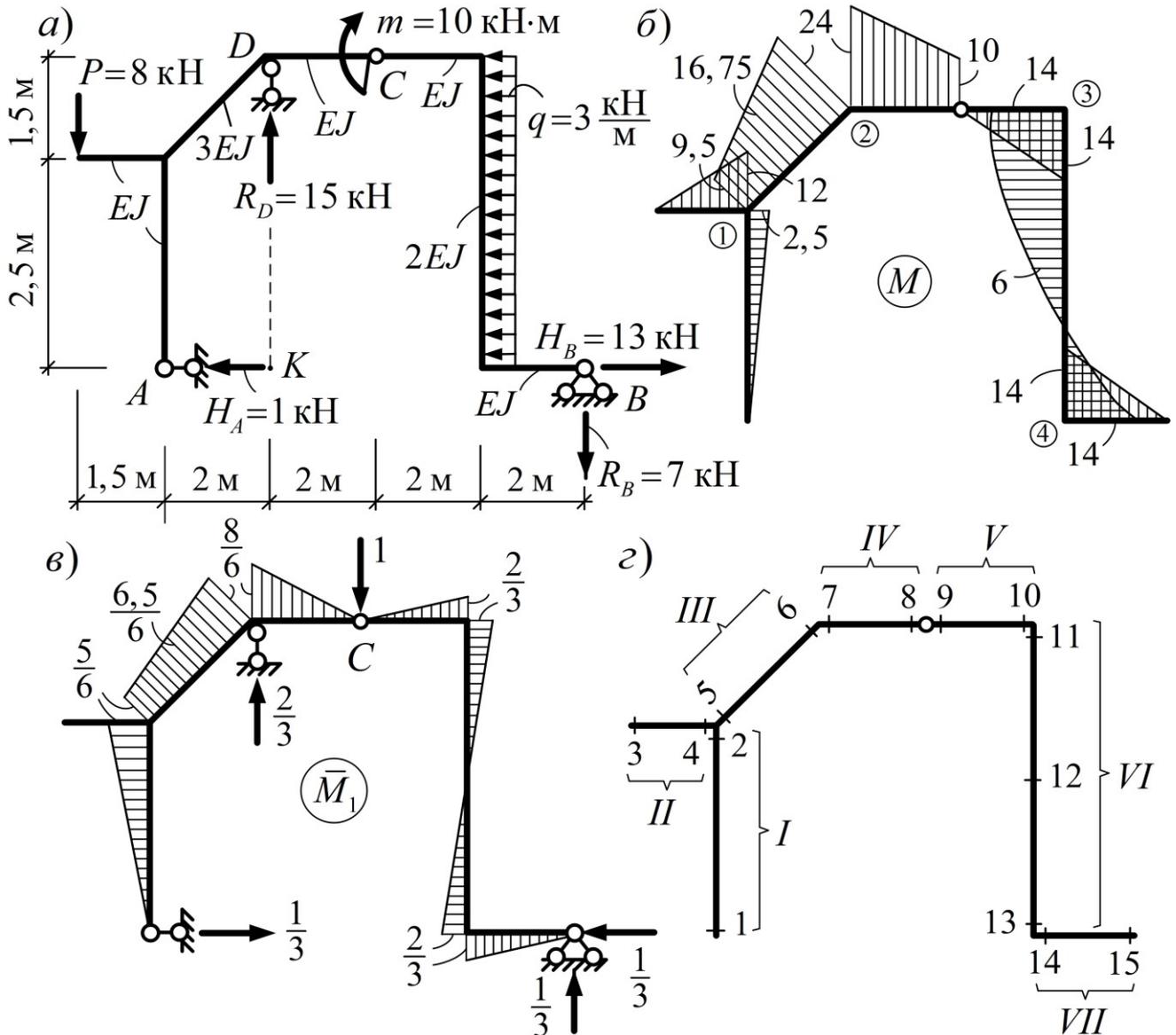


Рис. 3.74

Рассмотрим пример определения перемещений еще в одной раме, представленной на рис. 3.75. Определим угол поворота сечения 1 и взаимное сближение (или расхождение) узлов *T* и *C*.

Эпюра изгибающих моментов от действия заданной внешней нагрузки имеет вид, показанный на рис. 3.76.

В сечении 1, угол поворота которого определяется, прикладываем единичный момент и строим от его действия единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рис. 3.77). Вычисляем искомое перемещение по формуле Мора:

$$\varphi_1 = \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{12 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,158 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,395 \cdot 2}{2} \right) \cdot \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 18 \right) +$$

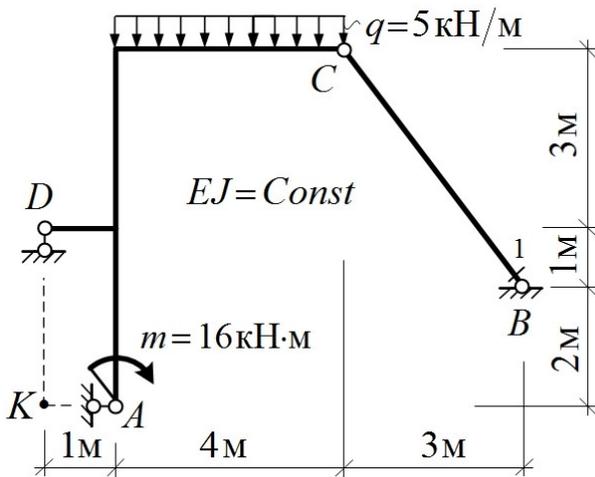


Рис. 3.75

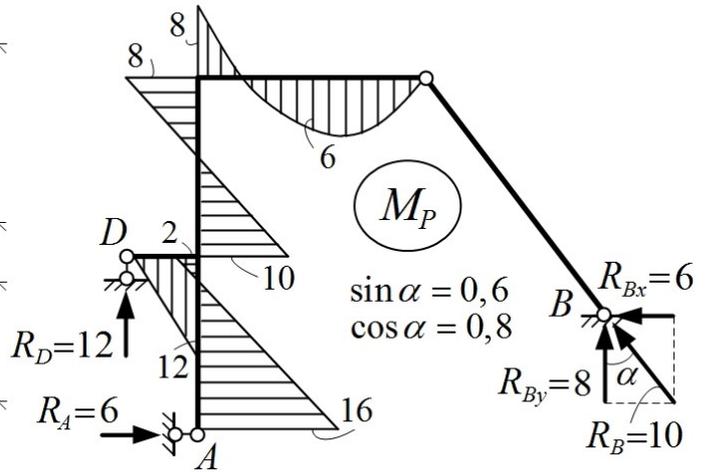


Рис. 3.76

$$+\frac{4}{6EJ}(-10 \cdot 0,237 - 4 \cdot 1 \cdot 0,4345 + 8 \cdot 0,632) + \frac{4}{6EJ}(8 \cdot 0,632 - 4 \cdot 6 \cdot 0,316 + 0) = -\frac{2,945}{EJ}.$$

Получаем, что сечение 1 в раме поворачивается по часовой стрелке, а не против часовой стрелки, как предполагалось.

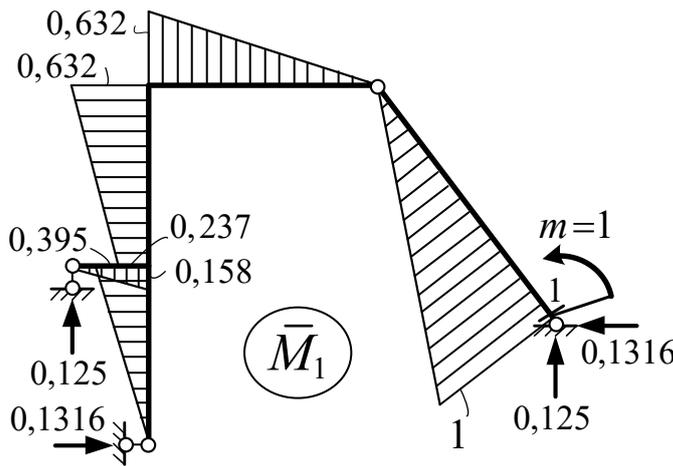


Рис. 3.77

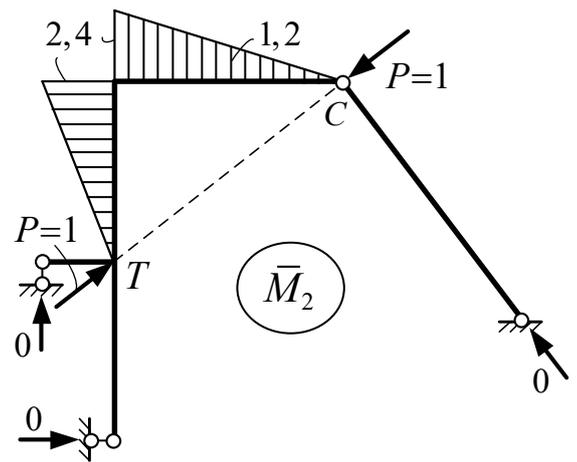


Рис. 3.78

Для определения взаимного сближения (расхождения) узлов T и C к этим узлам прикладываем по единичной силе, которые направляем по прямой, соединяющей узлы T и C навстречу друг другу. От действия этих единичных сил строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_2 (рис. 3.78). Искомое перемещение вычисляем по формуле Мора:

$$\Delta_{T,C} = \Delta_{2P} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_P ds}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2,4 \cdot 3}{2} \left(8 - \frac{1}{3} 18 \right) + \frac{4}{6EJ} (8 \cdot 2,4 - 4 \cdot 6 \cdot 1,2 + 0) = \frac{0,8}{EJ}.$$

Узлы T и C сближаются (приблизятся друг к другу).

2.8.2. Определение перемещений, вызываемых изменением температур

Пример расчета. Рассмотрим раму, представленную на рис. 3.80. Определим горизонтальное перемещение точки K от воздействия температурного изменения, показанного на схеме рамы. Сечения всех элементов приняты одинаковыми – прямоугольными высотой $h = 0,5$ м. Коэффициент температурного линейного расширения материала принимаем равным: $\alpha = 1 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$.

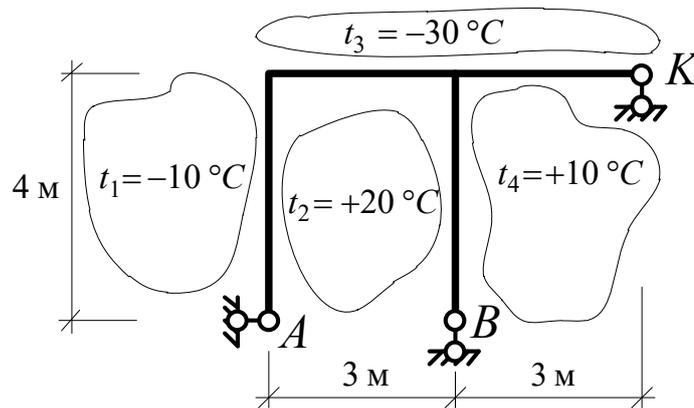


Рис. 3.80

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от действия единичной «силы», приложенной в точке K в направлении искомого перемещения, то есть горизонтально, представлены на рис. 3.81.

Величина перемещения вычисляется по формуле (3.14):

$$\begin{aligned} \Delta_K^{\text{гор}} = \Delta_{1t} &= \sum \frac{\alpha |t_2 - t_1|}{h} \Omega_{M1} + \sum \alpha t_{oc} \Omega_{N1} = \\ &= 1 \cdot 10^{-5} \cdot \left[\left(\frac{|30^\circ|}{0,5} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{|50^\circ|}{0,5} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{|40^\circ|}{0,5} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \right) + \frac{+20^\circ - 30^\circ}{2} \cdot (+1 \cdot 3) + \right. \\ &\left. + \frac{+10^\circ - 30^\circ}{2} \cdot (+1 \cdot 3) + \frac{+20^\circ + 10^\circ}{2} \cdot (+0,667 \cdot 4) \right] = 2,035 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,035 \text{ см.} \end{aligned}$$

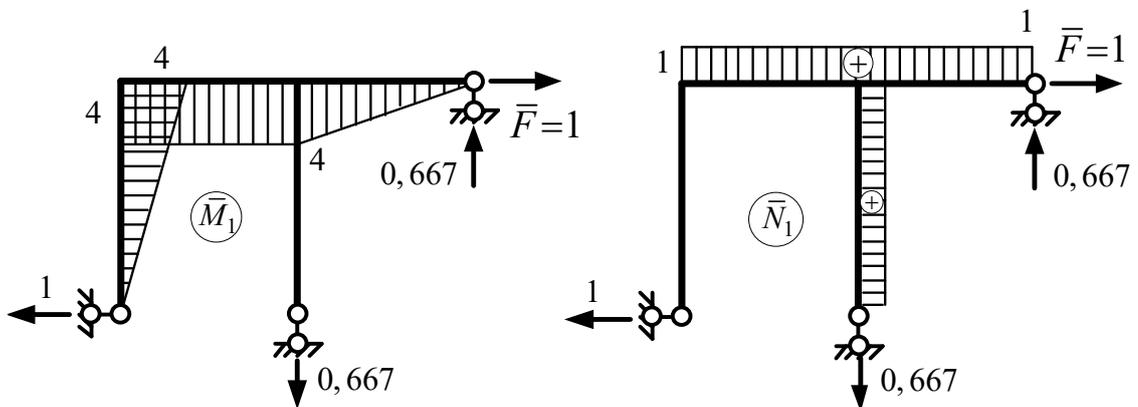


Рис. 3.81

2.8.3. Определение перемещений, вызываемых смещением опор

Рассмотрим раму, представленную на рис. 3.82.

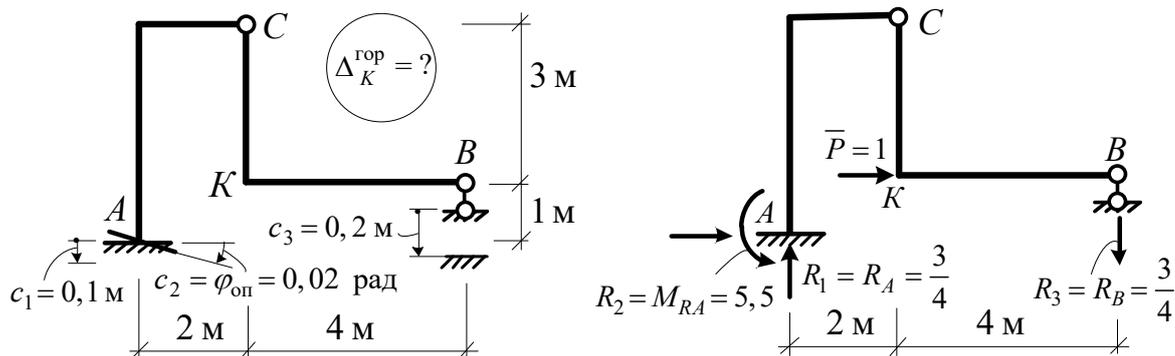


Рис. 3.82

Определяем опорные реакции в опорах, которые смещаются, по направлениям смещений:

$$\sum M_C^{\text{мп}} = 0; \quad -1 \cdot 3 + R_3 \cdot h = 0; \quad R_3 = \frac{3}{4}.$$

$$\sum Y = 0; \quad R_A - \frac{3}{4} = 0; \quad R_A = R_1 = \frac{3}{4}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_{RA} + 1 \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 6 = 0; \quad M_{RA} = 5,5.$$

Вычисляем перемещение по формуле (3.15):

$$\Delta_K^{\text{гор}} = \Delta_{1c} = -\sum_{j=1}^3 (\bar{R}_{ji} \cdot c_j) = -\left[-\frac{3}{4} \cdot 0,1 + \frac{3}{4} \cdot 0,2 - 5,5 \cdot 0,02 \right] = +0,035 \text{ м} = 3,5 \text{ см}.$$

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

3.1. Степень статической неопределимости системы

Степень статической неопределимости рам определяем по формулам:

$$L = 3K - Ш; \quad (4.2)$$

$$L = -(3D - 2Ш - C_0). \quad (4.3)$$

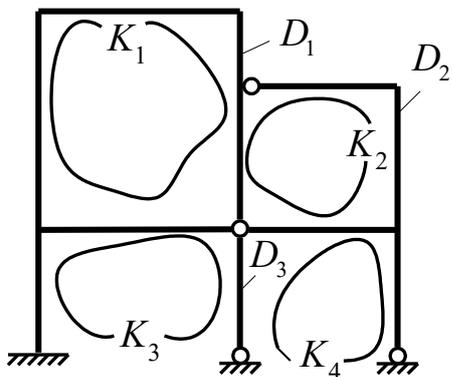


Рис. 4.1

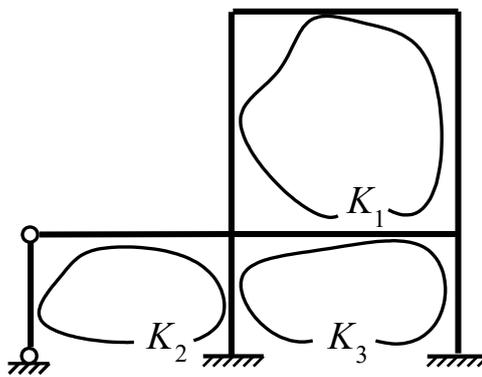


Рис. 4.2

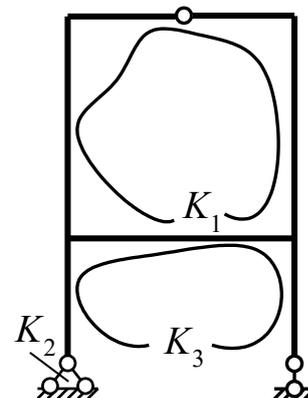


Рис. 4.3

Вычислим число лишних связей для рам, представленных на рис. 4.1÷4.3:

а) для рамы на рис. 4.1:

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 4 - 6 = 6;$$

$$L = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 7) = 6.$$

б) для рамы на рис. 4.2:

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 2 = 7;$$

рама содержит в себе жесткие замкнутые контуры и по формуле

$$L = -(3D - 2Ш - C_0)$$

лишние связи в ней рассчитывать нельзя;

в) для рамы на рис. 4.3:

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 3 - 7 = 2;$$

$$L = -(3D - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 3) = 2.$$

3.2. Выбор основной системы метода сил

Пример 4.1. Рама, представленная на рис. 4.4,*a*, имеет две «лишние» связи –

$$L = 3K - III = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

$$\text{или } L = -(3D - 2III - C_0) = -(3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 6) = 2,$$

и для нее могут быть выбраны основные системы (О.С.) метода сил, показанные на рис. 4.4,*б*–4.4,*д*, и не может быть принята система, изображенная на рис. 4.4,*e*, так как она мгновенно изменяема в верхней части по первому признаку мгновенной изменяемости – три диска соединены тремя шарнирами, лежащими на одной прямой.

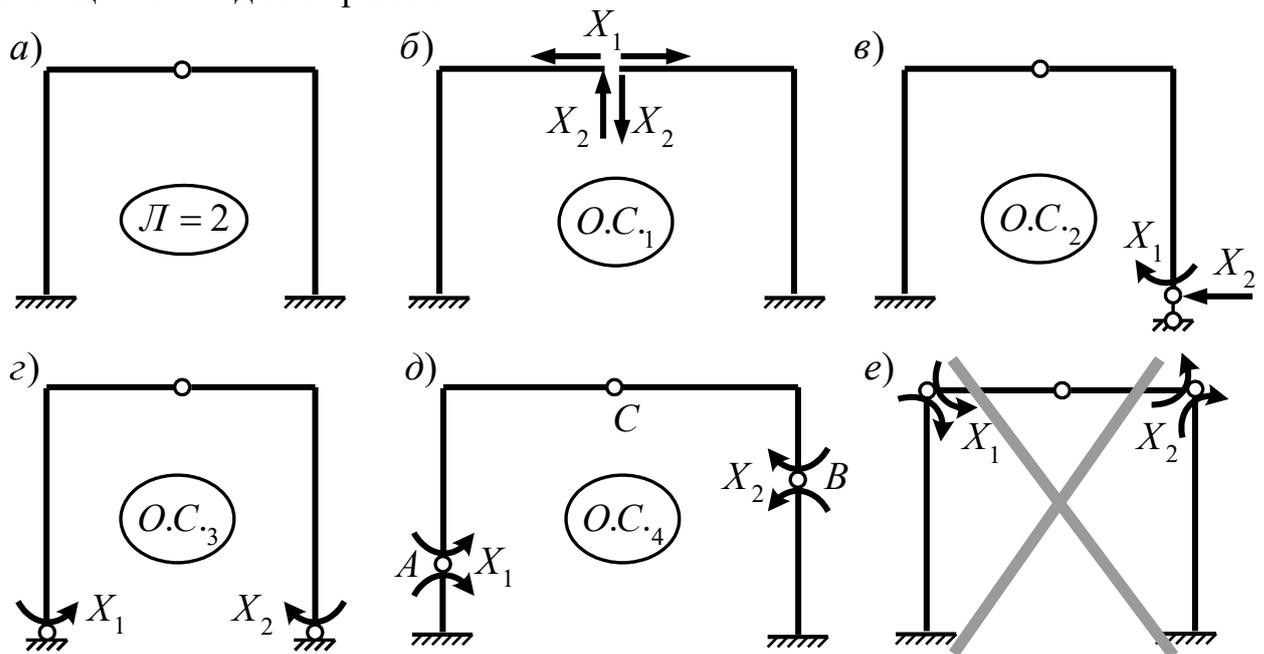


Рис. 4.4

Пример 4.2. Рама, представленная на рис. 4.5,*a*, имеет три «лишние» связи –

$$L = 3K - III = 3 \cdot 3 - 6 = 3$$

$$\text{или } L = -(3D - 2III - C_0) = -(3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 7) = 3,$$

и для нее варианты основных систем метода сил представлены на рис. 4.5,*б*–4.5,*e*; при этом нельзя принимать в качестве О.С. метода сил системы, изображенные на рис. 4.5,*ж* (первый признак мгновенной изменяемости – шарниры *B*, *C*, *T*) и на рис. 4.5,*з* (система изменяема в правой части, которая может вращаться относительно шарнира *C*, а левая часть при этом статически неопределима, что является следствием неправильного отбрасывания «лишних» связей).

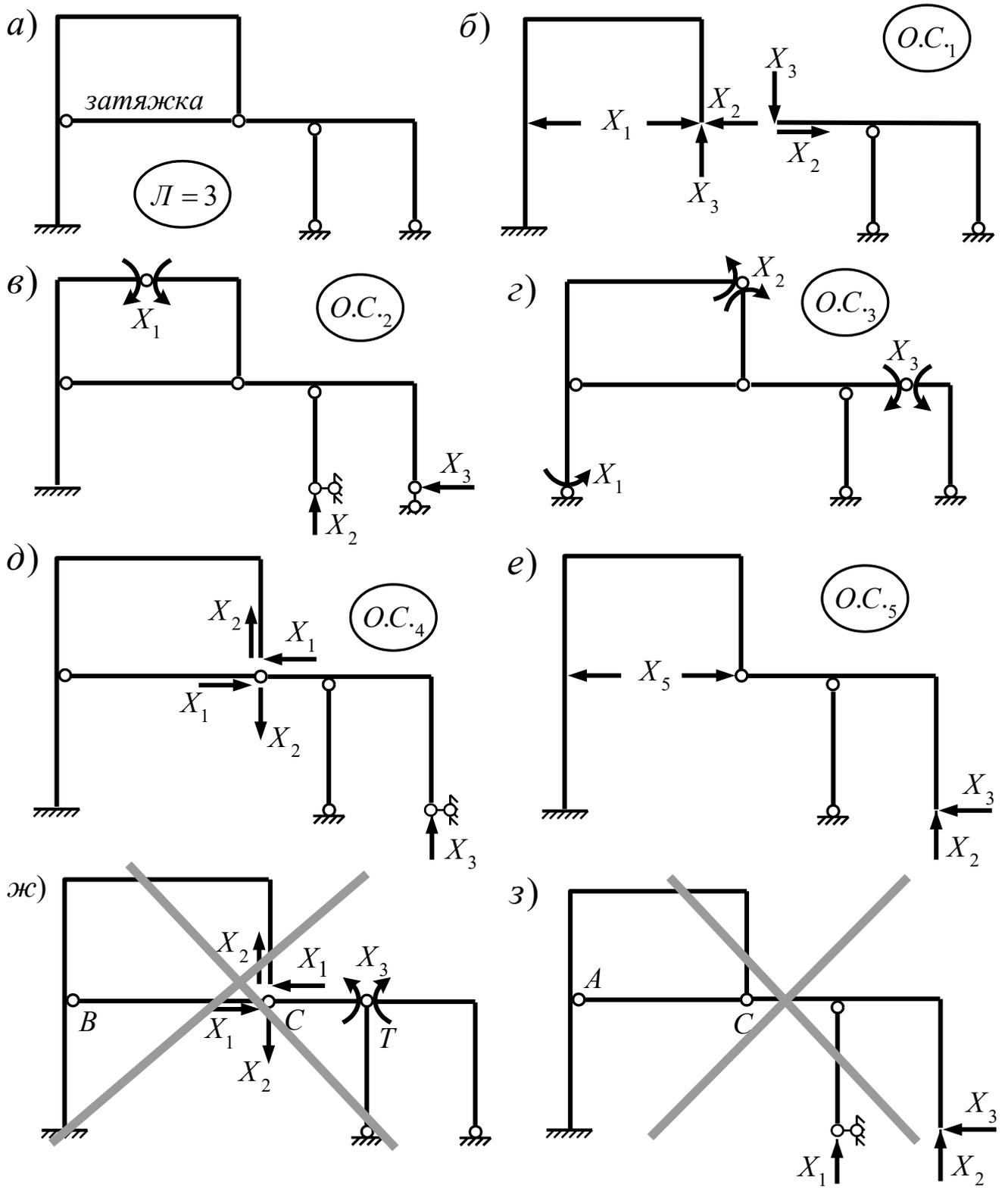


Рис. 4.5

Пример 4.3. Для рамы, представленной на рис. 4.6,а и имеющей три «лишние» связи –

$$L = 3K - Ш = 3 \cdot 1 - 0 = 3,$$

возможные варианты основных систем метода сил показаны на рис. 4.6,б–4.6,е.

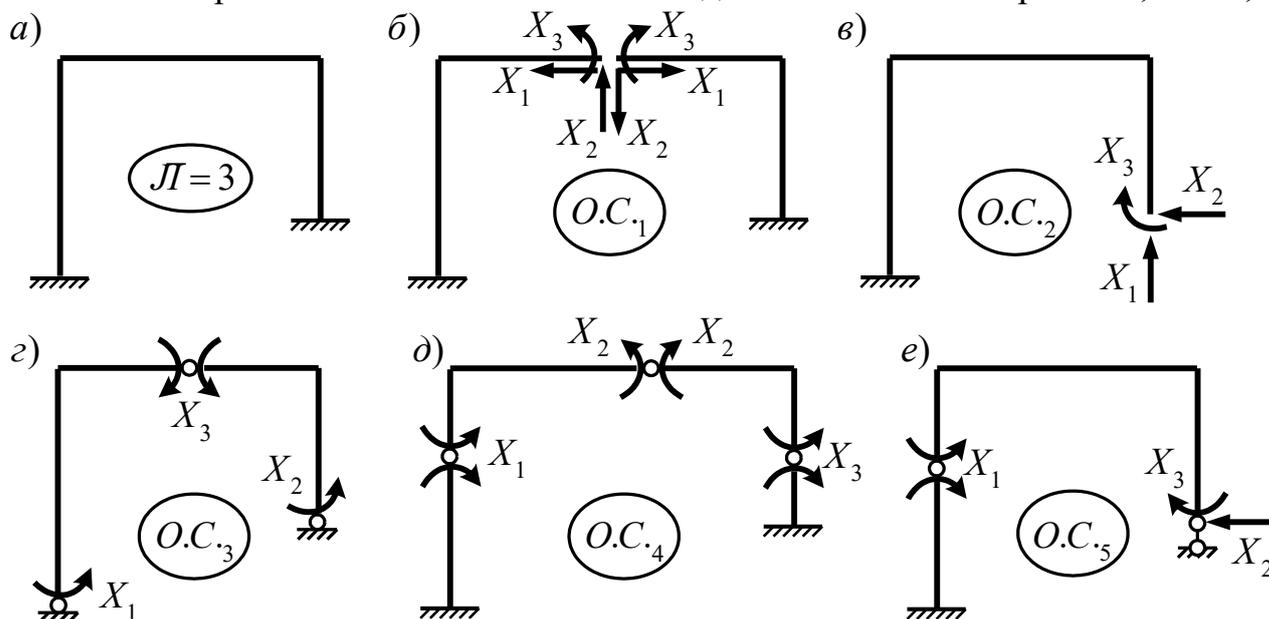


Рис. 4.6

Как видно из примеров, для получения основных систем метода сил можно использовать **следующие подходы в отбрасывании «лишних» связей**:

– отбрасывание опор (удаляется одна связь при отбрасывании шарнирно подвижной опоры, две связи – при отбрасывании шарнирно неподвижной опоры и три связи – при отбрасывании заделки) (см., например, рис. 4.6,в);

– отбрасывание отдельных опорных связей в опорах (количество удаляемых связей равно числу отброшенных опорных связей) (см., например, рис. 4.6,з,е);

– разрезание затяжек (удаляется одна связь, действующая вдоль затяжки);

– врезание шарниров (удаляется одна связь – угловая) (см. рис. 4.6,д);

– разрезание шарниров (удаляются две связи при разрезании одного простого шарнира) (см., например, рис. 4.5,д);

– разрезание стержней (удаляются три связи) (см., например, рис. 4.6,б).

Для расчета же методом сил должна быть выбрана одна основная система, которую будем называть **расчетной основной системой** метода сил.

В качестве расчетной О.С. следует принимать наиболее рациональную.

Рациональность основных систем определяется следующими положениями:

1) в расчетной основной системе метода сил определение опорных реакций и построение эпюр внутренних усилий должно быть как можно более простым;

2) эпюры внутренних сил (изгибающих моментов) также должны быть как можно более простыми;

3) для симметричных рам следует выбирать симметричные расчетные основные системы.

Для рамы на рис. 4.4 в качестве расчетной целесообразнее всего принять О.С.1, для рамы на рис. 4.5 – О.С.1, для рамы на рис. 4.6 – О.С.1 либо О.С.2.

3.3. Примеры расчета рам методом сил

Рассмотрим пример расчета рамы методом сил с одной лишней связью. Принципы и подходы в расчетах рам с бóльшим числом лишних связей ничем не отличаются от представленных в данном примере – разница будет связана только с числом уравнений в системах уравнений, с числом вычисляемых единичных коэффициентов и свободных членов системы уравнений и с числом единичных эпюр изгибающих моментов, которые необходимо будет строить и с использованием которых выполняются расчеты.

Рассчитаем раму, представленную на рис. 4.10,*а*.

1. Данная рама имеет одну лишнюю связь:

$$L = 3K - 3I = 3 \cdot 3 - 8 = 1$$

$$\text{или } L = -(3D - 2I - C_0) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4) = 1,$$

2. Принятая расчетная основная система метода сил показана на рис. 4.10,*б*. Выбор *О.С.* здесь может быть выполнен также отбрасыванием любой другой опорной связи, либо врезанием шарнира в любом сечении рамы, кроме сечения, лежащего на пересечении стержня *CD* и воображаемой прямой *AB*, так как в этом случае полученная система будет мгновенно изменяемой, как образованная тремя дисками, соединенными между собой тремя шарнирами, лежащими на одной прямой (первый признак мгновенно изменяемости – см. раздел 2.2).

3. Каноническое уравнение метода сил здесь будет также одно и будет представлять собой по физическому смыслу горизонтальное перемещение точки *B* в основной системе метода сил от действия силы X_1 и внешней нагрузки, которое должно равняться нулю, так как в исходной системе (рис. 4.10,*а*) в точке *B* имеется горизонтальная связь (стоит шарнирно неподвижная опора):

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (4.16)$$

4. В основной системе (*О.С.*) метода сил как в обычной статически определимой системе строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 от действия силы X_1 единичной величины ($X_1 = 1$) (рис. 4.10,*в*) и грузовую эпюру M_P от действия заданных нагрузок (рис. 4.10,*г*).

5. Вычисляем коэффициент δ_{11} и свободный член Δ_{1P} уравнения метода сил. Покажем здесь вычисление этих величин разными способами:

СОДЕРЖАНИЕ

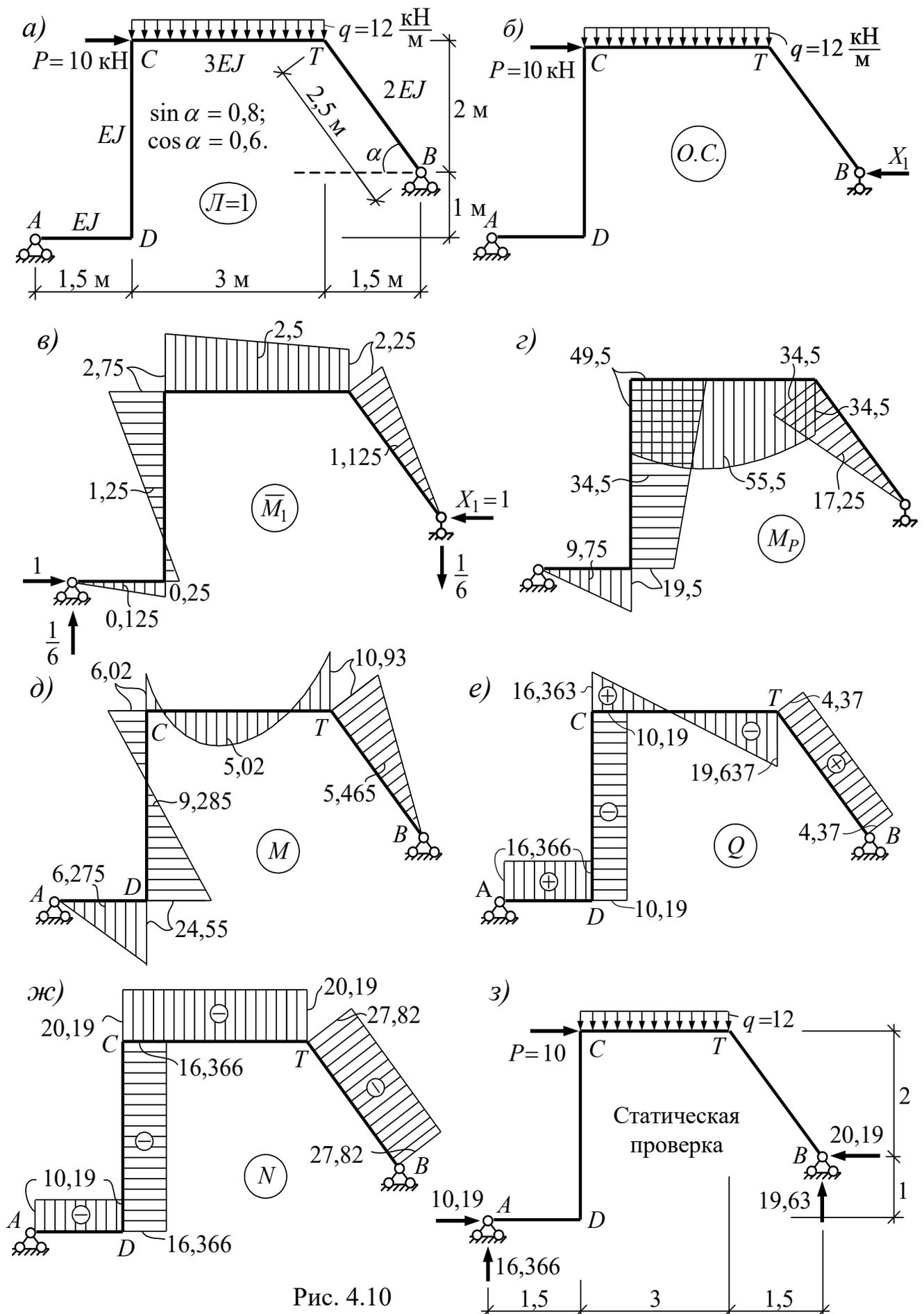


Рис. 4.10

а) по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,25 \cdot 1,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 0,25 + \frac{1}{EJ} \left[-(0,25 \cdot 3) \cdot 1,25 + \frac{(2,75 + 0,25)}{2} \cdot 3 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} 3 - 0,25 \right) \right] + \frac{1}{3EJ} \left[(2,25 \cdot 3) \cdot 2,5 + \frac{(2,75 - 2,25) \cdot 3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} 0,5 + 2,25 \right) \right] + \\ + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{2,25 \cdot 2,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 2,25 = \frac{1}{EJ} (0,031 + 6,938 + 6,271 + 2,109) = \frac{15,35}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_D dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{19,5 \cdot 1,5}{2} \right) \frac{2}{3} 0,25 + \frac{1}{EJ} \left[-(19,5 \cdot 3) \cdot 1,25 - \frac{(49,5 - 19,5)}{2} \cdot 3 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{3} 3 - 0,25 \right) \right] + \frac{1}{3EJ} \left[-(34,5 \cdot 3) \cdot 2,5 - \frac{(49,5 - 34,5)}{2} \cdot 3 \left(2,25 + \frac{2}{3} 0,5 \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{12 \cdot 3^2}{8} \cdot 3 \right) \cdot 2,5 \right] - \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} 34,5 \cdot 2,5 \right) \frac{2}{3} 2,25 = -\frac{309,906}{EJ};$$

б) по формуле Симпсона:

$$\delta_{11} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} = \frac{1,5}{6EJ} (0^2 + 4 \cdot 0,125^2 + 0,25^2) + \frac{3}{6EJ} (0,25^2 + 4 \cdot 1,25^2 + 2,75^2) + \\ + \frac{3}{6 \cdot 3EJ} (2,75^2 + 4 \cdot 2,5^2 + 2,25^2) + \frac{2,5}{6 \cdot 2EJ} (2,25^2 + 4 \cdot 1,125^2 + 0^2) = \frac{15,35}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P dx}{EJ} = \frac{1,5}{6EJ} (0^2 + 4 \cdot 0,125 \cdot 9,75 + 0,25 \cdot 19,5) + \frac{3}{6EJ} (0,25 \cdot 19,5 - \\ - 4 \cdot 1,25 \cdot 34,5 - 2,75 \cdot 49,5) - \frac{3}{6 \cdot 3EJ} (-2,75 \cdot 49,5 - 4 \cdot 2,5 \cdot 55,5 - 2,25 \cdot 34,5) + \\ + \frac{2,5}{6 \cdot 2EJ} (-2,25 \cdot 34,5 - 4 \cdot 1,125 \cdot 17,25 + 0 \cdot 0) = -\frac{309,906}{EJ}.$$

Ⓢ Заметим, что при подобных вычислениях интегралов Мора можно на различных участках выполнять расчеты разными способами (по правилу Верещагина, по формуле трапеций, по формуле Симпсона), комбинируя их с точки зрения удобства выполнения вычислений.

7. Решаем каноническое уравнение метода сил (4.16)

$$\frac{15,35}{EJ} X_1 - \frac{309,906}{EJ} = 0; \quad X_1 = 20,19 \text{ кН.}$$

8. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов по формуле (4.10)

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + M_P,$$

умножая все характерные ординаты эпюры \bar{M}_1 на величину 20,19 и складывая результаты с соответствующими ординатами эпюры M_P . Окончательная эпюра M представлена на рис. 4.10,д.

СОДЕРЖАНИЕ

9. Деформационная (кинематическая) проверка окончательной эпюры M :

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M dx}{EJ} = 0; \quad \frac{1}{EJ} \left(\frac{24,55 \cdot 1,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 + \frac{3}{6EJ} (0,25 \cdot 24,55 - 4 \cdot 1,25 \cdot 9,285 +$$

$$+ 2,75 \cdot 6,02) + \frac{3}{6 \cdot 3EJ} (2,75 \cdot 6,02 - 4 \cdot 2,5 \cdot 5,02 + 2,25 \cdot 10,93) + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{10,93 \cdot 2,5}{2} \right) \frac{2}{3} \cdot 2,25 =$$

$$= \frac{1}{EJ} (3,069 - 11,866 - 1,509 + 10,247) = \frac{1}{EJ} (13,316 - 13,375) = 0,059 \approx 0;$$

погрешность $\left| \frac{13,316 - 13,375}{13,375} \right| \cdot 100\% = 0,443\% < 1\%$ незначительна.

10. Строим эпюру поперечных сил в заданной статически неопределимой системе, используя формулы (4.13), (4.14):

а) на участках AD и DC по формуле (4.13) получим

$$Q_{AD} = + \left| \frac{24,55 - 0}{1,5} \right| = +16,366 \text{ кН}; \quad Q_{DC} = - \left| \frac{24,55 - (-6,02)}{3} \right| = -10,19 \text{ кН};$$

б) на участке CT необходимо использовать формулу (4.14)

$$Q_{CT} = \pm \frac{12 \cdot 3}{2} - \left| \frac{10,93 - 6,02}{3} \right| = \pm 18 - 1,637 \text{ кН};$$

$$Q_{CT}^{лев} = +18 - 1,637 = 16,363 \text{ кН}; \quad Q_{CT}^{прав} = -18 - 1,637 = -19,637 \text{ кН};$$

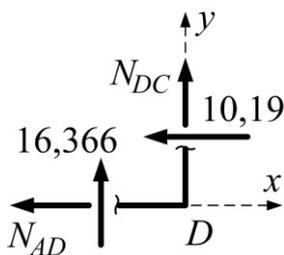
в) на участке TB поперечную силу получим по формуле (4.13)

$$Q_{TB} = + \left| \frac{10,93 - 0}{2,5} \right| = +4,37 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил изображена на рис. 4.10,е.

11. Эпюру продольных сил N строим способом вырезания узлов на эпюре Q :

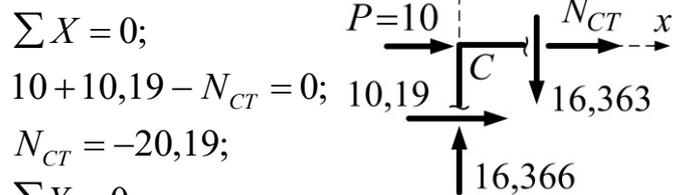
а) узел D



$$\sum X = 0; \quad N_{AD} = -10,19;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_{DC} = -16,366;$$

б) узел C



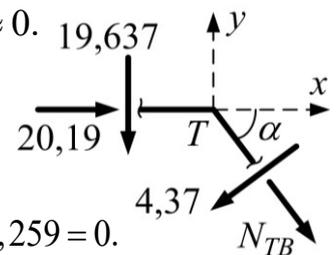
$$\sum X = 0; \quad 10 + 10,19 - N_{CT} = 0; \quad N_{CT} = -20,19;$$

$$\sum Y = 0; \quad 16,366 - 16,363 \approx 0.$$

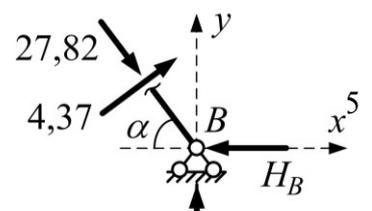
в) узел T

$$\sum X = 0; \quad 20,19 - 4,37 \cdot 0,8 + N_{TB} \cdot 0,6 = 0; \quad N_{TB} = -27,823;$$

$$\sum Y = 0; \quad -19,637 - 4,37 \cdot 0,6 + 27,823 \cdot 0,8 = 0; \quad -22,259 + 22,259 = 0.$$



Эпюра продольных сил в заданной статически

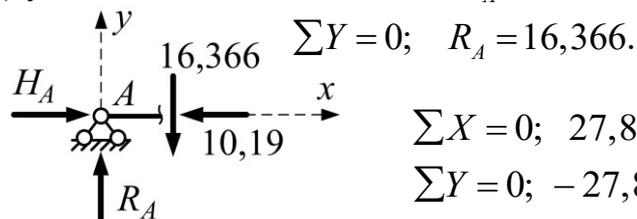


СОДЕРЖАНИЕ

неопределимой системе изображена на рис. 4.10,ж.

12. Вырезая опорные узлы, найдем опорные реакции:

а) узел А $\sum X = 0; H_A = 10,19;$ б) узел В



$\sum Y = 0; R_A = 16,366.$

$\sum X = 0; 27,82 \cdot 0,6 + 4,37 \cdot 0,8 - H_B = 0; H_B = 20,19;$

$\sum Y = 0; -27,82 \cdot 0,8 + 4,37 \cdot 0,6 + R_B = 0; R_B = 19,63.$

Приложив заданные нагрузки и опорные реакции к системе (рис. 4.10,з), выполним статическую проверку равновесия рамы:

$$\sum X = 0; 10,19 + 10 - 20,19 = 0; 20,19 - 20,19 = 0;$$

$$\sum Y = 0; 16,366 - 12 \cdot 3 + 19,63 = 0; 35,999 - 36 \approx 0; \sum M_C = 0;$$

$$12 \cdot 3 \cdot 1,5 - 10,19 \cdot 3 + 16,366 \cdot 1,5 - 19,63 \cdot 4,5 + 20,19 \cdot 2 = 0; 118,929 - 118,905 \approx 0;$$

$$\text{погрешность } \left| \frac{118,929 - 118,905}{118,905} \right| \cdot 100\% = 0,02\% \text{ незначительна.}$$

Пример 2. Рассмотрим более сложную раму, показанную на рис. 4.12,а.

1. Рама имеет две лишние связи

$$L = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

$$\text{или } L = -(3D - 2III - C_o) = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 5) = 2.$$

2. Принятая расчетная основная система метода сил показана на рис. 4.12,б.

Вариантами О.С. здесь могут быть также рамы, представленные на рис. 4.11.

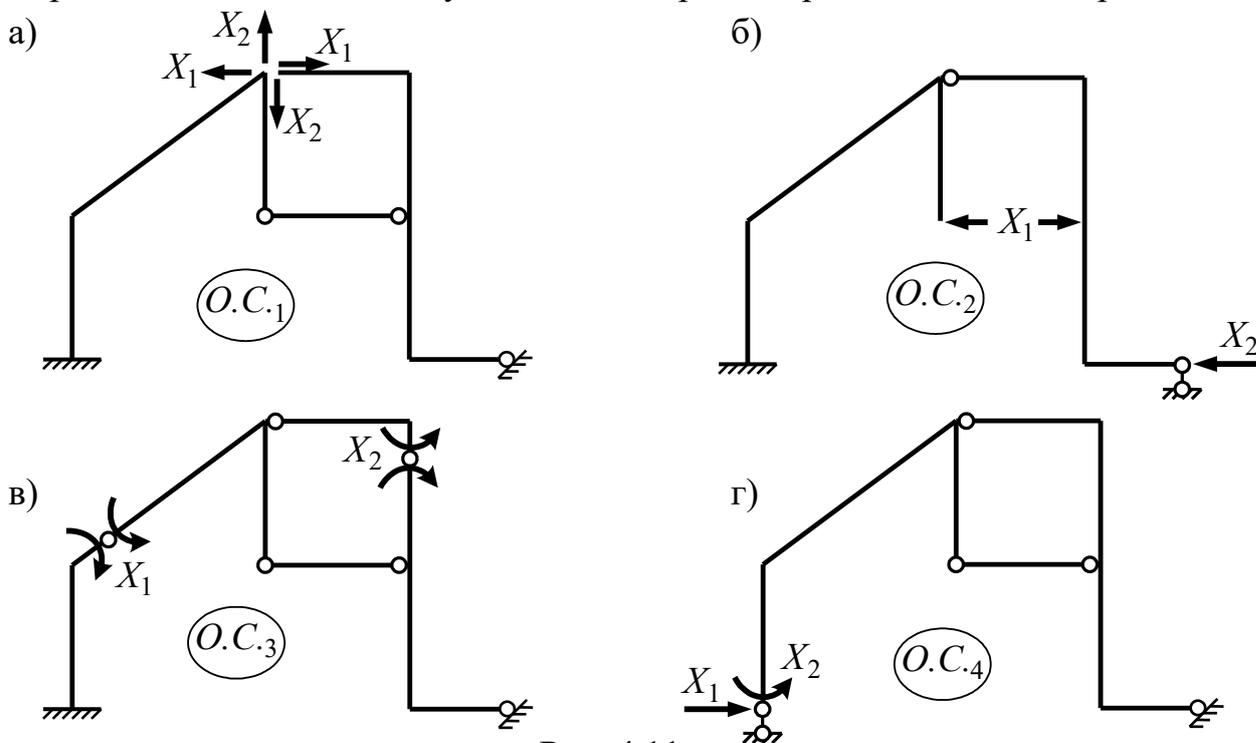


Рис. 4.11

3. Система канонических уравнений метода сил здесь будет иметь вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Физический смысл уравнений:

1-ое уравнение – представляет собой угол поворота сечения в стержне над опорой A (рис. 4.12,б) от действия сил X_1 , X_2 и заданной внешней нагрузки, который должен быть равен нулю, так как это сечение в заданной статически неопределимой раме жестко присоединено к основанию (опорой в точке A является заделка);

2-ое уравнение – представляет взаимное расхождение точек D и K от действия сил X_1 , X_2 и внешней нагрузки, которое должно равняться нулю, так как эти точки соединены стержнем (затяжкой), который считается нерастяжимым (в расчете пренебрегается продольными деформациями).

Физический смысл отдельных коэффициентов и свободных членов:

δ_{12} – угол поворота в основной системе метода сил сечения над опорой A от действия сил X_2 единичной величины;

δ_{22} – взаимное расхождение точек D и K в основной системе от действия сил X_2 , равных по единице;

Δ_{2P} – взаимное расхождение точек D и K в основной системе от действия внешних нагрузок.

4. Строим в основной системе метода сил единичные эпюры изгибающих моментов (две) \bar{M}_1 и \bar{M}_2 от действия единичных значений неизвестных X_1 и X_2 и грузовую эпюру M_P от действия заданных внешних нагрузок.

Заметим, что рама в основной системе представляет собой трехшарнирную раму с опорами в одном уровне и определение опорных реакций в ней от любой из нагрузок может быть выполнено, например, из уравнений:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C^{лев} = 0; \quad \sum M_C^{прав} = 0,$$

а для их проверки можно использовать уравнения: $\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$

Эпюры \bar{M}_1 , \bar{M}_2 и M_P показаны на рис. 4.12,в ÷ 4.12,д.

5. Вычисляем коэффициенты и свободные члены канонических уравнений:

а) единичные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \delta_{11} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EJ} = \frac{3}{6EJ} (1^2 + 4 \cdot 0,875^2 + 0,75^2) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,75 \cdot 5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \\ + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,375 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,375 + \frac{6}{6 \cdot 2EJ} (0,375^2 + 4 \cdot 0,125^2 + 0,125^2) + \\ + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,125 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,125 = \frac{3,505}{EJ}; \end{aligned}$$

СОДЕРЖАНИЕ

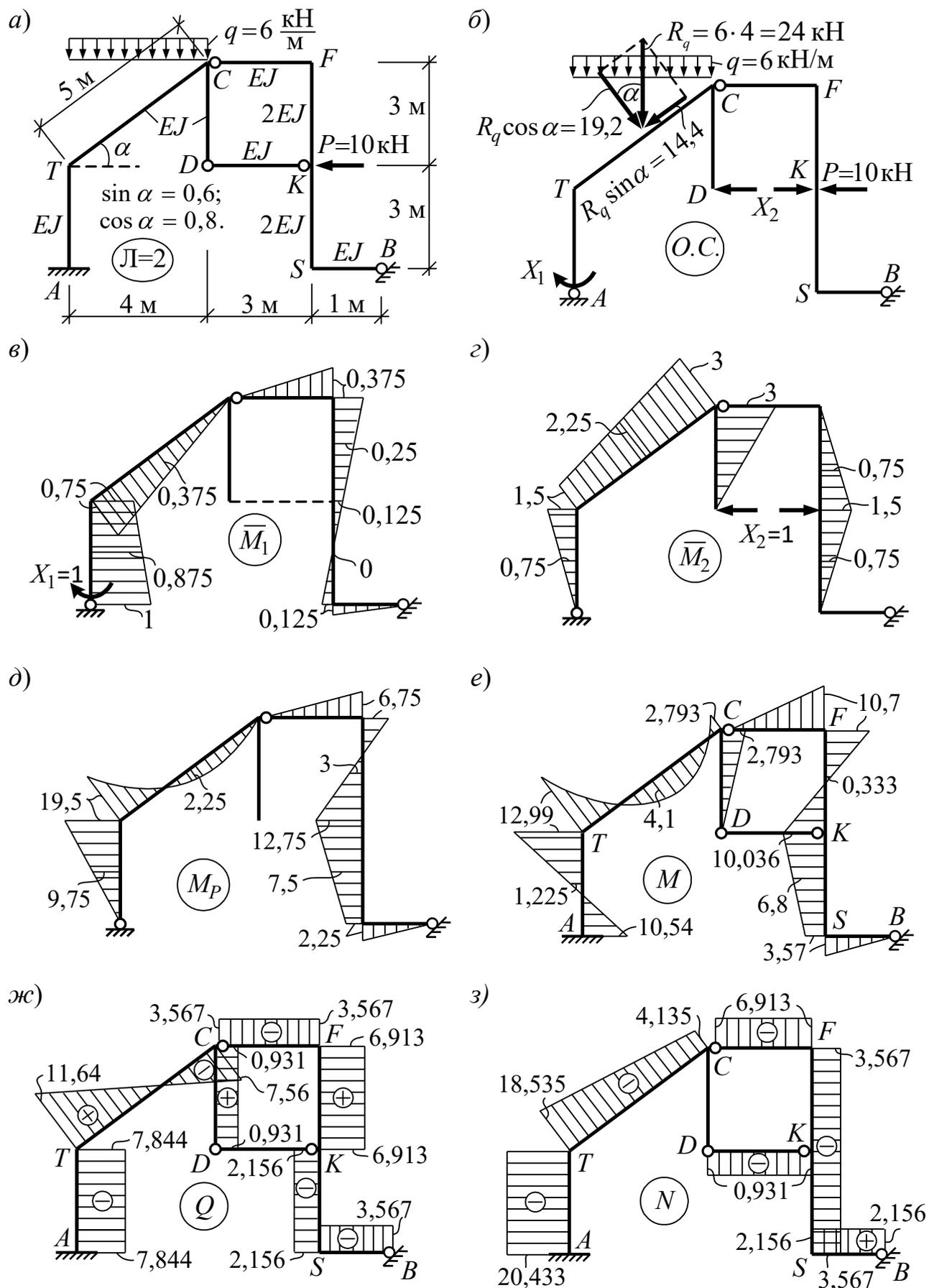


Рис. 4.12

СОДЕРЖАНИЕ

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dx}{EJ} = \frac{3}{6EJ} (-1 \cdot 0 - 4 \cdot 0,875 \cdot 0,75 - 0,75 \cdot 1,5) +$$

$$+ \frac{5}{6EJ} (-0,75 \cdot 1,5 - 4 \cdot 0,375 \cdot 2,25 - 0 \cdot 3) + \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (0,375 \cdot 0 + 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75 + 0,125 \cdot 1,5) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (0,125 \cdot 1,5 + 4 \cdot 0 \cdot 0,75 + 0,125 \cdot 0) = -\frac{5,344}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_2^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1,5 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 1,5 + \frac{5}{6EJ} (1,5^2 + 4 \cdot 2,25^2 + 3^2) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{3 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 3 +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1,5 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 1,5 \cdot 2 = \frac{39,75}{EJ};$$

б) грузовые члены:

$$\Delta_{1P} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P dx}{EJ} = \frac{3}{6EJ} (1 \cdot 0 - 4 \cdot 0,875 \cdot 9,75 - 0,75 \cdot 19,5) +$$

$$+ \frac{5}{6EJ} (-0,75 \cdot 19,5 + 4 \cdot 0,375 \cdot 2,25 + 0 \cdot 0) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,375 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 6,75 +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (0,375 \cdot 6,75 - 4 \cdot 0,25 \cdot 3 - 0,125 \cdot 12,75) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (-0,125 \cdot 12,75 + 4 \cdot 0 \cdot 7,5 + 0,125 \cdot 2,25) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,125 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 2,25 = -\frac{31,972}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1,5 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 19,5 + \frac{5}{6EJ} (19,5 \cdot 1,5 - 4 \cdot 2,25 \cdot 2,25 + 3 \cdot 0) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (0 \cdot 6,75 - 4 \cdot 0,75 \cdot 3 - 1,5 \cdot 12,75) - \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (1,5 \cdot 12,75 + 4 \cdot 0,75 \cdot 7,5 + 0 \cdot 2,25) =$$

$$= \frac{19,313}{EJ}.$$

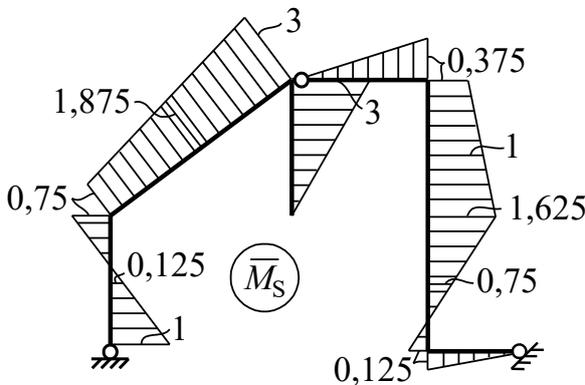


Рис. 4.13

6. Проверки правильности вычисления единичных коэффициентов и грузовых членов:

а) универсальная проверка:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S^2 dx}{EJ} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \delta_{ik},$$

где $\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$ – суммарная единичная эпюра изгибающих моментов, имеющая вид, показанный на рис. 4.13;

СОДЕРЖАНИЕ

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S^2 dx}{EJ} = \frac{3}{6EJ} (1^2 + 4 \cdot 0,125^2 + 0,75^2) + \frac{5}{6EJ} (0,75^2 + 4 \cdot 1,875^2 + 3^2) +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \left(\frac{3 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 3 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,375 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 0,375 + \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (0,375^2 + 4 \cdot 1^2 + 1,625^2) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (1,625^2 + 4 \cdot 0,75^2 + 0,125^2) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,125 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 0,125 = \frac{32,568}{EJ};$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \delta_{ik} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{3,505}{EJ} - \frac{5,344}{EJ} \cdot 2 + \frac{39,75}{EJ} = \frac{32,567}{EJ};$$

проверка выполняется;

б) столбцовая проверка:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S M_P dx}{EJ} = \sum_{i=1}^2 \Delta_{iP}; \quad \sum_{i=1}^2 \Delta_{iP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = -\frac{31,972}{EJ} + \frac{19,313}{EJ} = -\frac{12,659}{EJ};$$

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S M_P dx}{EJ} = \frac{3}{6EJ} (1 \cdot 0 - 4 \cdot 0,125 \cdot 9,75 + 0,75 \cdot 19,5) +$$

$$+ \frac{5}{6EJ} (0,75 \cdot 19,5 - 4 \cdot 1,875 \cdot 2,25 + 3 \cdot 0) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,375 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 6,75 +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (0,375 \cdot 6,75 - 4 \cdot 1 \cdot 3 - 1,625 \cdot 12,75) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (-1,625 \cdot 12,75 - 4 \cdot 0,75 \cdot 7,5 + 0,125 \cdot 2,25) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{0,125 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} 2,25 = -\frac{12,66}{EJ};$$

проверка выполняется.

7. Решаем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \frac{3,505}{EJ} X_1 - \frac{5,344}{EJ} X_2 - \frac{31,982}{EJ} = 0; \\ -\frac{5,344}{EJ} X_1 + \frac{39,75}{EJ} X_2 + \frac{19,313}{EJ} = 0. \end{cases}$$

Находим: $X_1 = 10,54$ (кН·м); $X_2 = 0,931$ (кН).

Проверяем решение путем подстановки этих значений в уравнения:

$$\begin{cases} 3,505 \cdot 10,54 - 5,344 \cdot 0,931 - 31,972 = 0; & 36,943 - 36,947 \approx 0; & \text{погрешности} \\ -5,344 \cdot 10,54 + 39,75 \cdot 0,931 + 19,313 = 0; & 56,325 - 56,321 \approx 0. & \text{незначительны.} \end{cases}$$

8. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов по формуле:

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_P.$$

Для удобства расчетов можно отдельно построить промежуточные эпюры

$\bar{M}_1 \cdot X_1$ и $\bar{M}_2 \cdot X_2$ (см. рис. 4.14):

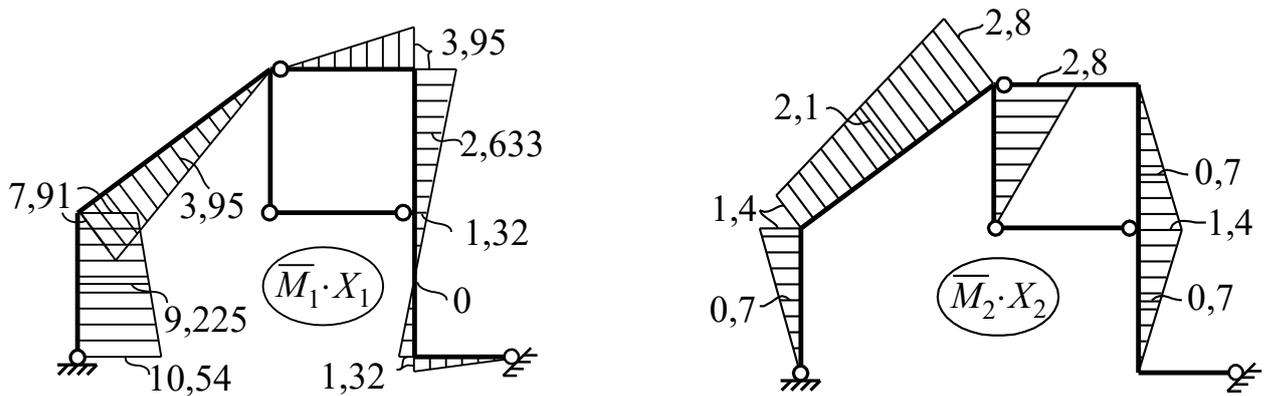


Рис. 4.14

Сложив ординаты эпюр $\bar{M}_1 \cdot X_1$, $\bar{M}_2 \cdot X_2$ (рис. 4.14) и M_p (рис. 4.12, д), получим окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе в виде, изображенном на рис. 4.12, е.

9. Деформационная (кинематическая) проверка эпюры M :

$$\begin{aligned} \sum_1^n \int_0^l \frac{M \bar{M}_s dx}{EJ} &= 0; \quad \frac{3}{6EJ} (1 \cdot 10,54 - 4 \cdot 1,225 \cdot 0,125 + 12,99 \cdot 0,75) + \\ &+ \frac{5}{6EJ} (12,99 \cdot 0,75 - 4 \cdot 4,10 \cdot 1,875 + 2,793 \cdot 3) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{2,793 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \\ &+ \frac{1}{EJ} \left(\frac{10,7 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,375 + \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (10,7 \cdot 0,375 + 4 \cdot 1 \cdot 0,333 - 10,036 \cdot 1,625) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot 2EJ} (-10,036 \cdot 1,625 - 4 \cdot 6,8 \cdot 0,75 - 3,57 \cdot 0,125) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{3,57 \cdot 1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,125 = \\ &= \frac{1}{EJ} (9,835 - 10,524 + 8,379 + 4,013 - 2,741 - 9,066 + 0,149) = \\ &= \frac{1}{EJ} (22,376 - 22,331) = \frac{0,045}{EJ} \approx 0; \end{aligned}$$

$$\text{погрешность } \frac{0,045}{22,331} \cdot 100\% = 0,2\% < 3\% \text{ незначительна.}$$

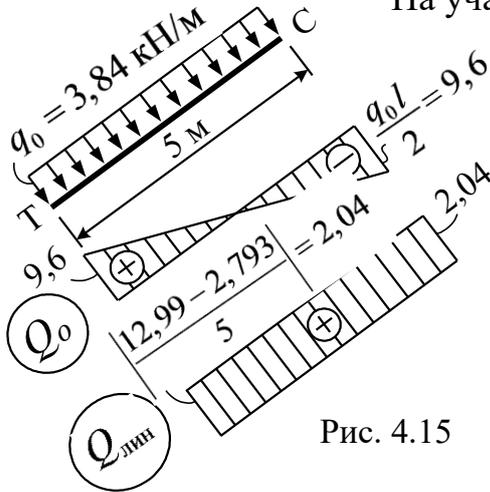
10. Эпюру поперечных сил Q строим по эпюре изгибающих моментов с использованием формул (4.13), (4.14). При этом на наклонном участке рамы $ТС$ заданную распределенную нагрузку необходимо разложить на составляющие вдоль и перпендикулярно к стержню. Для этого вначале найдем равнодействующую равномерно распределенной нагрузки $q - R_q = q \cdot l = 6 \cdot 4 = 24$ кН, которую затем разложим на две составляющие (см. рис. 4.12, б). Если теперь составляющую, действующую нормально к стержню, разделить на длину наклонного стержня (5 м), то получим величину равномерно распределенной нагрузки q_0 ($q_0 = 19,2 / 5 = 3,84$ кН/м), действующей перпендикулярно на этот участок рамы, и от действия которой после этого сможем вычислить ординаты эпюры Q_0 , входящие в формулу (4.13) – см. рис. 4.15.

Значения ординат эпюры Q по краям участка $ТС$ тогда будут равны

$$Q_{TC} = Q_0 + \left| \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l} \right| = \pm \frac{3,84 \cdot 5}{2} + \left| \frac{2,793 - 12,99}{5} \right| = \pm 9,6 + 2,04;$$

$$Q_{TC}^{\text{лев}} = +9,6 + 2,04 = 11,64 \text{ кН}; \quad Q_{TC}^{\text{прав}} = -9,6 + 2,04 = -7,56 \text{ кН}.$$

На участках линейного изменения эпюры M получим:



$$Q_{AT} = - \left| \frac{10,54 - (-12,99)}{3} \right| = 7,844 \text{ кН};$$

$$Q_{CD} = + \left| \frac{0 - 2,793}{3} \right| = +0,931 \text{ кН};$$

$$Q_{CF} = - \left| \frac{10,7 - 0}{3} \right| = -3,567 \text{ кН};$$

$$Q_{FK} = + \left| \frac{10,036 - (-10,7)}{3} \right| = 6,913 \text{ кН};$$

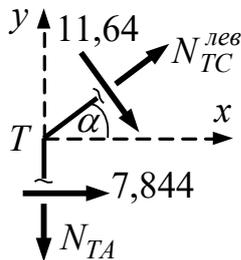
$$Q_{KS} = - \left| \frac{3,57 - 10,036}{3} \right| = -2,156 \text{ кН};$$

$$Q_{SB} = - \left| \frac{0 - 3,57}{1} \right| = -3,567 \text{ кН};$$

Эпюра поперечных сил в заданной статически неопределимой раме представлена на рис. 4.12,ж.

11. Эпюру продольных сил строим способом вырезания узлов:

а) узел Т



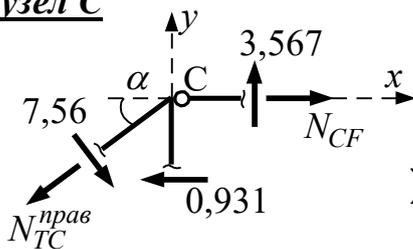
$$\sum X = 0; \quad 7,844 + 11,64 \cdot 0,6 + N_{TC}^{\text{лев}} \cdot 0,8 = 0;$$

$$N_{TC}^{\text{лев}} = -18,535 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; \quad -N_{TA} - 11,64 \cdot 0,8 - (-18,535) \cdot 0,6 = 0;$$

$$N_{TA} = -20,433 \text{ кН};$$

б) узел С



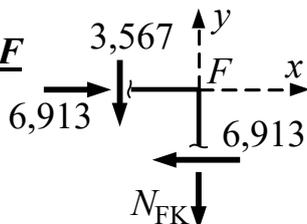
$$\sum Y = 0; \quad -N_{TC}^{\text{прав}} \cdot 0,6 - 7,56 \cdot 0,8 + 3,567 = 0;$$

$$N_{TC}^{\text{прав}} = -4,135 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0; \quad -(-4,135) \cdot 0,8 + 7,56 \cdot 0,6 - 0,931 + N_{CF} = 0;$$

$$N_{CF} = -6,913 \text{ кН};$$

в) узел F



$$\sum X = 0; \quad 6,913 - 6,913 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad -3,567 - N_{FK} = 0;$$

$$N_{FK} = 3,567 \text{ кН}.$$

Аналогично вырезаем узлы K и S . Окончательная эпюра продольных сил в заданной статически неопределимой раме представлена на рис. 4.12,з.

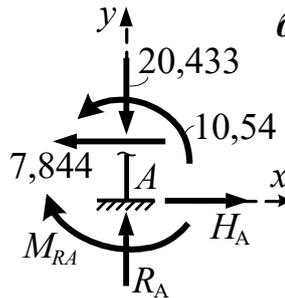
12. Вырезая теперь опорные узлы и учитывая все виды усилий в приопорных сечениях (M, Q, N), несложно найти реакции опор в опорных узлах A и B :

а) узел A

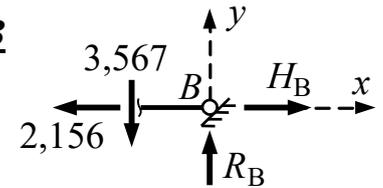
$$\sum X = 0; \quad H_A = 7,844 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; \quad R_A = 20,433 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad M_{RA} = 10,54 \text{ кН*м};$$



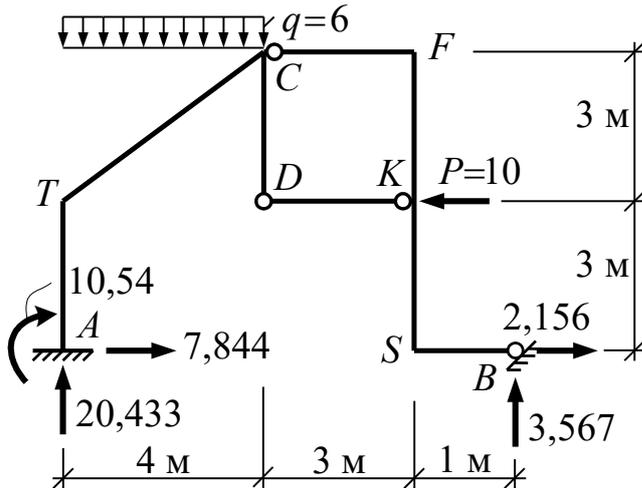
б) узел B



$$\sum X = 0; \quad H_B = 2,156 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; \quad R_B = 3,567 \text{ кН}.$$

12. После этого делаем статическую проверку равновесия рамы:



$$\sum X = 0;$$

$$7,844 + 2,156 - 10 = 0; \quad 10 - 10 = 0;$$

$$\sum Y = 0;$$

$$20,433 + 3,567 - 6 \cdot 4 = 0; \quad 24 - 24 = 0;$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$10,54 + 20,433 \cdot 4 - 7,844 \cdot 6 -$$

$$-(6 \cdot 4) \cdot 2 + 10 \cdot 3 - 2,156 \cdot 6 -$$

$$-3,567 \cdot 4 = 0; \quad 122,27 - 122,27 = 0.$$

3.3.1. Пример расчета симметричной рамы

Рассмотрим раму, представленную на рис. 4.19,а. Несмотря на то, что в точке A стоит шарнирно неподвижная опора, а в симметричной ей относительно оси симметрии рамы точке B стоит шарнирно подвижная опора, данная рама с точки зрения рассматриваемой классической формы метода сил, в которой не учитываются продольные деформации стержней, а учитываются только изгибные их деформации, будет симметричной (точка B , как и точка A , смещаться горизонтально не может). Внешняя нагрузка на раму является кососимметричной.

1. Степень статической неопределимости рамы равна

$$L = 3K - III = 3 \cdot 5 - 10 = 5,$$

то есть рама имеет пять лишних связей.

2. Основная система метода сил может быть выбрана в виде, показанном на рис. 4.19,б, где неизвестные X'_2, X'_3 и X'_4 удовлетворяют полностью условиям симметрии, являясь либо симметричными (X'_3, X'_4), либо кососимметричными (X'_2), а неизвестные X'_1 и X'_5 не удовлетворяют условиям симметрии, но действуют они в симметричных точках и направлениях. Поэтому можно выполнить их группировку, произведя замену

$$\begin{cases} X'_1 = X_1 + X_5; \\ X'_5 = X_1 - X_5. \end{cases}$$

СОДЕРЖАНИЕ

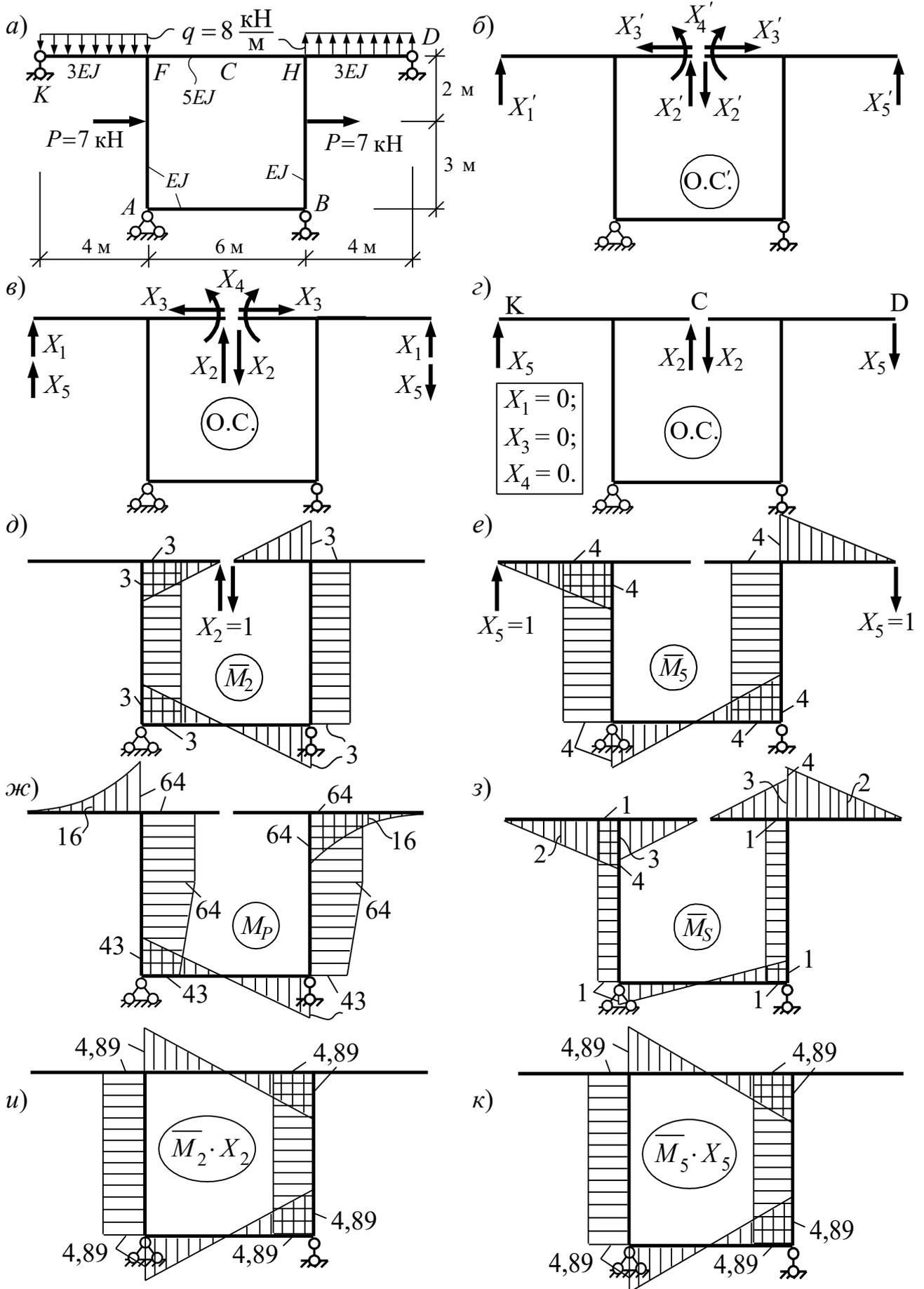


Рис. 4.19

Основная система с учетом данной замены показана на рис. 4.19,в. Теперь сгруппированное неизвестное X_1 будет симметричным, а неизвестное X_5 – кососимметричным. Учитывая, что внешняя нагрузка кососимметрична, симметричные неизвестные должны быть равны нулю, то есть

$$X_1 = 0; \quad X_3 = 0; \quad X_4 = 0.$$

С учетом этого упрощения в основной системе метода сил для данной рамы останется только два неизвестных метода сил X_2 и X_5 (см. рис. 4.19,з).

3. И система канонических уравнений метода сил с учетом указанных выше упрощений будет иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{22}X_2 + \delta_{25}X_5 + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{52}X_2 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{5P} = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Физический смысл уравнений:

1-ое уравнение – представляет собой взаимное расхождение в О.С. сечений слева и справа от разреза в точке C (рис. 4.19,а, з) по вертикали от действия сил X_2 , X_5 и внешних нагрузок, которое должно равняться нулю, так как исходно в рассматриваемой раме эти сечения жестко соединены друг с другом и разойтись не могут;

2-ое уравнение – представляет собой взаимное расхождение в О.С. по вертикали от горизонтальной линии KD точек K и D (см. рис. 4.19,а, з) от действия сил X_2 , X_5 и внешних нагрузок, которое должно равняться нулю, так как в точках K и D стоят шарнирно подвижные опоры, закрепляющие эти точки от вертикальных перемещений вообще.

4. В расчетной основной системе метода сил (рис. 4.19,з) строим единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов от действия единичных значений неизвестных и внешних нагрузок – эпюры \bar{M}_2 , \bar{M}_5 и M_P , которые представлены соответственно на рис. 4.19,д ÷ 4.19,ж.

5. Вычисляем единичные коэффициенты и свободные члены уравнений:

а) единичные коэффициенты (единичные перемещения):

$$\delta_{22} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_2^2 dx}{EJ} = 2 \left[\frac{1}{5EJ} \left(\frac{3 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} (3 \cdot 5) \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{3 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{111,6}{EJ};$$

$$\delta_{25} = \delta_{52} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_5 dx}{EJ} = 2 \left[-\frac{1}{EJ} (3 \cdot 5) \cdot 4 - \frac{1}{EJ} \left(\frac{3 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = -\frac{144,0}{EJ};$$

$$\delta_{55} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_5^2 dx}{EJ} = 2 \left[\frac{1}{3EJ} \left(\frac{4 \cdot 4}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EJ} (4 \cdot 5) \cdot 4 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{4 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{206,222}{EJ};$$

б) свободные члены (грузовые перемещения):

$$\Delta_{2P} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P dx}{EJ} = 2 \left[\frac{1}{EJ} (64 \cdot 2) \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{64 + 43}{2} \cdot 3 \right) \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{43 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{1989,0}{EJ};$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$\Delta_{5P} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S M_P dx}{EJ} = 2 \left[\frac{4}{6 \cdot 3EJ} (-4 \cdot 16 \cdot 2 - 64 \cdot 4) - \frac{1}{EJ} (64 \cdot 2) \cdot 4 - \frac{1}{EJ} \left(\frac{64 + 43}{2} \cdot 3 \right) \cdot 4 - \frac{1}{EJ} \left(\frac{43 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = -\frac{2822,667}{EJ}.$$

6. Для выполнения проверок правильности вычисления единичных коэффициентов и свободных членов системы уравнений построим суммарную единичную эпюру изгибающих моментов $\bar{M}_S = \bar{M}_2 + \bar{M}_5$ (см. рис. 4.19,3), после чего выполним проверки:

а) универсальная проверка: $\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S^2 dx}{EJ} = \sum \sum \delta_{ik},$

где: $\sum \sum \delta_{ik} = \delta_{22} + \delta_{25} + \delta_{52} + \delta_{55} = \frac{111,6}{EJ} - \frac{144}{EJ} \cdot 2 + \frac{206,222}{EJ} = \frac{29,822}{EJ};$

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S^2 dx}{EJ} = 2 \left[\frac{1}{3EJ} \left(\frac{4 \cdot 4}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{5EJ} \left(\frac{3 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} (1 \cdot 5) \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{1 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{29,822}{EJ};$$

проверка выполняется;

б) столбцовая проверка:

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S M_P dx}{EJ} = \sum \Delta_{iP}, \text{ где: } \sum \Delta_{iP} = \Delta_{2P} + \Delta_{5P} = \frac{1989,0}{EJ} - \frac{2822,667}{EJ} = -\frac{833,667}{EJ};$$

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S M_P dx}{EJ} = 2 \left[\frac{4}{6 \cdot 3EJ} (-4 \cdot 16 \cdot 2 - 64 \cdot 4) - \frac{1}{EJ} (64 \cdot 2) \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \left(\frac{64 + 43}{2} \right) \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \left(\frac{43 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = -\frac{833,667}{EJ};$$

проверка выполняется.

7. Решаем систему уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \frac{111,6}{EJ} X_2 - \frac{144}{EJ} X_5 + \frac{1989}{EJ} = 0; & X_2 = -1,63 \text{ кН;} \\ -\frac{144}{EJ} X_2 + \frac{206,222}{EJ} X_5 - \frac{2822,667}{EJ} = 0. & \text{находим: } X_5 = 12,55 \text{ кН.} \end{cases}$$

Проверяем решение путем подстановки найденных значений в уравнения:

$$\begin{aligned} 111,6 \cdot (-1,63) - 144 \cdot 12,55 + 1989,0 &= 0; & -1989,108 + 1989,0 &\approx 0; \\ -144 \cdot (-1,63) + 206,222 \cdot 12,55 - 2822,667 &= 0; & 2822,806 - 2822,667 &\approx 0. \end{aligned}$$

Погрешности незначительны, проверка выполняется.

8. Строим окончательную эпюру изгибающих моментов по формуле

$$M = \bar{M}_2 \cdot X_2 + \bar{M}_5 \cdot X_5 + M_P.$$

Отдельно покажем промежуточные (исправленные единичные) эпюры (см. рис. 4.19*и, к*). Окончательная эпюра M представлена на рис. 4.20,*а*.

9. Выполняем деформационную проверку эпюры M :

$$\sum_1^n \int_0^l \frac{M \cdot \bar{M}_S dx}{EJ} = 0; \quad 2 \left[\frac{4}{6 \cdot 3 EJ} (4 \cdot 9,1 \cdot 2 - 13,8 \cdot 4) - \frac{1}{5 EJ} \left(\frac{4,89 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{EJ} (8,91 \cdot 2) \cdot 1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{EJ} (1 \cdot 3) \cdot 1,59 + \frac{1}{EJ} \left(\frac{12,09 \cdot 3}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{1}{EJ} (41,542 - 41,508) \approx 0;$$

погрешность $\left| \frac{41,542 - 41,508}{41,508} \right| \cdot 100\% = 0,08\% < 3\%$ незначительна.

Эпюра поперечных сил показана на рис. 4.20,*б*.

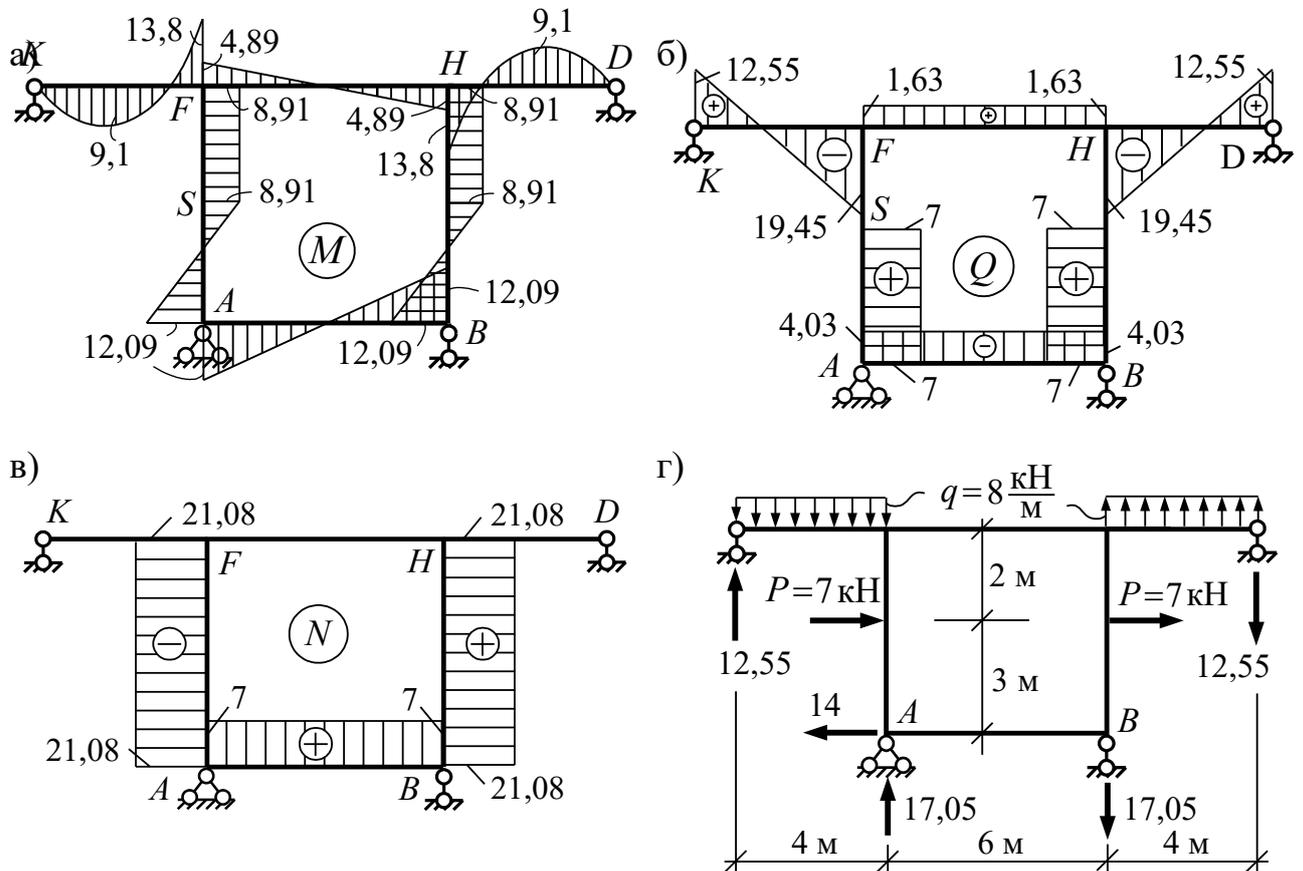


Рис. 4.20

10. Эпюру поперечных сил Q строим по эпюре изгибающих моментов M с использованием формул (4.13) и (4.14):

$$Q_{KF} = Q_o - \left| \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l} \right| = \pm \frac{8 \cdot 4}{2} - \left| \frac{-13,8 - 0}{4} \right| = \pm 16 - 3,45;$$

$$Q_{KF}^{\text{лев}} = +16 - 3,45 = +12,55 \text{ кН}; \quad Q_{KF}^{\text{прав}} = -16 - 3,45 = -19,45 \text{ кН};$$

СОДЕРЖАНИЕ

$$Q_{FH} = + \left| \frac{4,89 - (-4,89)}{6} \right| = 1,63 \text{ кН};$$

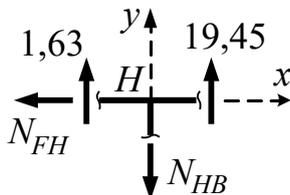
$$Q_{FS} = \left| \frac{8,91 - 8,91}{2} \right| = 0;$$

$$Q_{SA} = + \left| \frac{12,09 - (-8,91)}{3} \right| = +7 \text{ кН};$$

$$Q_{AA} = - \left| \frac{-12,09 - 12,09}{6} \right| = -4,03 \text{ кН}.$$

11. Эпюру продольных сил в заданной статически неопределимой системе строим по эпюре Q способом вырезания узлов:

а) узел H :



$$\sum X = 0; \quad N_{FH} = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_{HB} = +21,08 \text{ кН};$$

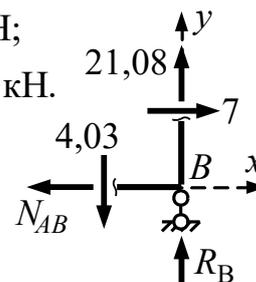
Узлы F и A вырезаются аналогично.

Эпюра N показана на рис. 4.20,в.

б) узел B :

$$\sum X = 0; \quad N_{AB} = +7 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0; \quad R_B = -17,05 \text{ кН}.$$



12. Статическая проверка равновесия рамы (рис. 4.20,з):

$$\sum X = 0; \quad 7 + 7 - 14 = 0; \quad 14 - 14 = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad 12,55 + 17,05 - 8 \cdot 4 - 17,05 + 8 \cdot 4 - 12,55 = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad (7 + 7) \cdot 3 + 12,55 \cdot 4 + 12,55 \cdot 10 + 17,05 \cdot 6 - (8 \cdot 4) \cdot 2 - 8 \cdot 4(6 + 2) = 0;$$

$$320 - 320 = 0.$$

4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 5.13,а; степень кинематической неопределенности ее равна трем ($n = n_y + n_l = 2 + 1 = 3$). Основная система метода перемещений представлена на рис. 5.13,б. Погонные жесткости участков

$$i_{01} = \frac{EJ}{2}; \quad i_{12} = i_{24} = i_{35} = \frac{EJ}{4}; \quad i_{23} = \frac{EJ}{6}$$

удобно выразить через общую для всех участков величину $i = EJ/12$ ($EJ = 12i$), с учетом которой получим:

$$i_{01} = 6i; \quad i_{12} = i_{24} = i_{35} = 3i; \quad i_{23} = 2i;$$

для наглядности эти погонные жесткости участков удобно показать на основной системе метода перемещений (рис. 5.13,б). Единичные эпюры изгибающих

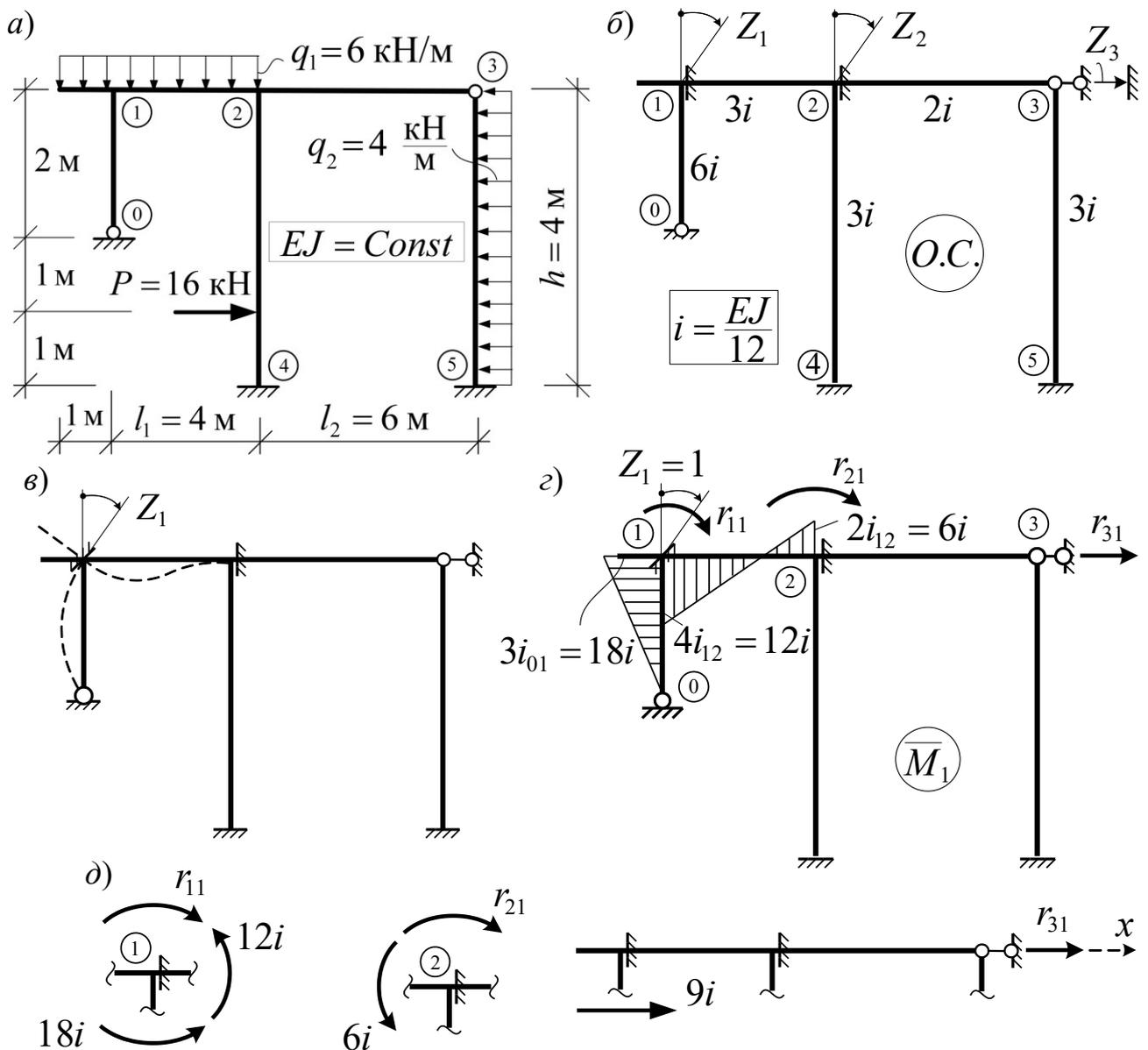


Рис. 5.13

моментов в основной системе метода перемещений $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ построены на

СОДЕРЖАНИЕ

основе схем деформаций О.С. от перемещений узлов Z_1, Z_2, Z_3 на единичные величины (рис. 5.13,в, 5.13,е, 5.13,и) с использованием табличных эпюр (табл. 1) и показаны соответственно на рис. 5.13,з, 5.13,ж, 5.13,к. Единичные коэффициенты канонических уравнений определяются статическим способом: реактивные моменты r_{1k}, r_{2k} – из вырезания узлов 1 и 2 из эпюр \overline{M}_k , а реактивные силы r_{3k} – из вырезания верхней части рамы на эпюрах \overline{M}_k – см. рис. 5.13, д, 5.13, з, 5.13, л:

$$\begin{aligned}
 \text{– рис. 5.13, д:} & \begin{cases} \sum M_1 = 0; & r_{11} - 12i - 18i = 0; & r_{11} = 30i; \\ \sum M_2 = 0; & r_{21} - 6i = 0; & r_{21} = 6i; \\ \sum X = 0; & r_{31} + 9i = 0; & r_{31} = -9i; \end{cases} \\
 \text{– рис. 5.13, з:} & \begin{cases} \sum M_1 = 0; & r_{12} - 6i = 0; & r_{12} = 6i; \\ \sum M_2 = 0; & r_{22} - 6i - 12i - 12i = 0; & r_{22} = 30i; \\ \sum X = 0; & r_{32} + 4,5i = 0; & r_{32} = -4,5i; \end{cases} \\
 \text{– рис. 5.13, л:} & \begin{cases} \sum M_1 = 0; & r_{13} + 9i = 0; & r_{13} = -9i; \\ \sum M_2 = 0; & r_{23} + 4,5i = 0; & r_{23} = -4,5i; \\ \sum X = 0; & r_{33} - 4,5i - 2,25i - 0,5625i = 0; & r_{33} = 7,3125i. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Грузовая эпюра M_p в основной системе метода перемещений представлена на рис. 5.14, а. Грузовые коэффициенты (свободные члены уравнений) определяются по аналогии с единичными (см. рис 5.14, б):

$$\begin{aligned}
 \sum M_1 = 0; & \quad R_{1p} + 8 - 3 = 0; \quad R_{1p} = -5; \\
 \sum M_2 = 0; & \quad R_{2p} - 8 - 3 = 0; \quad R_{2p} = 11; \\
 \sum X = 0; & \quad R_{3p} + 2,5 - 6 = 0; \quad R_{3p} = 3,5.
 \end{aligned}$$

После подстановки найденных значений единичных коэффициентов и свободных членов в систему уравнений (3) получим ее в виде

$$\begin{cases} 30i \cdot Z_1 + 6i \cdot Z_2 - 9i \cdot Z_3 - 5 = 0; \\ 6i \cdot Z_1 + 30i \cdot Z_2 - 4,5i \cdot Z_3 + 11 = 0; \\ -9i \cdot Z_1 - 4,5i \cdot Z_2 + 7,3125i \cdot Z_3 + 3,5 = 0; \end{cases}$$

решив эту систему уравнений, найдем неизвестные перемещения узлов рамы

$$Z_1 = \frac{0,0484}{i}; \quad Z_2 = -\frac{0,4839}{i}; \quad Z_3 = -\frac{0,7169}{i},$$

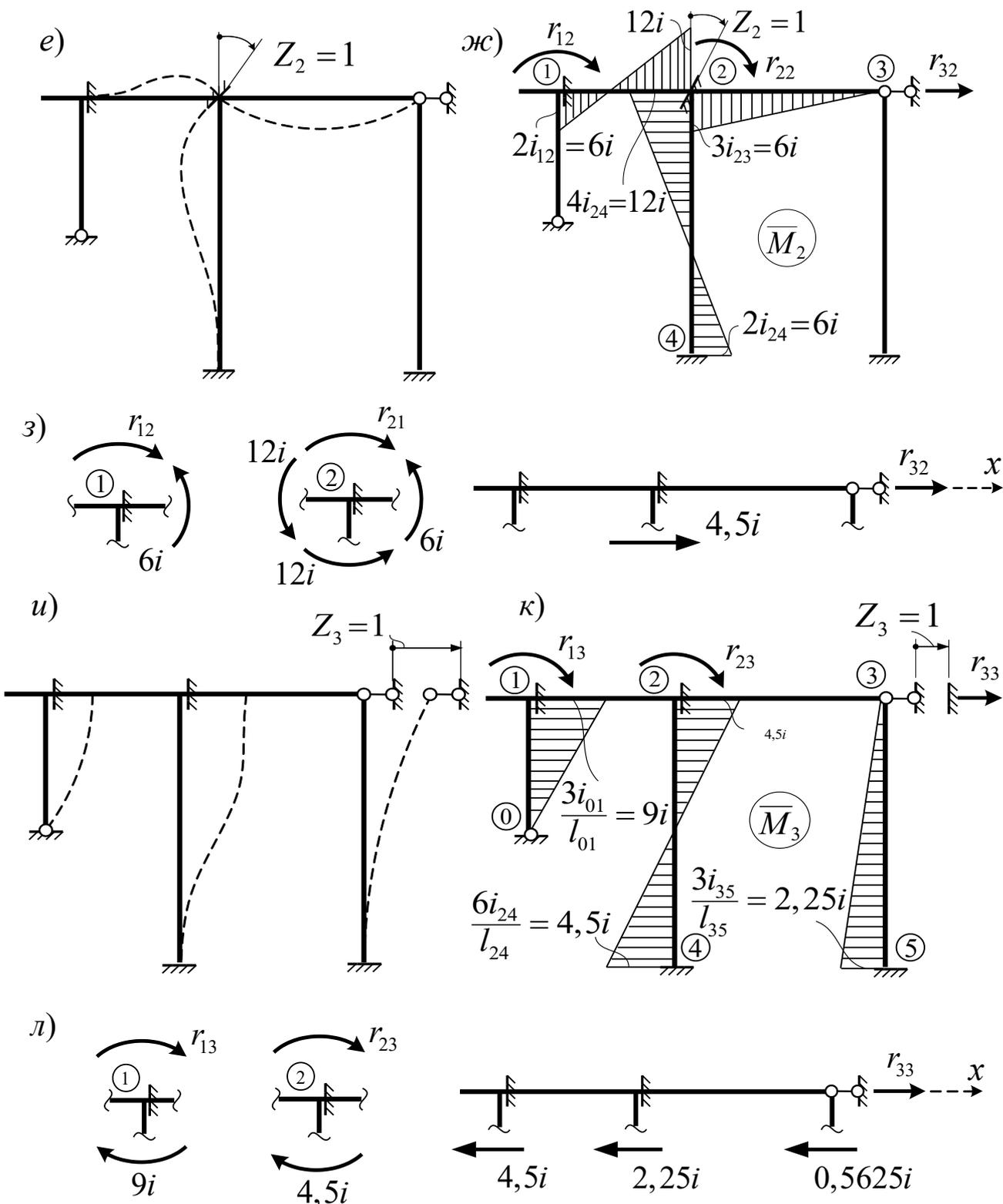


Рис. 5.13 (продолжение)

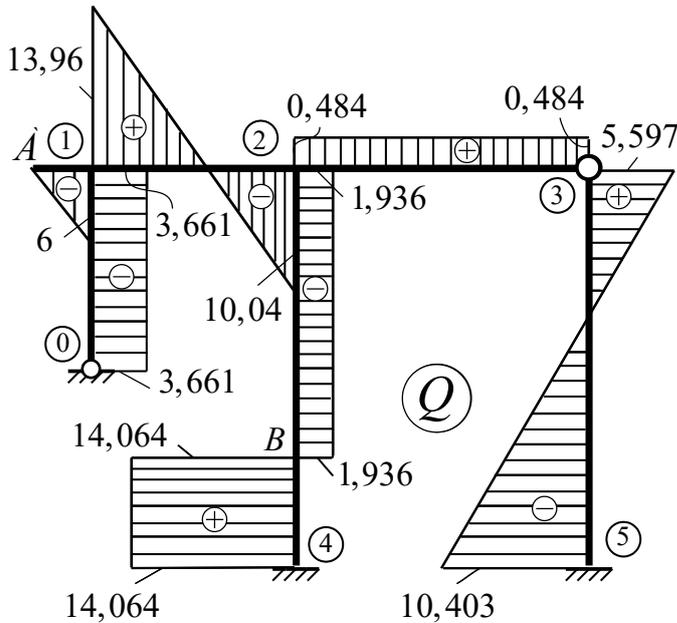


Рис. 5.15

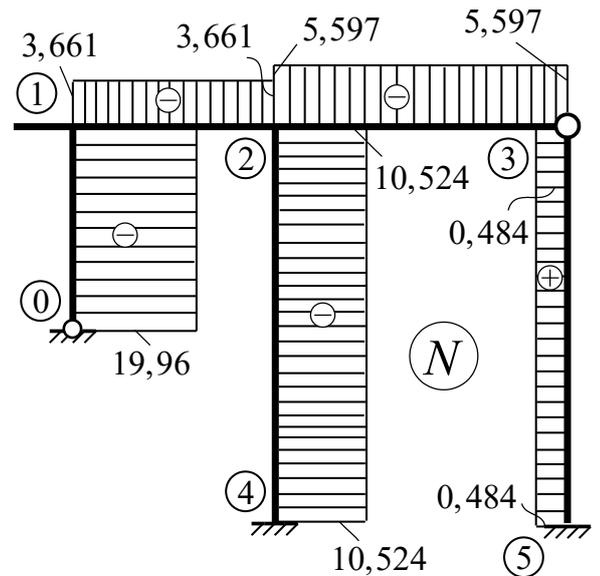


Рис. 5.16

после чего окончательная эпюра изгибающих моментов строится по формуле:

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3 + M_p$$

и будет иметь вид, представленный рис. 5.14,в; на рис. 5.14,г показано равновесие узлов 1 и 2 на окончательной эпюре M .

Для выполнения деформационной проверки эпюры M выберем для заданной рамы, имеющей четыре лишних связи ($L = 4$), основную систему метода сил в виде, показанном на рис. 5.14,д; суммарная единичная эпюра $M_s^{мет.сил}$, построенная сразу от всех неизвестных $X_1 \dots X_4$ единичных величин, показана на рис. 5.14,е; тогда деформационная проверка запишется в виде:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_s^{мет.сил} \cdot M ds}{EJ} = 0;$$

$$\frac{1}{EJ} \left[\frac{7,323 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} (10,323 \cdot 2 + 4 \cdot 5,597 \cdot 0 - 2 \cdot 2,484) + \frac{2,903 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} (4 \cdot 2 \cdot 3,194 - 9,613 \cdot 4) - (8 \cdot 3) \cdot \frac{5,387 - 0,419}{2} + (8 \cdot 1) \cdot \frac{8,677 - 5,387}{2} \right] = \frac{1}{EJ} (9,764 + 13,764 - 3,312 + 34,838 + 17,032 - 25,634 - 59,612 + 13,161) = \frac{1}{EJ} (88,559 - 88,558) \approx 0;$$

Погрешность $\left(\left| \frac{88,559 - 88,558}{88,558} \right| \cdot 100\% = 0,1\% \right)$ незначительна.

Эпюру поперечных сил Q (рис. 5.15) построим, вычислив на участках непрерывного изменения эпюры M значения Q по формуле (4):

$$Q_{0-1} = - \left| \frac{7,323 - 0}{2} \right| = -3,661 \text{ кН}; \quad Q_{A-1}^{лев} = + \frac{6 \cdot 1}{2} - \left| \frac{3 - 0}{1} \right| = 0;$$

$$Q_{A-1}^{прав} = -\frac{6 \cdot 1}{2} - \left| \frac{3-0}{1} \right| = -6 \text{ кН};$$

$$Q_{1-2}^{лев} = \frac{6 \cdot 4}{2} + \left| \frac{10,323 - 2,484}{4} \right| = 12 + 1,96 = 13,96 \text{ кН};$$

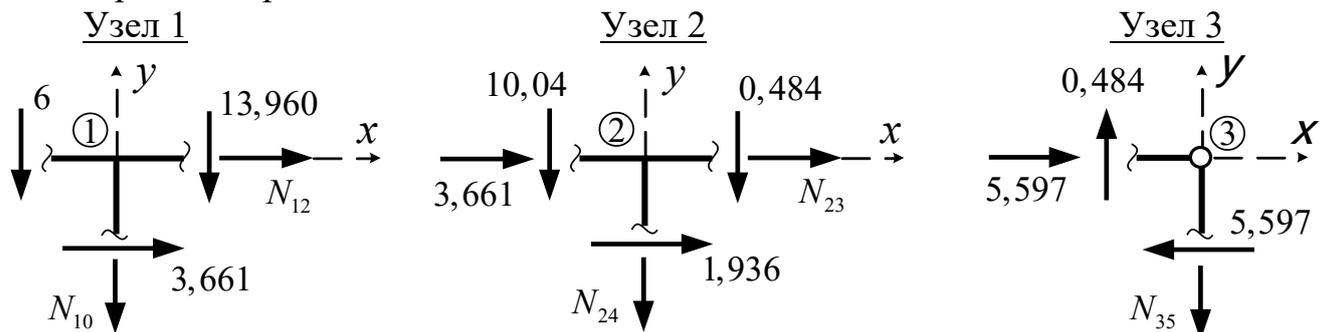
$$Q_{1-2}^{прав} = -\frac{6 \cdot 4}{2} + \left| \frac{10,323 - 2,484}{4} \right| = -12 + 1,96 = -10,04 \text{ кН};$$

$$Q_{2-3} = + \left| \frac{2,903 - 0}{6} \right| = 0,484 \text{ кН}; \quad Q_{4-B} = + \left| \frac{8,677 - (-5,387)}{1} \right| = 14,064 \text{ кН};$$

$$Q_{B-2} = - \left| \frac{5,387 - (-0,419)}{3} \right| = -1,936 \text{ кН}; \quad Q_{3-5}^{лев} = + \frac{4 \cdot 4}{2} - \left| \frac{9,613 - 0}{4} \right| = 5,597 \text{ кН};$$

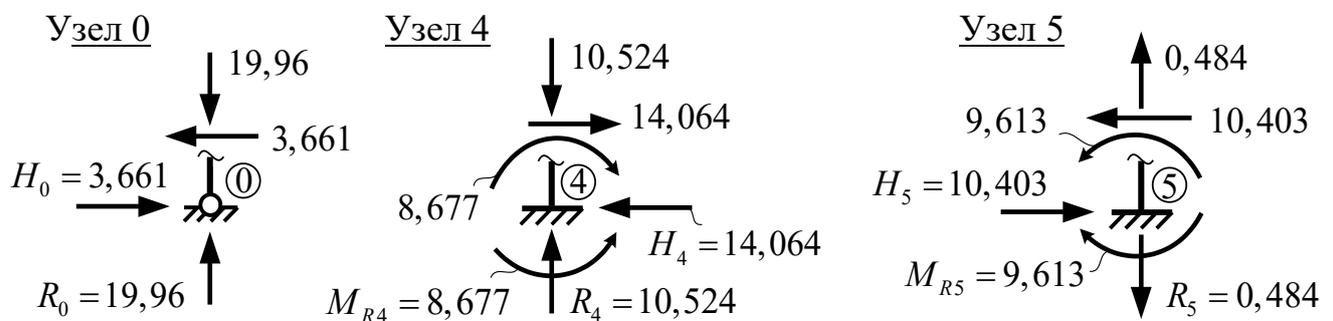
$$Q_{3-5}^{прав} = -\frac{4 \cdot 4}{2} - \left| \frac{9,613 - 0}{4} \right| = -8 - 2,403 = -10,403 \text{ кН}.$$

Эпюру продольных сил N (рис. 5.16) построим, вырезая узлы на эпюре Q и рассматривая их равновесие:



$$\begin{aligned} \Sigma X = 0; N_{12} = -3,661 \text{ кН}; & \quad \Sigma X = 0; N_{23} = -5,597 \text{ кН}; & \quad \Sigma X = 0; 5,597 - 5,597 = 0; \\ \Sigma Y = 0; N_{10} = -19,96 \text{ кН}; & \quad \Sigma Y = 0; N_{24} = -10,524 \text{ кН}; & \quad \Sigma Y = 0; N_{35} = 0,484 \text{ кН}; \end{aligned}$$

Вырезав опорные узлы, определим опорные реакции:



СОДЕРЖАНИЕ

Статическая проверка:

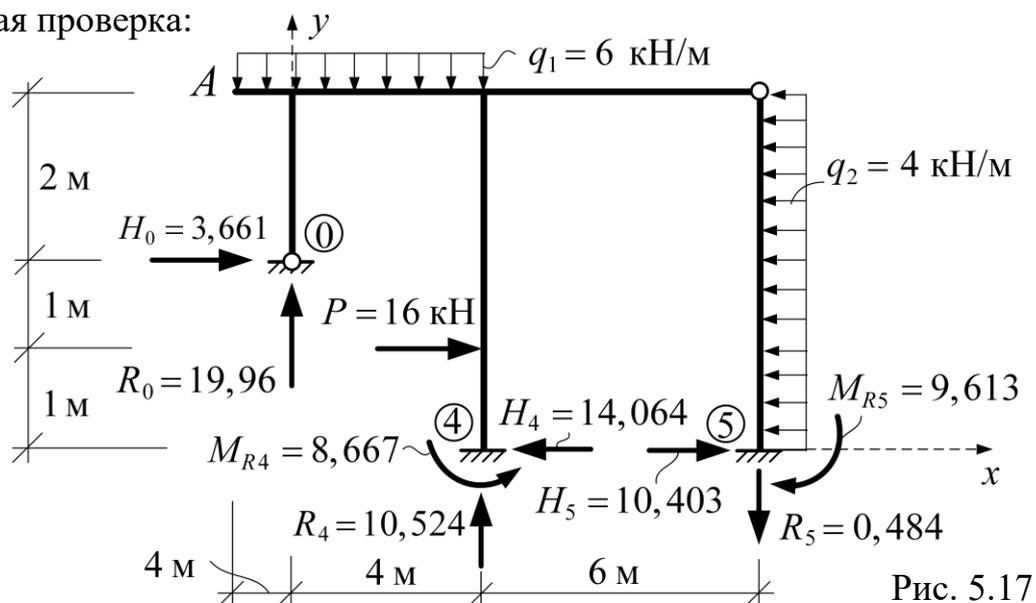


Рис. 5.17

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad 3,661 - 14,064 + 10,403 - 4 \cdot 4 + 16 = 0; & \quad 30,064 - 30,064 = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad 19,96 + 10,524 - 0,484 - 6 \cdot 5 = 0; & \quad 30,484 - 30,484 = 0; \\ \sum M_A = 0; & \quad 6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 16 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 3,661 \cdot 2 + 14,064 \cdot 4 - 10,403 \cdot 4 - \\ & \quad - 19,96 \cdot 1 - 10,524 \cdot 5 + 0,484 \cdot 11 - 8,667 + 9,613 = 0; & \quad 178,193 - 178,191 \approx 0. \end{aligned}$$

Все проверки выполняются. Расчет рамы выполнен верно.

5. ОСНОВЫ РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПО НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Рассмотрим расчет балки, представленной на рисунке. В загруженном пролете эпюра изгибающих моментов может быть представлена в виде суммы эпюры опорных моментов и балочной эпюры. Балочная эпюра M строится для простой статически определимой двухопорной балки, имеющей пролет рассматриваемого участка балки и нагруженной той же нагрузкой. Вычислим значение максимального балочного момента через внешнюю нагрузку:

$$M_{K \max}^0 = \frac{F_{\text{пред}} a b}{l_2},$$

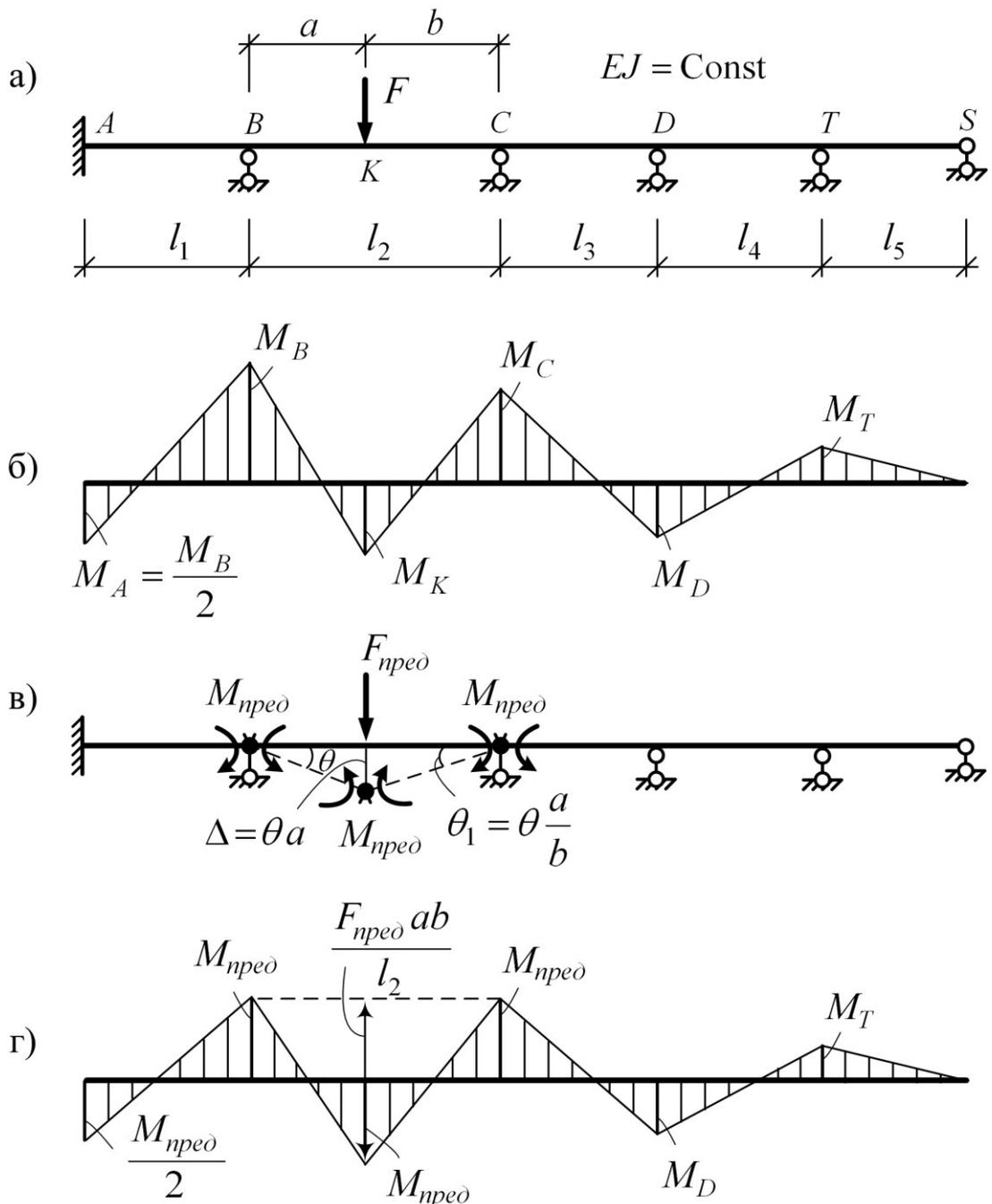


Рис. 7.1

СОДЕРЖАНИЕ

и выразим соответствующую величину в том же сечении через предельные моменты сечений $M_{пред}$ в состоянии предельного равновесия (рис. 17.16,г)

$$M^* = M_{пред} + M_{пред} = 2M_{пред}.$$

Приравняв выражения $M_{K \max}^0$ и M^* , получим

$$\frac{F_{пред} ab}{l_2} = 2M_{пред},$$

откуда найдем

$$F_{пред} = \frac{2M_{пред} l_2}{ab}.$$

Этот же результат можно получить, если записать и решить уравнение возможных работ внешних и внутренних сил (17.7) для рассматриваемого балочно-го механизма:

$$F_{пред} \theta a - 2M_{пред} \theta - M_{пред} \theta \frac{a}{b} 2 = 0; \quad F_{пред} = \frac{2M_{пред} l_2}{ab}.$$

Выполненный анализ показывает, что исчерпание несущей способности в балках будет происходить чаще всего при частичном разрушении системы: при образовании балочных механизмов в одном либо нескольких пролетах. При этом для перехода в предельное состояние неразрезной балки достаточно перехода в предельное состояние и одного пролета, работающего в самых невыгодных условиях (см. рис. 17.16). Образование балочных механизмов разрушения характеризуется появлением в пролетах трех пластических шарниров (для крайних пролетов с шарнирным опиранием достаточно появления двух пластических шарниров).

Рассмотрим неразрезную балку, представленную на рис. 17.17,а. Принимаем, что балка имеет постоянную жесткость, значения предельных моментов известны и равны $M_{ид\ddot{a}\ddot{a}}$.

Эпюры изгибающих моментов в балке от действия заданных нагрузок при работе материала в упругой стадии показана на рис. 17.17,б. Эпюры изгибающих моментов для пролетов балки в предельном состоянии показаны на рис. 17.17,в. При независимых нагрузках эти предельные состояния могут возникнуть в каждом из пролетов отдельно. В случае однопараметрической нагрузки предельное состояние в первую очередь возникнет в том пролете, который наиболее нагружен. И этому состоянию будет соответствовать минимальное

СОДЕРЖАНИЕ

значение общего для всех пролетов параметра нагрузки, параметра F . Определим для рассматриваемой балки (рис. 17.17) предельные нагрузки в каждом из пролетов, пользуясь статическим методом. Приравняем наибольшие значения балочных изгибающих моментов в пролетах (под силами либо в средних сечениях, если действует равномерно распределенная нагрузка) соответствующим значениям предельных моментов $M_{пред}$:

а) для первого пролета получаем:

$$\frac{2,73 Fl}{8} = 2M_{пред}, \quad F_{пред}^{(1)} = 5,861 \frac{M_{пред}}{l};$$

СОДЕРЖАНИЕ

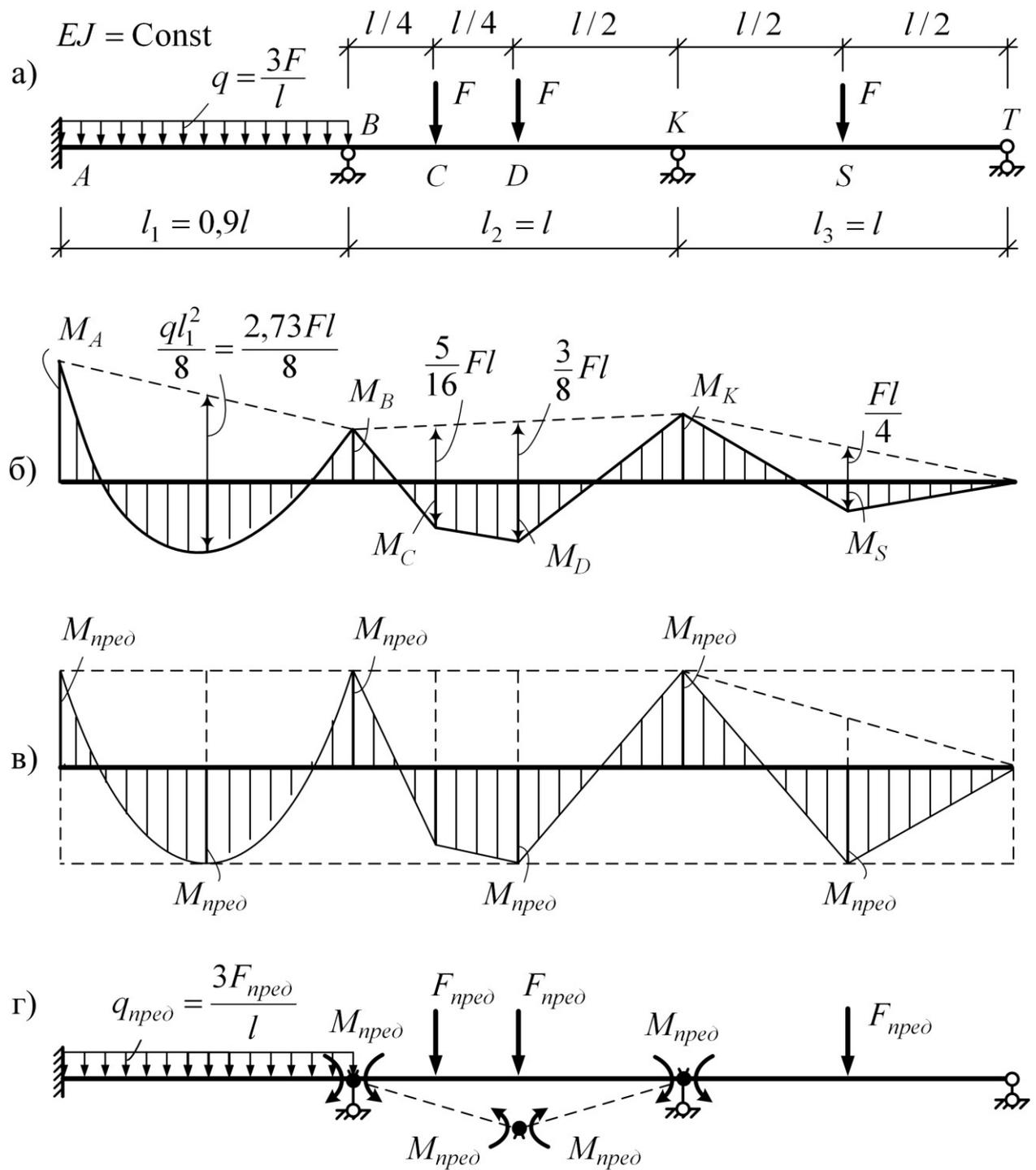


Рис. 17.17

б) для второго пролета:

$$\frac{3Fl}{8} = 2M_{\text{перед}}, \quad \text{откуда} \quad F_{\text{перед}}^{(2)} = 5,333 \frac{M_{\text{перед}}}{l};$$

в) для третьего пролета:

$$\frac{Fl}{4} = 1,5M_{пред}, \text{ откуда } F_{пред}^{(3)} = 6 \frac{M_{пред}}{l}.$$

Наименьшей из полученных величин является нагрузка для второго пролета Эта нагрузка будет предельной для рассматриваемой неразрезной балки

$$F_{пред} = F_{пред}^{(2)} = 5,333 \frac{M_{пред}}{l}.$$

Предельное состояние ее будет характеризоваться образованием балочного механизма во втором пролете (рис. 17.17,г).

Задача определения предельной нагрузки на неразрезную балку наиболее просто решается по способу выравнивания изгибающих моментов (рассматривается случай загрузки балки в каждом пролете независимыми нагрузками). Этот способ основан на следующих особенностях работы балок:

- в предельное состояние балка может перейти при образовании механизма разрушения хотя бы в одном из пролетов (частичное разрушение); балочный механизм разрушения характеризуется образованием пластических шарниров в надпорных сечениях балки и в одном из пролетных;

- эпюра изгибающих моментов в балке может быть построена путем сложения эпюры предельных моментов и эпюры балочных моментов в каждом из пролетов;

- предельные моменты и предельные нагрузки каждого из пролетов не зависят от нагрузок других пролетов.

Способ выравнивания изгибающих моментов основан на графическом представлении распределения предельных моментов в сечениях балки. Откладывая значения этих моментов по обе стороны от оси балки, получим эпюру несущих способностей сечений балки (рис. 17.17,в). Для несимметричных сечений при разных пределах текучести материала на растяжение и сжатие следует учитывать, что предельные моменты неодинаковы при растяжении верхних и нижних волокон балки. После этого в эпюру несущих способностей балки вписываются балочные эпюры моментов от действующих нагрузок, предполагая, что в характерных сечениях они достигают предельных значений (рис. 17.17,в). Составляются уравнения, характеризующие соотношения между балочными эпюрами и эпюрами предельных несущих способностей участков балки, решая которые, найдем предельные нагрузки для каждого из пролетов.

Для балок, у которых на опорах меняется сечение, эпюра несущих способно-

СОДЕРЖАНИЕ

стей слева и справа от опор будет иметь разные значения предельных моментов. При вписывании балочных эпюр в этом случае в расчет нужно принимать меньшие предельные моменты на опорах, подвешивая балочную эпюру к линии предельных опорных моментов, получаемой соединением расчетных предельных моментов на опорах.

Рассмотрим балку, представленную на рис. 17.18,а, жесткость которой меняется на опорах и различна в разных пролетах. Соответственно предельные моменты для сечений в разных пролетах будут разными. Пусть:

$$M_{пред}^{(1)} = 1,2 M_{пред}; \quad M_{пред}^{(2)} = M_{пред}; \quad M_{пред}^{(3)} = 0,6 M_{пред}.$$

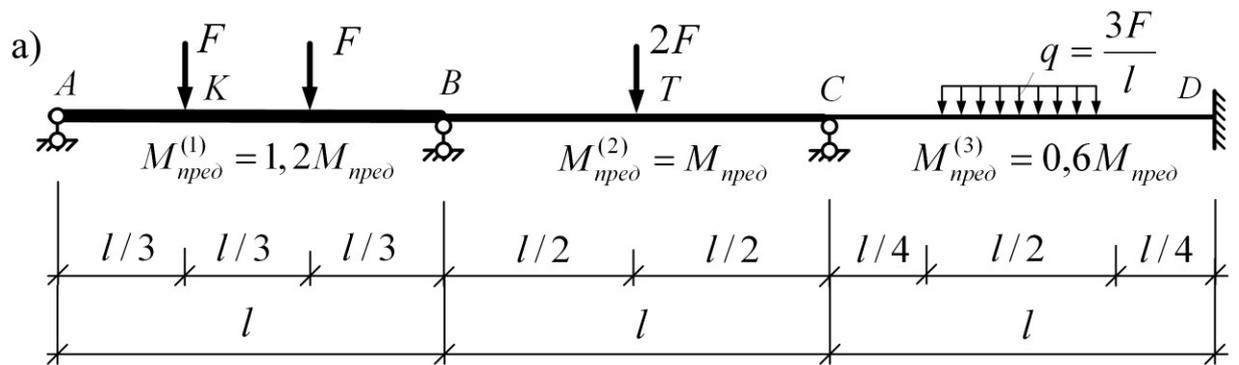
Эпюра несущих способностей сечений представлена пунктирными горизонтальными линиями на рис. 17.18, в.

На рис. 17.18,б показаны балочные эпюры изгибающих моментов в пролетах балки от действующих в этих пролетах внешних нагрузок, выраженных через один общий параметр F .

При образовании балочных механизмов в пролетах следует учитывать, что на опорах, на которых меняются несущие способности сечений, а изгибающие моменты, исходя из условия равновесия узлов, слева и справа одинаковы, пластические шарниры будут возникать в сечениях с меньшей несущей способностью. Для опоры B , например, пластический шарнир возникнет в сечении справа от опоры, и будет воспринимать предельный момент $M_{пред}^{(2)}$. На опоре C пластический шарнир возникнет также в сечении справа от опоры и будет воспринимать предельный момент $M_{пред}^{(3)}$. С учетом этого балочные эпюры будем подвешивать к линиям предельных опорных моментов: ab – в первом пролете, bc – во втором и cd – в третьем пролете (рис. 17.8,в). В результате балочные эпюры изгибающих моментов впишутся в эпюру несущих способностей рассматриваемой балки так, как показано на рис. 17.18,в.

Рассмотрим образование балочных механизмов в каждом из пролетов отдельно. В первом пролете, учитывая, что левая опора шарнирная, такой механизм образуется при появлении двух пластических шарниров в сечениях K (под левой силой F) и B (справа от опоры B). Соотношение между ординатами балочной эпюры изгибающих моментов и ординатами эпюры несущих способностей определяется равенством

СОДЕРЖАНИЕ



б) балочные эпюры изгибающих моментов

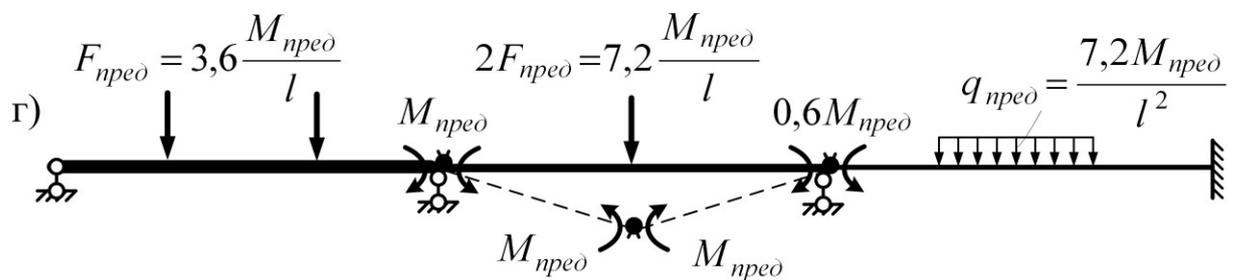
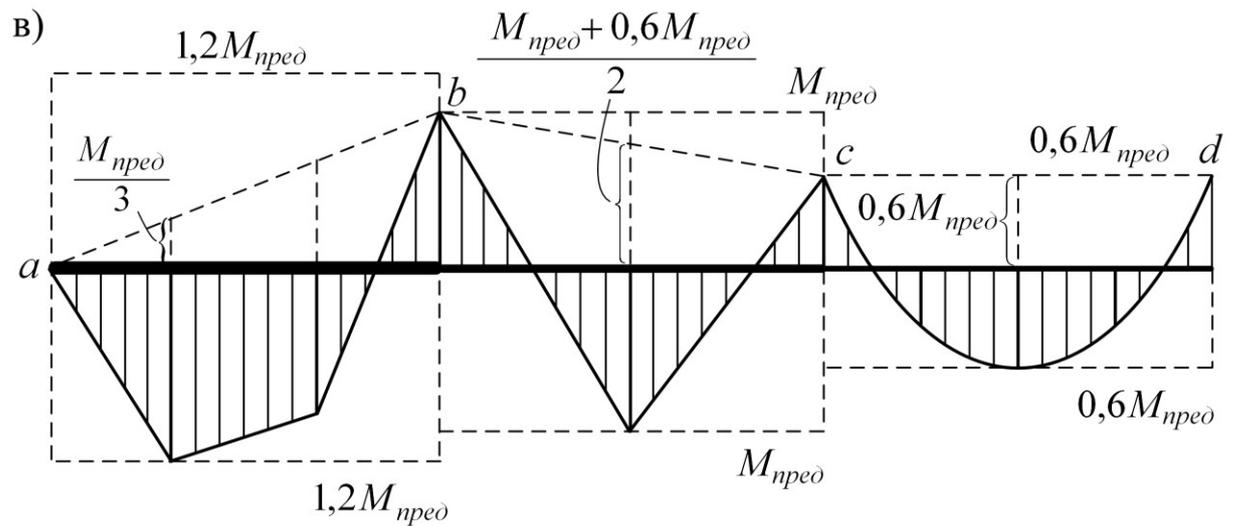
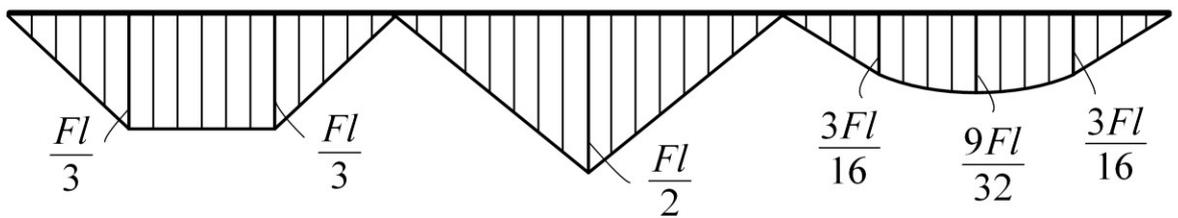


Рис. 17.18

$$\frac{Fl}{3} = 1,2 M_{npед} + \frac{M_{npед}}{3},$$

СОДЕРЖАНИЕ

из которого найдем

$$F_{пред}^{(1)} = 4,6 \frac{M_{пред}}{l}.$$

Второй пролет превратится в механизм при образовании трех пластических шарниров в сечениях B (справа от опоры), T (под силой $2F$) и C (справа от опоры). Соотношение между ординатами балочной эпюры и ординатами эпюры несущих способностей пролета здесь описывается следующим равенством

$$\frac{Fl}{2} = M_{пред} + \frac{M_{пред} + 0,6M_{пред}}{2},$$

из которого находим

$$F_{пред}^{(2)} = 3,6 \frac{M_{пред}}{l}.$$

В третьем пролете балочный механизм возникнет при появлении трех пластических шарниров в сечениях C (справа от опоры), D (у заделки) и в середине пролета. Соотношение между ординатами балочной эпюры и ординатами эпюры несущей способности в третьем пролете характеризуется равенством

$$\frac{9Fl}{32} = 0,6M_{пред} + 0,6M_{пред},$$

из которого получаем

$$F_{пред}^{(3)} = 4,267 \frac{M_{пред}}{l}.$$

Расчетным для рассматриваемой балки будет наименьшее значение параметра нагрузок F

$$F_{пред} = \min \left(F_{пред}^{(1)}, F_{пред}^{(2)}, F_{пред}^{(3)} \right) = 3,6 \frac{M_{пред}}{l}.$$

Этому значению соответствует образование балочного механизма во втором пролете балки (рис. 17.18,г).

Рассмотрим пример расчета однопролетной балки, у которой сечение изменяется в пределах пролета (рис. 17.19,а). Предельные моменты, которые могут быть восприняты сечениями балки, принимаем одинаковыми при растяжении верхних и нижних волокон балки и равными: на участке AC – $M_{пред}^{(1)} = M_{пред}$, на

СОДЕРЖАНИЕ

участке $CD - M_{пред}^{(2)} = 0,7 M_{пред}$. Балка имеет две лишние связи и для превращения ее в механизм в ней должно образоваться три пластических шарнира.

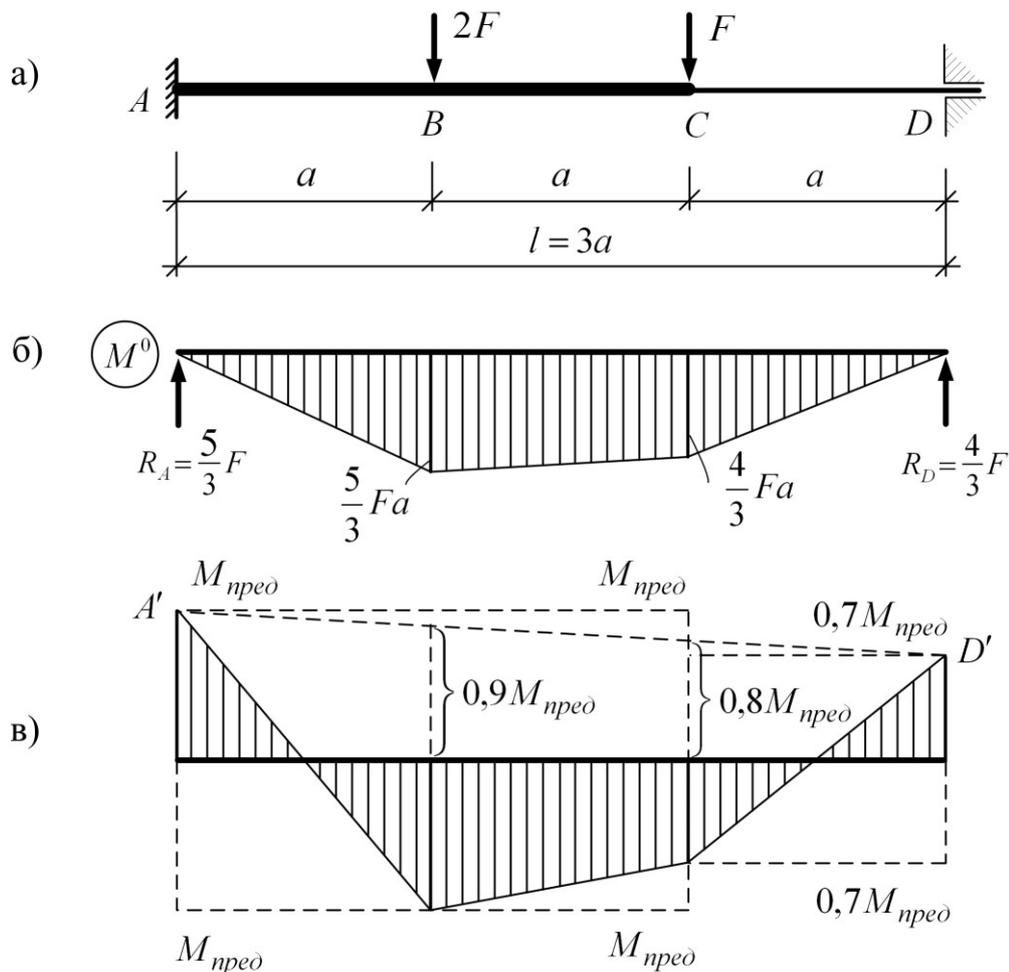


Рис. 17.19

Два из них возникнут на опорах A и D , а третий – либо в сечении B под силой $2F$, либо в сечении C (справа от точки приложения силы F), где скачкообразно изменяется несущая способность балки. Балочная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 17.19,б. Эпюра несущих способностей сечений показана пунктирными линиями на рис. 17.19,в. Впишем балочную эпюру в эпюру несущих способностей, подвесив ее к линии опорных моментов $A'D'$, соединяющей ординаты предельных моментов на опорах A и D . Так как пока неизвестно, в каком из двух сечений B или C возникнет третий пластический шарнир, допустим, что в обоих сечениях изгибающие моменты достигнут предельных. Составим равенства балочных значений моментов в сечениях B и C соответствующим значениям, полученным из эпюры несущих способностей балки:

СОДЕРЖАНИЕ

а) для сечения B будем иметь:

$$\frac{5}{3} F a = M_{пред} + 0,9 M_{пред}, \quad \text{откуда} \quad F_{пред}^{(1)} = 1,14 \frac{M_{пред}}{a};$$

б) для сечения C получим:

$$\frac{4}{3} F a = 0,7 M_{пред} + 0,8 M_{пред}, \quad \text{откуда} \quad F_{пред}^{(2)} = 1,125 \frac{M_{пред}}{a}.$$

Расчетным для балки будет наименьшее значение предельной нагрузки

$$F_{пред} = 1,125 \frac{M_{пред}}{a},$$

которое соответствует появлению третьего пластического шарнира в сечении C справа от места скачкообразного изменения сечения.

Рассмотрим еще один пример расчета однопролетной балки, для которой применим несколько иной подход к определению предельной нагрузки. Для разрушения балки, представленной на рис. 17.20,а, имеющей одну лишнюю связь, достаточно образования двух пластических шарниров. Один из них возникнет на опоре A , а второй ир может появиться либо под силой F (в сечении B), либо в точке C , где скачкообразно изменяется сечение балки. Примем, что несущая способность балки на участке AC определяется при растяжении с обеих сторон значением $M_{\text{ид}}^{\text{ид}}$, а на участке CD равна $0,6 M_{\text{ид}}^{\text{ид}}$. Балочная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 17.20,б. Для определения положения второго пластического шарнира построим с двух сторон балки в масштабе эпюру несущих способностей сечений (горизонтальные пунктирные линии на рис. 17.20,в) и впишем в нее балочную эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки. Приняв нагрузку предельной, подвесим балочную эпюру к линии опорных моментов $A'D$ таким образом, чтобы внизу она касалась линий предельных моментов (эпюры несущих способностей) в одном из сечений – B либо C . Из рис. 17.20,в видно, что касание произойдет под силой F и, значит, второй пластический шарнир возникнет в сечении B . Приравняв значение балочного момента под силой F сумме соответствующих ординат на эпюре несущей способности, получим уравнение

$$\frac{2Fa}{3} = M_{пред} + \frac{2}{3}M_{пред},$$

решив которое, найдем предельную нагрузку для рассматриваемой балки

$$F_{пред} = 2,5 \frac{M_{пред}}{a}.$$

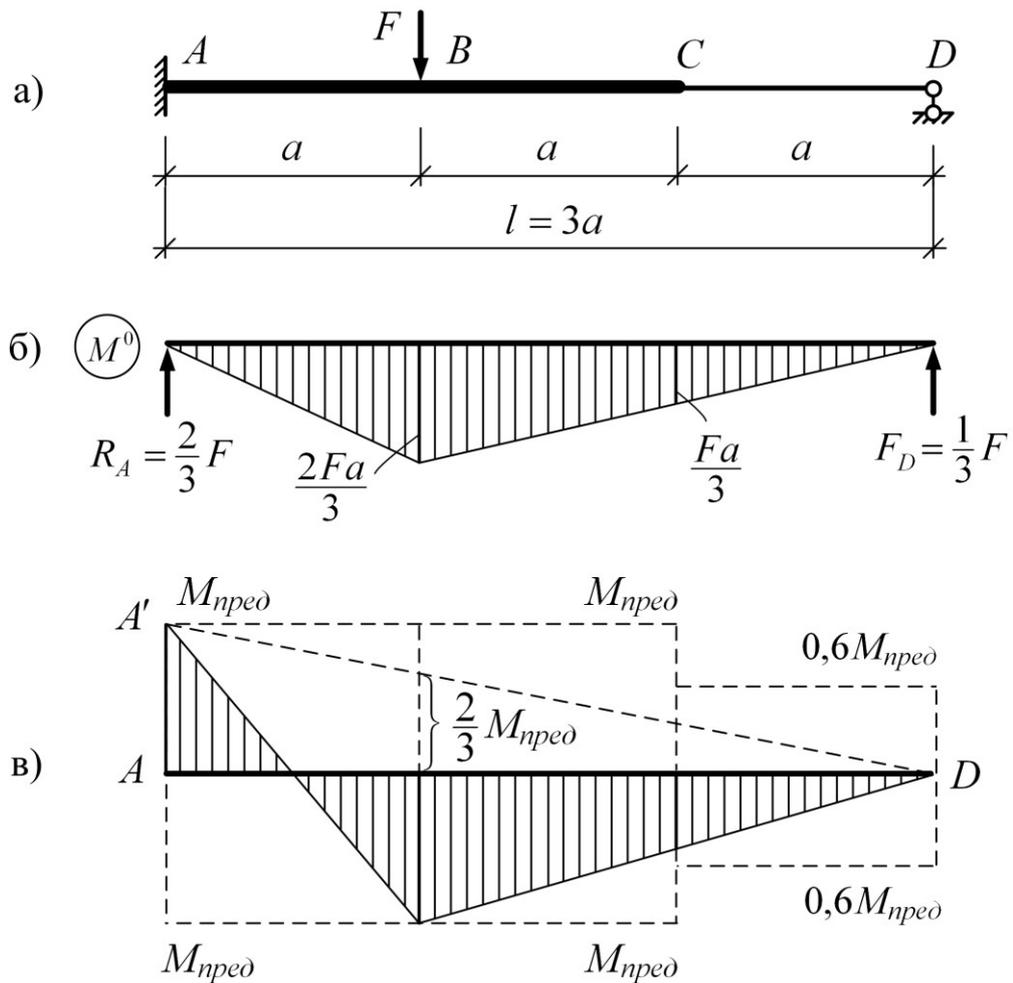


Рис. 17.20

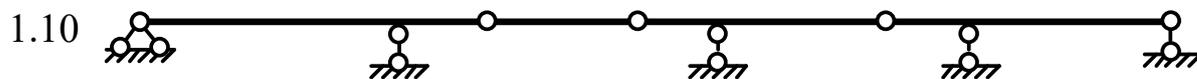
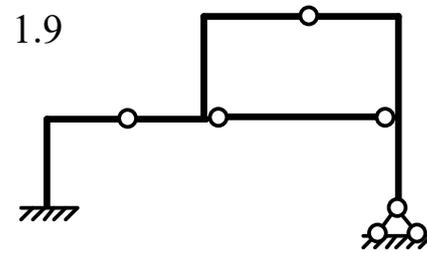
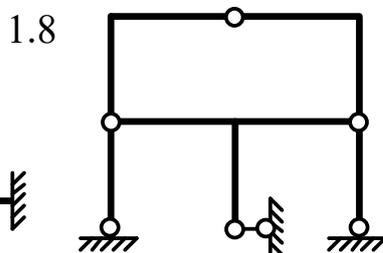
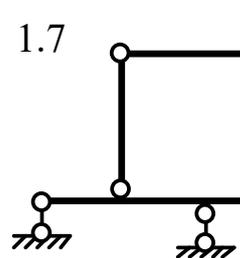
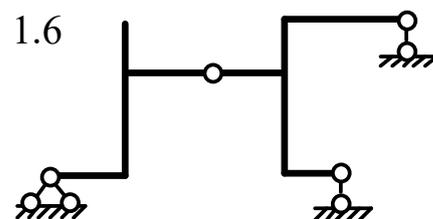
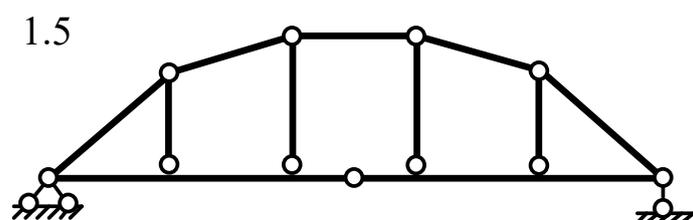
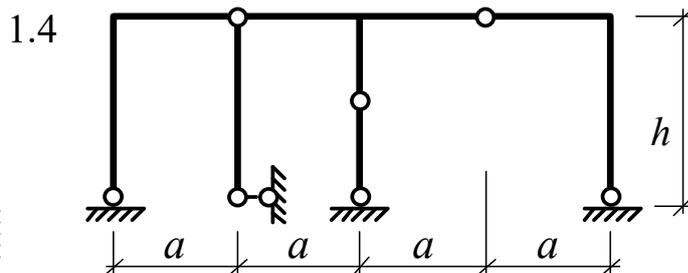
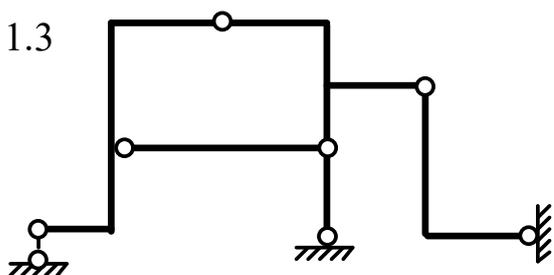
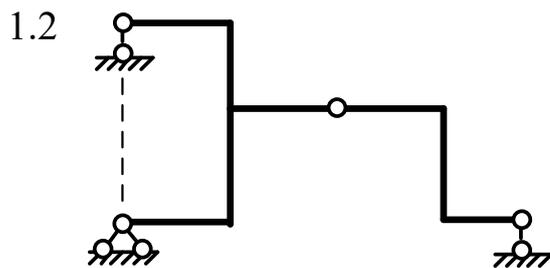
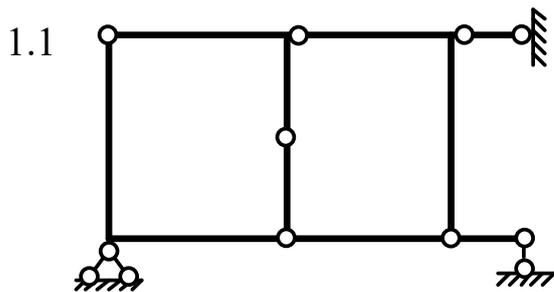
РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

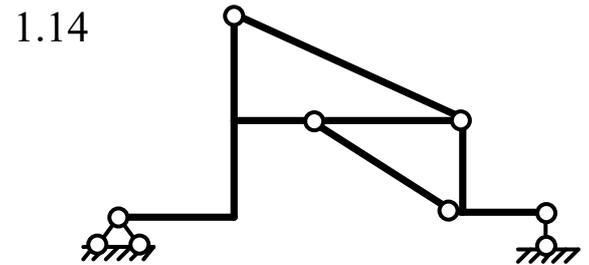
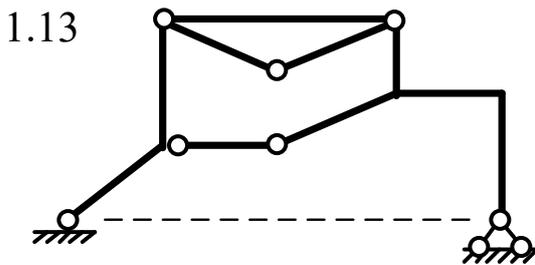
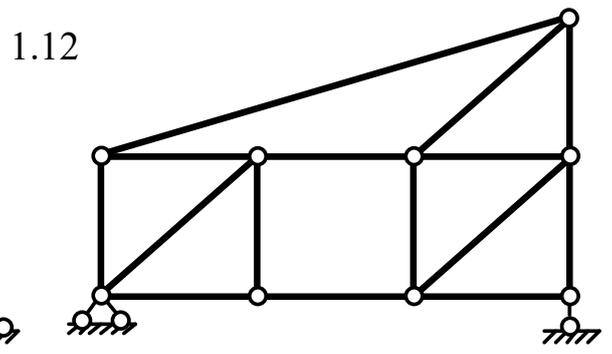
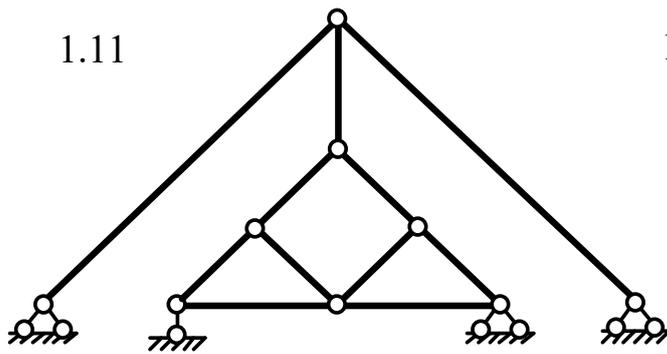
1. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Ответы на задачи представлены в разделе «Ответы на задачи для самостоятельного решения».

1.1. Кинематический анализ сооружений

Для представленных систем необходимо выполнить кинематический анализ (определить степень свободы и выполнить геометрический анализ структуры) и определить каковы эти системы – статически определимы или неопределимы, геометрически неизменяемы, изменяемы или мгновенно изменяемы.

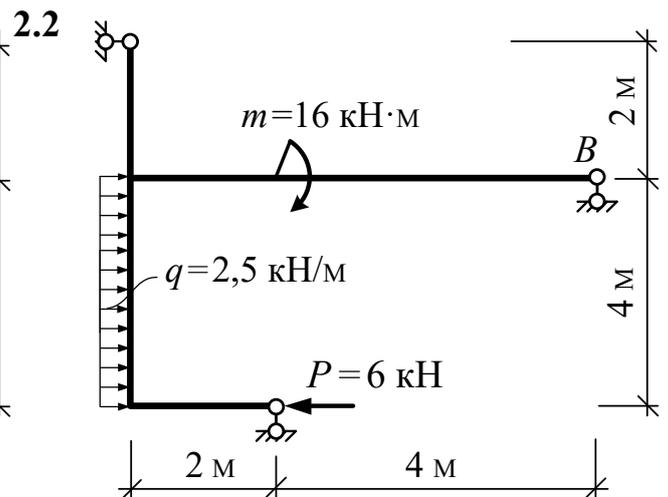
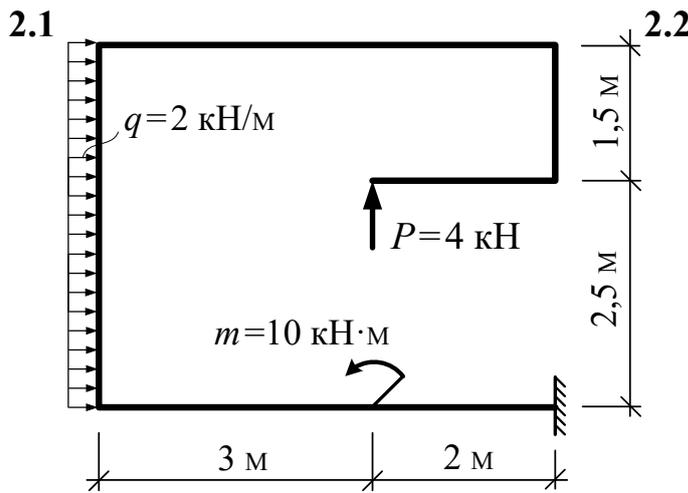




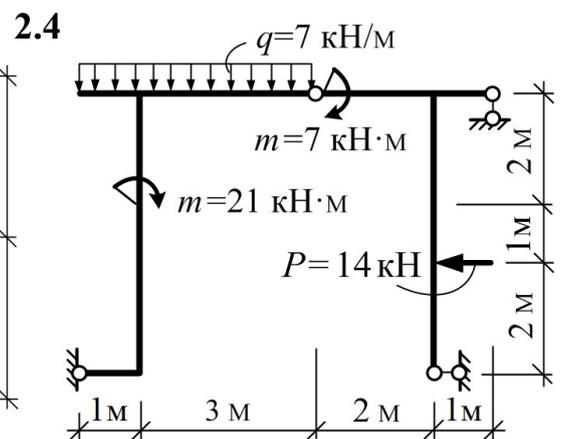
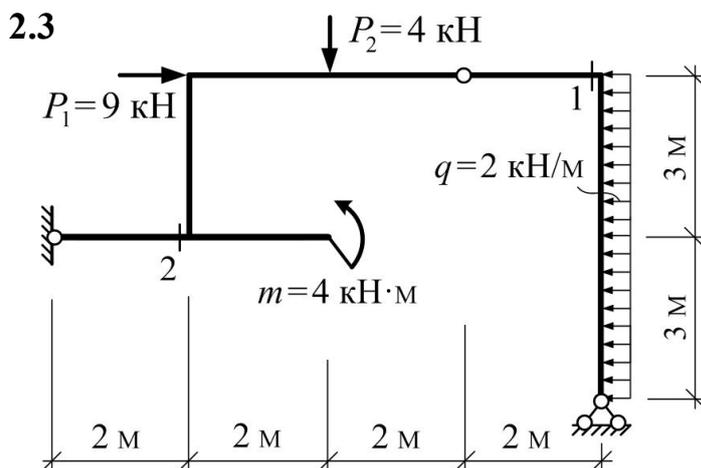
1.2. Расчет статически определимых систем

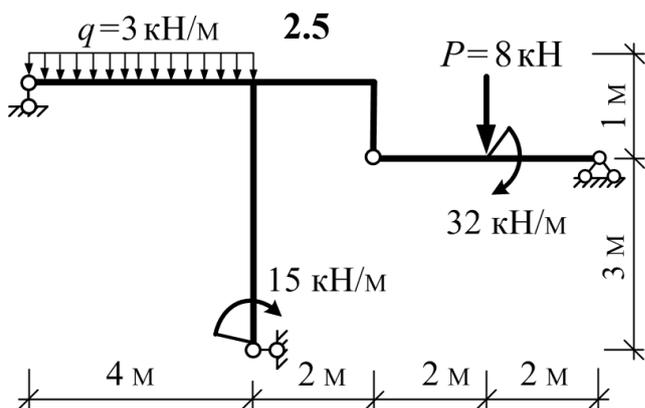
1.2.1. Расчет простых рам

Построить эпюры M , Q и N в рамах.

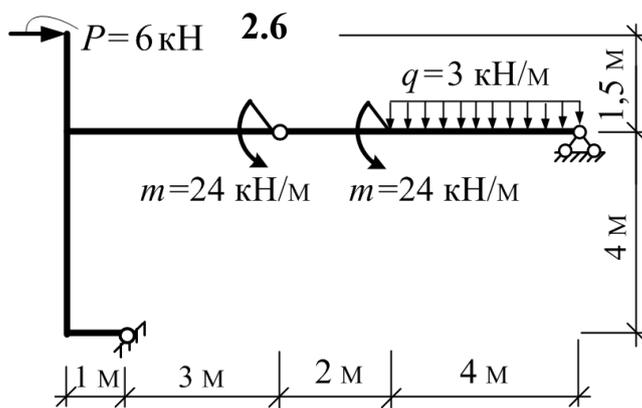


1.2.2. Расчет трехшарнирных рам

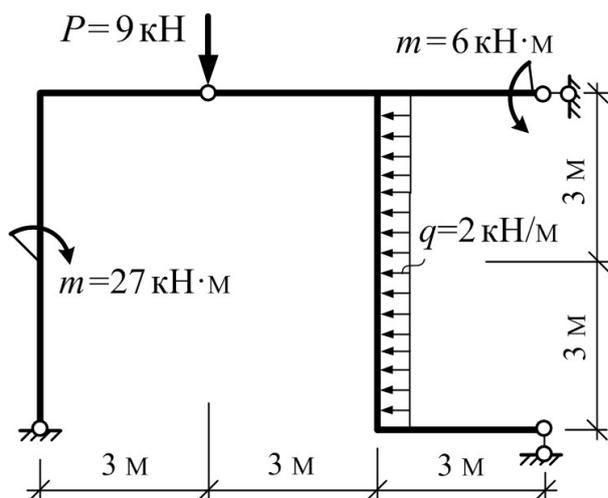




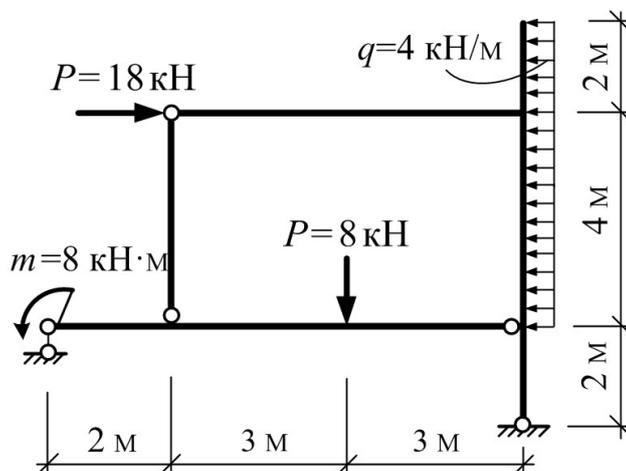
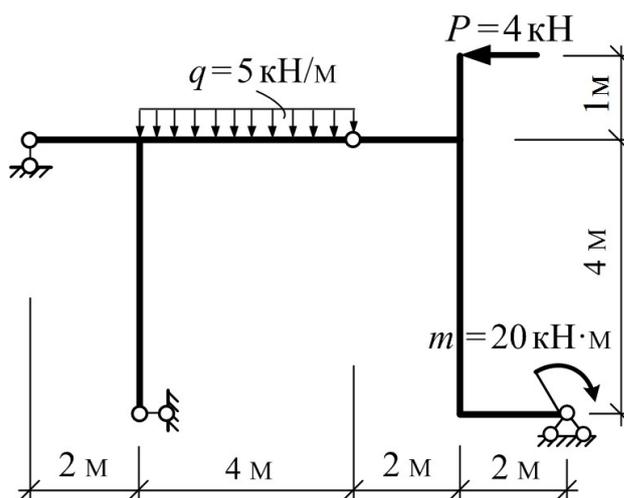
2.7



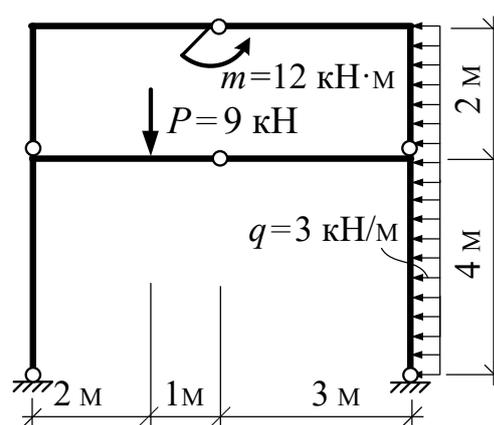
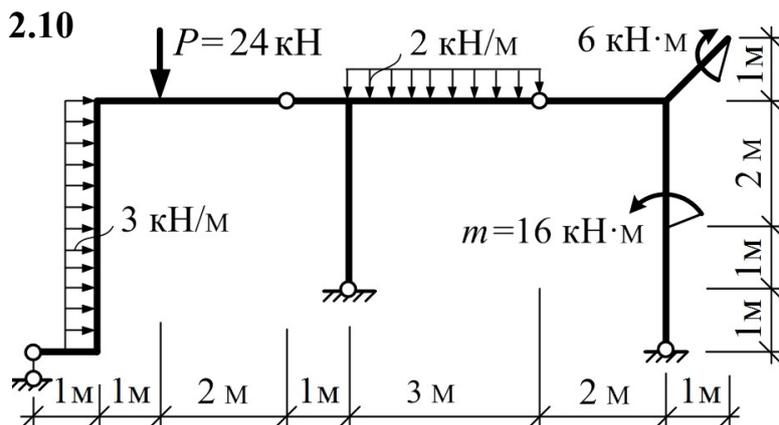
2.8



2.9



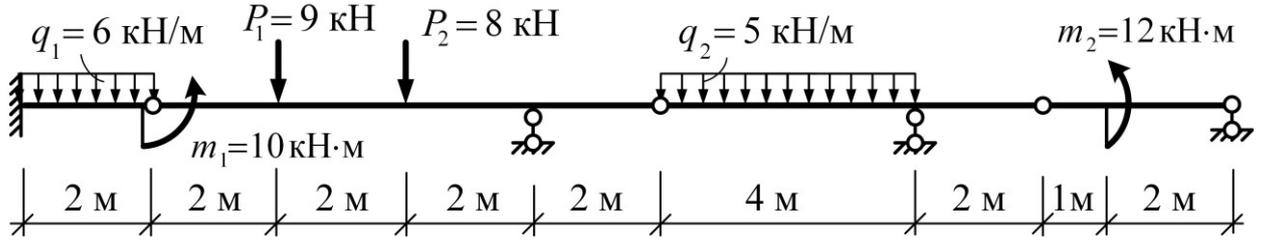
1.2.3. Расчет составных рам



1.2.4. Расчет статически определимых составных балок

Построить эпюры M , Q и N в балке (задача 2.12).

2.12



1.2.5. Определение перемещений в изгибаемых системах

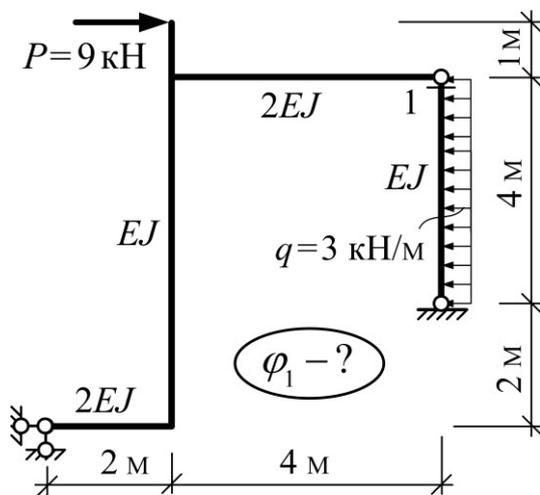
2.13. Определить горизонтальное перемещение точки B в раме, представленной в задаче 2.2 от действия приложенной там нагрузки, приняв жесткость всех стержней рамы постоянной ($EJ = \text{Const}$).

2.14. Определить взаимный угол поворота сечений 1 и 2 в раме, представленной в задаче 2.2 от действия приложенной там нагрузки, приняв жесткость всех стержней рамы постоянной ($EJ = \text{Const}$).

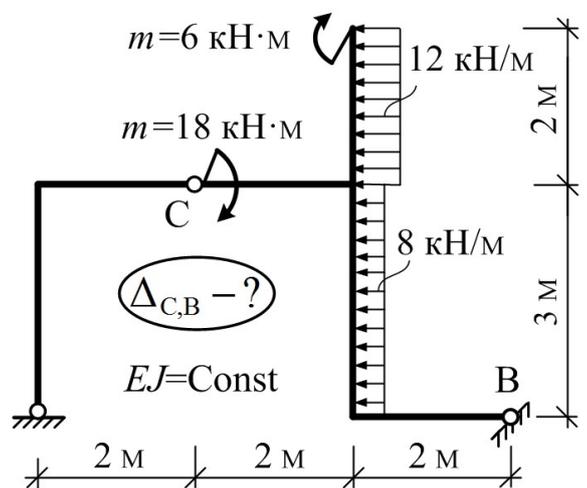
2.15. Определить угол поворота сечения 1 в раме 2.15.

2.16. Определить взаимное сближение точек C и B в раме 2.15.

2.15

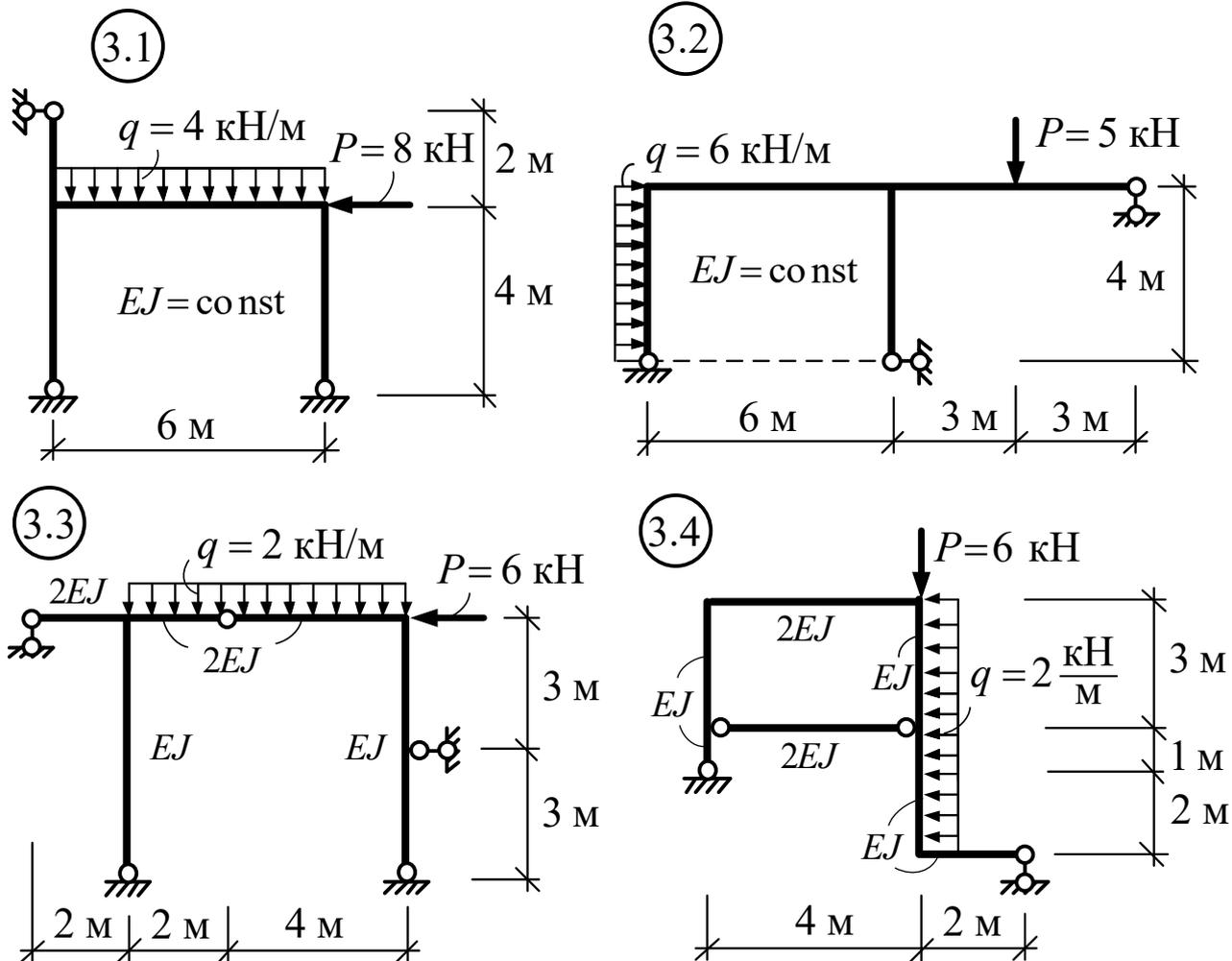


2.16



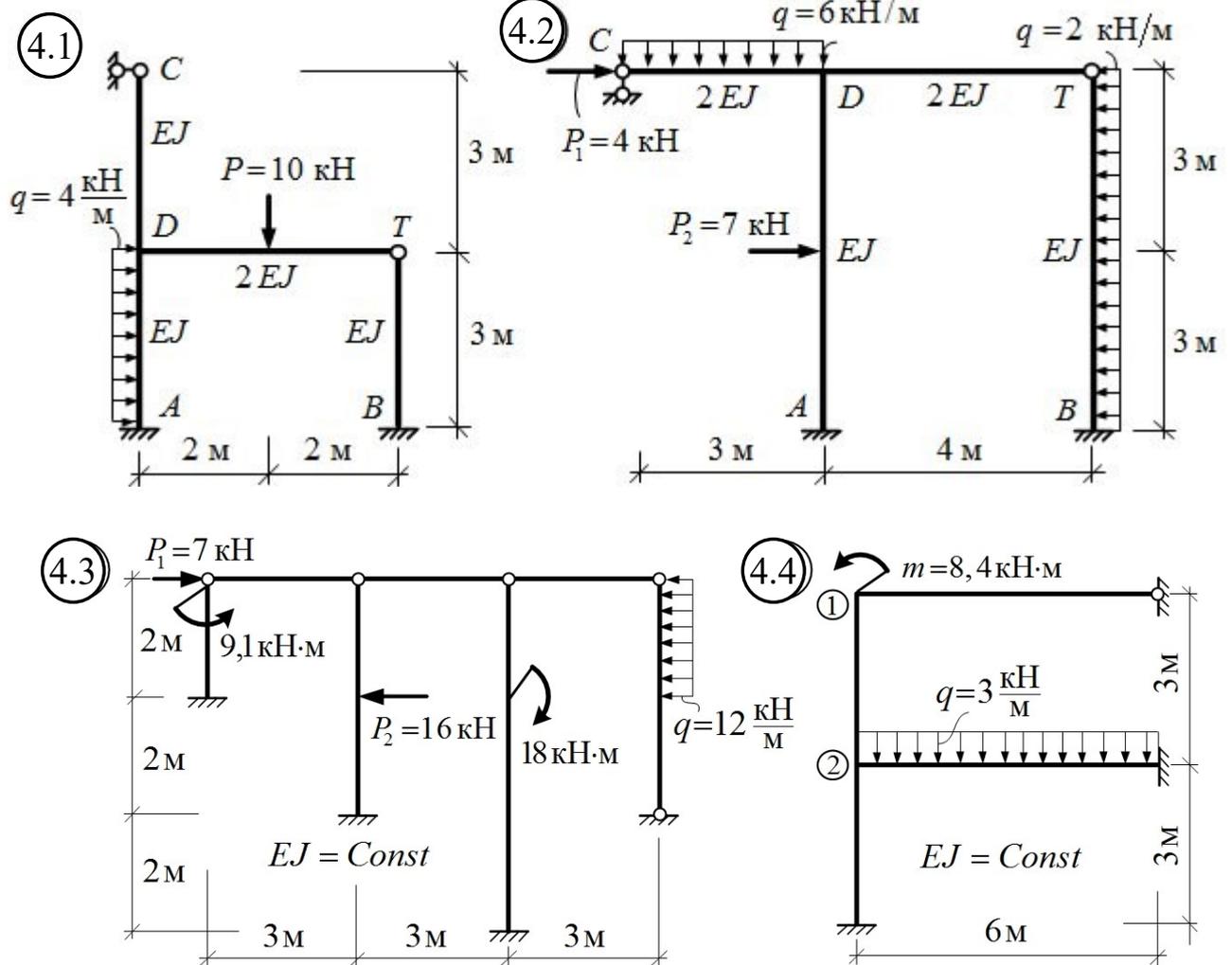
1.3. Расчет статически неопределимых рам методом сил

Построить в рамах эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, выполнив их расчет методом сил.



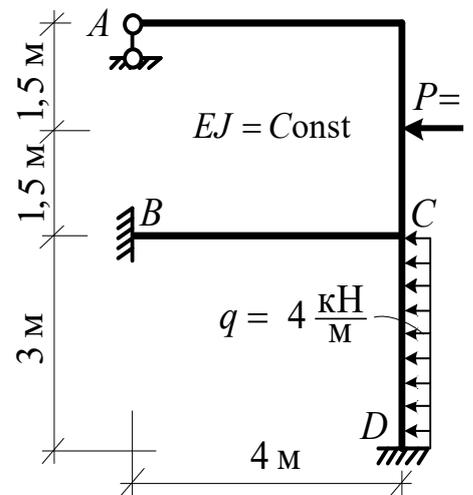
1.4. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений

Построить в рамах эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, выполнив их расчет методом перемещений.



1.5. Расчет статически неопределимых рам смешанным методом

Построить в раме эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, выполнив ее расчет смешанным методом.



2. ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

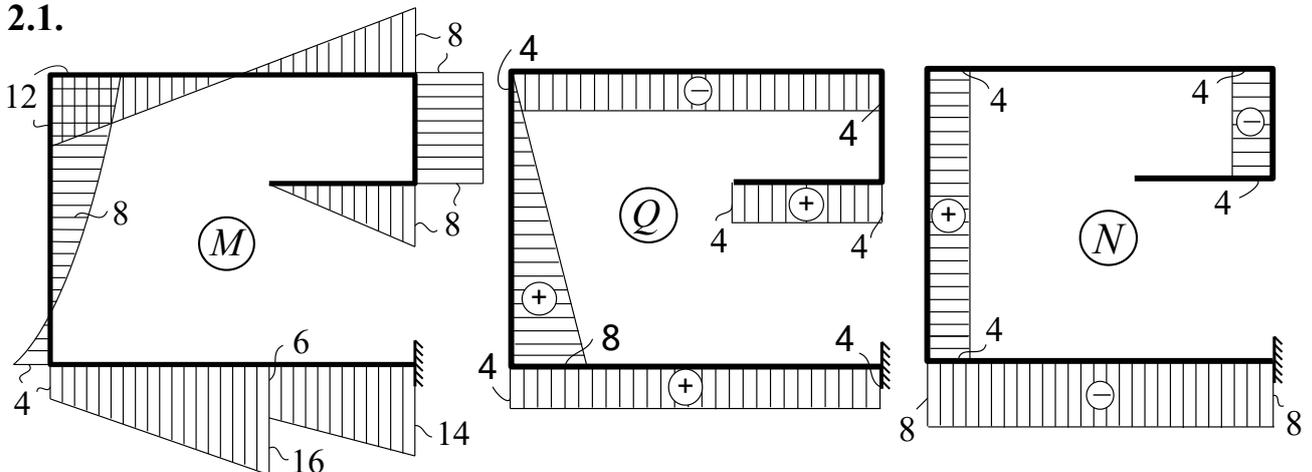
2.1. Кинематический анализ сооружений

- 1.1. $W = 0$; система статически определима и геометрически неизменяема.
 1.2. $W = 0$; система мгновенно изменяема.
 1.2. $W = 0$; система статически определима и геометрически неизменяема.
 1.4. $W = 0$; система мгновенно изменяема.
 1.5. $W = 0$; система статически определима и геометрически неизменяема.
 1.6. $W = 0$; система неизменяема. 2.7. $W = 0$; система изменяема.
 1.8. $W = 0$; система статически определима и геометрически неизменяема.
 1.9. $W = -1$; система статически неопределима и геометрически неизменяема.
 1.10. $W = 0$; система статически определима и геометрически неизменяема.
 1.11. $W = 0$; система мгновенно изменяема.
 1.12. $W = 0$; система статически определима и геометрически неизменяема.
 1.12. $W = 0$; система мгновенно изменяема.
 1.14. $W = 0$; система статически определима и геометрически неизменяема.

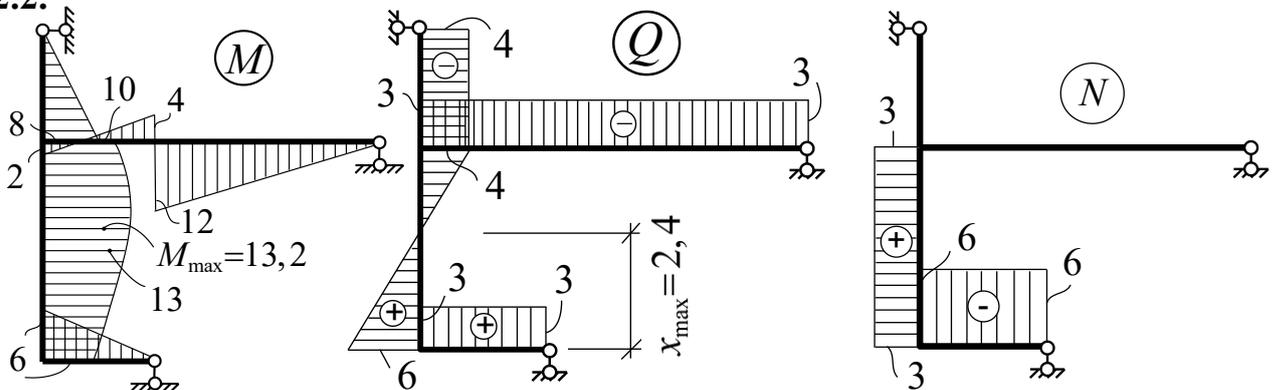
2.2. Расчет статически определимых систем

2.2.1. Расчет простых рам

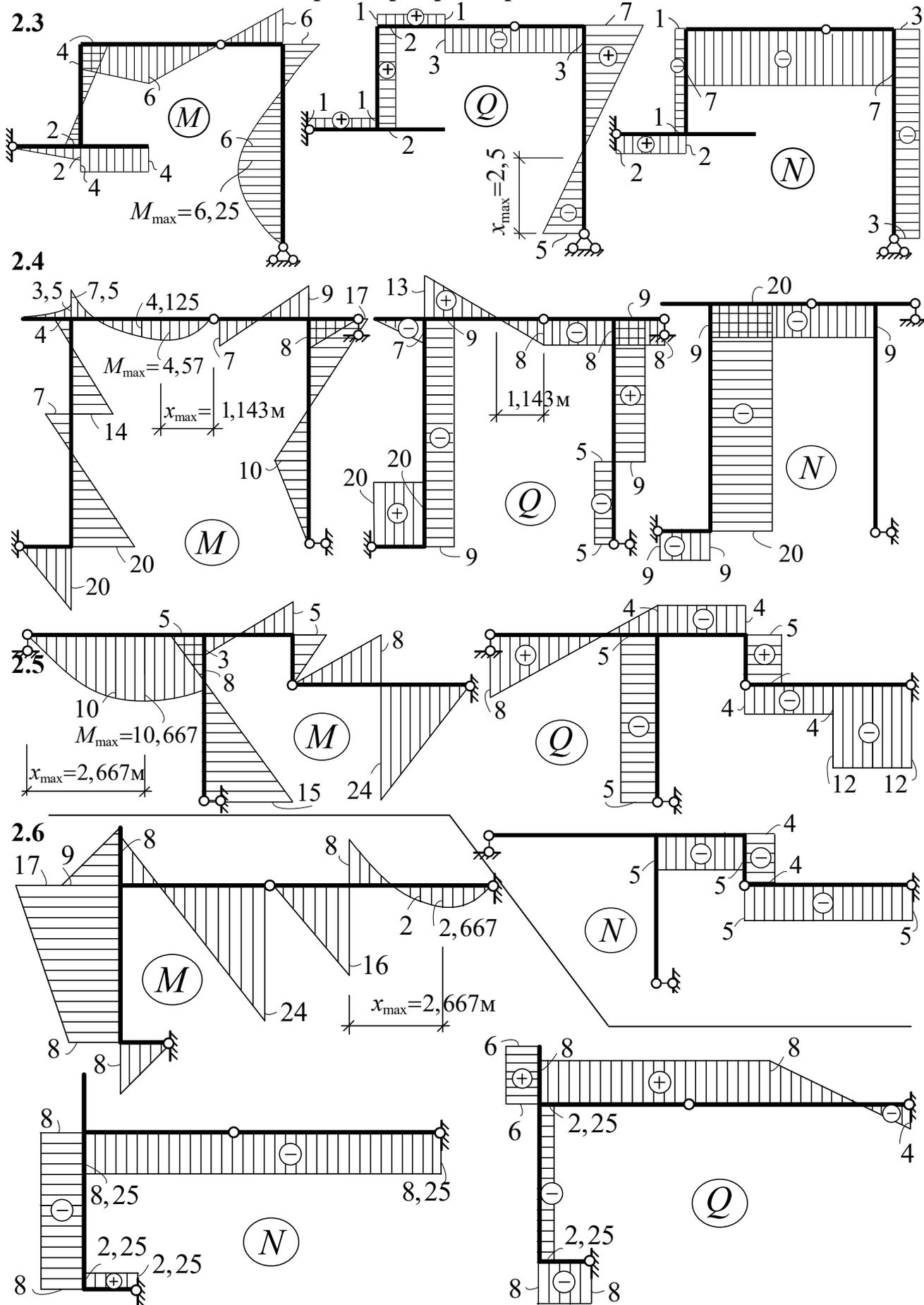
2.1.



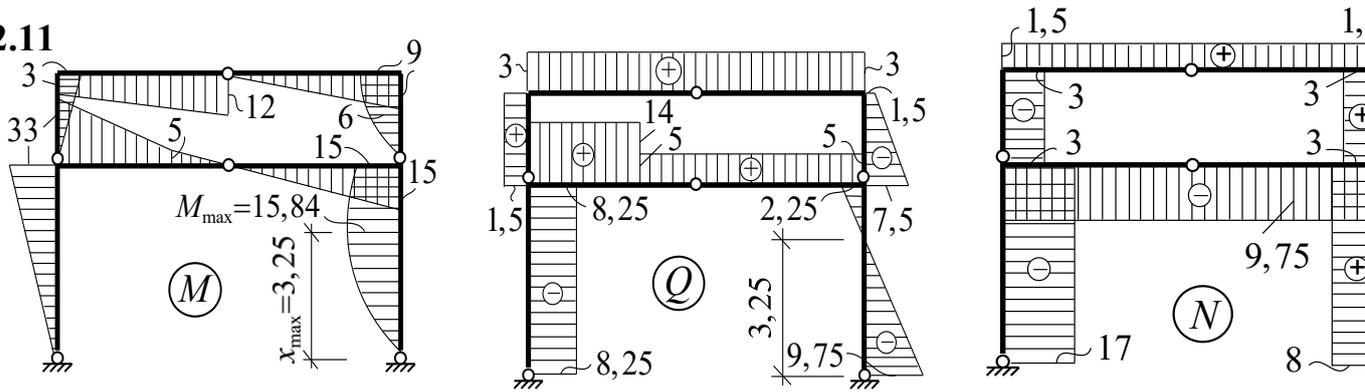
2.2.



2.2.2. Расчет трехшарнирных рам

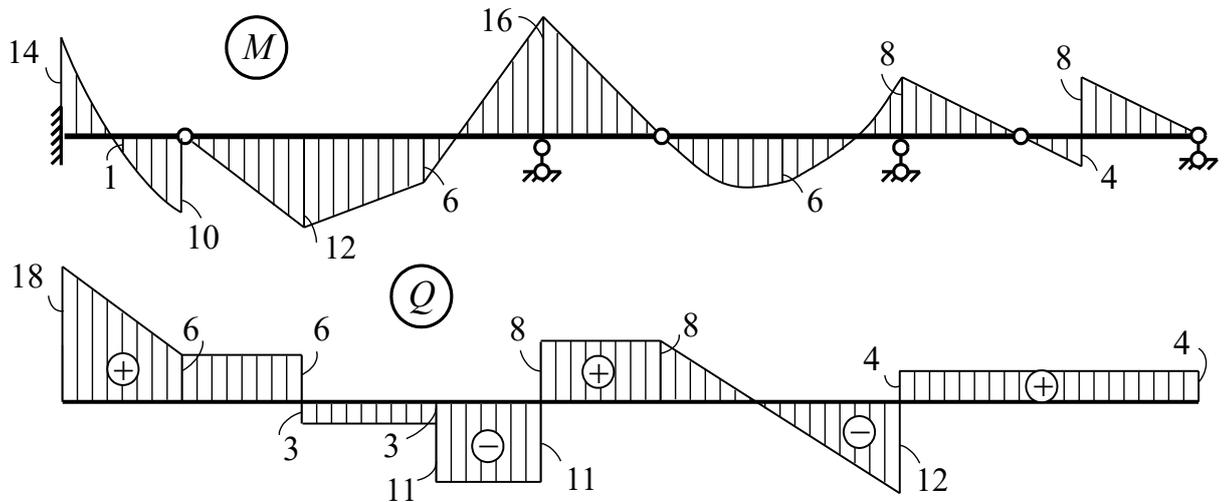


2.11



2.2.4. Расчет статически определимых составных балок

2.12.

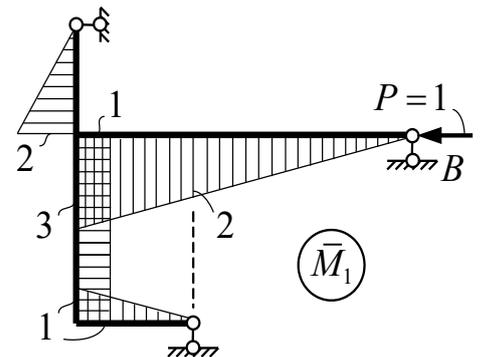


Эпюра продольных сил в балке при действии заданных нагрузок нулевая.

2.2.5. Определение перемещений в изгибаемых системах

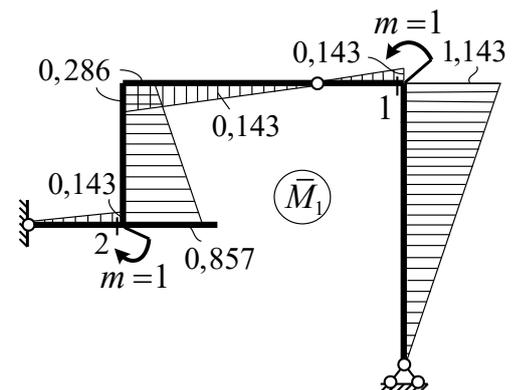
2.13. Эпюра изгибающих моментов от действия внешней нагрузки представлена в ответе к задаче 2.2, единичная эпюра изгибающих моментов показана справа.

Горизонтальное перемещение точки *B* равно $66,667/EJ$ (влево).



2.14. Грузовая эпюра изгибающих моментов представлена в ответе к задаче 2.2, единичная эпюра изгибающих моментов показана справа.

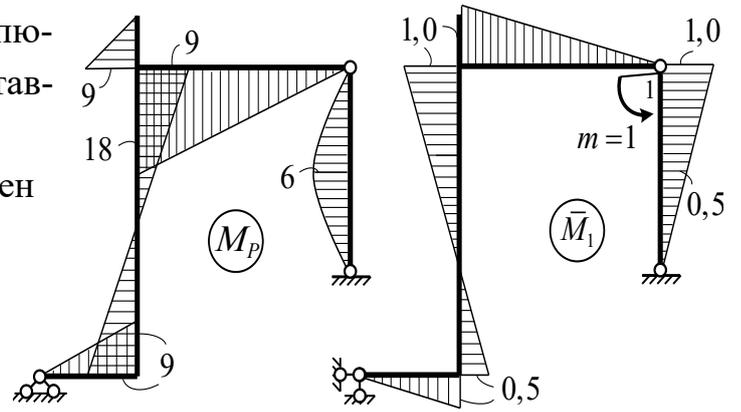
Взаимный угол поворота сечений 1 и 2 равен $2,952/EJ$.



СОДЕРЖАНИЕ

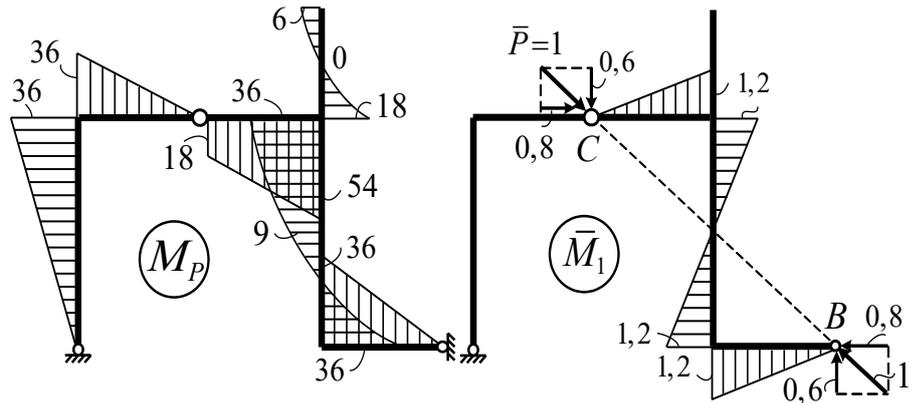
2.15. Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов представлены внизу справа.

Угол поворота сечения 1 равен $25/EJ$.

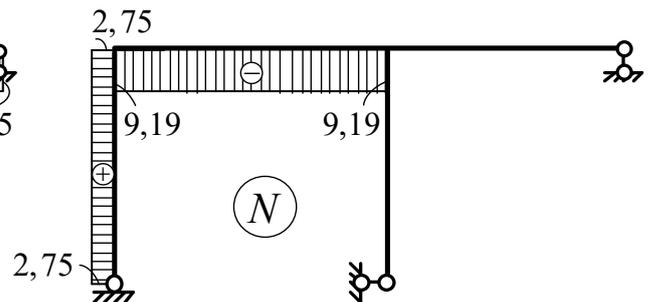
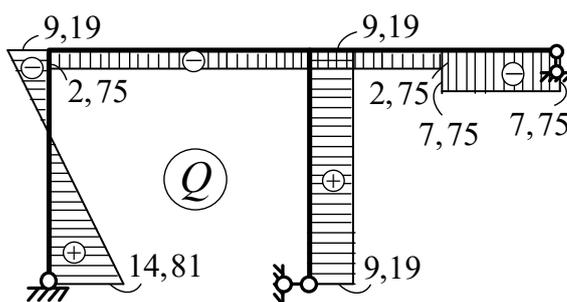
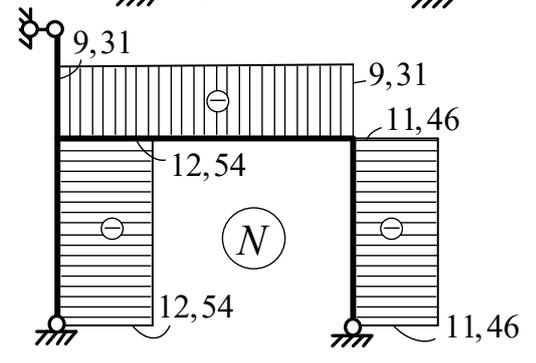
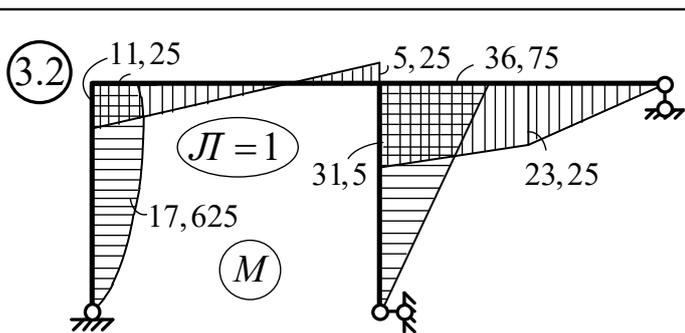
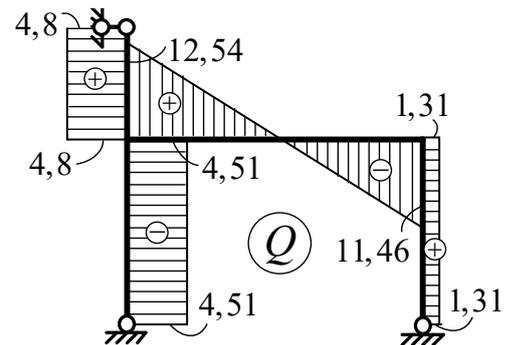
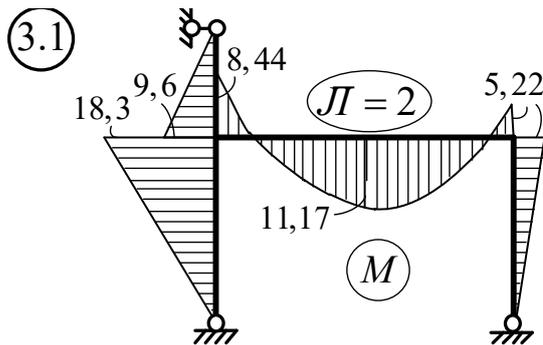


2.16. Справа представлены грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов.

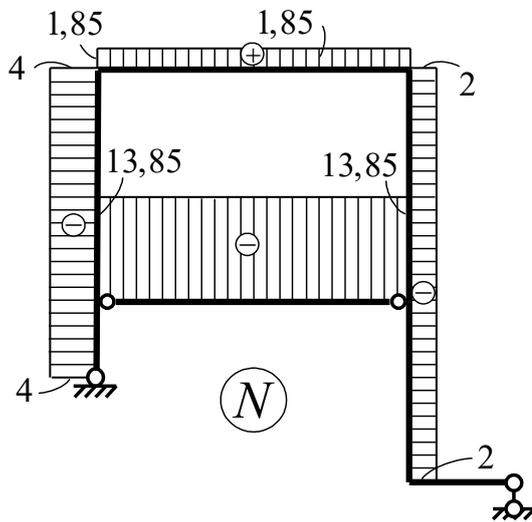
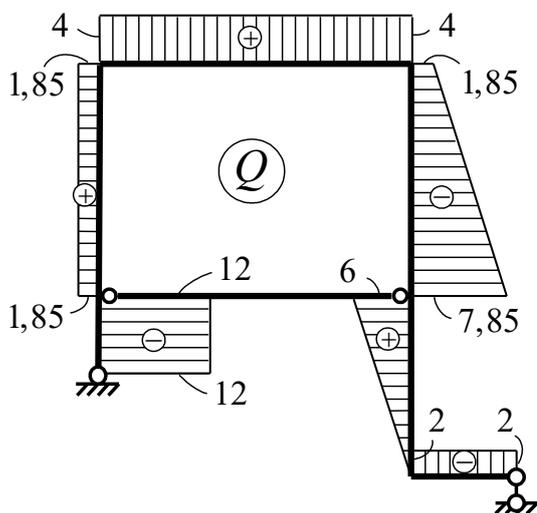
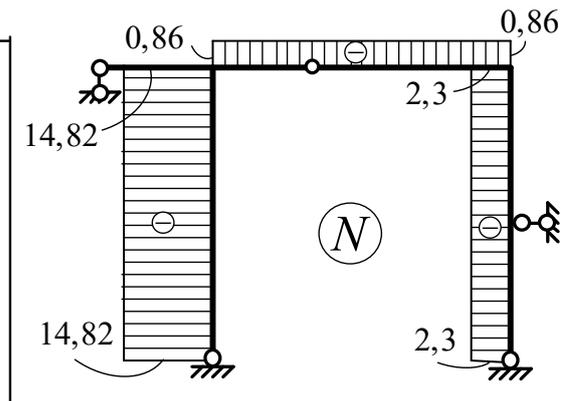
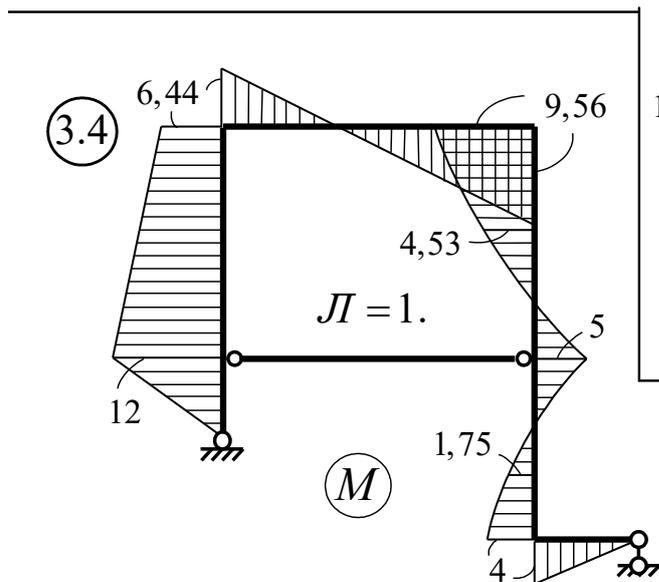
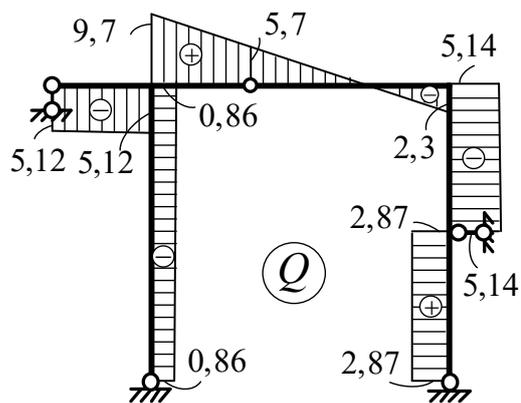
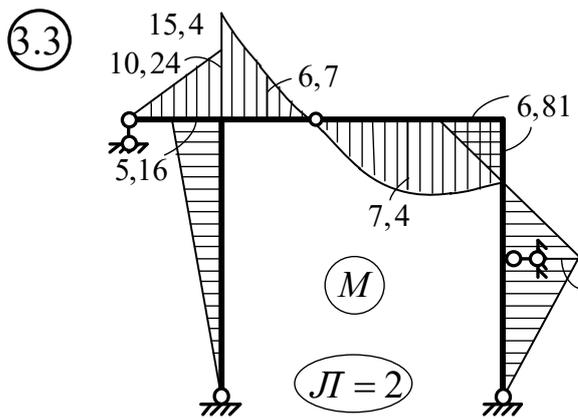
Взаимное сближение точек С и В равно $122,4/EJ$.



2.3. Расчет статически неопределимых рам методом сил

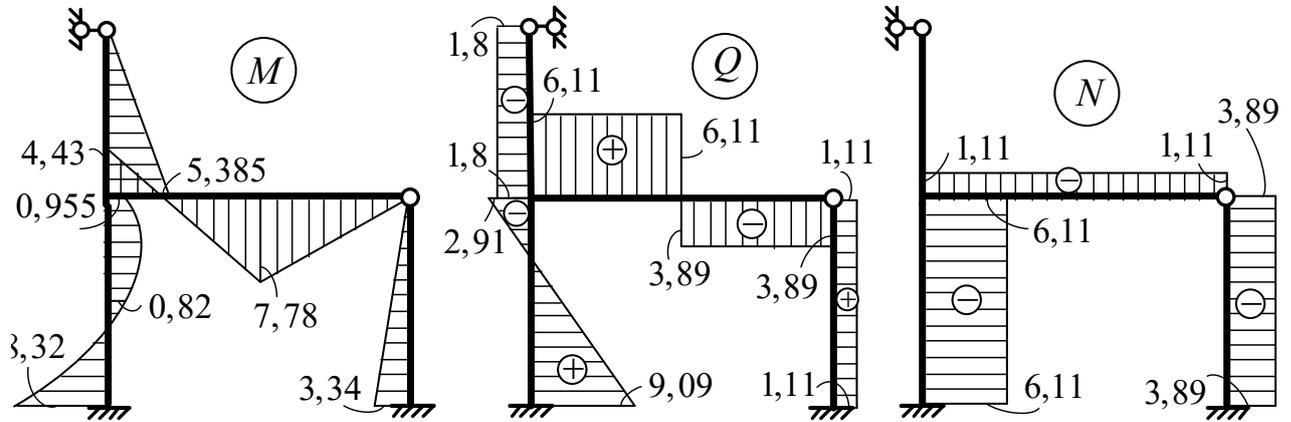


СОДЕРЖАНИЕ



2.4. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений

4.1. Степень кинематической неопределимости рамы равна двум ($n = 2$) – поворот узла D (Z_1) и линейное смещение по горизонтали узлов D и T (Z_2); при $EJ = 1$ перемещения равны: $Z_1 = 2,045$ (по часовой стрелке), $Z_2 = 10,020$ (вправо). Эпюры усилий представлены на рисунке.

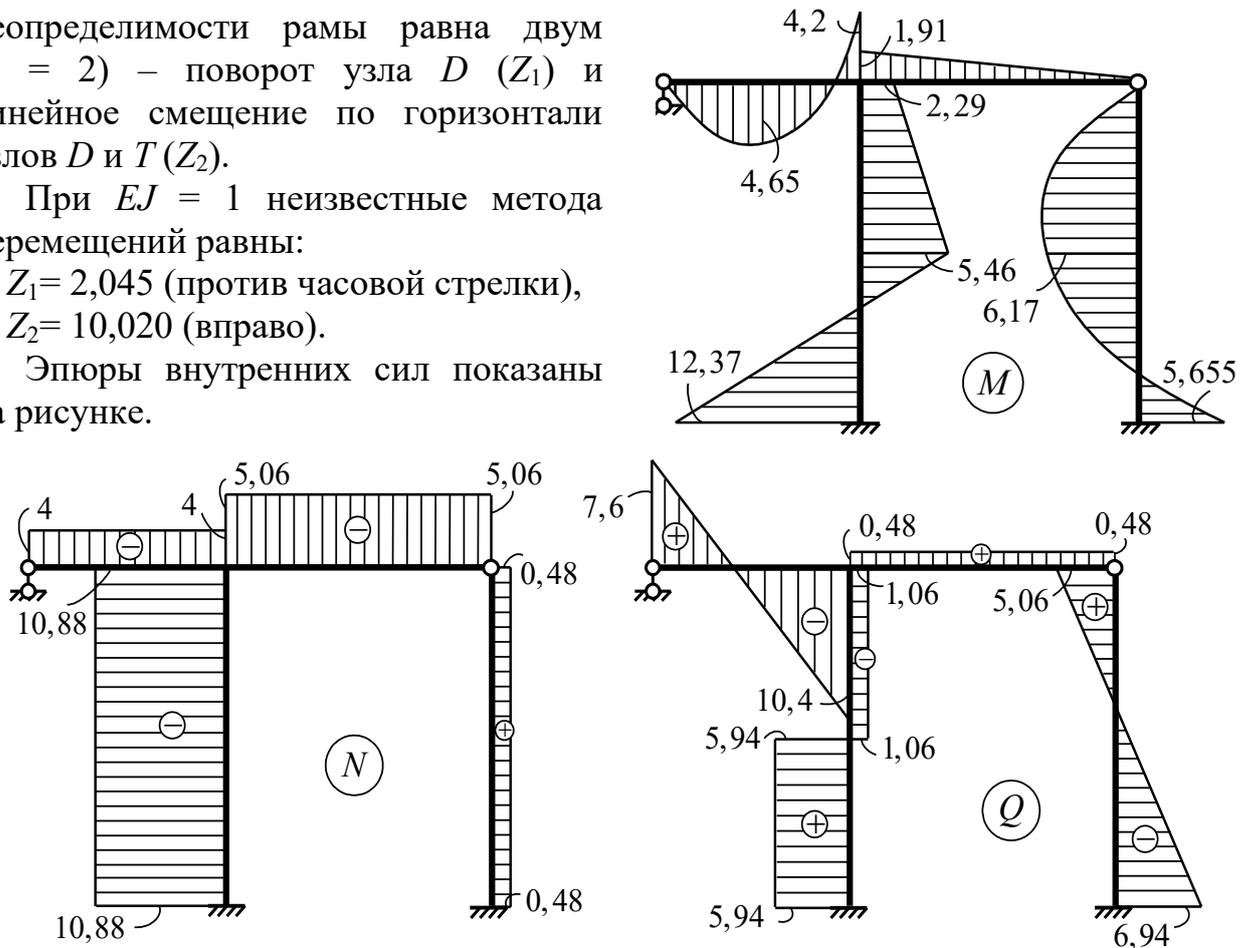


4.2. Степень кинематической неопределимости рамы равна двум ($n = 2$) – поворот узла D (Z_1) и линейное смещение по горизонтали узлов D и T (Z_2).

При $EJ = 1$ неизвестные метода перемещений равны:

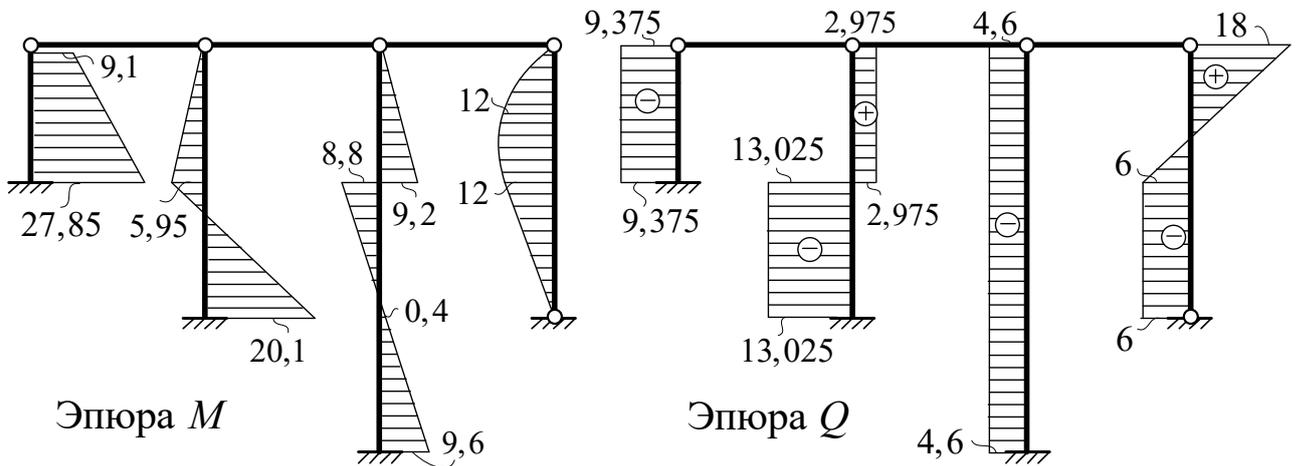
$Z_1 = 2,045$ (против часовой стрелки),
 $Z_2 = 10,020$ (вправо).

Эпюры внутренних сил показаны на рисунке.

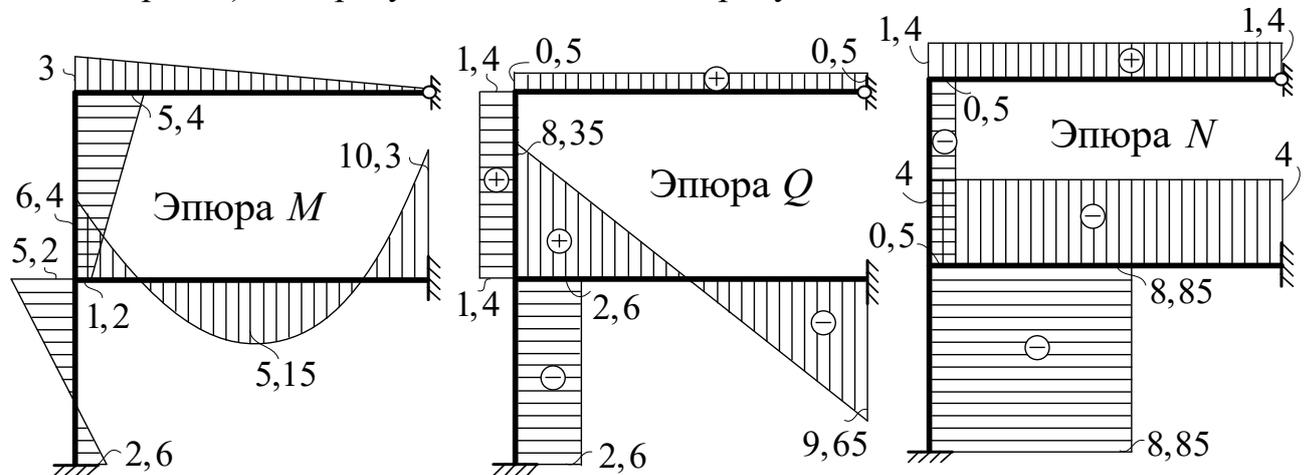


4.3 Степень кинематической неопределимости рамы равна единице ($n = 1$) – верхние шарнирные узлы могут смещаться линейно по горизонтали.

При $EJ = 108$ перемещение этих узлов Z_1 равно 0,4 (влево). Эпюры усилий показаны на рисунке (эпюра N нулевая).

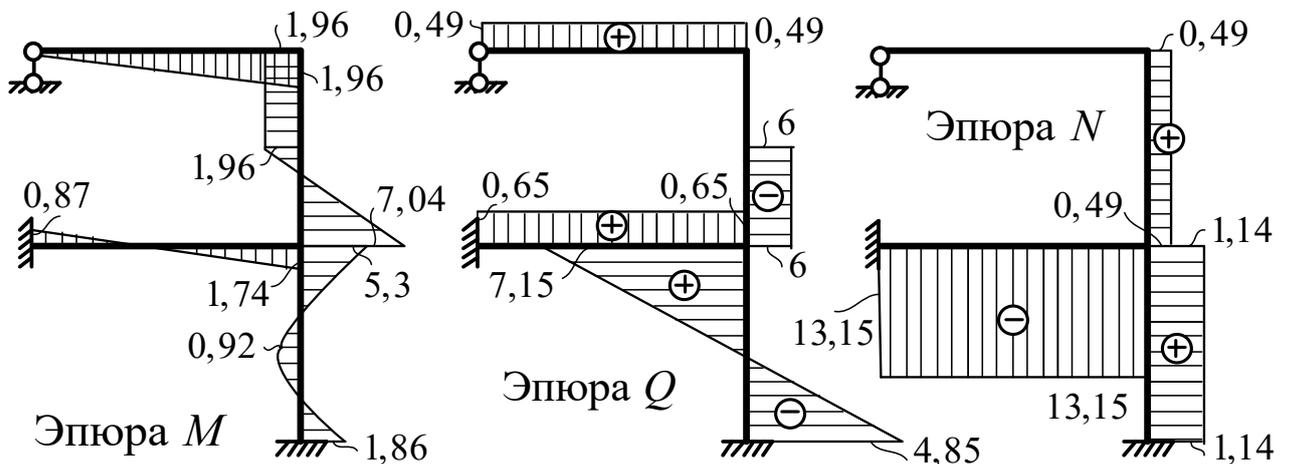


4.4. Степень кинематической неопределимости рамы равна двум ($n=2$) – неизвестными являются повороты жестких узлов 1 и 2. При $EJ=12$ эти углы поворотов этих узлов равны: $Z_1 = -0,5$ (против часовой стрелки), $Z_2 = 0,225$ (по часовой стрелке). Эпюры усилий показаны на рисунке.



2.5. Расчет статически неопределимых рам смешанным методом

Основная система смешанного метода получается путем разделения рамы на две части по узлу C , для нижней части в качестве неизвестного принимается угол поворота жесткого узла C (как в методе перемещений), а для верхней части – реакция (сила) в опоре A (как в методе сил), получаем систему уравнений с двумя неизвестными. Эпюры усилий показаны на рисунке.



3. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»

для специальности 1-70 04 02 ТГВиОВБ

1. Расчетная схема сооружения, проблемы ее выбора.
2. Виды опор и их свойства.
3. Классификация сооружений по особенностям работы.
4. Основные гипотезы и принципы, положенные в основу классических методов расчета строительной механики.
5. Внутренние силы в плоских стержневых системах, их вычисление (определения).
6. Построение эпюр M , Q , N в рамно-стержневых системах.
7. Закономерности, которые должны соблюдаться в изменении эпюр внутренних сил.
8. Кинематический анализ сооружений: порядок проведения; степень свободы системы; понятия неизменяемой системы, диска, кинематической (простой) связи, шарнира, опор.
9. Структура сооружения с точки зрения кинематического анализа. Понятия и характеристики диска, кинематической связи, шарнира, опор.
10. Определение степеней свободы различных систем. Классификация сооружений в зависимости от значений степени свободы.
11. Принципы образования геометрически неизменяемых систем. Понятия фиктивного шарнира.
12. Мгновенно изменяемые системы и их свойства. Геометрические признаки мгновенно-изменяемых систем.
13. Выполнение кинематического анализа систем.
14. Поэтажная схема многопролетной балки и ее свойства. Принципы расчета многопролетных статически определимых балок.
15. Определение внутренних сил в трехшарнирных арках (сравнение с балками того же пролета).
16. Понятие фермы: реальная ферма и ее расчетная схема; способы определения усилий.
17. Классификация ферм по очертанию поясов, типу опирания и назначению. Классификация ферм по типу решетки.
18. Способ вырезания узлов. Признаки нулевых стержней. 25. Способ моментной точки и проекций для определения усилий в стержнях плоских ферм.
19. Понятие действительной и возможной (виртуальной) работ внешних и внутренних сил. Суть теоремы Клапейрона.
20. Возможная работа внешних и внутренних сил. Теорема о взаимности возможных работ. Теорема о взаимности единичных перемещений. Работа внутренних сил.
21. Формула Мора для определения перемещений (с пояснением всех входящих в формулу величин).
22. Порядок определения перемещений в С.О.С. с использованием формулы Мора.

СОДЕРЖАНИЕ

23. Правило Верещагина для вычисления интегралов Мора: суть и условия использования.
24. Вычисление интегралов Мора с использованием формулы Симпсона и трапеций. Условия применения и правила знаков.
25. Принципы определения перемещений от смещения опор.
26. Принципы определения перемещений, вызванных изменением температур.
27. Особенности определения перемещений в стержнях ферм.
28. Статическая неопределимость систем. Особенности и свойства статически неопределимых систем.
29. Основные методы расчета статически неопределимых систем и характеристика их неизвестных.
30. Формулы для определения степени статической неопределимости рам и входящие в них величины.
31. Какие системы называют внешне и внутренне статически неопределимыми?
32. Основная система метода сил, ее определение и свойства. Расчетная и рациональная основная система (О.С.) метода сил.
33. Основная система метода сил и требования к ней. Как определяется неизменяемость основной системы (О.С.) метода сил?
34. Система канонических уравнений метода сил, ее характеристика и физический смысл уравнений. Физический смысл коэффициента δ_{ik} при использовании для расчета конкретной О.С.
35. Изобразите для заданной статически неопределимой рамы два (три) варианта основной системы (О.С.) метода сил.
36. Запишите формулы Мора, по которым в методе сил определяются единичные и грузовые перемещения (коэффициенты и свободные члены системы уравнений), и опишите входящие в них величины.
37. Проверки правильности вычисления единичных коэффициентов и грузовых членов системы канонических уравнений метода сил.
38. Деформационная (кинематическая) проверка эпюр изгибающих моментов, входящие в нее величины, ее физический смысл.
39. Способы построения эпюр M , Q и N в методе сил после определения всех неизвестных метода сил.
40. Допущения, используемые в расчетах статически неопределимых рам методом перемещений.
41. Что такое степень кинематической неопределимости системы?
42. Канонические уравнения метода перемещений, их характеристика и физический смысл.
43. Основная система метода перемещений, ее характеристика и свойства. Что такое «табличные эпюры метода перемещений», как они получаются (общий подход) и для чего нужны?

СОДЕРЖАНИЕ

44. Определение в методе перемещений коэффициентов системы уравнений, представляющих собой по физическому смыслу реактивные моменты и реактивные силы?
45. Деформационная (кинематическая) проверка эпюр изгибающих моментов, входящие в нее величины, ее физический смысл.
46. Способы построения эпюр M , Q и N в методе перемещений после определения всех неизвестных метода сил, их проверки.

4. ДИАГНОСТИКА КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТА

Оценка учебной деятельности студентов производится на зачете в соответствии с представленными выше вопросами.

Для аттестации студентов на соответствии их персональных достижений поэтапным и конечным требованиям программы предлагается использовать представленные выше вопросы и задачи и результаты работы студентов на занятиях. Форма диагностики компетенций устанавливается руководством университета и кафедрой.

Оценочными средствами предусматривается оценка способности студентов к творческой деятельности, их готовности вести поиск решения новых задач, для чего используются:

– элементы проблемного обучения (проблемное изложение, вариативное изложение, частично поисковый метод) с использованием опорных сигналов, реализуемые на лекционных и практических занятиях;

– элементы учебно-исследовательской деятельности, творческого подхода, реализуемые на практических занятиях и при самостоятельной работе студентов.

Критерии оценок результатов учебной деятельности студентов на экзаменах и зачетах:

Билеты к зачету состоят из одного теоретического вопроса (30 баллов) и двух задач по 20 (более простая) и 50 баллов.

Зачет ставится при наборе 35 и более баллов. Число баллов за ответы на вопросы и задачу устанавливается пропорционально доле объема представленного студентом материала от полного ответа (решения задачи).

СОДЕРЖАНИЕ

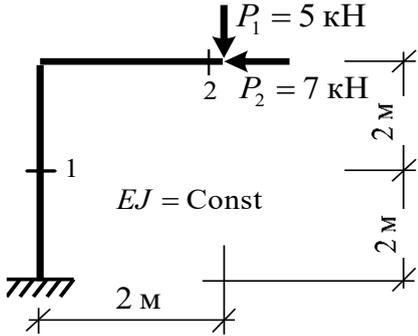
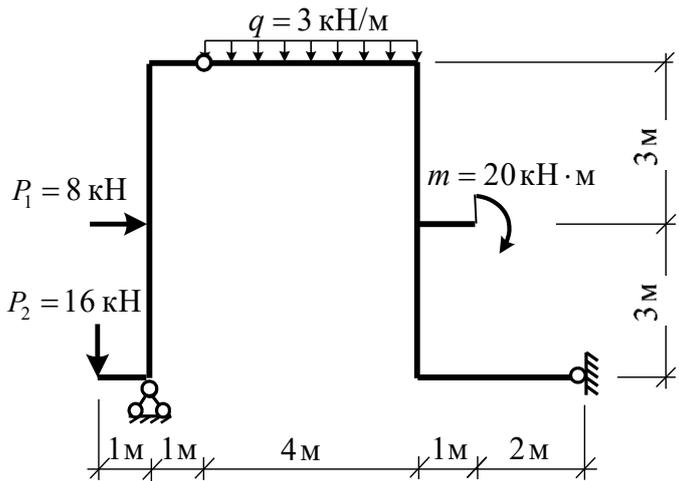
5. ОБРАЗЦЫ БИЛЕТОВ К ЗАЧЕТУ

Учреждение образования «Брестский государственный технический университет»

Летняя экзаменационная сессия 2019/2020 учебного года

Дисциплина: Строительная механика Специальность: 1-1-70 04 02 ТГВиОВБ

Билет к зачету № 00

1	<p>Внутренние силы в сооружениях. Метод сечений. Способы и порядок определения внутренних сил. Закономерности в изменении эпюр усилий. (30 баллов)</p>
2	<p>Определить взаимный угол поворота сечений 1 и 2 от действия внешней нагрузки. (20 баллов)</p> 
3	<p>Задача. Построить эпюры внутренних сил M, Q, N. (50 баллов)</p> 

Преподаватель

В.И.Игнатюк.

Заведующий кафедрой прикладной механики

В.И.Игнатюк.

Дата утверждения: 09.02.2021.

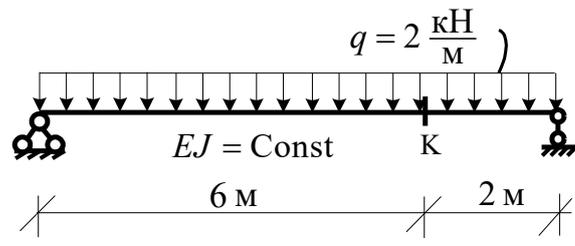
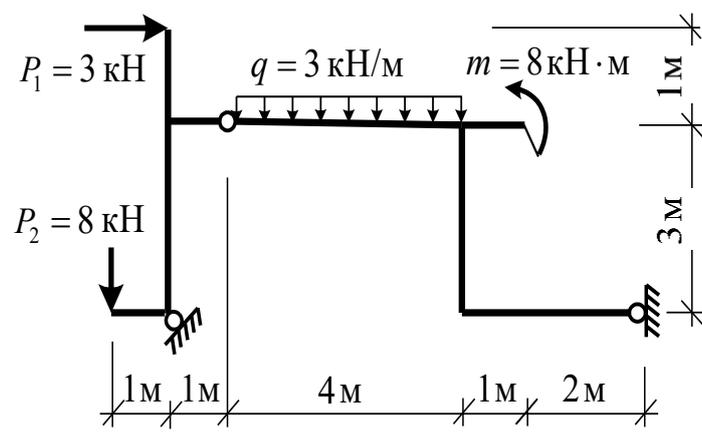
СОДЕРЖАНИЕ

Учреждение образования «Брестский государственный технический университет»

Летняя экзаменационная сессия 2020/2021 учебного года

Дисциплина: Строительная механика Специальность: 1-1-70 04 02 ТГВиОВБ

Билет к зачету № 00

1	<p>Статически неопределимые системы, их особенности и свойства. Расчет статически неопределимых рам методом сил. Суть метода. (30 баллов)</p>
2	<p>Определить перемещение от действия внешней нагрузки $\Delta_K^{\text{верт}}$ (20 баллов)</p> 
3	<p>Задача. Построить эпюру изгибающих моментов. (50 баллов)</p> 

Преподаватель

В.И.Игнатюк.

Заведующий кафедрой прикладной механики

В.И.Игнатюк.

Дата утверждения: 09.02.2021.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

1. СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисевич, А. А. Строительная механика : учеб. пособие / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – 1-е изд. – Минск : БНТУ, 2007. – 821 с.; – 2-е изд. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.
2. Игнатюк, В.И. Строительная механика : учебно-методическое пособие (с грифом УМО в области строительства и архитектуры) / В. И. Игнатюк, В. В. Тур / Брест. гос. техн. ун-т. – Брест : БрГТУ, 2020. – 236 с.
3. Игнатюк, В.И. Строительная механика : пособие / В. И. Игнатюк, И. С. Сыроквашко, В. В. Молош / Брест. гос. техн. ун-т. – Брест : БрГТУ, 2018. – 227 с.
4. Яровая, А. В. Строительная механика: Статика стержневых систем : учеб. пособие / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.
5. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 8-е изд. – М. : Высш. школа, 1986. – 608 с.
6. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах : учебн. пос. – Ч. 1 : Статически определимые системы. – М. : Изд-во АСВ, 1999. – 335 с.
(в интернете можно найти электронную версию этого пособия).
7. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах : учебное пос. – Ч. 2: Статически неопределимые системы. – М. : Изд-во АСВ, 2000. – 464 с.
(в интернете можно найти электронную версию этого пособия).
8. Строительная механика : учебник : в 2 кн. / Под ред. В.Д. Потапова. – Кн. 1 : Статика упругих систем. – М. : Высшая школа, 2007. – 511 с.
9. Леонтьев, Н. Н. Основы строительной механики стержневых систем : учебник / Н. Н. Леонтьев, Д. Н. Соболев, А. А. Амосов. – М. : Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
10. Строительная механика: учебник для вузов / А. В. Дарков [и др.] ; под ред. А. В. Даркова. – 7-е изд. – М. : Высш. школа, 1976. – 600 с.

2. УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»



Строительная механика

Учебная программа для специальности

1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана водного бассейна»

2019 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта специальности ОСВО – 1-70 02 01-2013 «Промышленное и гражданское строительство» и типовой учебной программы по дисциплине «Строительная механика» для специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены», 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана водного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций», утвержденной 30.06.2010, регистрационный № ТД-Л.066/тип.

СОСТАВИТЕЛЬ:

И.И.СЕВОСТЬЯНОВА, доцент кафедры «Прикладная механика» БрГТУ, кандидат технических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой «Прикладная механика» БрГТУ (протокол № 10 от 06.06.2019).



Методической комиссией факультета инженерных систем и экологии БрГТУ (протокол № 4 от 14.06.2019).

Председатель _____ А.А.Волчек



Советом Брестского государственного технического университета (протокол № 8 от 05.07.2019).

2.1. Пояснительная записка

2.1.1. Цели и задачи изучения дисциплины

Учебная программа составлена на основе типовой учебной программы по дисциплине «Строительная механика» для специальностей 1-70 01 01 «Производство строительных изделий и конструкций», 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью», 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены», 1-70 04 01 «Водохозяйственное строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана водного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 07 01 «Строительство тепловых и атомных электростанций», утвержденной 30.06.2010, регистрационный № ТД-Ж.066/тип.

Программа рассчитана на 100 часов.

Строительная механика является для студентов специальности «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана водного бассейна» одной из базовых дисциплин.

Цель изучения дисциплины – изучить способы создания и кинематического анализа плоских стержневых систем; методы определения реактивных и внутренних сил и перемещений в статически определимых и статически неопределимых стержневых системах при действии на них различных внешних воздействий; особенности автоматизации расчетов и применения программных расчетно-проектировочных комплексов для расчета сооружений при действии на них постоянных, неподвижных и подвижных, статических нагрузок.

Строительная механика широко применяется в инженерной практике и имеет особое значение для строительных специальностей, так как развивает у будущих специалистов широкое инженерное мышление и творческие подходы.

Правильное и рациональное выполнение расчетов на прочность, жесткость и устойчивость инженерных сооружений и строительных конструкций, используемых в сложных эксплуатационных условиях, является необходимым условием их надежности и долговечности при одновременном снижении материалоемкости.

Основные задачи изучения дисциплины устанавливаются сферой профессиональной деятельности выпускников специальности:

вооружение будущего инженера знаниями, необходимыми для расчета, проектирования и строительства промышленных и гражданских зданий, различных инженерных конструкций и сооружений.

формирование знаний, умений и профессиональных компетенций при изучении методов расчета и проектирования инженерных сооружений и строительных конструкций, развитие инженерного мышления у студентов, формирование фундамента инженерно-технических знаний на основе изучения достижений мировой и отечественной науки и техники, формирование установки на практическое внедрение полученных студентами знаний в их профессиональной деятельности и других сферах жизни общества, а также развитие и закрепление академических, профессиональных и социально-личностных компетенций.

2.1.2. Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста, связь с другими учебными дисциплинами

Освоение дисциплины «Строительная механика» базируется на компетенциях, приобретенных ранее студентами при изучении курсов высшей математики, теоретической механики, сопротивления материалов, информатики и др.

На знаниях и умениях, полученных студентами в процессе изучения дисциплины «Строительная механика», базируется изучение таких дисциплин как «Строительные конструкции (железобетонные, металлические, деревянные, каменные)», «Основания и фундаменты» и др.

2.1.3. Требования к освоению учебной дисциплины

В результате изучения дисциплины студенты специальности должны закрепить и развить академические, профессиональные и социально-личностные компетенции.

Студенты должны владеть полученными базовыми научно-теоретическими знаниями и уметь применять их для решения теоретических и практических профессиональных задач, исследовательскими навыками, системным и сравнительным анализом. Научиться работать самостоятельно. Развить творческое мышление. Уметь учиться и повышать свою квалификацию в дальнейшей жизни. Уметь рассчитывать инженерные системы зданий и сооружений.

Для приобретения этих навыков в результате изучения дисциплины студенты должны:

знать:

- классификацию расчетных схем строительных сооружений;
- последовательность проведения кинематического анализа сооружений;
- основные понятия, гипотезы и допущения строительной механики;
- методы определения усилий и перемещений в статически определимых и неопределимых стержневых системах на статические, неподвижные и подвижные нагрузки;
- методы расчета строительных сооружений на прочность и жесткость от различных внешних воздействий;
- причины разрушения инженерных сооружений и строительных конструкций и способы повышения их надежности и долговечности;

уметь:

- выполнить кинематический анализ расчетной схемы;
- выбирать рациональные методы и алгоритмы расчета инженерных сооружений и строительных конструкций с учетом возможных упрощений, допущений и ограничений;
- определять усилия, вычислять перемещения от действующих на сооружение нагрузок;
- дать оценку прочности, жесткости и устойчивости сооружения;
- выполнять сложные инженерные расчеты с использованием современных компьютерных программ;

владеть:

- методикой выбора допущений при решении задач расчета сооружений;
- методикой оценки прочности, жесткости и устойчивости сооружения;

СОДЕРЖАНИЕ

- полученными базовыми научно-теоретическими знаниями и уметь применять их для решения теоретических и практических профессиональных задач;
- приемами решения узловых соединений зданий и сооружений.
- навыками самостоятельного получения знаний и повышения квалификации;
- современными компьютерными технологиями расчета и проектирования зданий и сооружений.

2.1.4. Общее количество часов, отводимых на изучение учебной дисциплины, примерное распределение аудиторного времени по видам занятий

Общее количество часов, отводимых на изучение учебной дисциплины определяется учебными планами специальности и составляет

100 часов (2,5 зачетных единицы), которые по семестрам и видам работы и занятий распределяются следующим образом:

1) для дневной формы обучения (4 семестр):

общее количество часов – 100 (2,5 зачетных единиц);

из них:

68 часов – аудиторная работа, 32 часов – самостоятельная работа;

аудиторное время по видам занятий распределяется:

– лекции – 34 часа;

– практические занятия – 34 часа;

форма контроля знаний – зачет;

2) для заочной формы обучения (6 семестр):

общее количество часов – 100 (2,5 зачетных единиц);

из них:

16 часов – аудиторная работа, 84 часов – самостоятельная работа;

аудиторное время по видам занятий распределяется:

– лекции – 6 часов;

– практические занятия – 10 часов;

форма контроля знаний – зачет.

2) для заочной сокращенной формы обучения (4 семестр):

общее количество часов – 100 (2,5 зачетных единиц);

из них:

10 часов – аудиторная работа, 90 часов – самостоятельная работа;

аудиторное время по видам занятий распределяется:

– лекции – 4 часов;

– практические занятия – 6 часов;

форма контроля знаний – зачет.

При изучении материала дисциплины студенты должны пользоваться учебной, справочной, научно-технической и методической литературой, рекомендуемой настоящей программой и кафедрой.

Примерное распределение часов по темам представлено далее в учебно-методических картах.

2.2. Содержание учебного материала**2.2.1. Тематический план**

№ пп	Наименование тем	Число учебных часов			
		Лекции	Практич. занятия	Самост. работа	Всего
4 семестр					
1.	Введение. Предмет и задачи дисциплины, история развития. Внутренние усилия. Методы расчета.	2	–	2	4
2.	Кинематический анализ сооружений.	2	2	–	4
3.	Расчет статически определимых простых балок и рам.	2	4	4	10
4.	Трехшарнирные рамы и арки. Составные рамы.	4	6	4	14
5.	Расчет многопролетных статически определимых балок на постоянную нагрузку.	2	2	2	6
6.	Расчет простых и многопролетных балок на подвижную нагрузку.	4	2	2	8
7.	Плоские статически определимые фермы.	2	2	2	6
8.	Основные теоремы об упругих системах. Определение перемещений.	4	4	4	12
9.	Статически неопределимые системы. Метод сил.	6	8	6	20
10.	Статически неопределимые системы. Метод перемещений.	4	4	4	12
11.	Основы расчета стержневых систем по несущей способности.	2	–	2	4
Итого за семестр:		34	34	32	100

2.2.2. Содержание**4 семестр****1. Введение**

Строительная механика, ее предмет и задачи. Краткий исторический очерк развития. Расчетная схема сооружений. Внутренние усилия. Классификация опор и нагрузок. Методы расчета и определения внутренних сил в статически определимых системах. Метод сечений. Эпюры усилий в простых системах. Понятие о расчете по деформированному и недеформированному состоянию.

2. Кинематический анализ сооружений

Общий порядок проведения кинематического анализа. Степень свободы системы и ее определение. Геометрический анализ структуры систем, неизменяемые и изменяемые системы и их признаки. Мгновенно изменяемые системы и их особенности.

3. Расчет статически определимых простых балок и рам

СОДЕРЖАНИЕ

Применение метода сечений в расчетах балок и рам. Определение опорных реакций, внутренних сил, построение и контроль эпюр.

4. Трехшарнирные арки и рамы. Составные рамы

Образование трехшарнирных систем. Определение опорных реакций и внутренних сил. Сопоставление распорной системы с балкой. Построение линий влияния в трехшарнирной системе. Рациональное очертание оси арки. Составные рамы.

5. Расчет многопролетных статически определимых балок на постоянную нагрузку

Образование многопролетных статически определимых балок. Поэтажная схема многопролетной балки. Главные и второстепенные балки. Порядок расчета простых балок в составе многопролетной балки.

6 Расчет простых и многопролетных балок на подвижную нагрузку

Понятие об особенностях расчета балок на подвижные нагрузки. Линии влияния. Статический способ построения линий влияния для однопролетных и многопролетных балок. Определение усилий по линиям влияния. Невыгодное загрузеие линий влияния.

7. Плоские статически определимые фермы

Особенности образования ферм, их классификация. Расчетные схемы ферм. Методы определения усилий в стержнях ферм. Влияние очертания поясов и типа решетки на распределение усилия.

8. Основные теоремы об упругих системах. Определение перемещений

Перемещения и их обозначения. Работа внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия системы. Принцип возможных перемещений. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений. Общий метод определения перемещений и способы вычисления интегралов Мора. Перемещения от изменения температуры и смещения опор.

9. Статически неопределимые системы. Метод сил

Свойства статически неопределимых систем. Сущность метода сил. Степень статической неопределимости плоских систем. Основная система метода сил. Канонические уравнения. Общий алгоритм расчета статически неопределимых систем по методу сил. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, их проверки. Определение перемещений в статически неопределимых системах. Упрощения при расчете симметричных рам методом сил. Выбор симметричной основной системы, группировка неизвестных, разложение внешней нагрузки.

10. Статически неопределимые системы. Метод перемещений

Сущность метода. Неизвестные и степень кинематической неопределимости системы. Основная система метода перемещений. Определение коэффициентов канонических уравнений и их свободных членов, решение уравнений, построение окончательных эпюр и их проверки. Упрощение канонических уравнений при расчете симметричных рам методом перемещений.

11. Основы расчета стержневых систем по несущей способности

Понятие о предельных состояниях конструкции. Определение несущей способности сечений элементов при одноосном напряженном состоянии, чистом изгибе и в общем случае изгиба. Пластические шарниры. Несущая способность конструкций. Методы расчета статически неопределимых систем по несущей способности.

СОДЕРЖАНИЕ

2.3. Учебно-методические карты

2.3.1. Учебно-методическая карта
дисциплины «Строительная механика»

для специальности 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана
водного бассейна» (для дневной формы обучения)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4 семестр								
1.	Введение. Предмет и задачи дисциплины, история развития. Внутренние усилия. Методы расчета.	2	–	–	–	–	2	–
2.	Кинематический анализ сооружений.	2	2	–	–	–	–	–
3.	Расчет статически определимых простых балок и рам.	2	4	–	–	–	4	–
4.	Трехшарнирные рамы и арки. Составные рамы.	4	6	–	–	–	4	–
5.	Расчет многопролетных статически определимых балок на постоянную нагрузку.	2	2	–	–	–	2	–
6.	Расчет простых и многопролетных балок на подвижную нагрузку.	4	2	–	–	–	2	–
7.	Плоские статически определимые фермы.	2	2	–	–	–	2	–
8.	Основные теоремы об упругих системах. Определение перемещений.	4	4	–	–	–	4	–
9.	Статически неопределимые системы. Метод сил.	6	8	–	–	–	6	
10.	Статически неопределимые системы. Метод перемещений.	4	4	–	–	–	4	
11.	Основы расчета стержневых систем по несущей способности.	2	–	–	–	–	2	
Итого за семестр:		34	34		–	–	32	ЗЧТ

Обозначение: ЗЧТ – зачет.

2.3.2. Учебно-методическая карта дисциплины «Строительная механика»

для специальности 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана
водного бассейна» (для заочной формы обучения)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6 семестр								
1.	Строительная механика, методы и задачи. Расчетная схема сооружений.	–	–	–	–	–	2	–
2.	Кинематический анализ сооружений.	1	–	–	–	–	6	–
3.	Определение усилий в статически определимых балках, рамах, арках от постоянных нагрузок.	1	4	–	–	–	21	КР № 1
4.	Плоские статически определимые фермы.	1	–	–	–	–	10	–
5.	Определение перемещений в статически определимых системах.	1	2	–	–	–	15	–
6.	Статически неопределимые системы. Метод сил.	1	2	–	–	–	20	–
7.	Расчет статически неопределимых рам методом перемещений.	1	2	–	–	–	10	–
Итого за семестр:		6	10	–	–	–	84	ЗЧТ

Обозначение: ЗЧТ – зачет.

2.3.3. Учебно-методическая карта дисциплины «Строительная механика»

для специальности 1-70 04 02 «Теплогасоснабжение, вентиляция и охрана
водного бассейна» (для заочной сокращенной формы обучения)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4 семестр								
1.	Строительная механика, методы и задачи. Расчетная схема сооружений.	–	–	–	–	–	2	–
2.	Кинематический анализ сооружений.	1	–	–	–	–	8	–
3.	Определение усилий в статически определимых балках, рамах, арках от постоянных нагрузок.	1	2	–	–	–	30	КР № 1
4.	Определение перемещений в статически определимых системах.	1	2	–	–	–	25	–
5.	Статически неопределимые системы. Метод сил.	1	2	–	–	–	25	–
Итого за семестр:		4	6	–	–	–	90	ЗЧТ

Обозначение: ЗЧТ – зачет.

2.4. Информационно-методическая часть

2.4.1. Основная литература

4.1.1. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2007. – 821 с.;

2-е изд. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.

4.1.2. Строительная механика / Под ред. А.В. Даркова. – М.: Высшая школа, 1976. – 600 с.

4.1.3. Игнатюк, В.И. Строительная механика: пособие / В.И. Игнатюк, И.С. Сырковашко. – Брест, 2015. – 152 с.

4.1.4. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем : уч. пособие / А.В. Яровая ; Белорус. гос. ун-т транспорта. – Гомель: БелГУТ, 2013. – 447 с.

4.1.5. Дарков, А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.И. Шапошников. – М.: Высшая школа, 1986. – 607с.

4.1.6. Киселев, В.А. Строительная механика. Общий курс / В.А. Киселев.– М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.

4.1.7. Коршун Л.И., Игнатюк В.И., Хамутовский А.С. Основы устойчивости стержневых систем. – Брест,1995. – 64 с.

2.4.2. Дополнительная литература.

4.2.1. Селюков В.М. Расчетно-проектировочные работы по строительной механике. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989. – 205 с.

4.2.2. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем / Под ред. Г.К. Клейна. – М.: Высшая школа, 1980. – 384 с.

4.2.3. Киселев В.А. Строительная механика: Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройивдат., 1980. – 616 с.

4.2.4. Клейн, Г.К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Основы теории устойчивости, динамики сооружений и расчета пространственных систем / Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Под ред. Г.К. Клейна. – М.: Высшая школа, 1980. – 320 с.

4.2.5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 1. Статически определимые системы. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 335 с.

4.2.6. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. 2. Статически неопределимые системы. – М.: Изд-во АСВ, 2000. – 464 с.

4.2.7. Снитко Н. К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1980. – 432 с.

4.2.8. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: АСВ, 1996. – 541 с.

4.2.9. Кузьмин Н.Л., Рекач В.Г., Розенблат Г И. Сборник задач по курсу строительной механики. – М.: Госстройиздат, 1962. – 332 с.

4.2.10. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

4.2.11. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 520 с.

4.2.12. Довнар Е.П., Коршун Л.И. Строительная механика. – Мн.: Вышэйшая школа, 1989. – 310 с.

2.4.3. Учебно-методические разработки

4.3.1. Задания к расчетно-графическим работам по дисциплине «Строительная

СОДЕРЖАНИЕ

механика» для студентов специальности 70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» / В.И. Игнатюк; БГТУ. – Брест, 2002. – 24 с.

4.3.2. Построение эпюр внутренних сил в статически определимых плоских рамно-стержневых системах: методические указания по дисциплине «Строительная механика» для студентов строительных специальностей / В.И. Игнатюк; БрГТУ. – Брест, 2002. – 36 с.

4.3.3. Расчет трехшарнирных арок: методические указания по дисциплине «Строительная механика» для студентов строительных специальностей дневной и заочной форм обучения / В.И. Игнатюк, С.В. Загуляев, В.В. Молош; БрГТУ. – Брест, 2007. – 32 с.

4.3.4. Расчет плоских статически определимых шарнирных ферм: методические указания по дисциплине «Строительная механика» для студентов строительных специальностей / В.И. Игнатюк; БрГТУ. – Брест, 2005. – 47 с.

4.3.5. Метод сил в расчетах плоских статически неопределимых рам: методические указания по дисциплине «Строительная механика» для студентов строительных специальностей / В.И. Игнатюк; БрГТУ. – Брест, 2003. – 60 с.

4.3.6. Расчет двухшарнирных арок на статические нагрузки: методические указания по дисциплине «Строительная механика» для студентов специальности 70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» / В.И. Игнатюк; БрГТУ. – Брест, 2003. – 27 с.

4.3.7. Метод перемещений при определении внутренних сил в плоских статически неопределимых рамах: методические указания по курсу «Строительная механика» для студентов строительных специальностей / В.И. Игнатюк; БрПИ. – Брест, 1997. – 36с.

4.3.8. Выполнение расчетно-проектировочных заданий по курсу «Строительная механика» с использованием ЭВМ / В.И. Игнатюк, А.С. Хамутовский; БрПИ.– Брест, 1992.– 34 с.

2.4.4. Учебные компьютерные программы

4.4.1. Arka3 «Расчёт трёхшарнирной арки на неподвижные нагрузки»;

4.4.3. MetSil «Расчёт статическим неопределимой рамы методом сил».

2.4.5. Примерный перечень практических занятий

4 семестр

4.5.1. Кинематический анализ сооружений.

4.5.2. Построение эпюр внутренних сил в простых ломаных стержнях, балках и рамах.

4.5.3. Расчет трехшарнирных рам, арок на действие неподвижных нагрузок. Определение внутренних усилий и построение их эпюр в трехшарнирных рамах, трехшарнирных арках, составных рамах.

4.5.4. Расчет многопролетных статически определимых балок на постоянную нагрузку.

4.5.5. Расчет простых и многопролетных балок на подвижную нагрузку.

4.5.6. Определение усилий в стержнях плоских статически определимых ферм.

4.5.7. Определение перемещений в статически определимых системах от внешней нагрузки.

4.5.8 Расчет статически неопределимых систем методом сил.

Определение степени статической неопределимости рам. Выбор основной систе-

СОДЕРЖАНИЕ

мы метода сил. Расчет рам методом сил на действие неподвижной нагрузки. Использование симметрии.

4.5.9 Расчет статически неопределимых систем методом перемещений.

Определение степени кинематической неопределимости рам. Выбор основной системы метода перемещений. Расчет рам методом перемещений на действие неподвижной нагрузки. Использование симметрии.

2.4.6. Самостоятельная работа

4 семестр

1. Введение

Строительная механика, ее предмет и задачи. Краткий исторический очерк развития. Расчетная схема сооружений. Внутренние силы. Классификация опор и нагрузок. Методы расчета и определения внутренних сил в статически определимых системах. Метод сечений. Эпюры усилий в простых рамах. Понятие о расчете по деформированному и недеформированному состоянию.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4], [3.3.2, 3.3.3].

2. Кинематический анализ сооружений

Общий порядок проведения кинематического анализа. Степень свободы системы и ее определение. Геометрический анализ структуры систем, неизменяемые и изменяемые системы и их признаки. Мгновенно изменяемые системы и их особенности.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4].

3. Расчет статически определимых простых балок и рам

Применение метода сечений в расчетах балок и рам. Определение опорных реакций, внутренних сил, построение и контроль эпюр.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4], [3.2.1, 3.2.2], [3.3.2].

4. Трехшарнирные арки и рамы. Составные рамы

Образование трехшарнирных систем. Определение опорных реакций и внутренних сил. Сопоставление распорной системы с балкой. Построение линий влияния в трехшарнирной системе. Рациональное очертание оси арки. Составные рамы.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4], [3.2.1, 3.2.2], [3.3.2, 3.3.3].

5. Расчет многопролетных статически определимых балок на постоянную нагрузку

Образование многопролетных статически определимых балок. Поэтажная схема многопролетной балки. Главные и второстепенные балки. Порядок расчета простых балок в составе многопролетной балки.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4], [3.2.1, 3.2.2], [3.3.2].

6 Расчет простых и многопролетных балок на подвижную нагрузку

Понятие об особенностях расчета балок на подвижные нагрузки. Линии влияния. Статический способ построения линий влияния для однопролетных и многопролетных балок. Определение усилий по линиям влияния. Невыгодное загрузку линий влияния.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4], [3.2.1, 3.2.2], [3.3.2].

7. Плоские статически определимые фермы

Особенности образования ферм, их классификация. Расчетные схемы ферм. Методы определения усилий в стержнях ферм. Влияние очертания поясов и типа решетки на распределение усилия.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4], [3.2.1, 3.2.2], [3.3.4].

8. Основные теоремы об упругих системах. Определение перемещений

Перемещения и их обозначения. Работа внешних и внутренних сил. Потенциальная энергия системы. Принцип возможных перемещений. Теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений. Общий метод определения перемещений и способы вычисления интегралов Мора. Перемещения от изменения температуры и смещения опор.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4].

9. Статически неопределимые системы. Метод сил

Свойства статически неопределимых систем. Сущность метода сил. Степень статической неопределимости плоских систем. Основная система метода сил. Канонические уравнения. Общий алгоритм расчета статически неопределимых систем по методу сил. Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, их проверки. Определение перемещений в статически неопределимых системах. Упрощения при расчете симметричных рам методом сил. Выбор симметричной основной системы, группировка неизвестных, разложение внешней нагрузки.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4], [3.2.1, 3.2.2], [3.3.5].

10. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений

Сущность метода. Неизвестные и степень кинематической неопределимости системы. Основная система метода перемещений. Определение коэффициентов канонических уравнений и их свободных членов, решение уравнений, построение окончательных эпюр и их проверки. Упрощение канонических уравнений при расчете симметричных рам методом перемещений.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4], [3.2.1, 3.2.2].

11. Основы расчета стержневых систем по несущей способности

Понятие о предельных состояниях конструкции. Определение несущей способности сечений элементов при одноосном напряженном состоянии, чистом изгибе и в общем случае изгиба. Пластические шарниры. Несущая способность конструкций. Методы расчета статически неопределимых систем по несущей способности.

Рекомендуемая литература: [3.1.1–3.1.4].

2.4.7. Перечень вопросов к экзамену

I. Блок вопросов, оцениваемых в 0,9 балла

1. Расчетная схема сооружения, проблемы ее выбора.
2. Виды опор и их свойства.
3. Классификация сооружений по особенностям работы.
4. Основные гипотезы и принципы, положенные в основу классических методов расчета строительной механики.
5. Внутренние усилия в плоских стержневых системах, их вычисление.
6. Построить эпюры M , Q , N в простой системе.
7. Запишите все закономерности, которые должны соблюдаться в изменении эпюр внутренних усилий.
8. Кинематический анализ сооружений: порядок проведения.
9. Структура сооружения с точки зрения кинематического анализа. Понятия и характеристики диска, кинематической связи, шарнира, опор.
10. Определение степеней свободы различных систем.
11. Определить степень свободы системы. (Задачи)
12. Классификация сооружений в зависимости от значений степени свободы.
13. Принципы образования геометрически неизменяемых систем.
14. Понятия фиктивного шарнира, его свойства и использование при геометрическом анализе изменяемых и неизменяемых систем.
15. Мгновенно изменяемые системы и их свойства.
16. Геометрические признаки мгновенно изменяемых систем.
17. Выполнить кинематический анализ простой системы. (Задачи)
18. Поэтажная схема многопролетной статически определимой балки и ее свойства.
19. Принципы расчета многопролетных статически определимых балок и используемые при этом закономерности в их работе.
20. Понятие линии влияния (л.в.) усилия. Назначение линий влияния, отличие от эпюр усилий, правила знаков, размерности.
21. Построение линий влияния усилий в сечениях простой консольной балки.
22. Построение л.в. изгибающего момента в сечениях двухопорной балки.
23. Построение л.в. поперечной силы в сечениях двухопорной балки.
24. Определения усилий по линиям влияния от внешних нагрузок.
25. Определение внутренних сил в трехшарнирных арках (сравнение с балками того же пролета).
26. Понятие о рациональной оси арки.
27. Понятие фермы: реальная ферма и ее расчетная схема; способы определения усилий (кратко).
28. Классификация ферм по очертанию поясов.
29. Действительная и возможная работа. Теорема Клапейрона.
30. Возможная (виртуальная) работа внешних сил. Действительная работа внутренних сил.
31. Какие системы называют статически неопределимыми? Что такое статическая неопределимость таких систем.
32. Особенности и свойства статически неопределимых систем.
33. Назовите основные методы расчета статически неопределимых систем и охарактеризуйте их неизвестные.
34. Приведите формулы для определения степени статической неопределимости рам и охарактеризуйте входящие в них величины.

СОДЕРЖАНИЕ

35. Определите число лишних связей для представленной рамы. (Задача)
36. Основная система метода сил, ее определение и свойства.
37. Каким образом определяется неизменяемость основной системы (О.С.) метода сил.
38. Расчетная и рациональная основная система (О.С.) метода сил.
39. Основная система метода сил и требования к ней.
40. Система канонических уравнений метода сил, ее характеристика и физический смысл уравнений.
41. Опишите физический смысл коэффициента δ_{ik} при расчете рамы методом сил.
42. Изобразите для заданной статически неопределимой рамы три варианта основной системы (О.С.) метода сил. (Задача)
43. Запишите формулы Мора, по которым в методе сил определяются единичные и грузовые перемещения (коэффициенты и свободные члены системы уравнений), и опишите входящие в них величины.
44. Запишите формулу Симпсона для вычисления интегралов Мора и опишите входящие в нее величины.
45. Запишите формулу трапеций для вычисления интегралов Мора и опишите входящие в нее величины.
46. Запишите универсальную проверку правильности вычисления единичных коэффициентов системы канонических уравнений метода сил и опишите входящие в нее величины.
47. Запишите построчные проверки правильности вычисления единичных коэффициентов системы канонических уравнений метода сил и опишите входящие в них величины.
48. Запишите столбцовую проверку правильности вычисления грузовых коэффициентов системы канонических уравнений метода сил и опишите входящие в нее величины.
49. Деформационная (кинематическая) проверка эпюры изгибающих моментов, входящие в нее величины, ее физический смысл.
50. Построение эпюры поперечных сил по эпюре изгибающих моментов. Построение эпюры продольных сил по эпюре поперечных сил.
51. Способы построения эпюр M , Q и N в методе сил после определения всех неизвестных метода сил.
52. Симметричные рамы, их определение. Симметричные и кососимметричные эпюры усилий, нагрузки и воздействия.
53. К каким упрощениям приводит выбор для симметричной статически неопределимой рамы симметричной основной системы (О.С.) метода сил?
54. Как упростится расчет симметричной рамы, нагруженной симметричной внешней нагрузкой, при выборе для расчета симметричной основной системы (О.С.) метода сил?
55. Как упростится расчет симметричной рамы, нагруженной кососимметричной внешней нагрузкой, при выборе для расчета симметричной основной системы (О.С.) метода сил?
56. В каких случаях для основной системы (О.С.) метода сил необходима группировка неизвестных, как и для чего она выполняется?
57. Как представить произвольную нагрузку, действующую на симметричную раму, в виде суммы симметричной и кососимметричной нагрузок?
58. Сколько уравнений нужно решить для расчета представленной рамы методом

СОДЕРЖАНИЕ

сил с учетом максимально возможных упрощений расчета? (Задача)

59. Запишите допущения, используемые в расчетах статически неопределимых рам методом перемещений.

60. Что такое степень кинематической неопределимости системы?

61. Как определяется степень кинематической неопределимости рам?

62. Как определяется число угловых перемещений узлов в методе перемещений?

63. Как определяется число линейных перемещений узлов в методе перемещений?

64. Канонические уравнения метода перемещений, их характеристика и физический смысл.

65. Определите для представленной рамы степень кинематической неопределимости и изобразите основную систему (О.С.) метода перемещений. (Задача)

66. Основная система метода перемещений, ее характеристика и свойства.

67. Что такое «табличные эпюры метода перемещений», как они получаются (общий подход) и для чего нужны?

68. Запишите физический смысл коэффициента системы канонических уравнений метода перемещений r_{ik} .

69. Запишите физический смысл i -го уравнения системы канонических уравнений метода перемещений.

70. Как в методе перемещений определяются коэффициенты системы уравнений, представляющие собой по физическому смыслу реактивные моменты?

71. Как в методе перемещений определяются коэффициенты системы уравнений, представляющие собой по физическому смыслу реактивные силы?

72. Перечислите и кратко охарактеризуйте все проверки окончательных эпюр M , Q и N при расчете системы методом перемещений.

73. Как упростить расчет симметричных рам методом перемещений?

II блок (основные вопросы, оцениваемые в 2,4 балла)

1. Строительная механика как наука, ее цели и задачи. Классификация сооружений. Виды опор.

2. Внутренние усилия в сооружениях. Способы и порядок их определения. Метод сечений и его применение.

3. Кинематический анализ плоских стержневых сооружений, порядок проведения. Степень свободы системы. Классификация сооружений.

4. Кинематический анализ сооружений, порядок проведения. Понятия неизменяемой системы, степени свободы системы, диска, кинематической (простой) связи, шарнира, опор.

5. Расчет многопролетных статически определимых балок на статические нагрузки.

6. Линии влияния усилий. Построение линий влияния усилий в простых балках статическим способом.

7. Построение линий влияния в многопролетных статически определимых балках.

8. Линии влияния усилий. Определение усилий с помощью линий влияния. Свойство прямолинейного участка линии влияния.

9. Определение усилий с помощью линий влияния от сосредоточенных сил, равномерно-распределенных нагрузок, сосредоточенных моментов и нагрузок, распределенных по закону трапеции.

10. Особенности расчета трехшарнирных рам.

11. Расчет трехшарнирных рам (с использованием примеров), включая рамы с опо-

СОДЕРЖАНИЕ

рами в одном уровне, в разных уровнях, с затяжками. Расчет составных рам.

12. Расчет трехшарнирных арок на статические нагрузки. Определение внутренних усилий в трехшарнирных арках. Рациональная ось арки.

13. Плоские статически определимые фермы. Их классификация и способы определения усилий. Способы определения усилий в стержнях плоских статически определимых ферм. Признаки нулевых стержней.

14. Основные гипотезы и положения классической теории строительной механики. Действительная и возможная работа. Теорема Клапейрона. Возможная (виртуальная) работа внешних сил. Действительная работа внутренних сил. Виртуальная работа внутренних сил. Теорема о взаимности возможных работ и о взаимности единичных перемещений.

15. Формула Мора для определения перемещений. Определение перемещений с использованием формулы Мора для различных систем. Порядок определения перемещений. Правило Верещагина для вычисления интегралов Мора при определении перемещений. Определение перемещений от внешних нагрузок в изгибаемых системах.

16. Статически неопределимые системы, их классификация, свойства, особенности. Степень статической неопределимости. Основная система метода сил, требования и проблемы выбора. Основная система метода сил для симметричных систем

17. Канонические уравнения метода сил. Определение коэффициентов канонических уравнений, их проверки и физический смысл. Построение окончательных эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил при расчете рам методом сил и их проверки.

18. Порядок расчета рам методом сил.

19. Упрощения при расчете симметричных рам методом сил. Разделение системы уравнений.

20. Упрощения при расчете симметричных рам методом сил. Группировка неизвестных и разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную.

21. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений. Допущения. Степень кинематической неопределимости.

22. Порядок расчета рам методом перемещений. Проверки окончательных эпюр усилий при расчете их методом перемещений.

23. Особенности определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений в методе перемещений и их проверки.

24. Расчет рам методом перемещений, О.С. метода перемещений и канонические уравнения метода перемещений.

25. Упрощения при расчете методом перемещений симметричных рам.

26. Основы расчета сооружений по предельным состояниям. Расчет статически определимых систем.

27. Расчет по несущей способности с учетом пластической работы материалов статически неопределимых сооружений. Методы расчета.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
ДИСЦИПЛИНЫ «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы УВО по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1	2	3	4
1. Водоснабжение	Водоснабжения, водоотведения и охраны водных ресурсов	Зав. кафедрой С.Г.Белов	
2 Теплоснабжение	Теплогазоснабжение и вентиляция	Зав. кафедрой В.Г.Новосельцев	
3. Металлические конструкции, деревянные конструкции, железобетонные конструкции	Строительные конструкции	Зав. кафедрой А.В.Шурин	