УДК 001.891.572

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М. В. Гасанов

Преподаватель кафедры высшей математики «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», e-mail: GasanovMV@mgsu.ru

Реферат

Рассматривается нелинейное уравнение третьего порядка с полиномом седьмой степени в правой части. Отличительной чертой этого класса уравнений является наличие подвижных особенностей, что делает эти уравнения неразрешимыми в квадратурах. В работе получены интервальные критерии существования подвижных особых точек. Представленная теория является основой для составления алгоритма и написания программного комплекса нахождения подвижных особых точек.

Ключевые слова: волновые процессы, нелинейные дифференциальные уравнения, критерии существования подвижных особых точек.

A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR THE EXISTENCE OF A MOBILE SINGULAR POINT FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER

M. V. Gasanov

Abstract

A nonlinear third-order equation with a seventh-degree polynomial on the right-hand side is considered. A distinctive feature of this class of equations is the presence of movable functions, which makes these equations undecidable in quadratures. The work obtained data on the observance of movable singular points. The presented theory is a means of compiling an algorithm and writing a software complex for finding moving points.

Keywords: wave processes, nonlinear differential equations, signs of the existence of moving points

Введение

В работе [1] рассматриваются волновые процессы в стержне на основе обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза – Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\varphi(u)}{\partial z}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+m\frac{\partial^3 u}{\partial z^3},\qquad m,\mu=const.$$

В случае стационарного процесса, когда время отсутствует, уравнение переходит в категорию обыкновенных дифференциальных уравнений. В зависимости от параметров уравнения переходим к исследуемому нами классу дифференциальных уравнений. В указанной публикации при рассмотрении исходного уравнения не была учтена специфика рассматриваемого уравнения, существование подвижной особой точки. Поэтому о строгом аналитическом решении говорить не приходится, так как наличие подвижных особых точек является препятствием к разрешимости рассматриваемого уравнения в квадратурах.

В публикации [2] так же проводится исследование волновых процессов для эластичных балок. Рассматривается задача в виде дифференциального уравнения третьего порядка, заданного неявно:

$$f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t))=0,\ 0\le t\le 1$$

$$u(0)=u'(0)=u'(1)=0.$$

Неявный случай подразумевает как линейный случай, так и нелинейный. Поэтому аналогично, как и в случае с работой [1], не учтена специфика нелинейных дифференциальных уравнений, существование подвижных особенностей.

Для реализации метода нахождения аналитического приближенного решения с подвижными особенностями необходимо строить алгоритмы для программного обеспечения, основой которого и является теоретический материал, представленный в данной работе. Реализация данного метода была рассмотрена в работах [3–5].

Если работах [6–7] дается теоретическое обоснование учета особенностей, применяемого класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка для исследования волновых процессов в эластичных балках, то в статьях [8–9] дано развитие общих теоретических положений при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особенностями. Отметим ряд работ последнего времени с приложением данной категорий уравнений для строительных конструкций [10–17].

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y'''(x)=\sum_{n=1}^{7}a_n(x)y^n(x), \tag{1}$$

которое с помощью замены, показанной в работе [7], приводиться к нормальной форме

$$y'''=y^7+r(x). \tag{2}$$

Добавив начальные условия

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0,\\ y'(x_1)=y_1,\\ y''(x_2)=y_2, \end{cases} \tag{3}$$

рассмотрим задачу Коши (2)—(3).

Далее, путем замены $y(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ переходим к инверсному уравнению:

$$u'''\cdot u^5=6u^4\cdot u'\cdot u''+6(u'u)^3+1+u^7\cdot r(x) \tag{4}$$

$$\begin{cases} u(x_0)=u_0,\\ u'(x_1)=u_1,\\ u''(x_2)=u_2. \end{cases} \tag{5}$$

Используя связь локальных экстремумов инверсионной и прямой задачи, сформулируем следующую теорему:

Теорема 1. *Потребуем выполнение следующих условий:*

1) $y(x)$ – решение задачи Коши (2) – (3) и $u(x)$ – решение инверсной задачи Коши (4)–(5) непрерывны на отрезке $[a;b]$

2) $\forall x \in [a;b]$ $u(x)>0$ $(u(x)<0)$.

Тогда необходимым и достаточным условием локального максимума $y(x)$, *решение задачи Коши (2)–(3), в точке* $c \in (a;b)$ *является наличие у функции* $u(x)$, *являющейся решением инверсной задачи Коши (4)–(5), минимума в точке* c.

Доказательство данного факта основывается на использовании классического метода математического анализа, необходимого и достаточного условия локального экстремума.

Теорема 2. *Пусть функция* $y(x)$ *— решение задачи Коши (2)—(3), определенна на полуинтервале* $[x_0;x^*)$, *где* $x_0 < x^*$, x^* *— подвижная особая точка задачи Коши (2)–(3). Тогда найдется некоторая окрестность* $[a;x^*)$ *точки* x^*, *в которой функция* $y(x)$, *ее первая и вторая производная имеют один знак* $y(x)>0,\ y'>0,\ y''>0,\ \left(y(x)<0, y'(x)<0, y''(x)<0\right)$.

Доказательство. Функцию $y(x)$ можно представить в виде

$$y(x)=(x^*-x)^{-\frac{1}{2}}\sum_{0}^{\infty}C_n(x^*-x)^{\frac{n}{2}}. \qquad (6)$$

Согласно теореме существования, найдется точка $x_1 \in [x_0;x^*)$, для которой правильная часть ряда (6) сходится в области $[x_1;x^*)$. Расписывая правую часть (6) получаем:

$$y(x)=-\sqrt[6]{\frac{15}{8}}(x^*-x)^{-\frac{1}{2}}+ + C_6(x^*-x)^3+C_7(x^*-x)^{\frac{7}{2}}+\ldots . \qquad (7)$$

Дифференцируя обе части равенства (8), имеем:

$$y'(x)=y(x)=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[6]{\frac{15}{8}}(x^*-x)^{-\frac{3}{2}}- - 3C_6(x^*-x)^2-\frac{7}{2}C_7(x^*-x)^{\frac{5}{2}}-\ldots . \qquad (8)$$

Введем обозначения

$$y'(x)=g_1(x)+h_1(x),$$

$$g_1(x)=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt[6]{\frac{15}{8}}(x^*-x)^{-\frac{3}{2}};$$

$$h_1(x)=-3C_6(x^*-x)^2-\frac{7}{2}C_7(x^*-x)^{\frac{5}{2}}-\ldots .$$

Учитывая, что $g_1(x)\to-\infty$, а также $h_1(x)\to 0$ при $x\to x^*-0$, то найдется точка $x_2: x_2\ge x_1$, и $\forall x\in[x_2;x^*)$ будет выполняться неравенство $g_1(x)<h_1(x)$, следовательно $y'(x)<0$.

Дифференцируем теперь выражение (9):

$$y''(x)=-\frac{3}{4}\cdot\sqrt[6]{\frac{15}{8}}(x^*-x)^{-\frac{5}{2}}+ + 6C_6(x^*-x)+\frac{35}{4}C_7(x^*-x)^{\frac{3}{2}}+\ldots . \qquad (9)$$

Обозначим

$$y''(x)=g_2(x)+h_2(x),$$

$$g_2(x)=-\frac{3}{4}\cdot\sqrt[6]{\frac{15}{8}}(x^*-x)^{-\frac{5}{2}};$$

$$h_2(x)=6C_6(x^*-x)+\frac{35}{4}C_7(x^*-x)^{\frac{3}{2}}+\ldots .$$

Так как $g_2(x)\to-\infty$ и $h_2(x)\to 0$ при $x\to x^*-0$, то существует такая точка $x_3: x_3\ge x_1$, что для любого x из полуинтервала $[x_3;x^*)$ будет выполняться неравенство $g_2(x)<h_2(x)$, следовательно $y''(x)<0$.

Теорема 3. *Точечный критерий существования подвижных особых точек. Чтобы* x^* *являлась подвижной особой точкой функции* $y(x)$, *решение задачи Коши (2)—(3), необходимо и достаточно, чтобы функция* $x(u)$, *являющаяся обратной функцией решения инверсной задачи Коши (4)—(5), удовлетворяла следующим условиям:*

$$x(0)=x^*, x'(0)=0, x''(0)=-\sqrt[3]{15}. \qquad (10)$$

Доказательство. Необходимость. Представим функцию $u(x)$ в виде регулярного ряда:

$$u(x)=D_0(x^*-x)^{\frac{1}{2}}+D_1(x^*-x)+D_2(x^*-x)^{\frac{3}{2}}+\ldots \qquad (11)$$

Учитывая, что $u(0)=0$, и на основании теоремы Лагранжа об обращении рядов [18] получаем:

$$(x^*-x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{1}^{\infty}B_n\cdot u^n,$$

где $B_1=\dfrac{1}{C_0}.$

Тогда

$$x^*-x=\left(\sum_{1}^{\infty}B_n\cdot u^n\right)^2 \qquad (12)$$

или

$$x^*-x=B_1^2\cdot u^2+\tilde{B}_2u^3+\tilde{B}_3u^4+\ldots .$$

При $u=0$ получаем $x(0)=x^*$. Далее, дифференцируя по u, имеем:

$$x'=-2B_1^2\cdot u-3\tilde{B}_2u^2-4\tilde{B}_3u^3+\ldots .$$

Откуда находим $x'(0)=0,$ а также

$$x''=-2B_1^2-6\tilde{B}_2u-12\tilde{B}_3u^2+\ldots .$$

В итоге получаем требуемое:

$$x(0)=x^*, x'(0)=0, x''(0)=-\sqrt[3]{15}.$$

Достаточность. Докажем, что исходная функция $y(x)$ имеет особую точку алгебраического типа. Исходя из теоремы 3, представим функцию $x(u)$ в виде регулярного ряда:

doi.org/10.36773/1818-1112-2022-127-1-13-16

$$x(u)=B_0+B_1u+B_2u^2+\dots .$$

Обозначим $B_0=x^*$. Дифференцируя, получаем:

$$x'=B_1+2B_2u+3B_3u^2+\dots,$$

$$x''=2B_2+6B_3u+12B_4u^2+\dots .$$

Из условия теоремы находим значения коэффициентов разложения $B_1=0, B_2=\frac{-\sqrt[3]{15}}{2}$. С учетом найденных коэффициентов имеем:

$$x(u)=x^*+\frac{-\sqrt[3]{15}}{2}u^2+\tilde{B}_3u^3+\dots$$

или

$$x^*-x=\frac{\sqrt[3]{15}}{2}u^2-\tilde{B}_3u^3-\tilde{B}_4u^4-\dots .$$

На основании теоремы об обращении рядов [18] получаем:

$$u(x)=D_0(x^*-x)^{\frac{1}{2}}+D_1(x^*-x)+D_2(x^*-x)^{\frac{3}{2}}+\dots ,$$

где $D_1=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{15}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

В силу используемой замены $y(x)=\frac{1}{u(x)}$, исходная функция записывается в виде:

$$y(x)=\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{D_0}(x^*-x)^{-\frac{1}{2}}+$$
$$+\tilde{D}_1(x^*-x)^0+\tilde{D}_2(x^*-x)^{\frac{1}{2}}+\dots .$$

Данное разложение представимо в виде (6). Таким образом, x^* является подвижной особой точкой задачи Коши (2)—(3), что и завершает доказательство.

Теорема 4. Интервальный критерий существования подвижной особой точки. x^* является подвижной особой точкой $y(x)$, решения задачи Коши (2)—(3), тогда и только тогда, когда существует некоторая окрестность подвижной особой точки $[x_1;x_2],\ x^*\in[x_1;x_2]$, для которой функция $u(x)$, решение инверсной задачи Коши (4)—(5), являлась бы непрерывной и выполнялось условие:

$$u(x_1)\cdot u(x_2)<0 .$$

Доказательство. Необходимость. Так как уравнение было переведено в инверсное, то точка x^* для функции $u(x)$ переходит в класс регулярных, а значит функция $u(x)$ непрерывна, при этом $u(x^*)=0.$ При переходе через точку x^* функция $u(x)$ меняет знак, согласно теореме Больцано – Коши получаем требуемое: $u(x_1)\cdot u(x_2)<0.$

Достаточность. Так как функция $u(x)$ непрерывна и имеет различные знаки на концах отрезка $u(x_1)\cdot u(x_2)<0$, то существует точка $x_3\in[x_1;x_2]$, в которой функция $u(x)$ равна нулю. Тогда в силу инверсии $y(x)=\frac{1}{u(x)}$, x_3 является подвижной особой точкой для решения задачи Коши (2)–(3).

Вывод

В данной статье решена задача о нахождении точных критериев существования подвижных особенностей (необходимое условие существования, необходимое и достаточное условие существования), что является основой для разработки алгоритма и программного комплекса для нахождения подвижных особых точек с любой наперед заданной точностью.

Список цитированных источников

1. Чугайнова, А. П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза – Бюргерса / А. П. Чугайнова // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – No. 281. – P. 204–212.
2. Yuqiang Feng. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation / Feng Yuqiang // Computers and Mathematics with Applications. –2008. – No. 56. – P. 2507–2514.
3. Леонтьева, Т. Ю. Об одном обобщении точных критериев существования подвижных особых точек одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области / Т. Ю. Леонтьева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. – 2017. – № 13 (262). – Вып. 47.
4. Орлов, В. Н. Точные критерии существования подвижных особых точек решения одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения / В. Н. Орлов, М. П. Гузь // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. – 2013. – № 4 (80). – Ч. 2.
5. Орлов, В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля / В. Н. Орлов. – М. : МПГУ, 2013. – 174 с.
6. Orlov, V. N. Study of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points / V. N. Orlov, M. V. Gasanov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020.
7. Орлов, В. Н. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с полиномиальной правой частью седьмой степени в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, М. В. Гасанов // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. – 2020. – № 1 (43). – С. 92–99.
8. Орлов, В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. – 2009. – № 4 (35). – С. 23–32.
9. Орлов, В. Н. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области / В. Н. Орлов, Т. Ю. Леонтьева // Вестник Самарского гос. техн. университета. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2020. – Т. 2.
10. Орлов, В. Н. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки / В. Н. Орлов, Б. Б. Ив // Вестник Башкирского университета. – 2018. – Т. 23, № 4. – С. 980–986.
11. Orlov, V. N. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations / V. N. Orlov, Y. G. Zheglova // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. – 2020. – Vol. 11, No. 3. 2050026 (7 pages) World Scientific Publishing Company.
12. Orlov, V. N. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – No. 365.
13. Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov [et al.] // Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci. – 2018. – No. 4. – P. 24–35 (in Russ.).
14. Orlov, V. N. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – No. 456. 012122 IOP Publishing.

15. Orlov, V. N. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference – Construction the Formation of Living Environmentll (FORM-2019). Volume 97. 03031. – 2019.
16. Orlov, V. N. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk // 18 Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425. 012127 IOP Publishing. – 2020.
17. Orlov, V. N. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) / V. N. Orlov, A. Chichurin // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425. 012129 IOP Publishing. – 2020.
18. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. – Л. : Гостехтеориздам, 1950.

References

1. Chugajnova, A. P. Nestacionarnye resheniya obobshchennogo uravneniya Kortevega – de Friza – Byurgersa / A. P. CHugajnova // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – No. 281. – P. 204–212.
2. Yuqiang Feng. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation / Feng Yuqiang // Computers and Mathematics with Applications. –2008. – No. 56. – P. 2507–2514.
3. Leont'eva, T. Yu. Ob odnom obobshchenii tochnyh kriteriev sushchestvovaniya podvizhnyh osobyh tochek odnogo klassa nelinejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij v kompleksnoj oblasti / T. Yu. Leont'eva // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Fizika. – 2017. – № 13 (262). – Vyp. 47.
4. Orlov, V. N. Tochnye kriterii sushchestvovaniya podvizhnyh osobyh tochek resheniya odnogo nelinejnogo obyknovennogo differencial'nogo uravneniya / V. N. Orlov, M. P. Guz' // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ya. Yakovleva. – 2013. – № 4 (80). – CH. 2.
5. Orlov, V. N. Metod priblizhennogo resheniya pervogo, vtorogo differencial'nyh uravnenij Penleve i Abelya / V. N. Orlov. – M. : MPGU, 2013. – 174 s.
6. Orlov, V. N. Study of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points / V. N. Orlov, M. V. Gasanov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020.
7. Orlov, V. N. Teorema sushchestvovaniya resheniya odnogo klassa nelinejnyh differencial'nyh uravnenij tret'ego poryadka s polinomial'noj pravoj chast'yu sed'moj stepeni v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki / V. N. Orlov, M. V. Gasanov // Vestnik CHGPU im. I. Ya. Yakovleva Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. – 2020. – № 1 (43). – S. 92–99.
8. Orlov, V. N. Issledovanie priblizhennogo resheniya differencial'nogo uravneniya Abelya v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki / V. N. Orlov // Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki. – 2009. – № 4 (35). – S. 23–32.
9. Orlov, V. N. O rasshirenii oblasti dlya analiticheskogo pri-blizhennogo resheniya odnogo klassa nelinejnyh differenci-al'nyh uravnenij vtorogo poryadka v kompleksnoj oblasti / V. N. Orlov, T. Yu. Leont'eva // Vestnik Samarskogo gos. tekhn. universiteta. Ser. Fiz.-mat. Nauki. – 2020. – T. 2.
10. Orlov, V. N. Teorema sushchestvovaniya resheniya odnogo klassa nelinejnyh differencial'nyh uravnenij chetvertogo poryadka s polinomial'noj pravoj chast'yu vtoroj stepeni v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki / V. N. Orlov, B. B. Iv // Vestnik Bashkirskogo universiteta. – 2018. – T. 23, № 4. – S. 980–986.
11. Orlov, V. N. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations / V. N. Orlov, Y. G. Zheglova // International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. – 2020. – Vol. 11, No. 3. 2050026 (7 pages) World Scientific Publishing Company.
12. Orlov, V. N. Research of one class of nonlinear differential equations of third order for mathematical modelling the complex structures / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – No. 365.
13. Research into a Class of Third-Order Nonlinear Differential Equations in the Domain of Analyticity / V. N. Orlov [et al.] // Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci. – 2018. – No. 4. – P. 24–35 (in Russ.).
14. Orlov, V. N. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – No. 456. 012122 IOP Publishing.
15. Orlov, V. N. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk // E3S Web Conf. XXII International Scientific Conference – Construction the Formation of Living Environmentll (FORM-2019). Volume 97. 03031. – 2019.
16. Orlov, V. N. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction (Scopus) / V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk // 18 Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425. 012127 IOP Publishing. – 2020.
17. Orlov, V. N. On the theory of constructing a numerical-analytical solution of a cantilever beam bend nonlinear differential equation of the first order (Scopus) / V. N. Orlov, A. Chichurin // Modelling and Methods of Structural Analysis IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1425. 012129 IOP Publishing. – 2020.
18. Golubev, V. V. Lekcii po analiticheskoj teorii differencial'nyh uravnenij / V. V. Golubev. – M. – L. : Gostekhteorizdam, 1950.

Материал поступил в редакцию 18.01.2022

doi.org/10.36773/1818-1112-2022-127-1-13-16