Доклады Академии наук Беларуси

1993 март-апрель Том 37 № 2

УДК 517.983.53

А. И. ТУЗИК

О НЕТЕРОВОСТИ ОДНОГО ПАРНОГО ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С ПОЧТИ СТАБИЛИЗИРУЮЩИМИСЯ МНОЖИТЕЛЯМИ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Рассмотрим парное дискретное уравнение, которое с помощью оператора sgn запишем в виде

$$\lambda_1 x_n + \mu_1(-1)^n x_{-n} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_{n-k} + (-1)^k b_{n+k}) x_k + \operatorname{sgn}(n+0{,}5) \times$$

$$\times \left[\lambda_2 x_n + \mu_2(-1)^n x_{-n} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_{n-k} + (-1)^k d_{n+k}) x_k\right] = f_n,$$

$$\lambda_k,\ \mu_k - \text{const},\ n \in Z. \tag{1}$$

Предполагается, что $a_n, b_n, c_n, d_n, f_n \in \{1\}$ [1, с. 222]. Решение уравнения (1) будем искать в классе $x_n \in \{1\}$. Частные случаи уравнения (1) с постоянными коэффициентами, когда все множители при $(-1)^k$, $k \in Z$, равны нулю, рассматривались многими авторами [1] в различных пространствах последовательностей. Отметим, что наличие почти стабилизирующихся [2, с. 127] множителей $(-1)^k$, $k \in Z$, изменяющих знак аргумента у преобразования Лорана [3, 4], позволяет рассматривать новые дискретные уравнения типа свертки с переменными коэффициентами (ср. [2, 5]). В силу многочисленных приложений дискретных уравнений типа свертки [1, 9] исследование не изученных ранее уравнений такого типа является актуальным как для теории, так и для приложений.

Применяя к равенству (1) преобразование Лорана [1, с. 222] и учитывая его свойства [1—5], получим равносильное сингулярное интегральное уравнение с обратным сдвигом Карлемана $\alpha(t) = -t^{-1}$,

$$(KX)(t) \equiv [\lambda_1 + A(t)]\, X(t) + [\mu_1 + B(t)]\, X(-t^{-1}) +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\lambda_2 + C(\tau)}{\tau - t} X(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\mu_2 + D(\tau)}{\tau - t} X(-\tau^{-1})\, d\tau =$$

$$= F(t),\ |t| = 1, \tag{2}$$

где большими буквами обозначены преобразования Лорана бесконечномерных векторов, обозначенных соответствующими малыми буквами. В силу однозначной обратимости преобразования Лорана уравнение (2) равносильно уравнению (1) в том смысле, что они одновременно разрешимы или неразрешимы и в случае разрешимости имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Учитывая связь между операторами сингулярного интегрирования и обратного сдвига Карлемана [6, с. 39], уравнение (2) перепишем в виде

$$(KX)(t) \equiv [\lambda_1 + A(t)]\, X(t) + [\mu_1 + B(t)]\, X(-t^{-1}) +$$
$$+ \frac{\lambda_2 + C(t)}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{X(\tau)}{\tau - t}\, d\tau - \frac{\mu_2 + D(t)}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{X(\tau)}{\tau + t^{-1}}\, d\tau +$$
$$+ (TX)(t) = F(t),\ |t| = 1, \tag{3}$$

где T — определенный, вполне непрерывный оператор в классе $\{1\}$.

Более общие уравнения вида (3) с произвольными сдвигами Карлемана изучались в [2, 6]. Воспользуемся результатами, полученными в [2] применительно к уравнению (3) в случае обратного сдвига Карлемана $\alpha(t) = -t^{-1}$.

Обозначим

$$\Delta(t) \equiv [\lambda_1 + A(t) - \lambda_2 - C(t)]\, [\lambda_1 + A(-t^{-1}) + \lambda_2 + C(-t^{-1})] -$$
$$- [\mu_1 + B(t) - \mu_2 - D(t)]\, [\mu_1 + B(-t^{-1}) + \mu_2 + D(-t^{-1})],\ |t| = 1. \tag{4}$$

Имеет место

Т е о р е м а. *Сингулярное уравнение (3), а значит и уравнение (2), будет нетеровым тогда и только тогда, когда* $\Delta(t) \neq 0$ *и его индекс вычисляется по формуле*

$$\operatorname{Ind} K = \frac{1}{2\pi} \{\arg \Delta(t)\}_{|t|=1}.$$

Рассмотрим другой подход, аналогичный предложенному в [6, § 6]. Заменим в уравнении (2) t на $\alpha(t) = -t^{-1}$ и учитывая [4], что $1/(\tau - t) - \alpha'(\tau)/(\alpha(\tau) - \alpha(t)) = \tau^{-1}$ будем иметь

$$(KX)(-t^{-1}) \equiv [\mu_1 + B(-t^{-1})]\, X(t) + [\lambda_1 + A(-t^{-1})]\, X(-t^{-1}) -$$
$$- \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\mu_2 + D(-\tau^{-1})}{\tau - t} X(\tau)\, d\tau - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\lambda_2 + C(-\tau^{-1})}{\tau - t} X(-\tau^{-1})\, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \tau^{-1} [\mu_2 + D(-\tau^{-1})]\, X(\tau)\, d\tau + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \tau^{-1} [\lambda_2 + C(-\tau^{-1})] \times$$
$$\times X(-\tau^{-1})\, d\tau = F(-t^{-1}),\ |t| = 1. \tag{5}$$

Уравнения (2), (5) запишем в виде соответствующей системы двух сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши относительно неизвестной вектор-функции $\Phi(t) = \{X(t), X(-t^{-1})\}$:

$$(M\Phi)(t) \equiv A_1(t)\, \Phi(t) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{B_1(\tau)\, \Phi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau +$$
$$+ \int\limits_{|\tau|=1} M_1(\tau)\, \Phi(\tau)\, d\tau = F_1(t),\ |t| = 1, \tag{6}$$

где

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 + A(t) & \mu_1 + B(t) \\ \mu_1 + B(-t^{-1}) & \lambda_1 + A(-t^{-1}) \end{bmatrix},$$

$$B_1(t) = \begin{bmatrix} -\lambda_2 - C(t) & -\mu_2 - D(t) \\ \mu_2 + D(-t^{-1}) & \lambda_2 + C(-t^{-1}) \end{bmatrix},$$

$$M_1(t) = \frac{1}{\pi i} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t^{-1} [\mu_2 + D(-t^{-1})] & t^{-1} [\lambda_2 + C(-t^{-1})] \end{bmatrix},\quad F_1(t) = \begin{bmatrix} F(t) \\ F(-t^{-1}) \end{bmatrix}.$$

Известно [2, 6], что при выполнении условия нетеровости $\Delta(t)\neq 0$ система (6) является системой сингулярных интегральных уравнений нормального типа [7, 8], при этом

$$\operatorname{Ind} M=\frac{1}{\pi}\{\arg\Delta(t)\}_{|t|=1}=2\operatorname{Ind} K.$$

Решение системы сингулярных уравнений (6) можно проводить путем регуляризации [7, 8], т. е. сведением ее к равносильной системе двух интегральных уравнений Фредгольма или в частных случаях, допускающих применение метода исключения [10], к одному сингулярному уравнению, которое может оказаться разрешимым в замкнутой форме [9, 10] либо с помощью регуляризации [8, 9] сведется к равносильному уравнению Фредгольма.

Находя решение уравнения (2), или, что равносильно, системы (6), определим решение исходного уравнения (1) по формуле

$$x_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{X(t)}{t^{n+1}}\,dt,\ n\in Z.$$

Замечание 1. Дискретные уравнения типа уравнений с двумя ядрами с почти стабилизирующимися множителями $(-1)^k$, $k\in Z$, рассмотрены автором в [4].

Замечание 2. Если в уравнении (1) убрать все множители $(-1)^k$, $k\in Z$, то мы получим дискретный аналог парного уравнения с разностными и суммарными ядрами. После преобразования Лорана это уравнение сведется к сингулярному уравнению (2), у которого обратный сдвиг $\alpha(t)=-t^{-1}$ нужно заменить на обратный сдвиг Карлемана $\alpha_1(t)=t^{-1}$. Далее для этого уравнения можно повторить все рассуждения, аналогичные изложенным выше при $\alpha(t)=-t^{-1}$.

Замечание 3. Указанный подход применим и к исследованию уравнения типа (1), в котором суммарные ядра при $(-1)^k$, $k\in Z$, заменены на разностные [11].

Summary

The necessary and sufficient Noether conditions are obtained, the index is computed, the ways of solving are idicated for dual discrete equation of convolution type with almost stabilizing multipliers.

Литература

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М., 1978. 2. Карапетянц Н. К., Самко С. Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. Ростов-на-Дону, 1988. 3. Тузик А. И. // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 12. С. 1065—1068. 4. Тузик А. И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1462—1464. 5. Тузик А. И. // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 12. С. 1061—1064. 6. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977. 7. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1970. 8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968. 9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977. 10. Тузик А. И. О понижении размерности линейных систем сингулярных интегральных уравнений. М., 1984. Деп. в ВИНИТИ 22.02.84, № 1011—84. 11. Тузик А. И. // Тезисы докл. юбил. научно-техн. конф. БрПИ. Брест, 1991. Ч. 1. С. 107.

Брестский политехнический институт

Поступило 21.05.92