Доклады Академии наук БССР

1979 Том XXIII № 12

МАТЕМАТИКА

УДК 517.948.3

А. И. ТУЗИК

ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ СТЕПЕННОГО РОСТА

(Представлено академиком АН БССР Ф. Д. Гаховым)

Рассматриваются следующие уравнения типа свертки:

$$\sum_{\nu=0}^{r}\left[\rho_{\nu n}A_n^\nu x_n+\sum_{k=0}^{\infty}\overset{\nu}{a}_{n-k}A_k^\nu x_k+\sum_{k=-1}^{-\infty}\overset{\nu}{b}_{n-k}A_k^\nu x_k\right]=c_n,$$

$$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{A}$$

$$\rho_{\nu n}=\begin{cases}\lambda_\nu, & n\geqslant 0,\\ \mu_\nu, & n<0,\ \lambda_\nu,\ \mu_\nu - \text{const},\end{cases}$$

$$\sum_{\nu=0}^{r}\left[\lambda_\nu A_n^\nu x_n+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overset{\nu}{a}_{n-k}A_k^\nu x_k\right]=c_n,\quad n\geqslant 0, \tag{Б}$$

$$\sum_{\nu=0}^{r}\left[\mu_\nu A_n^\nu x_n+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overset{\nu}{b}_{n-k}A_k^\nu x_k\right]=c_n,\quad n<0,$$

где $A_n^\nu=n(n-1)\cdots(n-\nu+1)$, $A_n^0=1$.

Предполагается, что $\overset{\nu}{a}_n$, $\overset{\nu}{b}_n$, $c_n\in\{1\}$*). Решение уравнений (А), (Б) будем искать в классе $n^r\cdot x_n\in\{1\}$.

Частные случаи дискретных уравнений (А), (Б) при $r=0$ рассматривались Рапопортом (4), Рогожиным (5), Карапетянцом (6) и другими авторами [см. (2), гл. VII].

Исследование уравнений (А), (Б) будем проводить путем сведения их с помощью преобразования Лорана к интегро-дифференциальным краевым задачам типа задачи Римана.

1. Некоторые вспомогательные предложения.

При $\overset{\nu}{a}_n\in\{1\}$ соотношения

$$A_\nu(t)=L\overset{\nu}{a}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overset{\nu}{a}_k t^k,\quad |t|=1, \tag{1}$$

$$\overset{\nu}{a}_n=L^{-1}A_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{A_\nu(t)}{t^{n+1}}\,dt,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{2}$$

определяют соответственно прямое и обратное преобразование Лорана.

*) Определение класса {1} дано в (2), с. 222.

Пусть a_n, $n^r x_n \in \{1\}$. Справедливы следующие свойства преобразования Лорана:

$$1) \qquad L \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} x_k = A(t) X(t), \tag{3}$$

$$2) \qquad L(A_n^\nu x_n) = t^\nu \frac{d^\nu X(t)}{dt^\nu} = t^\nu X^{(\nu)}(t), \tag{4}$$

$$A_n^\nu = n(n-1)\ldots(n-\nu+1), \quad A_n^0 = 1, \ \nu = 0, 1, \ldots r,$$

$$3) \qquad L(x_n \cdot \operatorname{sgn}(n+0{,}5)) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{X(\tau)}{\tau - t} d\tau. \tag{5}$$

Свойство 1) известно [(2), с. 224]. Формулы (4), (5) могут быть получены из формул (26.8), (26.12) для дискретного преобразования Фурье [см. (2), п. 26.1] или же доказаны непосредственно.

2. Вводя односторонние векторы $x^{\pm}$ (2), запишем уравнение (A) в виде

$$\sum_{\nu=0}^{r} \left[A_n^\nu (\lambda_\nu x_n^+ - \mu_\nu x_n^-) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overset{\nu}{a}_{n-k} A_k^\nu x_k^+ - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overset{\nu}{b}_{n-k} A_k^\nu x_k^- \right] = c_n,$$

$$n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ \ldots \tag{6}$$

Применяя к равенству (6) преобразование Лорана, т. е. умножая уравнения на t^n, складывая их и учитывая формулы (3), (4), получим дифференциальную краевую задачу типа задачи Римана:

$$\sum_{\nu=0}^{r} \left\{ [\lambda_\nu + A_\nu(t)]\, t^\nu \frac{d^\nu X^+(t)}{dt^\nu} - [\mu_\nu + B_\nu(t)]\, t^\nu \frac{d^\nu X^-(t)}{dt^\nu} \right\} = C(t), \ |t| = 1, \tag{7}$$

где $X^+(t)$, $(X^-(t))$ — краевые значения функций, аналитических соответственно внутри (вне) единичного круга.

В силу однозначной обратимости преобразования Лорана задача (7) равносильна уравнению (A) в том смысле, что они одновременно разрешимы или неразрешимы и в случае разрешимости имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Краевая задача (7) с помощью интегрального представления Крикунова [см. (1), с. 366] сводится к равносильному особому интегральному уравнению с ядром Коши:

$$a(t)\mu(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int\limits_{|\tau|=1} k(t, \tau)\mu(\tau)\, d\tau = f(t), \tag{8}$$

где

$$a(t) - b(t) = \mu_r + B_r(t), \qquad a(t) + b(t) = t^r [\lambda_r + A_r(t)],$$

$k(t, \tau)$, $f(t)$—известные функции, при этом $f(t)$ линейно зависит от r комплексных постоянных.

Будем считать, что для уравнения (8) имеет место нормальный случай, т. е. для $|t| = 1$

$$a(t) - b(t) = \mu_r + B_r(t) \neq 0, \quad a(t) + b(t) = t^r [\lambda_r + A_r(t)] \neq 0.$$

Обозначим

$$\operatorname{Ind} \{[\mu_r + B_r(t)]/[\lambda_r + A_r(t)]\} = \varkappa_1.$$

Тогда индекс особого интегрального уравнения (8) определяется формулой $\varkappa = \varkappa_1 - r$.

Из свойства полного особого интегрального уравнения с ядром Коши [см. в ([1]) сноску на с. 212] следует, что число линейно независимых решений уравнения (8) не меньше, чем $\varkappa_1 - r + r = \varkappa_1$. Полученная оценка несколько необычна, так как в ней не участвуют порядки старших производных от функций $X^{\pm}(t)$ краевой задачи (7) [ср. ([1]), с. 370] и не будут участвовать, даже если эти порядки предположить различными. Это объясняется специальным видом коэффициентов задачи (7), а именно наличием множителей t^{ν} при производных $d^{\nu}X^{\pm}(t)/dt^{\nu}$.

Сингулярные интегральные уравнения нормального типа хорошо изучены ([1,3]). Находя решение уравнения (8), определим функции $X^{\pm}(t)$ [см. ([1]), с. 366], а решение исходного уравнения (А) получим по формуле

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{X^+(t) - X^-(t)}{t^{n+1}}\, dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

Замечание. Из сведения уравнения (А) к эквивалентному полному особому уравнению с ядром Коши следует, что это уравнение при $r \geqslant 1$, вообще говоря, в замкнутой форме неразрешимо.

3. При исследовании уравнения (Б) его предварительно удобно представить в виде

$$\sum_{\nu=0}^{r} \Big\{ [\sigma_\nu + q_\nu \operatorname{sgn}(n+0{,}5)] A_n^{\nu} x_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overset{\nu}{s}_{n-k} A_k^{\nu} x_k +$$

$$+ \operatorname{sgn}(n+0{,}5) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overset{\nu}{d}_{n-k} A_k^{\nu} x_k \Big\} = c_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{10}$$

где

$$\sigma_\nu = \frac{1}{2}(\lambda_\nu + \mu_\nu), \qquad q_\nu = \frac{1}{2}(\lambda_\nu - \mu_\nu),$$

$$\overset{\nu}{s}_n = \frac{1}{2}(\overset{\nu}{a}_n + \overset{\nu}{b}_n), \qquad \overset{\nu}{d}_n = \frac{1}{2}(\overset{\nu}{a}_n - \overset{\nu}{b}_n).$$

Применяя к равенству (10) преобразование Лорана и учитывая формулы (3)—(5), получим

$$\sum_{\nu=0}^{r} \left\{ [\sigma_\nu + S_\nu(t)]\, t^{\nu} X^{(\nu)}(t) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{[q_\nu + D_\nu(\tau)]\, \tau^{\nu} X^{(\nu)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \right\} = C(t). \tag{11}$$

Метод решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения (11) известен [см. ([1]), с. 374]. Оно сводится к интегро-дифференциальной краевой задаче типа задачи Римана, которая в свою очередь может быть сведена к равносильному особому интегральному уравнению с ядром Коши. Для этого уравнения можно повторить все рассуждения, проведенные нами ранее для уравнения (8).

Находя решение уравнения (11), определим решение исходного уравнения (Б) по формуле

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{X(t)}{t^{n+1}}\, dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12}$$

В заключение выражаю глубокую благодарность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за полезное обсуждение работы.

Summary

The discontinuous equations of a convolution type with the coefficients of the power growth are reduced by means of the Loran transformation to the integro-differential boundary-value Riemann problems which are considered in a normal case.

Литература

[1] Гахов Ф. Д. Краевые задачи, М., 1977. [2] Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки, М., 1978. [3] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [4] Рапопорт И. М. ДАН УССР, № 3, 6, 1948. [5] Рогожин В. С. ДАН СССР, 114, № 3, 486, 1957. [6] Карапетянц Н. К. Сиб. матем. ж., 11, № 1, 80, 1970.

Брестский инженерно-строительный институт

Поступило 19.04.79