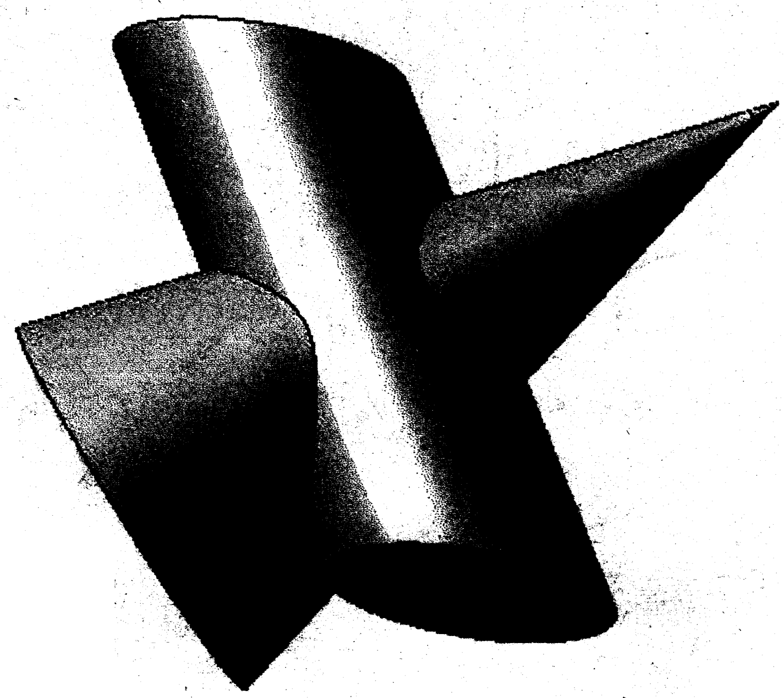
А. Ф. КОКОШКО, Т. Н. БАЗЕНКОВ,
Н. С. ЖИТЕНЕВА

Начертательная геометрия

Практикум



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. Ф. КОКОШКО, Т. Н. БАЗЕНКОВ, Н. С. ЖИТЕНЕВА

Начертательная геометрия

Практикум

Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов технических специальностей
учреждений, обеспечивающих получение высшего образования

Брест 2007

УДК 514.18.075
ББК 22.151.3я73
К 59

Рецензенты:

Кафедра «Инженерная графика машиностроительного профиля» Белорусского национального технического университета,

Кафедра «Инженерная графика и САПР» Белорусского государственного аграрного технического университета

А.Ф. Кокошко, Т.Н. Базенков, Н.С. Житенева.
К59 **Начертательная геометрия. Практикум.** Учебное пособие для студентов технических специальностей высших учебных заведений. – Брест, Из-во «БрГТУ», 2007, – с. 100.
ISBN 978-985-493-077-0

На основе классификации все задачи распределены по группам и подгруппам; приводятся основные подходы и алгоритмы решения задач; подобраны типовые задачи для каждой подгруппы задач, рассматриваются алгоритмы их решения. Приводится порядок решения любой задачи с использованием данного учебного пособия.

Учебное пособие предназначено для студентов технических специальностей учреждений, обеспечивающих получение высшего образования.

УДК 514.18.075
ББК 22.151.3я73

ISBN 978-985-493-077-0

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Важнейшим этапом при изучении курса "Начертательная геометрия" является приобретение практических навыков в решении задач. По учебной программе студент на практических занятиях в аудитории с помощью преподавателя и самостоятельно вне аудитории должен решить определенное количество задач, выполнить графические работы. Выполняется все это одновременно с изучением теоретических положений курса.

Переход от теории к практике вызывает у студента определенные трудности. Это организационные трудности (неумение организовать свою самостоятельную работу), слабое логическое мышление при выборе и обосновании плана решения задачи, неумение представить задачу в пространстве и др.

Основной целью данного учебного пособия является оказание необходимой помощи студентам технических специальностей в приобретении практических навыков решения задач по начертательной геометрии, выработке пространственного воображения и правильного логического мышления при анализе условия задачи, выборе и обосновании плана решения задачи. В нем студент найдет ответы почти на все вопросы организационного и методического плана.

Содержание учебного пособия соответствует действующей учебной программе по курсу «Начертательной геометрии», утвержденной Министерством образования РБ для технических специальностей высших учебных заведений.

В пособии приводится общепринятый порядок решения задач, которым необходимо овладеть и придерживаться. Большое внимание уделяется пространственному представлению задачи, логическому обоснованию порядка решения и составлению плана решения задачи в общем виде (в пространстве).

Обозначения, принятые в учебном пособии, являются общепринятыми и используются в учебниках и учебном процессе.

В пособии приводится список рекомендуемой литературы.

Авторы выражают глубокую признательность: коллективу кафедры «Инженерная графика машиностроительного профиля» Белорусского национального технического университета (зав. кафедрой П.В. Зеленый), коллективу кафедры «Инженерная графика и САПР» Белорусского государственного аграрного технического университета (зав. кафедрой, к.п.н, доцент – Ярошевич О.В.) за доброжелательную критику и замечания по содержанию учебного пособия.

Любые конструктивные предложения и замечания по улучшению содержания и качества пособия, просим направлять на кафедру «Начертательной геометрии и инженерной графики» Учреждения образования: «Брестский государственный технический университет» - ул. Московская 267, 224017, г. Брест.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Точки, расположенные в пространстве, обозначают прописными буквами латинского алфавита **A, B, C, D**, ... или цифрами **1, 2, 3, 4**,..

2. Прямые и кривые линии в пространстве – строчными буквами латинского алфавита ***a, b, c, d***, ...

3. Плоскость проекций при образовании эпюра - прописной буквой греческого алфавита: горизонтальная – Π_1, фронтальная – Π_2, профильная – Π_3.

4. Плоскости – строчными буквами греческого алфавита: **α, β, γ, δ;** точки схода следов строчными буквами греческого алфавита с индексами α_x, β_x, γ_x, δ_x ...

5. Поверхности – прописными буквами греческого алфавита **Φ, Δ, θ, Σ,...**

6. Способ задания указывается в скобках рядом с буквенным обозначением геометрической фигуры.

Например:

- ***a (A, B)*** – прямая задана двумя точками ***A*** и ***B***;
- ***α (A, B, C)*** – плоскость задана тремя точками ***A, B*** и ***C;***
- **β (a, A)** – плоскость задана прямой **a** и точкой **A**;
- ***γ (a∩b)*** – плоскость задана пересекающимися прямыми ***a*** и ***b;***
- ***δ (l ‖ m)*** – плоскость задана параллельными прямыми ***l*** и ***m***.

7. Углы – строчными буквами греческого алфавита **φ, ψ, ω.** Прямой угол обозначается прямоугольником.

8. Особые прямые имеют постоянные обозначения:

- линии уровня: горизонталь – ***h;*** фронталь –***f;*** профиль –***p;***
- следы плоскости общего положения обозначают той же буквой, что и плоскость, с добавлением подстрочного индекса, соответствующего плоскости проекций, например α_1, α_2;
- оси вращения – ***i, j.***

9. Последовательность геометрических фигур – надстрочным индексом: точек – A^1 A^2, A^3, ... ; прямых – a^1, a^2, a^3, ... ; плоскостей – α^1, α^2 , α^3.

10. Центр проецирования – прописной буквой латинского алфавита ***S.***

11. Направление проецирования – строчной буквой латинского алфавита **s.**

12. Новая плоскость проекций при замене плоскостей проекций – буквой ***П*** с добавлением подстрочного индекса: Π_4, Π_5, Π_6.

13. Проекции точек, прямых и плоскостей – соответствующей буквой с добавлением подстрочного индекса, характеризующего плоскость проекций:

- на плоскости Π_1 – A_1, a_1, ...
- на плоскости Π_2 – A_2, a_2, ...
- на плоскости Π_3 – A_3, a_3, ...

14. Основные операции:

- совпадение двух геометрических фигур ≡, например, $a \equiv b$, $A_1 \equiv B_1$;
- включает, содержит, $l \subset \alpha$, например, прямая l принадлежит плоскости α;
- взаимная принадлежность геометрических фигур ∈, например $A \in a$, $a \in B$;
- пересечение двух геометрических фигур и множеств ∩, например $l \cap \alpha$, $\beta \cap \gamma$;
- результат геометрической операции =, например, $K = l \cap \alpha$.

Латинский алфавит		*Греческий алфавит*	
A a - a	***N n - эн***	***A α - альфа***	***N ν - ни***
B b - бэ	***O o - о***	***B β - бэта***	***Ξ ξ - кси***
C c - цэ	***P p - пэ***	***Γ γ - гамма***	***O o - омикрон***
D d - дэ	***Q q - ку***	***Δ δ - дельта***	***Π π - пи***
E e - е	***R r - эр***	***E ε - эпсилон***	***P ρ - ро***
F f - эф	***S s - эс***	***Z ζ - дзета***	***Σ σ - сигма***
G g - ге	***T t - тэ***	***H η - эта***	***T τ - тау***
H h - ха	***U u - у***	***Θ θ - тэта***	***Υ υ - ипсилон***
И ι - и	***V v - вэ***	***I I - йота***	***Φ φ - фи***
J j - йот	***W w - дубль-вэ***	***K χ - каппа***	***X x - хи***
K k - ка	***X x - икс***	***Λ λ - лямбда***	***Ψ ψ - пси***
L l - эль	***Y y - игрек***	***M μ - ми***	***Ω ω - омега***
M m - эм	***Z z - зет***		

При изучении наук
задачи полезнее правил
И. Ньютон

ВВЕДЕНИЕ

В основу данного пособия положена классификация задач начертательной геометрии, которая рассматривается в учебниках. С некоторыми уточнениями классификация приводится и в пособии.

По ней почти все задачи начертательной геометрии разбиты на два класса: позиционные и метрические. Каждый класс разбивается на группы и подгруппы задач.

В методических указаниях классификация задач приводится более подробно, а также приводится общепринятый порядок решения задач, которым необходимо овладеть и придерживаться. Большое внимание уделяется пространственному представлению задачи, логическому обоснованию порядка решения и составлению плана решения задачи в общем виде (в пространстве).

Приступая к решению любой задачи, студент, прежде всего, должен отнести данную задачу к классу позиционных или метрических задач, затем определить группу и подгруппу, выделить необходимый алгоритм и изучить решение типовой задачи установленной подгруппы задач. Все решения должны выполняться с помощью графических построений – чертежа.

Согласно классификации задач, изложенной в учебниках по начертательной геометрии, почти все задачи разделяются на два класса: позиционные и метрические.

В свою очередь в каждом классе выделены группы и подгруппы задач, имеющие одинаковые подходы и алгоритмы решения. Так, в классе позиционных задач, выделены шесть групп задач. Наибольшее практическое применение имеют задачи на взаимную принадлежность и на взаимное пересечение. В этих группах выделены по шесть подгрупп задач, для которых приводятся общие подходы и алгоритмы решения типовых задач.

В классе метрических задач выделены четыре группы задач. В свою очередь в каждой группе задач выделено по несколько подгрупп задач. Для каждой подгруппы также приводятся общие подходы и алгоритмы решения типовых задач.

При использовании данного учебного пособия для решения конкретной задачи необходимо придерживаться следующего порядка:

1. Изучить условие задачи, выделив определяющие элементы для классификации;
2. Классифицировать задачу, отнеся ее к позиционным или метрическим задачам;
3. Определить по классификации группу и подгруппу данной задачи;
4. Изучить основные положения и алгоритм решения задач установленных групп и подгрупп. Положения и алгоритмы приводятся в соответствующих разделах учебного пособия;
5. Изучить решения приведенных типовых задач данной подгруппы;
6. Приступить к решению данной задачи, представив ее условие в пространстве и вычертить при необходимости чертеж;
7. Составить план решения задачи в пространстве, используя алгоритм установленной подгруппы задач;
8. Решить задачу на проекционном чертеже, используя алгоритм решения типовой задачи, приведенный в учебном пособии.

ГЛАВА 1. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

1.1. Основные положения

Позиционными задачами называют задачи, связанные с определением на комплексном чертеже взаимного расположения заданных геометрических фигур, включая задачи на взаимную принадлежность и на взаимное пересечение.

К позиционным относятся задачи на:

- взаимное расположение точек;
- взаимное расположение точки и прямой;
- взаимное расположение двух прямых;
- взаимное расположение точки и плоскости;
- взаимное расположение прямой и плоскости;
- взаимное расположение двух плоскостей.

Из перечисленного множества задач наибольший практический интерес представляют две группы задач:

Задачи на взаимную принадлежность.

1. Принадлежность точки точке.
2. Принадлежность точки линии.
3. Принадлежность точки плоскости.
4. Принадлежность точки поверхности.
5. Принадлежность одной линии другой.
6. Принадлежность линии плоскости и поверхности.

Задачи на взаимное пересечение:

1. Пересечение линии с линией.
2. Пересечение линии с плоскостью.
3. Пересечение двух плоскостей.
4. Пересечение линии с поверхностью.
5. Пересечение поверхностей плоскостью.
6. Пересечение поверхностей.

Рассмотрим два примера решения задач указанных двух групп с использованием общего алгоритма рассмотренного выше.

Пример 1. Построить недостающую фронтальную проекцию точки **A**, принадлежащую плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ **(**$\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$**)**, если известна горизонтальная проекция $\mathbf{A_1}$ (рис. 1а).

Решение.

1. По условию необходимо найти недостающую проекцию точки, принадлежащей плоскости. Следовательно, данную задачу относим к классу позиционных.
2. По классификации позиционных задач относим ее к первой группе задач «Задачи на взаимную принадлежность» и подгруппе 3 – «Принадлежность точки плоскости».

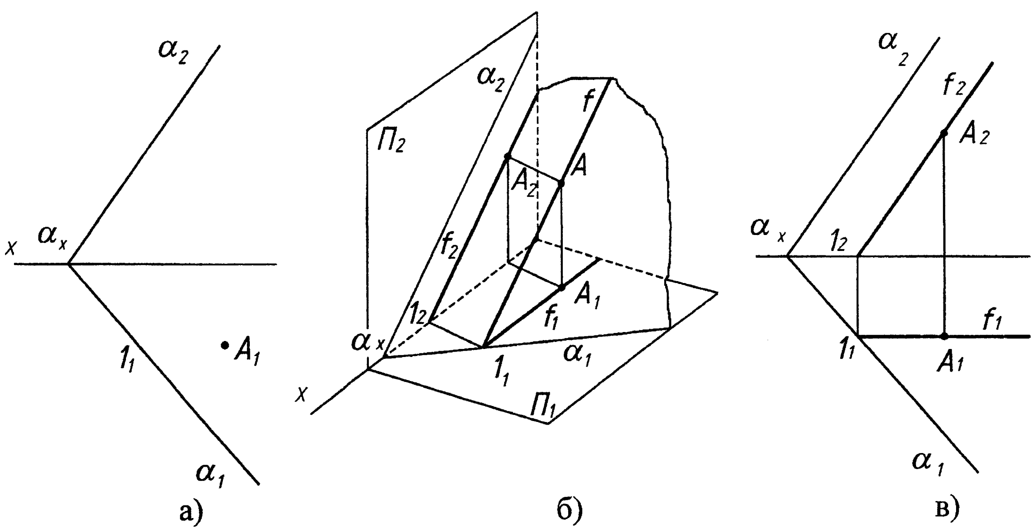


Рис. 1.1

3. Составляем пространственный чертеж задачи (рис. 1.1б). Заданную плоскость общего положения **α** относим к двугранному углу, образованному плоскостями проекций **$П_1$** и **$П_2$**. Наносим точку **A**, принадлежащую плоскости **α**, и ее проекцию **A_1**.

4. Точка принадлежит плоскости, если через нее можно провести прямую, принадлежащую плоскости. Такой прямой может быть горизонталь или фронталь.

5. План решения:

– на чертеже через точку **A** проводим фронталь **f** // **α_2** и находим ее проекцию **f_1**, включающую **A_1**.

– из условия принадлежности точки линии пространства с помощью **f_1** и **f_2** находим недостающую проекцию точки **A – A_2** .

6. На проекционном чертеже (рис. 1.1в) через **A_1** проводим горизонтальную проекцию фронтали **f_1** (**f_1 // x**), затем строим фронтальную проекцию фронтали **f_2//α_2** и по принадлежности точки прямой с помощью линии связи находим проекцию **A_2**.

Пример 2. Найти точку пересечения прямой **a** с профильно-проецирующей плоскостью **β**, заданной следами (рис. 1.2а).

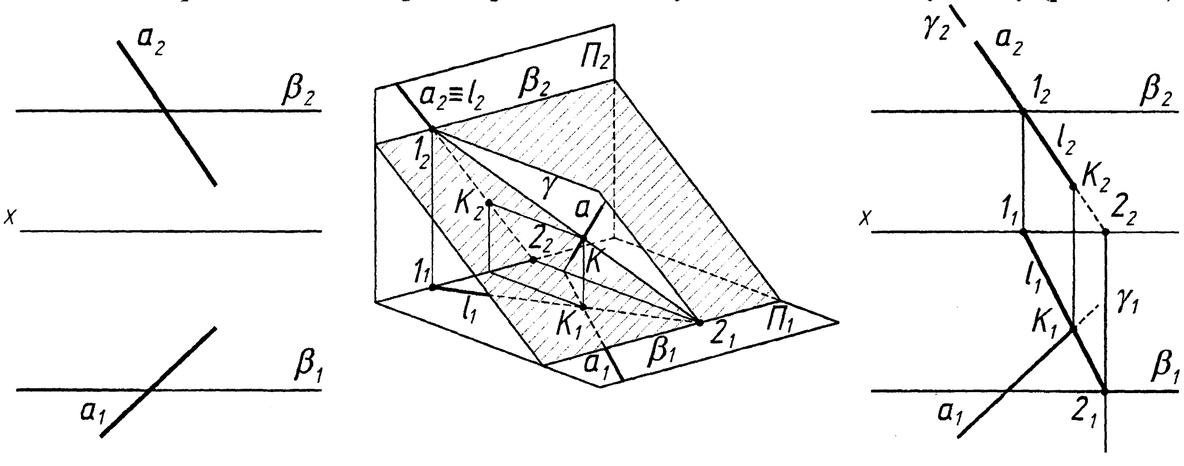
Решение.

1. По условию задачи она относится к классу «Позиционных задач». По классификации задачу относим ко второй группе «Задачи на пересечение», подгруппа – «Пересечение линии с плоскостью.

2. Вычерчиваем чертеж условия задачи в пространстве (рис. 1.2б).

3. План решения задачи в общем виде: прямую **a** заключаем в проецирующую плоскость γ (на рис. 1.2б – во фронтально-проецирующую); находим линию пересечения двух плоскостей – $l = \gamma \cap \beta$ и точку пересечения **K** заданной линии **a** и линии l, т. е. $K = a \cap l$.

4. На проекционном чертеже решаем задачу по составленному плану (рис. 1.2в).



а) б) в)

Рис. 1.2

Ниже приводятся решения типовых задач, относящихся к перечисленным группам.

1.2. Решение задач на взаимную принадлежность

1.2.1. Принадлежность точки точке

Если две точки пространства совпадают, то их проекции также совпадают, т. е. **$A \equiv B$**, **$A_1 \equiv B_1$** и **$A_2 \equiv B_2$**.

Принадлежность определяется по чертежу без дополнительных построений.

1.2.2. Принадлежность точки линии

При построении точки, принадлежащей заданной линии, или определении принадлежности точки линии используется свойство прямоугольного проецирования: если точка **в** пространстве принадлежит прямой **$A \in l$**, то и проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой **$A_1 \in l_1$** и **$A_2 \in l_2$**.

Задача 1.1. На линии l задать произвольную точку А, принадлежащую этой линии (рис. 1.3).

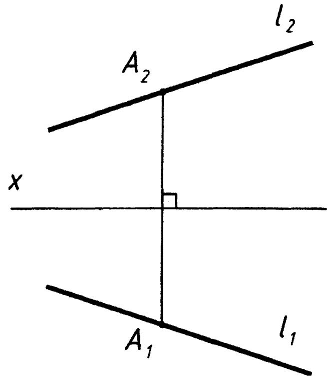


Рис. 1.3

Решение.

1. Зная, что $A_1 \in l_1$ и $A_2 \in l_2$, а также, что точки A_1 и A_2 лежат на одной линии связи, на одной из проекций линии наносим произвольную точку **А** и обозначаем тем же индексом, что и проекция линии.
2. На рисунке 1.3 взята точка A_2 на фронтальной проекции прямой l_2.
3. Из A_2 проводим прямую, перпендикулярную оси проекций **x**, и на пересечении ее с l_1, находим проекцию A_1.

Для прямой профильного уровня принадлежность точки прямой определяется с помощью построения профильной проекции прямой.

Задача 1.2. По фронтальной проекции точки **С**, принадлежащей отрезку **АВ**, построить ее горизонтальную проекцию (рис. 1.4).

Решение. Отрезок линии **АВ** лежит в плоскости, перпендикулярной оси **x** (или плоскостям проекций Π_1 и Π_2), и поэтому по заданным проекциям отрезка **АВ** решение задачи затруднено. Решение упрощается при построении третьей проекции A_3B_3 отрезка **АВ**. На этой проекции отмечаем проекцию C_3 точки **С** и с помощью линий проекционной связи находим проекцию C_1.

Данная задача может быть решена и без третьей проекции из условия деления отрезка в данном отношении: если точка **С** делит отрезок **АВ** в данном отношении, то и проекции точки **С** (C_1 и C_2) делят проекции отрезков в том же отношении (рис. 1.5)

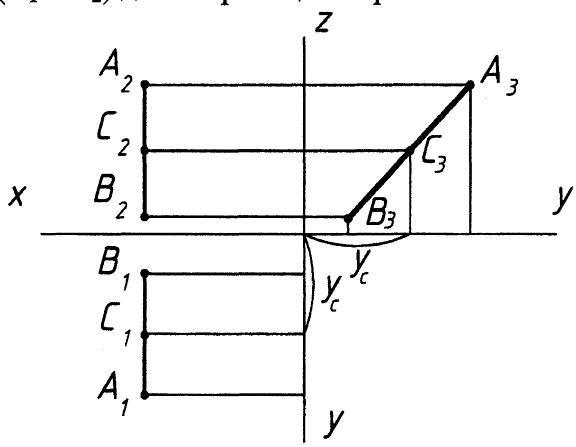


Рис. 1.4

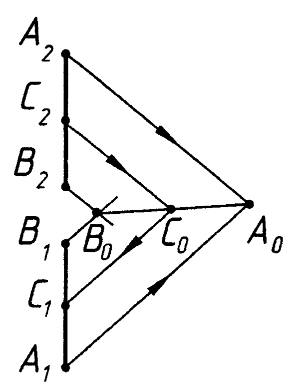


Рис. 1.5

На рис. 1.5 через проекции A_2 и B_2 проводим два параллельных луча произвольного направления до пересечения в точках A_0 и B_0 с соответствующими лучами, проведенными через проекции A_1 и B_1. Далее через точку C_2 проводим луч, параллельный A_2A_0, до пересечения его в точке C_0 с прямой A_0B_0 (прямая преломления лучей) и через точку C_0 проводим луч, параллельный A_1A_0, до пересечения с A_1B_1 в искомой точке C_1.

1.2.3. Принадлежность точки плоскости

Определение принадлежности точки плоскости или построение точки, принадлежащей заданной плоскости, производится с помощью прямой линии, принадлежащей плоскости и проходящей через заданную точку, а также свойства принадлежности точки прямой.

Задача 1.3. В плоскости α (**a** // **b**) построить недостающую горизонтальную проекцию точки **А** при условии, что $A \in \alpha$ (рис. 1.6).

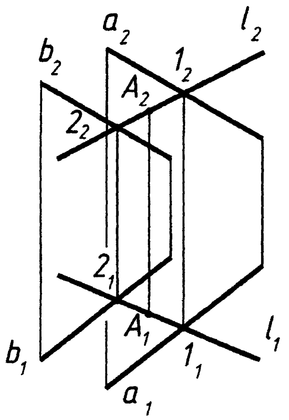


Рис. 1.6

Решение. Если точка находится на плоскости общего положения, то ее проекции должны лежать на одноименных проекциях какой-либо прямой, принадлежащей данной плоскости.

1. В плоскости **α** (рис. 1.6) проводим произвольную прямую ***l***, проходящую через фронтальную проекцию $\mathbf{A_2}$.

2. Находим точки пересечения l_2 с проекциями прямых $\mathbf{a_2}$ и $\mathbf{b_2}$

3. С помощью точек **1** и **2** строим горизонтальную проекцию l_1.

4. На проекции l_1 отмечаем проекцию $\mathbf{A_1}$.

Задача 1.4. Построить недостающую горизонтальную проекцию точки **А**, принадлежащую плоскости **α**, если известна фронтальная проекция $\mathbf{A_2}$ (рис. 1.7)

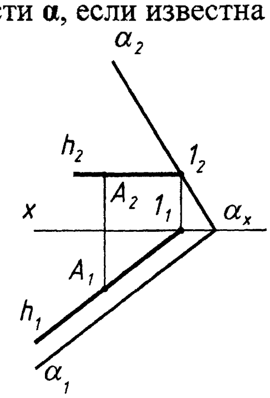


Рис. 1.7

Решение. Так как плоскость задана следами, то в качестве вспомогательной линии удобнее использовать горизонталь плоскости. Фронтальную проекцию горизонтали $\mathbf{h_2}$ проводим через $\mathbf{A_2}$. Строим горизонтальную проекцию $\mathbf{h_1}$ и на пересечении линии связи, проведенной из точки $\mathbf{A_2}$, определяем горизонтальную проекцию точки $\mathbf{A_1}$.

1.2.4. Принадлежность точки поверхности

Алгоритм решения задачи на принадлежность точки поверхности включает:

1. Определить вид заданной поверхности.
2. Допустить, что точка принадлежит поверхности, т.е. конкретной образующей. Задать эту образующую на чертеже, проведя одну из проекций через проекцию точки – прямая $\mathbf{S_2 1_2}$ (рис. 1.8б).
3. Сравнить взаимное положение проекций образующей и заданной точки. Если эти проекции совпадают, то это значит, что точка принадлежит образующей.
4. В общем случае вместо образующей можно взять и другую линию, простую для построения (рис. 1.8в) – например, окружность **m**.

Задача 1.5. По заданной фронтальной проекции $\mathbf{A_2}$ построить горизонтальную проекцию $\mathbf{A_1}$ точки **А**, принадлежащей конической поверхности вращения (рис. 1.8а)

Решение. Так как коническая поверхность вращения имеет два семейства простых линий: прямолинейные образующие и окружности-параллели, то могут быть два варианта решения с использованием основного алгоритма.

Вариант 1.

1. Проводим фронтальную проекцию образующей $\mathbf{S_2 1_2}$ через $\mathbf{A_2}$ (рис. 1.8б)
2. Находим горизонтальную проекцию $\mathbf{S_1 1_1}$, используя линии связи и принадлежность точки **1** окружности основания конуса.
3. Определяем горизонтальную проекцию $\mathbf{A_1}$ точки **А** на пересечении линии связи $\mathbf{A_2 A_1}$ и образующей $\mathbf{S_1 1_1}$.

Вариант 2.

1. Проводим параллель $l \parallel \Pi_1$ через $\mathbf{C_2}$ ($l_2 \perp \mathbf{S_2 S_1}$) (рис. 1.8в).
2. Проводим проекцию $\mathbf{1_1}$ – окружность радиуса $\mathbf{R_2}$ с центром в точке $\mathbf{S_1}$.

Находим проекцию $\mathbf{C_1}$ на пересечении линии связи $\mathbf{C_1 C_2}$ и окружности l_1.

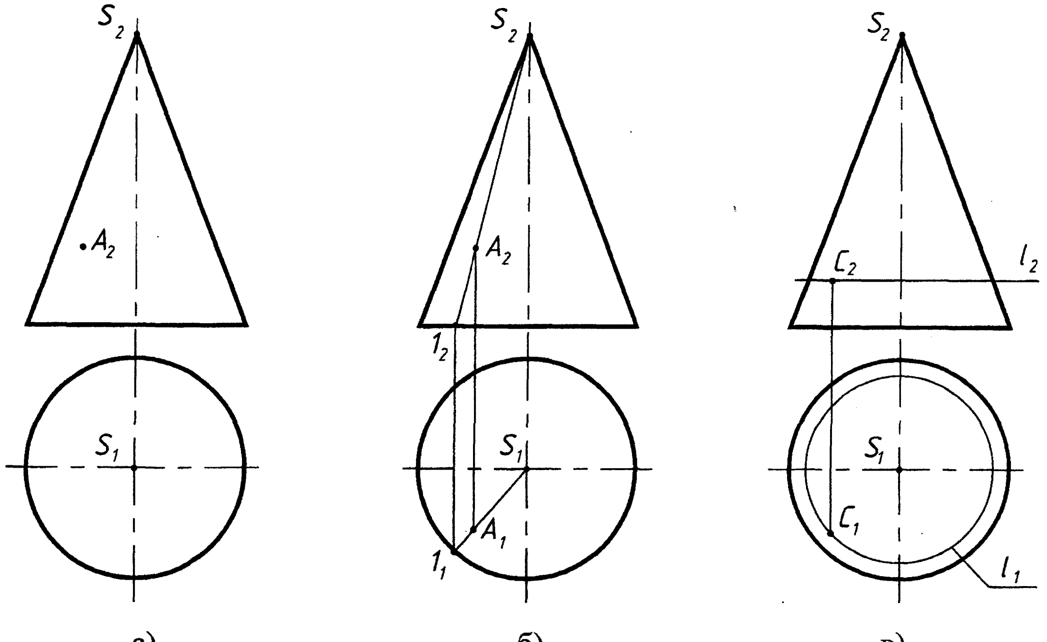


Рис 1.8

Задача 1.6. По заданной фронтальной проекции $\mathbf{B_2}$ (рис. 1.9) построить горизонтальную проекцию $\mathbf{B_1}$ точки **B**, принадлежащей сфере.

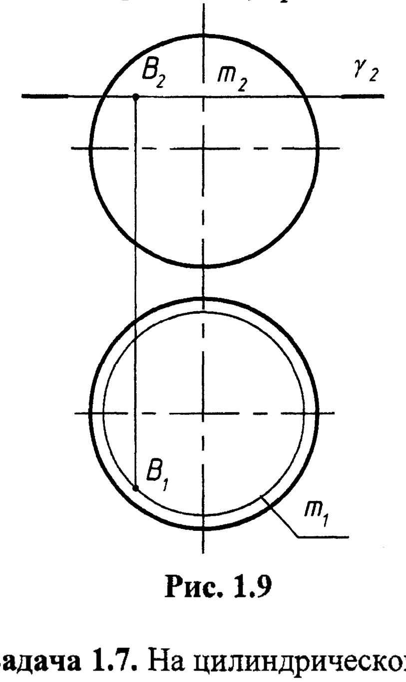


Рис. 1.9

Решение.

1. В качестве вспомогательной линии выбираем параллель, проходящую через фронтальную проекцию $\mathbf{B_2}$ и лежащую в горизонтальной плоскости уровня γ. Проводим через фронтальную проекцию $\mathbf{B_2}$ параллель $\mathbf{m_2}$, зная, что $\mathbf{B_2} \in \mathbf{m_2}$.

2. Проводим горизонтальную проекцию $\mathbf{m_1}$ параллели (проецируется на Π_1 без искажения).

3. На пересечении линии связи и окружности $\mathbf{m_1}$ получаем искомую точку $\mathbf{B_1}$.

Задача 1.7. На цилиндрической поверхности, заданной прямолинейной образующей **a** и направляющей **m** (рис. 1.10), построить точку **A**.

Решение.

1. Строим произвольную образующую **a′** заданной поверхности. Для этого на кривой **m** наносим произвольную точку **2** ($\mathbf{2_1} \in \mathbf{m_1}$, $\mathbf{2_2} \in \mathbf{m_2}$).

2. Через проекции точки **2** проводим проекции прямой **a′**, параллельные соответствующим образующим $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$.

3. На прямой **a′** наносим произвольную точку **A**($\mathbf{A_1} \in \mathbf{a'}$, $\mathbf{A_2} \in \mathbf{a'_2}$).

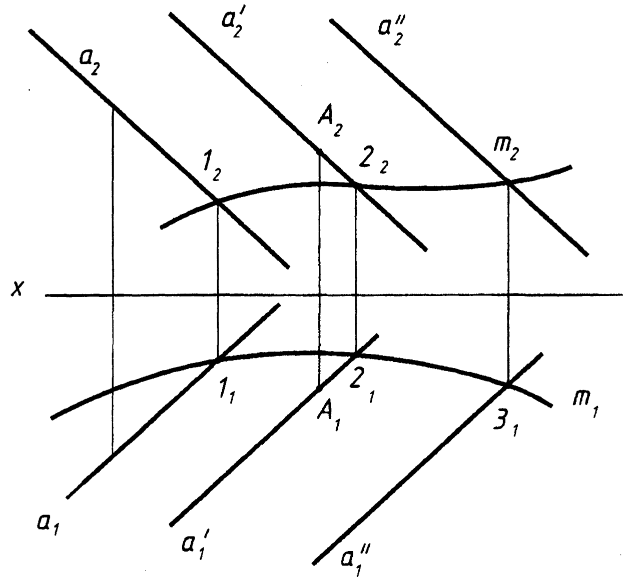


Рис. 1.10

Задача 1.8. На поверхности цилиндроида (рис. 1.11) построить фронтальную проекцию точки **А**, если задана ее горизонтальная проекция $\mathbf{A_1}$.

Решение.

1. Через горизонтальную проекцию $\mathbf{A_1}$ точки **А** проводим прямую $\mathbf{a_1}$, параллельно образующей и отмечаем точки **3** и **4**.
3. По точкам **3** и **4** строим фронтальную проекцию $\mathbf{a_2}$ прямой **а**.
4. С помощью линии связи, проведенной из точки $\mathbf{A_1}$, находим проекцию $\mathbf{A_2}$.

Для нелинейчатых поверхностей в качестве вспомогательных линий используют кривые линии, принадлежащие поверхности.

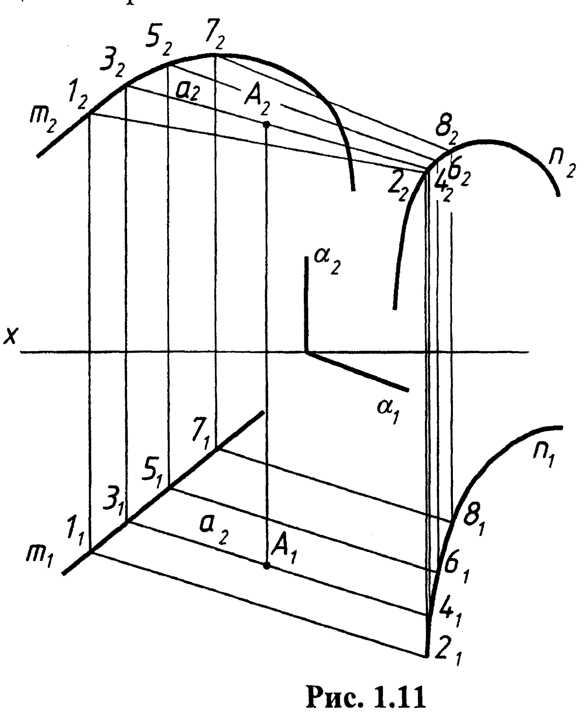


Рис. 1.11

Задача 1.9. На нелинейчатой поверхности **α** построить проекцию точки **А**, если задана ее горизонтальная проекция (рис. 1.12).

Решение.

1. Через горизонтальную проекцию $\mathbf{A_1}$ проводим горизонтальную проекцию $\boldsymbol{l_1}$ прямой линии $\boldsymbol{l}$.

2. В качестве любых точек линии l, принадлежащих поверхности, принимаем точки $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$ в которых l_1 пересекает образующие $a_1', a_1'', a_1''', a_1''''$.

3. Строим фронтальную проекцию точек $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$. и соединяем эти точки плавной кривой, получаем проекцию линии l_2.

4. На проекции l_2 отмечаем положение искомой проекции A_2. Точка $A \in l$ ($A_1 \in l_1$, $A_2 \in l_2$) и $l \in \alpha$.

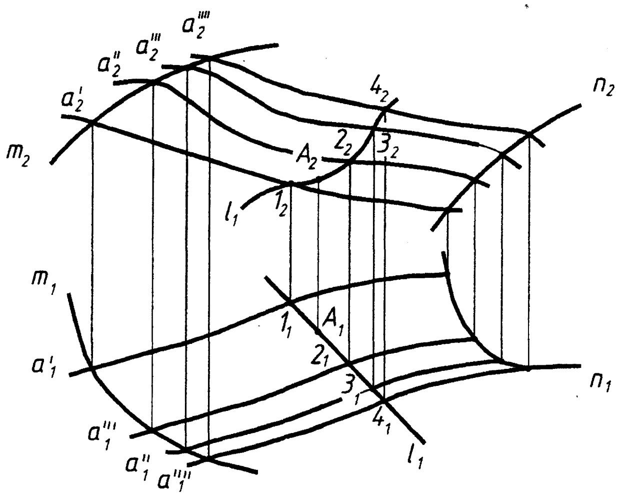


Рис. 1.12

1.2.5. Принадлежность одной линии другой

Прямая линия принадлежит другой прямой, если одноименные проекции точек одной прямой совпадают с проекциями другой. Практически это будет одна и та же линия. Принадлежность определяется проекциям линий без дополнительных построений.

1.2.6. Принадлежность линии плоскости и поверхности

Определение принадлежности линии плоскости или поверхности производится на основе двух известных положений:

1. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащие данной плоскости.
2. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через точку, принадлежащую данной плоскости, и параллельна прямой, находящейся в этой плоскости или в плоскости, параллельной ей.

Определение принадлежности линии плоскости и поверхности мало чем отличается от построения точки, принадлежащей плоскости и поверхности. Различие состоит лишь в том, что определяются проекции двух и более точек, принадлежащих линии.

Задача 1.10. Построить горизонтальную проекцию линии **m**, принадлежащей плоскости α, если известна ее фронтальная проекция m_2 (рис. 1.13а).

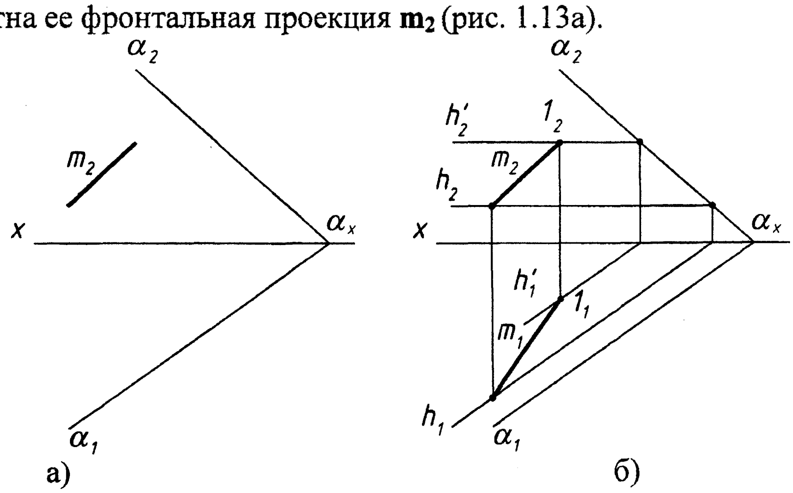


Рис. 1.13

Решение. Прямая линия однозначно определяется двумя не тождественными точками. Поэтому для построения горизонтальной проекции m_1 достаточно на прямой **m** выделить точки **1** и **2** и с помощью горизонталей найти их горизонтальные проекции 1_1 и 2_1. Найденные проекции точек и определяют горизонтальную проекцию m_1 линии **m**.

Задача 1.11. Построить горизонтальную проекцию линии *l*, принадлежащей поверхности коноида α (плоскость параллелизма Π_1), если известна ее фронтальная проекция l_2 (рис. 1.14).

Решение.

1. На фронтальной проекции проводим образующие **a** // Π_1.
2. Находим горизонтальные проекции этих образующих.
3. Отмечаем точки 1_2, 2_2, 3_2, в которых фронтальная проекция линии пересекает фронтальные проекции образующих **a**.

На соответствующих проекциях образующих находят горизонтальные проекции точек 1_2, 2_2, 3_2 ..., принадлежащих проекции l_1 линии *l*, соединив их плавной кривой, получим плоскую горизонтальную проекцию l_1 линии *l*, принадлежащей плоскости α.

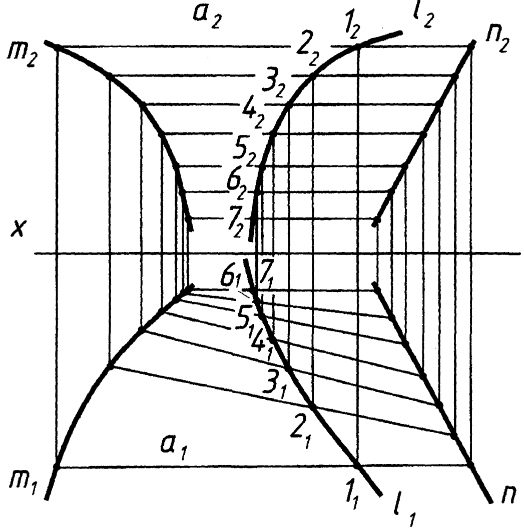


Рис. 1.14

1.2.7. Принадлежность одной плоскости другой

Принадлежность плоскости другой плоскости практически означает их совпадение. Если доказательство принадлежности требует построений, то в плоскости берут три точки и трижды решают задачу на принадлежность точки плоскости.

1.2.8. Принадлежность плоскости поверхности

Принадлежность плоскости поверхности в общем случае невозможно. Возможно только касание – предельное положение пересечения. Исключение составляют гранные поверхности.

1.3. Решение задач на взаимное пересечение геометрических фигур

Задачи на взаимное пересечение геометрических фигур можно разделить на две подгруппы: задачи на взаимное пересечение поверхностей и задачи на пересечение линии (и прямой линии) с поверхностью. Решение задач первой подгруппы является более общим.

При построении линии пересечения поверхностей необходимо вначале найти опорные точки, а затем промежуточные.

Для нахождения промежуточных точек применяют вспомогательные секущие поверхности, которые рассекают заданные поверхности по заранее известным и простым по построению на чертеже линиям (по прямым или окружностям). Такими поверхностями могут быть плоскости или сферы.

Алгоритм решения задач на взаимное пересечение поверхностей:

1. Определить вид заданных поверхностей.
2. Выбрать вспомогательные секущие плоскости.

3. Найти опорные точки линии пересечения.
4. Найти промежуточные точки линии пересечения.
5. Построить линию пересечения с учетом ее видимости и формы.

1.3.1. Пересечение линии с линией

Решение задач по определению точки пересечения двух линий вытекают непосредственно из свойства прямоугольного проецирования:

Если точка **K** является результатом пересечения двух прямых, то прямоугольные проекции этой точки K_1 и K_2 определяются пересечением прямоугольных прямых **a** и **b**.

$$K=a \cap b \Leftrightarrow K_1=a_1 \cap b_1 {}^\wedge K_2=a_2 \cap b_2$$

Взаимное пересечение прямых определяется по чертежу без дополнительных построений: на комплексном чертеже проекции K_1 и K_2 должны находиться на одной линии связи.

1.3.2. Пересечение линии с плоскостью

Пересечение прямой линии с плоскостью. Прямая линия относительно заданной плоскости может занимать два положения: принадлежать плоскости или пересекать ее.

Частными случаями пересечения могут быть: параллельность – пересечение в бесконечности и перпендикулярность – пересечение прямой с плоскостью под углом 90^0.

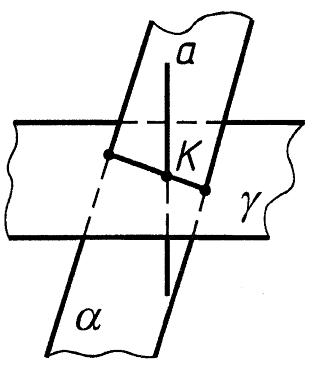


Рис. 1.15

Алгоритм нахождения точки пересечения прямой с плоскостью (рис. 1.15):

1. Прямую **a** заключаем во вспомогательную проецирующую плоскость γ.
2. Определяем линию пересечение вспомогательной плоскости γ с заданной α – прямая l ($l = \gamma \cap \alpha$).
3. Определяем точку пересечения линии l с заданной линией **a** – точка **K** ($K = a \cap l$).
4. Определяем видимость.

Задача 1.12. Найти точку пересечения прямой **a** с плоскостью общего положения α (ΔABC) (рис. 1.16).

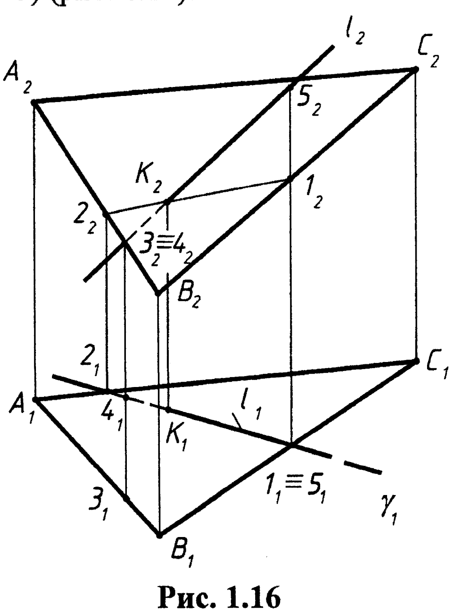


Рис. 1.16

Решение.

1. Заключаем, например, горизонтальную проекцию линии **a** в горизонтально-проецирующую плоскость γ.
2. Находим горизонтальную проекцию l_1 линии l пересечения вспомогательной плоскости γ с заданной плоскостью α – $l = \gamma \cap \alpha$ (на чертеже - линия l_1 ($1_1, 2_1$)).

Строим фронтальную проекцию линии пересечения l_2 ($1_2, 2_2$).

3. Определяем точку пересечения прямых l и **a** - точка K(K_1, K_2)
4. Определяем видимость участков линии по конкурирующим точкам (точки 1_1 и 5_1, 4_2 и 3_2).

Задача 1.13. Найти точку пересечения прямой **a** с плоскостью общего положения α, заданной следами (рис. 1.17).

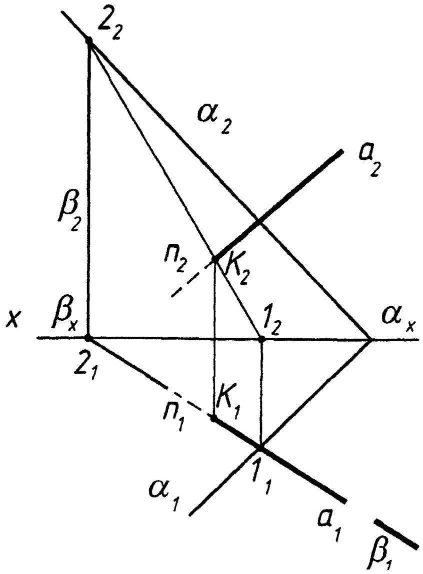


Рис. 1.17

Решение.

1. Заключаем прямую **a** в горизонтально- проецирующую плоскость γ ($\gamma_1 \equiv \mathbf{a_1}$, $\gamma_2 \perp \mathbf{\Pi_1}$).

2. Находим линию пересечения плоскостей $\gamma \cap \alpha = \boldsymbol{l}$ (l_1 и l_2).

3. Определяем $\mathbf{K_2} = \mathbf{a_2} \cap \boldsymbol{l_2}$. По фронтальной проекции $\mathbf{K_2}$ с помощью линий связи находим горизонтальную проекцию $\mathbf{K_1}$.

4. Определяем видимость участков прямой **a**.

Решение задачи упрощается, если одна из заданных фигур (прямая или плоскость) занимает проецирующее положение.

Задача 1.14. Определить точку пересечения прямой с плоскостью, если: прямая **a** общего положения, а плоскость α (α_1, α_2) – проецирующая (рис. 1.18); плоскость α (α_1, α_2) общего положения, а прямая **a** – проецирующая (рис. 1.19)

Решения задач видны из чертежей и не требуют объяснений.

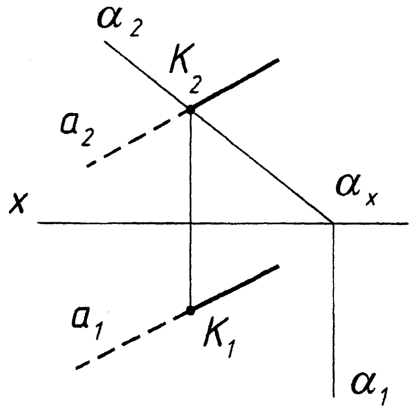


Рис. 1.18

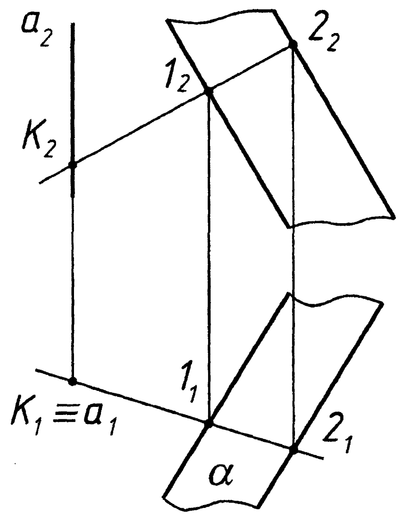


Рис. 1.19

Пересечение кривой линии с плоскостью. При определении точек пересечения кривой линии с плоскостью выполняются следующие графические операции:

1. Заключают кривую линию **a** в проецирующую цилиндрическую поверхность.
2. Находят линию пересечения заданной плоскости и введенной поверхности.
3. Строят вторую проекцию линии пересечения с помощью линии уровня.
4. Находят точку пересечения кривой линии и плоскости.

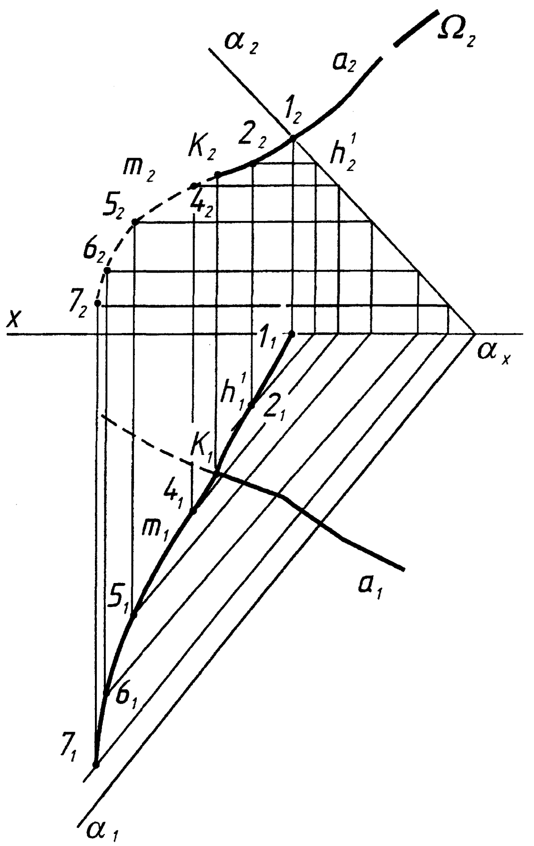
Применим вышеприведенный алгоритм на конкретном примере.

Задача 1.15. Определить точку пересечения кривой линии **a** с плоскостью α, заданной следами (рис. 1.20).

Решение.

1. Заключаем одну из проекций кривой линии **a** в проецирующую поверхность Ω. На чертеже поверхность Ω проведена через $\mathbf{a_2}$ ($\Omega \perp \Pi_2$).

2. Находим линию пересечения $\mathbf{m} = \Omega \cap \alpha$ ($\mathbf{a}_2 \equiv \Omega_2 \equiv \mathbf{m}_2$).



3. Определяем горизонтальную проекцию линии пересечения $\mathbf{m}_1$. Для этого выделяем на $\mathbf{m}_2$ ряд точек – $\mathbf{1}_2$, $\mathbf{2}_2$, $\mathbf{3}_2$. С помощью горизонталей ($\mathbf{h}^1$, $\mathbf{h}^2$ ...) плоскости α, находим точки $\mathbf{1}_1$, $\mathbf{2}_1$ ..., принадлежащие $\mathbf{m}_1$.

4. Находим горизонтальную проекцию точки **K** пересечения линии **m** и кривой **a** – $\mathbf{K}_1 = \mathbf{m}_1 \cap \mathbf{a}_1$.

5. Находим фронтальную проекцию $\mathbf{K}_2$ по принадлежности.

6. Определяем видимость участков кривой с помощью конкурирующих точек.

Рис. 1.20

1.3.3. Пересечение двух плоскостей

Две плоскости пересекаются по прямой линии, поэтому для ее определения достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно каждой из двух заданных плоскостей. Для нахождения таких точек необходимо выполнить следующие построения. В качестве посредников выбирают, как правило, проецирующие плоскости. Кроме того, посредники проводят параллельно один одному. Тогда линии их пересечения с плоскостью также параллельны. Рассмотрим общий случай пересечения плоскостей, когда обе заданные плоскости общего положения (рис. 1.21).

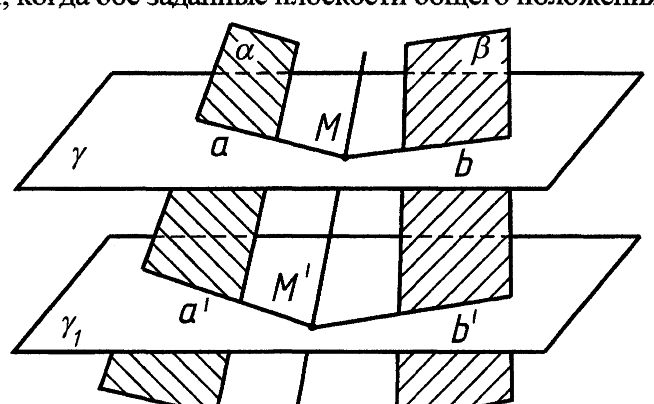


Рис. 1.21

1. Пересечь обе заданные плоскости третьей секущей плоскостью – посредником γ.
2. Построить линии пересечения **a** и **b** плоскости – посредника с заданными плоскостями ($\mathbf{a} = \alpha \cap \gamma$, $\mathbf{b} = \beta \cap \gamma$).
3. Искомая точка М линии пересечения определяется в пересечении полученных линий пересечения – $\mathbf{a} \cap \mathbf{b} = \mathbf{M}$.
4. Для нахождения другой точки необходимо ввести еще одну плоскость - посредник γ', параллельно предыдущей, и повторить операции.

Задача 1.16. Определить линию пересечения плоскостей $\alpha(a//b)$ и $\beta(\Delta CDE)$ (рис.1.22).

Решение.

1. Проводим фронтально проецирующую плоскость - посредник $\gamma \perp \Pi_2$.
2. Определяем проекции линии пересечения $m_2 = \gamma_2 \cap \alpha_2$ (1_2, 2_2) и $m'_2 = \gamma_2 \cap \beta_2$ (3_2, 4_2). Линии m_2 m'_2 совпадут с γ_2 (собирательное свойство проецирующих плоскостей).
3. С помощью проекций точек 1_2, 2_2, 3_2 и 4_2, принадлежащих фронтальным проекциям m_2 и m'_2, определяем горизонтальные проекции этих прямых m_1 и m'_1.
4. Точка K_1–это точка пересечения горизонтальных проекций m_1 и m'_1 ($K_1 = m_1 \cap m'_1$).
5. Фронтальная проекция K_2 принадлежит фронтальным проекциям m_2 и m'_2
6. Для нахождения точки **L** вводим плоскость γ', которая пересечет заданные плоскости по прямым **n** и **n'**, соответственно параллельным **m** и **m'**. Для определения проекций прямых **n** и **n'** достаточно найти проекции точек **5** и **6**, принадлежащих **n** и точек **7** и **8**, принадлежащих **n'**.
7. Точки **K** и **L** определяют искомую прямую.

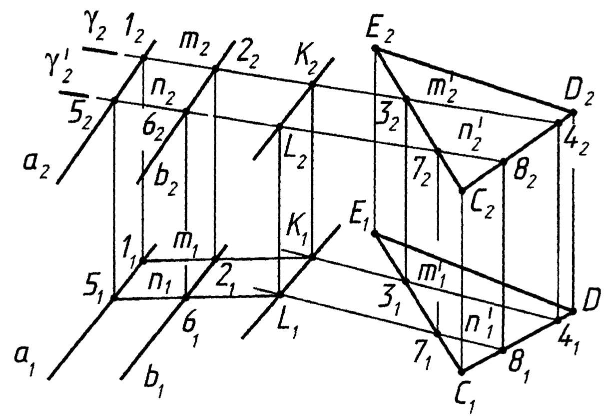


Рис. 1.22

В случае, когда пересекающиеся плоскости общего положения на чертеже имеют общую область, плоскости посредники удобно проводить вдоль прямых, которые задают плоскость.

Задача 1.17. Определить линию пересечения плоскостей общего положения α (ΔABC) и β (ΔDEF) (рис. 1.23).

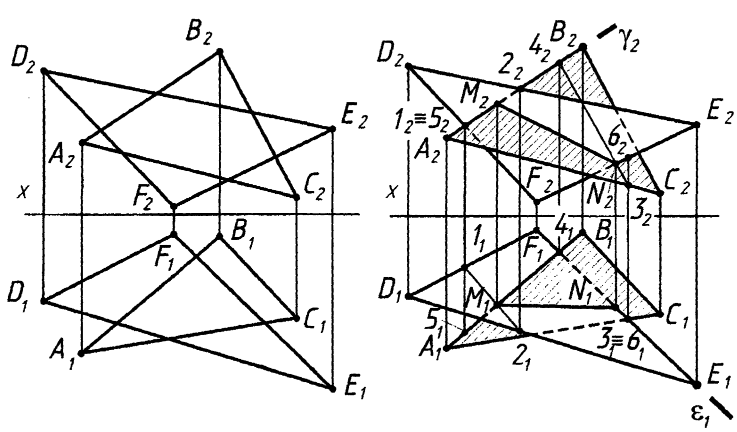


Рис. 1.23

Решение.

1. В заданных плоскостях выбираем любые две прямые, например, **AB** и **EF** и находим точки пересечения их с другой плоскостью, которой они не принадлежат, используя при этом проецирующие плоскости - посредники. Заключаем прямую **AB** во фронтально-проецирующую плоскость γ (γ_2), а прямую **EF** в горизонтально-проецирующую плоскость ω (ω_1).

2. Находим точку **M** (**M_1, M_2**) пересечения прямой **AB** с плоскостью β (**ΔDEF**) – первую точку искомой линии пересечения плоскостей:

а) **AB** $\in \gamma$; $\gamma \perp \Pi_2$;

б) $\gamma \cap \beta$ = **1-2** ($1_1 2_1$; $1_2 2_2$)

в) **1-2** $\cap$ **AB** = **M** (**M_1, M_2**).

3. Аналогично находим вторую точку **N** (**N_1; N_2**) линии пересечения в пересечении прямой **EF** с плоскостью α (**ΔABC**).

4. Соединив точки **M** и **N** прямой, получаем искомую линию пересечения **MN** (**M_1N_1; M_2N_2**) заданных плоскостей.

5. Для определения видимости участков пересекающихся плоскостей относительно плоскости **Π_2** используем конкурирующие точки **1** и **5** (**1**$\in$ **DF**, **5** $\in$ **AB**).

Конкурирующие точки **3** и **6** (**3** $\in$ **AC**, **6** $\in$ **EF**) позволяют определить видимость плоскостей относительно плоскости **Π_1**.

Задача 1.18. Определить линию пересечения плоскостей α и β, заданных следами (рис. 1. 24).

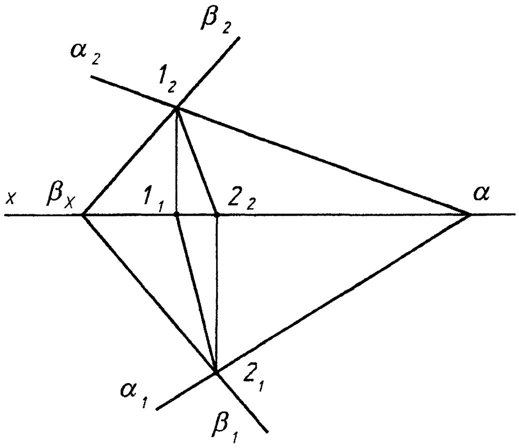


Рис. 1.24

Решение.

1. Роль вспомогательных плоскостей γ и γ' здесь выполняют плоскости проекций **Π_1** и **Π_2**, а соответствующие следы α_1, α_2 и β_1, β_2 несут функции проекций прямых линий **m_1, m_2** и **n_1, n_2**.

Следовательно, пересечение одноименных следов плоскостей определяет положение проекций точек **K** и **L**.

$$K_1 = \alpha_1 \cap \beta_1, L_2 = \alpha_2 \cap \beta_2.$$

2. Соединив одноименные проекции точек **K** и **L**, получаем проекции искомой линии пересечения l – l_1 и l_2.

Задача 1.19. Определить линию пересечения плоскостей α и β, заданных следами (рис. 1.25). Одноименные следы плоскостей не пересекаются в пределах чертежа.

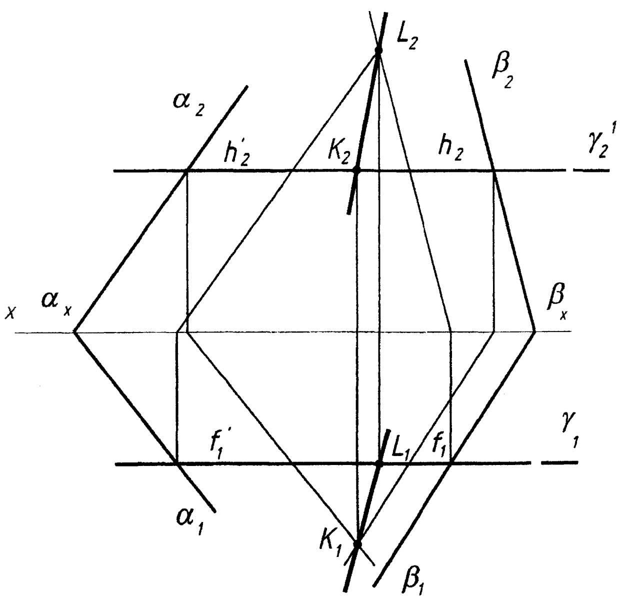


Рис. 1.25

Решение.

1. Вводим вспомогательные секущие плоскости γ и γ'.

2. Линией пересечения плоскости γ с плоскостью α служит горизонталь **h**, а плоскостью β – горизонталь **h'**.

3. Горизонтальные проекции горизонтали **h_1** и **h'_1** пересекаются в точке **K_1**. Фронтальная проекция **K_2** точки **K** находится на пересечении линии связи, проведенной из **K_1** и фронтального следа плоскости γ – γ_2.

4. Линия пересечения плоскости посредника γ' с заданными плоскостями α и β являются линиями фронтального уровня в этих плоскостях – **f** и **f'**.

Фронтальные проекции фронталей **f_2** и **f'_2** пересекаются в точке **L_2**. Точка **L_1** находится на горизонтальном следе γ'.

5. Одноименные проекции точек **K** и **L** соединяем, получаем две проекции искомой линии пересечения плоскостей α и β.

Задача 1.20. Определить линию пересечения плоскостей α (**ΔABC**) и β, заданной следами (рис. 1.26).

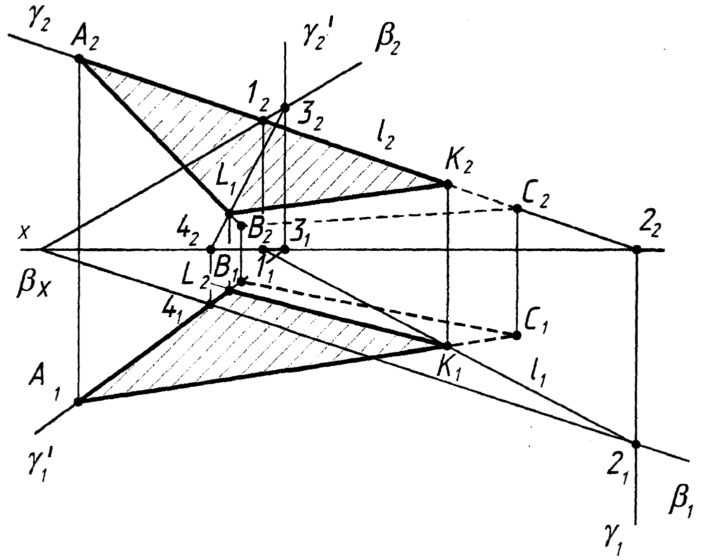


Рис. 1.26

Решение.

1. Линию пересечения двух заданных плоскостей находим, решая дважды задачу на пересечение прямой с плоскостью.

1. Заключаем проекцию A_2C_2 во фронтально-проецирующую плоскость γ (**AB** $\in \gamma$).
2. Находим линию пересечения l двух плоскостей – $l_2 = \gamma_2 \cap \alpha_2$ (1_2, 2_2).
3. Находим горизонтальную проекцию линии $l - l_1$ (1_1, 2_1).
4. Находим точку **К** (K_1, K_2) пересечения **АС** с плоскостью α.
5. Находим вторую точку линии пересечения двух заданных плоскостей. Для этого горизонтальную проекцию **АВ** заключаем в горизонтально -проецирующую плоскость γ' и выполняем все те же построения, что и при нахождении точки **К**. В результате получаем точку **L**.
6. Соединяем точки **К** и **L**. Это и будет искомая линия.
7. По конкурирующим точкам определяем видимость участков плоскостей.

Решение задачи значительно упрощается, если одна из заданных плоскостей занимает частное положение.

1.3.4. Параллельные плоскости

Задача 1.21. Через точку **М** провести плоскость **α**, параллельную заданной плоскости **β** (**ΔABC**) – (рис 1. 27.)

Решение. Используя признак параллельности плоскостей, через точку **М** (M_1, M_2) проводим прямые, параллельные сторонам **АВ** и **АС** треугольника **ABC**, т.е. **m // AB** и **n//AC**.

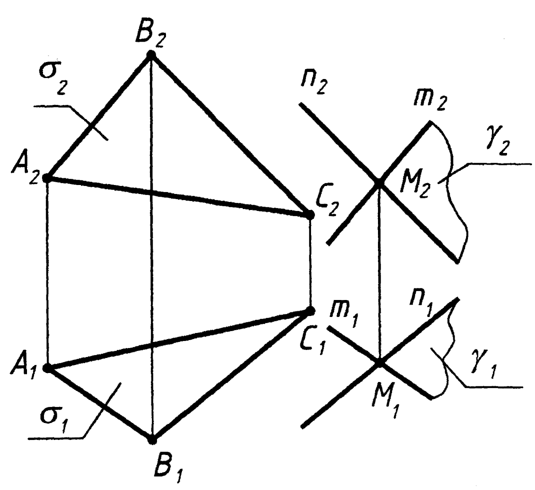


Рис. 1.27

1.3.5. Взаимно перпендикулярные плоскости

Задача 1.22. Через прямую **АВ** провести плоскость, перпендикулярную к плоскости **ΔCDE** (рис. 1.28).

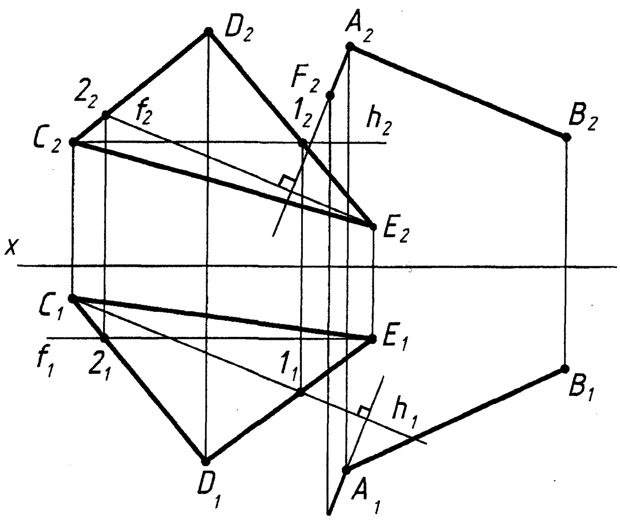


Рис. 1.28

Решение.

Достаточно из любой точки прямой **АВ** провести перпендикуляр к **ΔCDE** (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

На чертеже такой точкой взята точка **А**, и из нее проведен перпендикуляр к горизонтали **h** и фронтали **f** плоскости **ΔCDE.** Прямые **АВ** и **AF** определяют искомую плоскость.

Задача 1.23. Через точку **К** провести плоскость и задать следами, перпендикулярную к плоскости Π_1 и к плоскости, заданной **ΔАВС** (рис. 1.29).

Решение.

1. Строим горизонталь **h** (h_1, h_2) плоскости **ΔАВС**.
2. Через точку **К** проводим горизонтально-проецирующую плоскость **α.** Эта плоскость будет перпендикулярна к **h** плоскости **ΔАВС**, перпендикулярна и к самой плоскости **ΔАВС**.
3. На фронтальной плоскости проекций Π_2 фронтальный след плоскости α_2 будет перпендикулярен Π_1. Следовательно $\alpha \perp \Pi_1$.

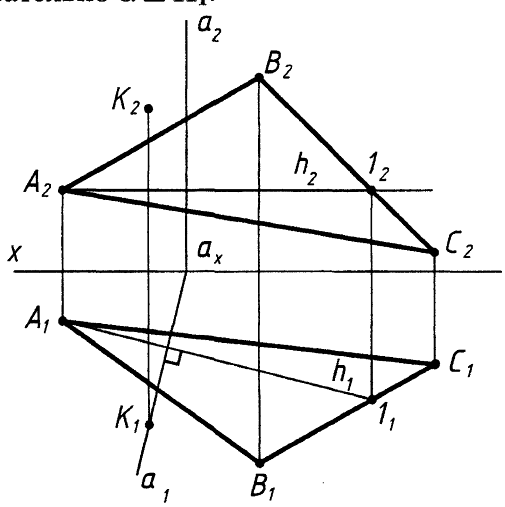


Рис. 1.29

1.3.6. Пересечение линии с поверхностью

Для графического решения задачи по определению точек пересечения прямой с поверхностью необходимо в общем случае выполнить следующие построения (рис. 1.30):

1. Заключить линию **а** во вспомогательную поверхность γ.

2. Определить линию *l* пересечения вспомогательной поверхности с заданной поверхностью.

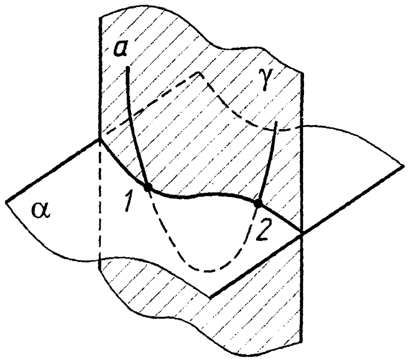


Рис. 1.30

3. Найти точки, в которых пересекаются полученная линия с заданной (точки 1 и 2).

Приведенный алгоритм является универсальным. С его помощью можно решать задачи с любым вариантом задания исходных данных.

Выделим следующие типы задач:

1. Пересечение кривой линии с поверхностью.
2. Пересечение прямой линии с поверхностью.

Пересечение кривой линии с поверхностью. При решении задач данного типа используется универсальный алгоритм, приведенный выше.

Задача 1.24. Определить точки пересечения кривой **a** с цилиндрической поверхностью α (рис. 1.31).

Решение.

1. Заключаем кривую **a** во фронтально-проецирующую поверхность γ.
2. Определяем линию пересечения поверхностей γ и α – $l = \gamma \cap \alpha$ и по фронтальной проекции (точки $\mathbf{1_2, 2_2, 3_2}$…) строим ее горизонтальную проекцию ($\mathbf{1_1, 2_1, 3_1}$…),
3. Отмечаем точки пересечения кривой $\mathbf{a_1}$ и l_1 – точки $\mathbf{K_1}$ и $\mathbf{M_1}$. Определяем их фронтальные проекции.

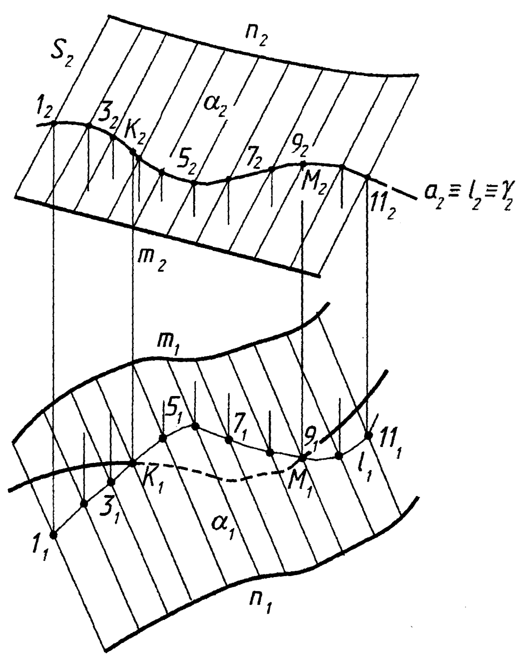


Рис. 1.31

Пересечение прямой линии с поверхностью. Чтобы получить решение, необходимо использовать наиболее простой способ определения линии пересечения *l*. Достигается это выбором положения вспомогательной секущей поверхности или переводом прямой **a** в частное положение. При определении точек пересечения прямой линии с поверхностью в качестве вспомогательной секущей поверхности γ следует брать плоскость частного или общего положения.

Проецирующая вспомогательная секущая плоскость γ. При проецирующем положении плоскости γ одна из проекций линии пересечения совпадает с проецирующим следом этой плоскости. Нахождение второй проекции линии сводится к определению недостающих проекций точек, принадлежащих поверхности α.

Задача 1.25. Определить точку пересечения прямой **а** с конической поверхностью (рис. 1.32).

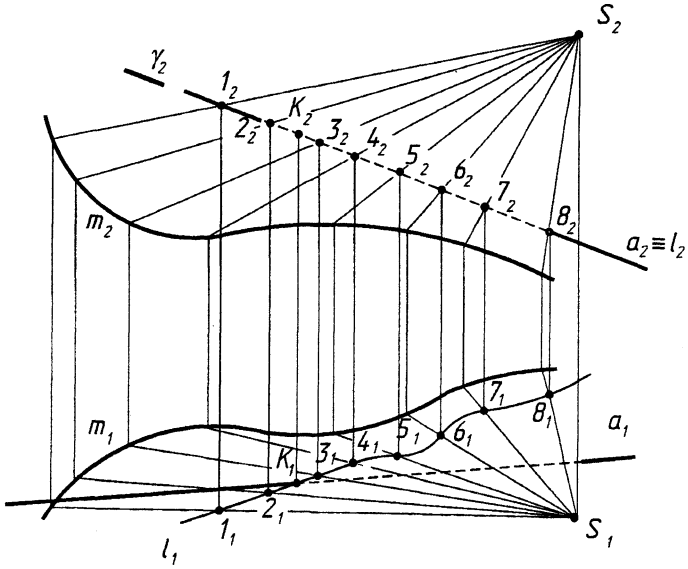


Рис. 1.32

Решение.

1. Заключаем прямую **а** во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость γ.
2. Фронтальная проекция l_2 линии пересечения l совпадает с фронтальным следом γ (γ_2). Строим горизонтальную проекцию l_1 линии пересечения l.
3. Определяем горизонтальную проекцию точки пересечения **К** – $K_1 = \gamma_1 \cap a_1$. Находим ее фронтальную проекцию K_2. Это и будет искомая точка пересечения.

Вспомогательная секущая плоскость γ общего положения. Применение вспомогательной проецирующей плоскости не всегда упрощает решение задачи. Возможны случаи, когда целесообразно применять плоскость общего положения.

Задача 1.26. Определить точки пересечения прямой **а** с поверхностью прямого кругового конуса Ω (рис. 1.33).

Решение.

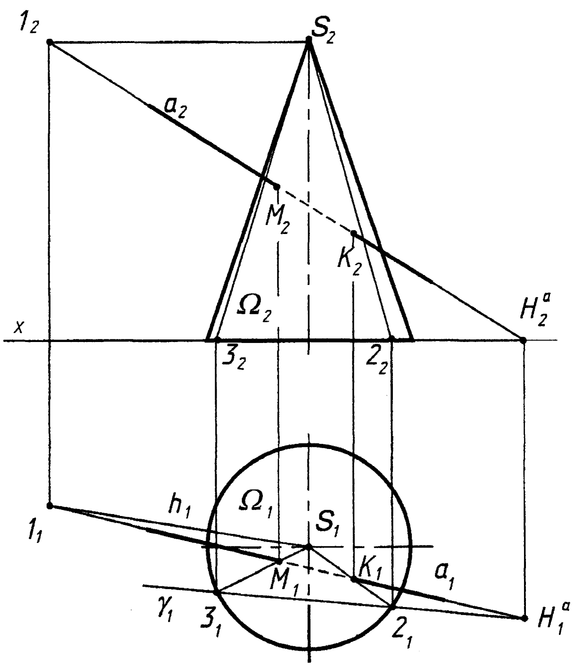


Рис. 1.33

1. Заключаем прямую **а** в плоскость γ, проходящую через вершину **S**. Плоскость γ задана пересекающимися прямыми **а** и **h**, при этом $S \in h$.
2. Определяем горизонтальный след γ_1. Для этого находим горизонтальный след прямой **а** (H^a) и через него проводим γ_1 параллельно горизонтальной проекции горизонтали h_1.
3. Плоскость γ пересекает основание конуса в точках 2_1 и 3_1, а конус – по образующим ($S_1 2_1$) и ($S_1 3_1$).
4. Точки **К** и **М** ($K = \alpha_1 \cap (S_1 2_1)$ и $M = \alpha_1 \cap (S_1 3_1)$) – горизонтальные проекции искомых точек пересечения.

По K_1 и M_1 строим проекции K_2 и M_2.

Перевод прямой линии в положение уровня. При пересечении сферы плоскостью в сечении получается окружность, которая проецируется на плоскости проекций, в общем случае, в виде эллипсов или прямой и эллипса (если секущая плоскость проецирующая).

В частном случае, когда секущая плоскость параллельна плоскости проекций, окружность проецируется на эту плоскость проекций без искажений. Поэтому для упрощения решения задачи прямую общего положения переводят в положение уровня и тогда при заключении прямой в проецирующую плоскость, параллельную плоскости проекций, окружность сечения проецируется без искажений.

Задача 1.27. Определить точки встречи прямой **AB** со сферой α (рис. 1.34).

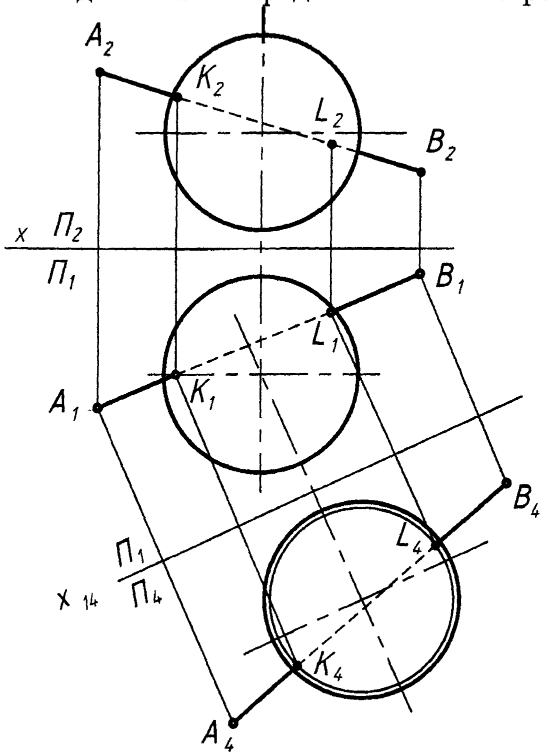


Рис. 1.34

Решение.

1. Способом замены плоскостей проекций прямую общего положения **AB** переводим в положение, параллельное плоскости проекций **Π_4**, т.е. вводим систему **X_{14} Π_1/Π_4** (**$\Pi_4 \perp \Pi_1$** и **$\Pi_4 // A_1B_1$**).

2. В новом положении прямая **AB** пересекает окружность радиуса **R** от сечения плоскостью γ в точках **K_4** и **L_4**. По ним находим проекции на **Π_1** и **Π_2**. Это и будут искомые точки.

Если прямая **a** при пересечении поверхности вращения проходит через ось **i** этой поверхности, то перевод прямой **a** в частное положение целесообразно осуществлять путем вращения вокруг оси **i**.

Задача 1.28. Определить точки пересечения прямой **a** с поверхностью вращения Ω (рис.1.35).

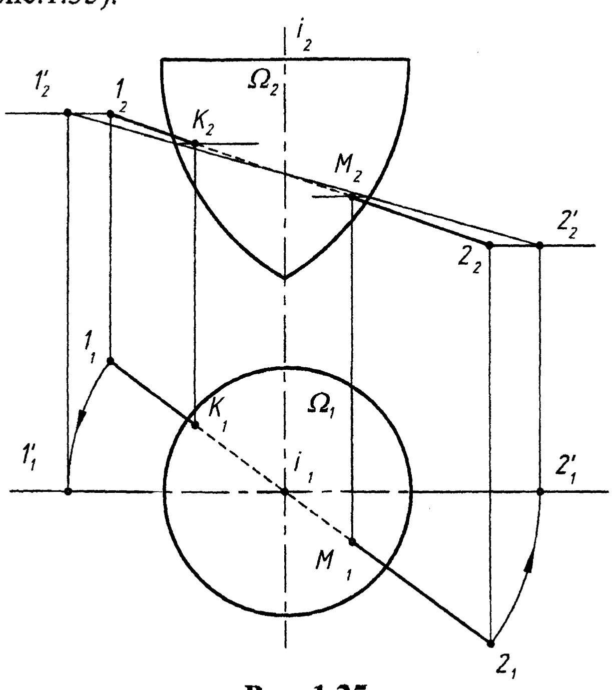


Рис. 1.35

Решение.

1. Заключаем прямую **a** в горизонтально-проецирующую плоскость γ. В сечении получается искаженное меридиональное сечение поверхности.

2. Поворачиваем прямую **a** и след плоскости γ до положения, параллельного **Π_2**. Сечение совпадает с главным меридианом поверхности, а прямая **a** – положение **$1'_2$, $2'_2$**.

3. В пересечении главного меридиана и прямой **$1'_2$, $2'_2$** получаем точки **K_2** и **M_2** – точки пересечения прямой **a** и поверхности вращения.

4. Находим горизонтальные и фронтальные проекции указанных точек.

1.3.7. Пересечение поверхностей плоскостью

Сечение поверхности плоскостью, в общем случае, представляет собой плоскую кривую, принадлежащую секущей плоскости.

Определение проекций линии сечения обычно начинают с построения опорных точек - точек, расположенных на крайних, очерковых образующих поверхности (точки, определяющие границы видимости проекций кривой), точек, удаленных на экстремальные расстояния от плоскости проекций. После этого определяют произвольные, случайные точки кривой сечения.

При нахождении линии пересечения плоскостей с той или иной поверхностью используют способ вспомогательных секущих плоскостей. Если применение указанного способа затруднено, то, учитывая то, что плоскость из общего положения можно перевести в частное, линию сечения всегда можно определить применяя способы преобразования чертежа.

1.3.8. Пересечение многогранников плоскостью

Проекциями сечения многогранников плоскостью, в общем случае, являются плоские многогранники, вершины которых принадлежат ребрам, а стороны - граням многогранника.

Поэтому задачу можно свести к многократному решению задачи по определению линии пересечения двух плоскостей - граней многогранника и секущей плоскости или к задаче по нахождению точки пересечения прямой (ребра) с плоскостью.

Задача 1.29. Определить линию пересечения трехгранной призмы плоскостью общего положения α (рис. 1.36).

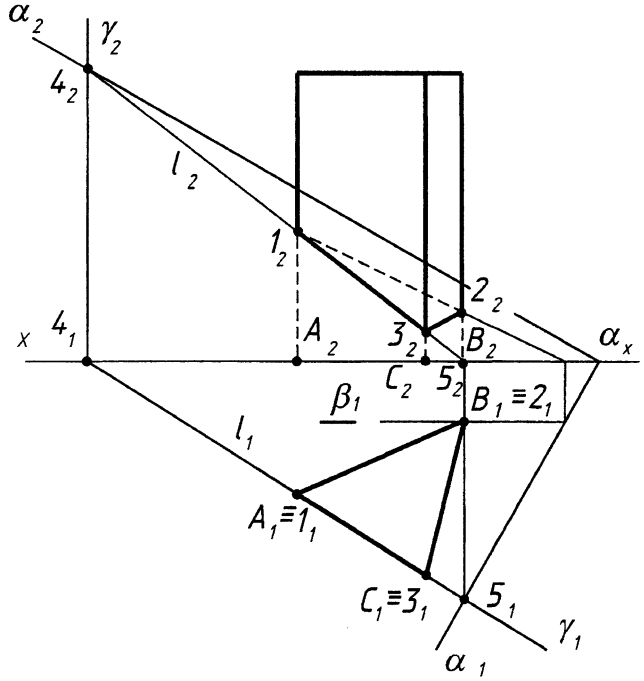


Рис. 1.36

Решение.

1. Заключаем ребро **B** в горизонтально-проецирующую плоскость β. Линия пересечения этой плоскости с плоскостью α представляет собой фронталь, фронтальная проекция которой в пересечении с фронтальной проекцией ребра **B** определяет фронтальную проекцию $\mathbf{2_2}$ – точки пересечения ребра с плоскостью α. Аналогично можно найти точки пересечения и других ребер с плоскостью α.

2. Через ребра **A** и **C** проводим горизонтально-проецирующую плоскость γ ($\gamma \perp \Pi_1$) и строим линию пересечения l этой плоскости с плоскостью α.

3. В пересечении линии l с ребрами **A** и **C** находим точки **1** и **3**, которые и принадлежат линии сечения.

4. Соединив найденные точки **1**, **2** и **3**, получим искомый треугольник сечения.

Задача 1.30. Построить линию пересечения поверхности призмы общего положения с плоскостью **α** (рис. 1.37).

Решение:

1. Заключаем фронтальную проекцию ребра **А** во фронтально-проецирующую плоскость **β** и находим точку **К** пересечения данного ребра с плоскостью **α**, т.е. решаем задачу на пересечение прямой с плоскостью.

2. Подобным образом находим точки пересечения **L** и **M** ребер **В** и **С** с заданной плоскостью.

3. Соединив найденные точки **К**, **L** и **M**, получим искомый треугольник сечения призмы плоскостью **α**.

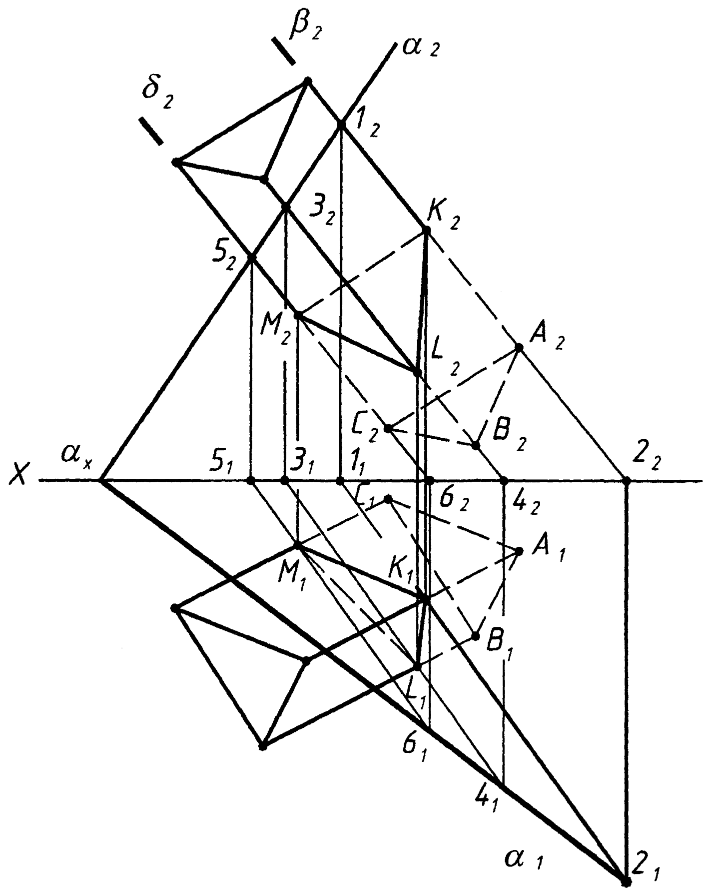


Рис. 1.37

Ниже рассмотрены различные варианты решения одной и той же задачи по определению линии пересечения поверхности пирамиды с плоскостью **α**.

Задача 1.31. Построить линию пересечения пирамиды **SABC** плоскостью общего положения **α** (рис. 1.38)

Решение.

I вариант – решение задачи способом вспомогательной секущей плоскости, проведенной через ребро:

1. Заключаем ребро **SC** во фронтально-проецирующую плоскость γ и находим линию пересечения этих плоскостей $l = \gamma \cap \alpha$.

2. Пересечение линии l (l_1) с ребром **SC** (S_1C_1) дает точку **К** (K_1) пересечения ребра **SC** с плоскостью **α**.

3. Подобным образом находится точка **L**.

4. Точки **M** и **N** находятся в пересечении горизонтального следа плоскости **α** с линией основания пирамиды.

5. Соединим полученные точки – это и будет искомое сечение **KLNM** пирамиды плоскостью **α**.

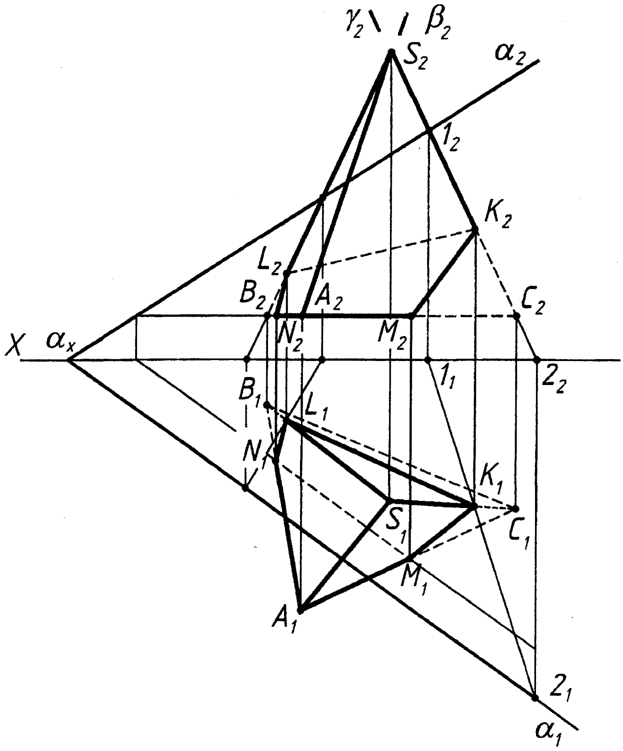


Рис. 1.38

II вариант – решение задачи способом замены плоскостей проекций (рис. 1.39):

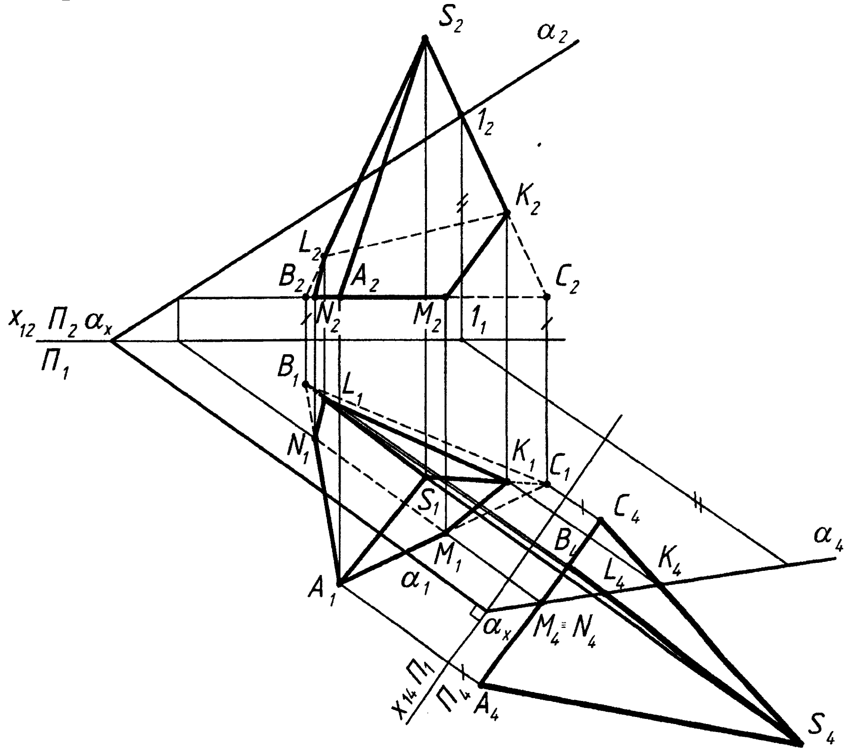


Рис. 1.39

1. Вводим новую систему плоскостей $\mathbf{x_{14}}$ ($\mathbf{П_4}$ / $\mathbf{П_1}$) и плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ переводим в проецирующее положение. При этом $\mathbf{x_{14}} \perp \boldsymbol{\alpha_1}$ ($\mathbf{П_4} \perp \mathbf{П_1}$).

2. На преобразованном эпюре видим, что плоскость пересекает основания пирамиды в точках **M** и **N** (**M_4** и **N_4**).

3. Проекции точек пересечения боковых ребер пирамиды с секущей плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$ находятся на пересечении проекций этих ребер на плоскости $\mathbf{П_4}$ со следом α_4.

4. По найденным проекциям вершин четырехугольника сечения строим их горизонтальные проекции, а затем и фронтальные.

5. Соединяя вершины между собой, получаем проекции всего четырехугольника сечения.

Поставить плоскость **α** в проецирующее положение можно и способом плоско-параллельного перемещения.

III вариант – решение задачи способом вспомогательного проецирования (рис. 1.40).

Решение.

1. За направление вспомогательного проецирования принято направление, параллельное фронтали плоскости **α**, а в качестве вспомогательной плоскости принята плоскость α_1.

2. Спроецируем вершину пирамиды на плоскость α_1. Соединив полученную вершину S_0 с точками A_1, B_1 и C_1, получим вспомогательную проекцию пирамиды.

3. При принятом направлении проецирования плоскость **α** проецируется на плоскость α_1 в виде прямой линии (след α_1), с которой совпадает вспомогательная проекция линии пересечения.

4. Отмечаем точки 1_0, 2_0 и 3_0 пересечения вспомогательных проекций ребер S_0A_1, S_0B_1 и S_0C_1 со следом плоскости α_1.

5. Обратным проецированием (по направлению фронтали) находим горизонтальные 1_1, 2_1 и 3_1 и фронтальные 1_2, 2_2 и 3_2 проекции точек пересечения ребер пирамиды с плоскостью.

6. Соединив указанные точки прямыми, получим треугольник сечения пирамиды плоскостью **α**.

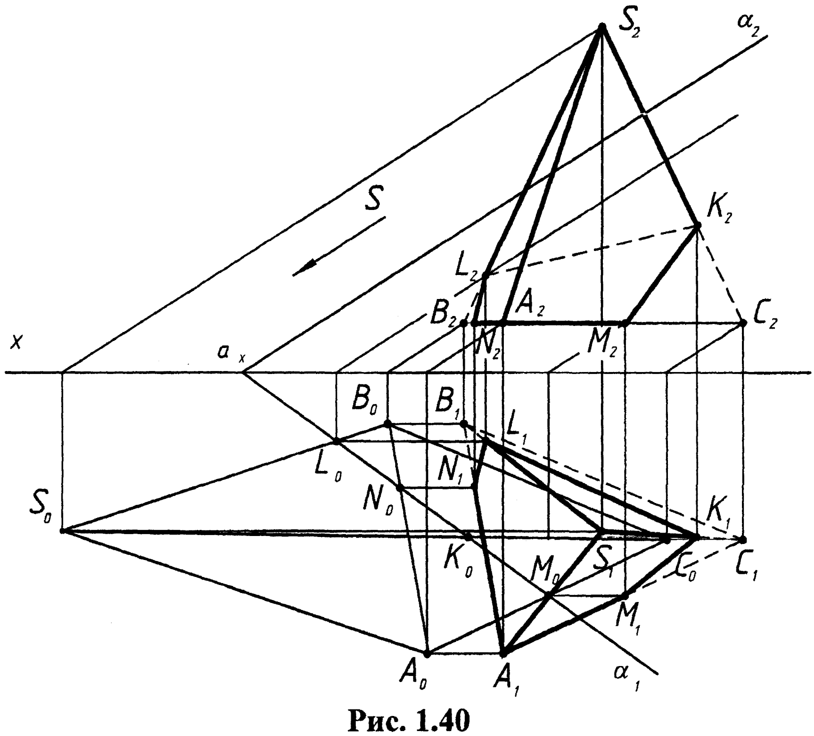


Рис. 1.40

1.3.9. Пересечение цилиндра плоскостью

Задача 1.32. Определить линию пересечения поверхности прямого кругового цилиндра с плоскостью **α** (рис. 1.41)

Решение. Секущая плоскость **α** наклонена к оси цилиндра, поэтому боковая поверхность цилиндра пересекается по эллипсу.

1. Находим высшую **A** и низшую **B** точки эллипса на фронтальной плоскости с помощью горизонтально-проецирующей плоскости $\beta \perp \Pi_1$, проходящей через ось цилиндра и пересекающей плоскость **α** по линии наибольшего ската **1 – 2**. Точки **A** и **B** находим в результате пересечения прямой **(1 – 2)** с поверхностью цилиндра.

2. Боковая поверхность цилиндра является горизонтально – проецирующей и поэтому проецируется на плоскость Π_1 в окружность.

1. Точки **A** и **B** лежат на боковой поверхности цилиндра, поэтому горизонтальные проекции этих точек должны лежать на окружности в пересечении с горизонтальной проек-

цией прямой **(1-2)**. По горизонтальным проекциям $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_1}$ находим их фронтальные проекции $\mathbf{A_2}$ и $\mathbf{B_2}$. Для нахождения малой оси эллипса через центр окружности проводим горизонталь **h**. В пересечении горизонтали и окружности цилиндра находим точки **C** ($\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$) и **D** ($\mathbf{D_1}$и $\mathbf{D_2}$) ограничивающие малую ось.

2. Для построения остальных точек эллипса выбираем на цилиндрической поверхности ряд образующих делением окружности на несколько равных частей.

3. Находим точки пересечения образующих с плоскостью **α**. Горизонтальные проекции точек пересечения образующих с плоскостью **α** совпадают с горизонтальными проекциями самих образующих. Наносим горизонтальные проекции точек пересечения образующих с плоскостью **α** (**2 – 6**).

4. Находим фронтальные проекции этих точек, проводя через них горизонтали в плоскости **α**.

5. Определим границы видимости фронтальной проекции кривой сечения. Точки, определяющие границу видимости, лежат на очерковых образующих. Отмечаем горизонтальные проекции этих точек $\mathbf{6_1}$ и $\mathbf{11_1}$ и находим фронтальные проекции $\mathbf{6_2}$ и $\mathbf{11_2}$, проводя через них в плоскости **α** фронтально-проецирующую плоскость **Q**.

6. Соединяем полученные точки плавной кривой.

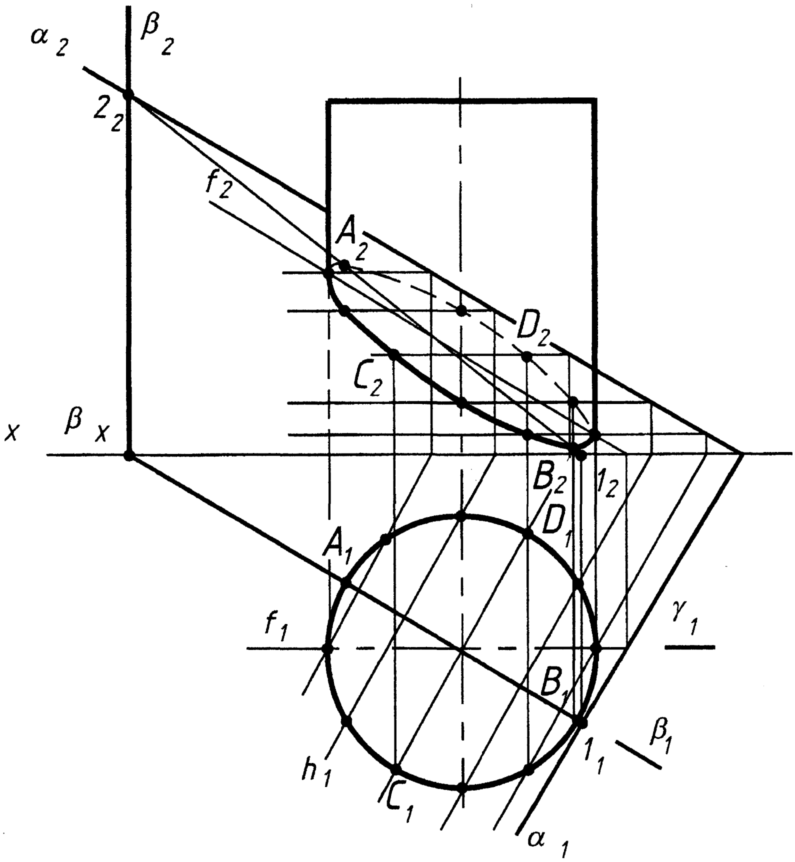


Рис. 1.41

1.3.10. Пересечение конуса плоскостью

Любая плоскость, проходящая через вершину прямого кругового конуса, пересекает его поверхность:

1. В точке, если угол φ наклона плоскости к основанию конуса меньше угла α наклона образующей к его основанию.

2. По одной образующей, если $\varphi = \alpha$, т.е. когда плоскость является касательной к поверхности конуса.

3. По двум образующим, если $\varphi > \alpha$ или $\varphi = 90^0$, т.е. когда плоскость проходит через ось конуса.

Плоскость, которая не проходит через вершину прямого кругового конуса, пересекает его поверхность:

1. По окружности, если плоскость перпендикулярна оси конуса, т.е. $\varphi = 0$.
2. По эллипсу, если $\varphi < \alpha$.
3. По параболе, если $\varphi = \alpha$, т.е. плоскость параллельна одной из образующих конуса.
4. По гиперболе, если $\varphi > \alpha$ или $\varphi = 90^0$, т.е. когда плоскость параллельна оси конуса.

Задача 1.33. Построить проекции линии пересечения поверхности конуса (рис. 1.42) плоскостью α.

Решение.

1. Плоскость α пересекает конус по эллипсу, фронтальная проекция которого совпадает со следом α_2 (линия A_2B_2).

2. Строим горизонтальную проекцию эллипса. Для этого проекцию A_2B_2 разбиваем на ряд отрезков, выделяя точки C_2, $Д_2$, E_2 и F_2.

3. Через выделенные точки проводим проекции окружностей или образующие, с помощью их находим горизонтальные проекции указанных точек (C_1, $Д_1$, E_1 и F_1).

4.Через полученные точки проводим плавную кривую – эллипс.

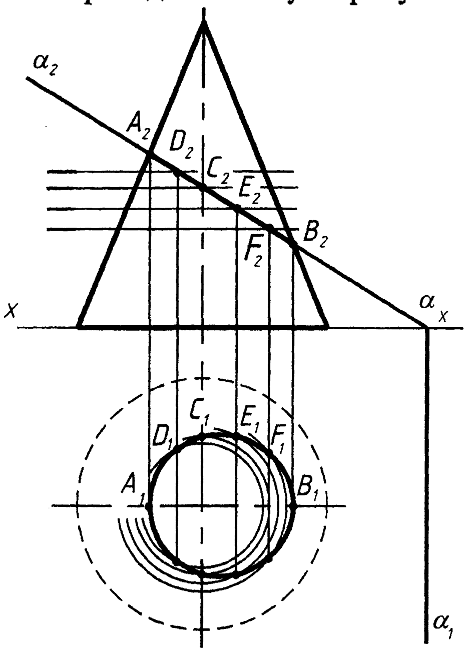


Рис. 1.42

Задача 1.34. Построить линию пересечения поверхности конуса плоскостью фронтального уровня α (рис. 1.43).

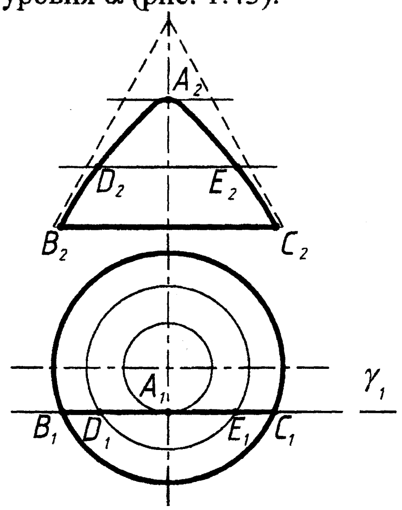


Рис. 1.43

Решение.

1. Плоскость α пересекает конус по гиперболе с вершиной в точке А (A_1, A_2), горизонтальная проекция которой совпадает с горизонтальным следом α_1 плоскости.

2. Фронтальную проекцию гиперболы строим по точкам A_1, B_1, C_1, $Д_1$ и E_1. Для этого через точки проводим вспомогательные окружности, находим их вертикальные проекции и на них находим точки A_2, B_2, C_2, $Д_2$ и E_2.

3.Через найденные точки проводим плавную кривую - гиперболу

Задача 1.35. Построить линию пересечения поверхности конуса фронтально-проецирующей плоскостью α (рис. 1.44).

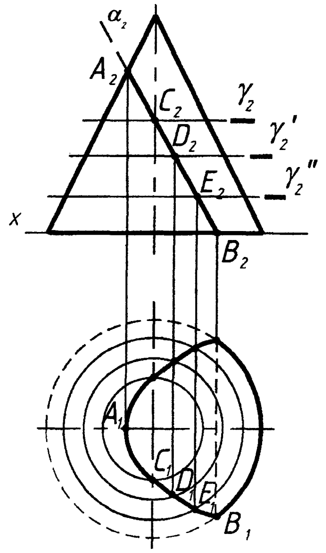


Рис. 1.44

Решение.

1. Плоскость α пересекает конус по параболе с вершиной в точке **A** (**A_1,A_2**), фронтальная проекция которой совпадает со следом плоскости α_2.

2. Горизонтальную проекцию линии пересечения строим по точкам **1_2…4_2**, через которые проводим горизонтальные плоскости и строим горизонтальные проекции окружностей, на которые сносим проекции точек.

3. Через найденные точки проводим плавную кривую – параболу.

Задача 1.36. Построить линию пересечения поверхности конуса плоскостью общего положения α (рис. 1.45).

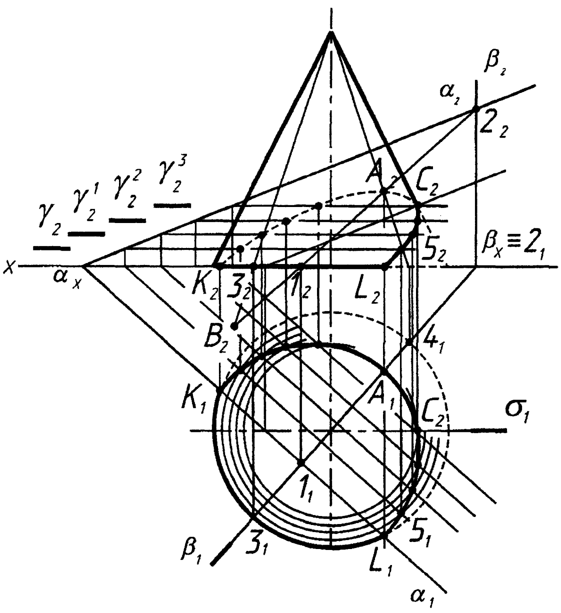


Рис. 1.45

Решение. Первый способ – без преобразования чертежа.

Плосость α пересекает основание конуса по прямой **KL**.

1. Находим высшую и низшую точки линии пересечения:

– проводим через ось конуса горизонтально-проецирующую плоскость $\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\beta_1 \perp \alpha_1}$).

– плоскость $\boldsymbol{\beta}$ пересекает поверхность конуса по образующим, а плоскость α – по прямой **1_1 2_1**.

– на пересечении линий пересечения плоскости $\boldsymbol{\beta}$ с плоскостью α и конусом, находим высшую **A** (**A_2**) и низшую **B** (**B_2**) точки линии пересечения.

2. Через малую ось конуса проводим плоскость σ_1 // Π_2. Плоскость σ пересекает конус по кратчайшим образующим, а плоскость α – по фронтали. На их пересечении получаем еще точку **C** (**C_1, C_2**) линии пересечения, которая определяет видимость кривой пересечения.

3. Находим промежуточные точки. Для этого вводим вспомогательные секущие плоскости γ, γ^1, γ^2 …параллельные плоскости проекций Π_1. Эти плоскости рассекают конус по окружности, а плоскость α – по горизонталям; на их пересечении получаем точки **5(5$_1$,5$_2$)**, **6 (6$_1$, 6$_2$)** и т.д.

4. Через одноименные проекции точек проводим плавные кривые – эллипсы.

Второй способ – замена плоскостей проекций.

Для упрощения решения задачи осуществим замену плоскости **Π_2** на новую плоскость **Π_4**. Плоскость **Π_4** выбираем так, чтобы по отношению к ней секущая плоскость α занимала бы проецирующее положение. Линия пересечения конуса плоскостью α совпадает с фронтальным следом α_4 (рис. 1.46).

Выполненные преобразования позволили свести решение задачи по построению горизонтальной проекции эллипса к рассмотренному случаю в задаче 1.33.

Для построения фронтальной проекции эллипса сечения, кроме точек **A** и **B** на вспомогательной проекции взяты точки **D**, **C**, **B**... Горизонтальные и фронтальные проекции этих точек определены с помощью вспомогательных секущих плоскостей $\gamma, \gamma^1, \gamma^2$.... С помощью плоскости фронтального уровня σ находится граница видимости фронтальной проекции сечения.

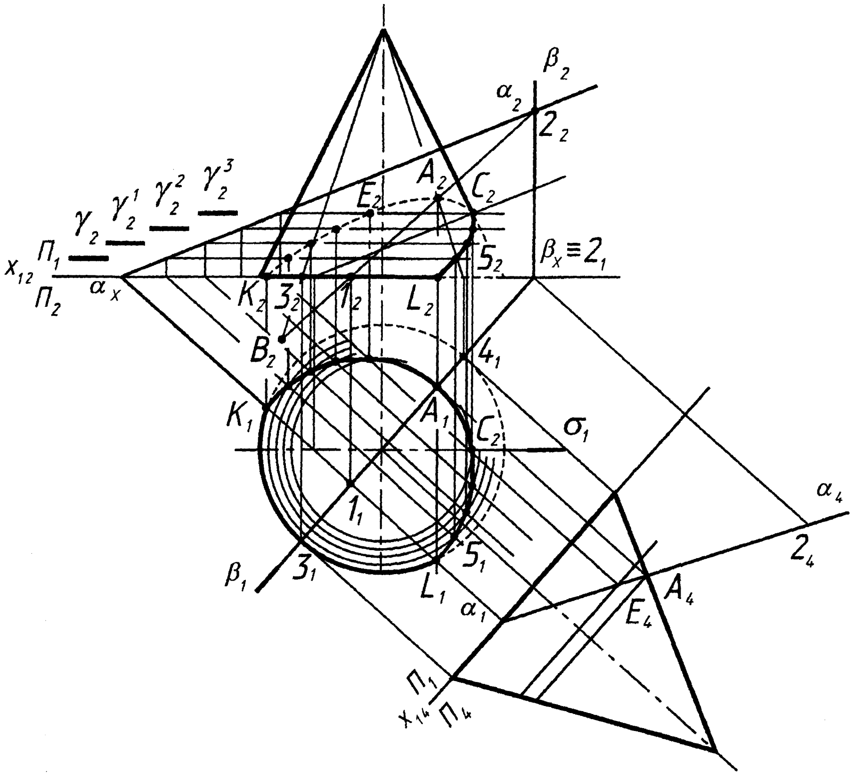


Рис. 1.46

1.3.11. Пересечение сферы плоскостью

Сферическую поверхность плоскость всегда пересекает по окружности. Если плоскость сечения общего положения, то окружность на плоскости проекций проецируется в виде эллипсов.

Задача 1.37. Построить линию сечения шара (рис. 1.47) плоскостью частного положения α.

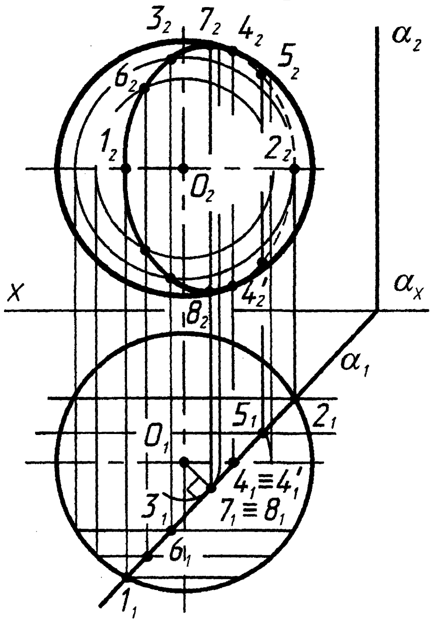


Рис. 1.47

Решение.

1. Плоскость α пересекает сферу по окружности, горизонтальная проекция (1_1, 2_1) которой совпадает с горизонтальным следом α_1 плоскости.

2. Фронтальную проекцию окружности – эллипс – строим по главным его осям.

Большой осью является фронтальная проекция (7_2 8_2) диаметра, расположенного перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций Π_1, а малой осью – фронтальная проекция (1_2 2_2) диаметра, расположенного параллельно горизонтальной плоскости проекций Π_1.

3. Промежуточные точки строим с помощью окружностей, проходящих через горизонтальные проекции соответствующих точек (например, точка **3**).

4.Видимость участков эллипса на фронтальной проекции определяем с помощью точек **4** и **4'**, расположенных на главном меридиане.

Задача 1.38. Построить линию пересечения поверхности шара плоскостью общего положения α (рис. 1.48).

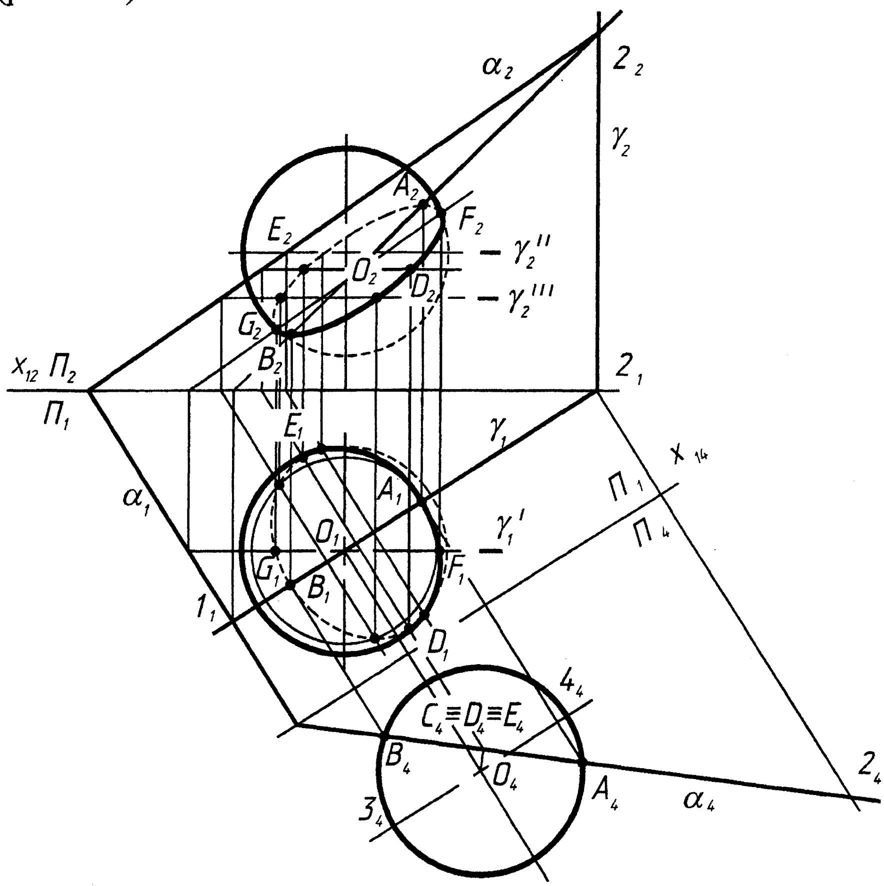


Рис. 1.48

Решение.

1. В сечении получается окружность, которая на плоскости проекций проецируется в виде эллипсов.

Определяем опорные точки – высшую и низшую точки эллипса. Проводим через центр сферы **O** вспомогательную секущую горизонтально-проецирующую плоскость γ ($\gamma_1 \perp \alpha_1$). Точки **A** и **B** принадлежат линии пересечения плоскостей γ и α ($\gamma \cap \alpha = 1, 2$). Для их определения применяем способ замены плоскостей.

Перейдем от системы Π_1 / Π_2 к Π_1 / Π_4. Ось x_{14} проводится перпендикулярно α_1.

По отношению к плоскости Π_4 плоскость α занимает проецирующее положение. Поэтому точки A_4 и B_4, в которых след α_4 пересекает новую проекцию сферы, будут искомыми.

2. Обратным построением определяем положение горизонтальных A_1, B_1 и фронтальных A_2, B_2 проекций искомых точек.

3. A_1B_1 является малой осью горизонтальной проекции эллипса. Для определения большой оси эллипса D_1E_1 достаточно из вспомогательного центра сферы O_4 провести прямую перпендикулярную отрезку A_4B_4. Точка C_4 пересечения перпендикуляра и отрезка A_4B_4 является центром эллипса, через который пройдет большая ось **DE**.

4. **DE** принадлежит горизонтали плоскости α. Для определения точек **D** и **E** вводим секущую вспомогательную горизонтальную плоскость $\sigma \in$ **C**. Эта плоскость пересекает сферу по окружности **3 - 4**, которая проецируется на Π_1 без искажения в окружность радиуса C_43_4, проведенную из центра C_1.

5. Для нахождения точек **F** и **G**, лежащих на границе видимости, вводим плоскость γ' ($\gamma' \in O_1) \wedge (\gamma' \parallel \Pi_2)$.

Эта плоскость пересекает сферу по окружности очерка сферы, а плоскость α – по фронтали. Пересечение фронтали с очерком сферы указывает положение точек F_2 и G_2.

6. Находим точки **E** и **D**, указывающие границу видимости горизонтальной проекции сечения, проводим плоскость $\gamma'' \in O_2$ ($\gamma''//\Pi_1$). Плоскость γ'' пересекает сферу по окружности, которая на Π_1 проецируется в горизонтальную проекцию очерка сферы, а плоскость - по горизонтали **h**. В пересечение **h** и окружности получаем точки E_1 и D_1.

7. Определение произвольных точек линии сечения производим с помощью вспомогательной секущей плоскости. На рис. 1.44 показано построение точек **L** и **K** с помощью горизонтальной плоскости γ_5. Плоскость α пересекается по горизонтали, а сфера - по окружности. В пересечении окружности и горизонтали получаем точки **K** и **L**. Подобным образом строятся и остальные промежуточные точки.

1.3.12. Взаимное пересечение поверхностей

Линия, общая для двух пересекающихся поверхностей, называется линией пересечения. Чтобы построить линию пересечения двух поверхностей, следует найти ряд точек, принадлежащих одновременно двум поверхностям, после чего эти точки соединить последовательно между собой соответствующим образом.

Общим способом построения линии пересечения двух поверхностей является нахождение точек этой линии при помощи некоторых секущих поверхностей – посредников: плоских или кривых. Каждая из таких поверхностей пересекает данные поверхности по некоторым линиям, точки пересечения которых и являются точками искомой линии.

Применяя указанный общий способ для построения линии пресечения двух поверхностей, можно использовать:

– вспомогательные секущие плоскости,

– вспомогательные секущие кривые поверхности: сферические, цилиндрические, конические.

Изложенный общий способ не исключает применения других способов. Так, например, если одна из пересекающихся поверхностей линейчатая, то точки пересечения находят с помощью образующих линейчатой поверхности, которые пересекают другую поверхность, т.е. находят точку пересечения прямой линии с поверхностью (плоскостью). Это относится и к случаю пересечения кривой поверхности гранной. Здесь роль образующих играют ребра поверхности.

Проекции линии пересечения получают в пределах общей части проекций пересекающихся поверхностей. Построение линии пересечения начинают с точек, которые называют характерными.

1.3.13. Построение линии пересечения без введения вспомогательной поверхности

Построение линии пересечения двух поверхностей без применения вспомогательных поверхностей возможно тогда, когда одна или обе поверхности являются проецирующими. Тогда одна из проекций линии пересечения совпадает с проекцией поверхности, а недостающая проекция линии пересечения строится по точкам. Здесь возможны два случая:

– проецирующими являются обе пересекающиеся поверхности;

– проецирующей является одна из поверхностей.

Рассмотрим оба случая на конкретных примерах.

Задача 1.39. Обе пересекающиеся поверхности – проецирующие. Построить линию пересечения двух цилиндров (рис. 1.49).

Решение. Обе цилиндрические поверхности являются проецирующими. Поэтому проекции линии пересечения совпадают с горизонтальной проекцией вертикального цилиндра (окружность) и проекцией горизонтального цилиндра. Остается найти точки, по которым можно построить проекцию искомой линии на плоскости Π_2 (гиперболу с вершиной в точке C_2).

Очевидно, проекция C_2 определяется непосредственно по проекции C_3, а проекция промежуточной точки, например, K_2 определяется как точка пересечения линий связи, проведенных из точек K_1, K_2 и K_3 координированных между собой расстоянием l от осей горизонтальной и фронтальной проекций.

Подобным образом определяются недостающие проекции и других точек.

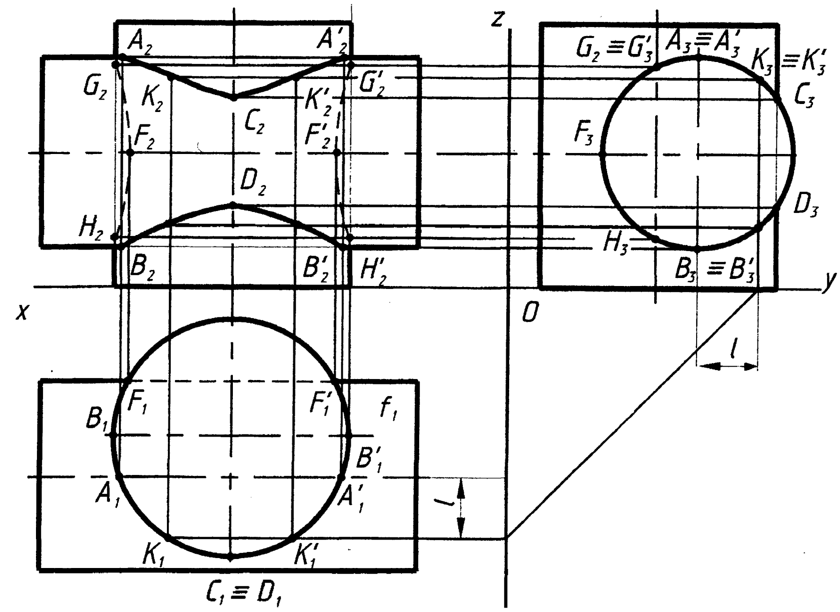


Рис. 1.49

Задача 1.40. Одна из пересекающихся поверхностей – проецирующая. Построить линию пресечения конической и цилиндрической поверхностей (рис. 1.50).

Решение.

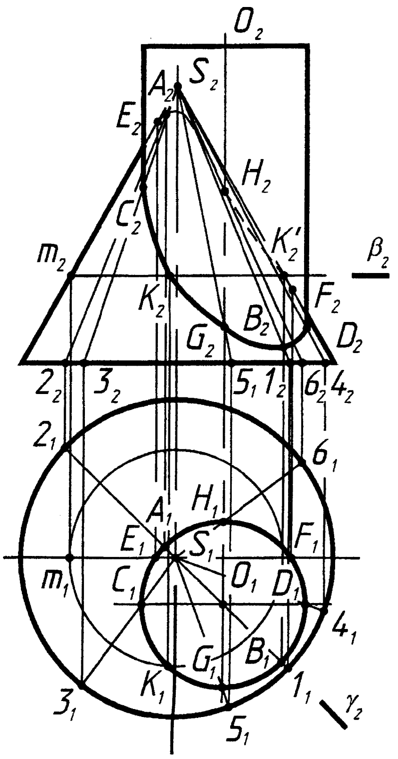


Рис. 1.50

1. Цилиндрическая поверхность является проецирующей, а поэтому на горизонтальную плоскость проекций Π_1 проецируется в виде окружности. Так как линия пресечения совпадает с поверхностью, то она совпадает с горизонтальной проекцией цилиндрической поверхности. Построение линии пересечения начинаем с определения опорных точек. Такими точками будут верхняя и нижняя точки линии пересечения, лежащие в плоскости γ, проведенной через оси цилиндра и конуса. Их горизонтальные проекции – точки A_1 и B_1.

2.Точки C_1 и D_1 – горизонтальные проекции тех точек, которые являются границами видимости кривой на фронтальной плоскости проекций Π_2.

3. Третья пара характерных точек – точки **E** и **F**, расположенные на образующих конуса, которые являются очерковыми на фронтальной плоскости проекций. Их горизонтальные проекции E_1 и F_1 – точки пересечения очерковых образующих (совпадают с горизонтальной осью основания конуса) и проекции цилиндрической поверхности – окружности.

Нахождение фронтальных проекций характерных точек и промежуточных осуществляется с помощью образующих конуса: из вершины S_1 проводится через точку линия, строится ее фронтальная проекция и по линии связи находится фронтальная проекция необходимой точки.

Задача 1.41. Построить линию пересечения двух цилиндров, один из которых является проецирующим (рис. 1.51). Оси цилиндров между собой не пересекаются.

Решение. Точки для построения фронтальных проекций линий пересечения наклонного и вертикального цилиндров находим исходя из горизонтальных проекций этих цилиндров. Надо только простроить фронтальные проекции соответствующих образующих наклонного цилиндра.

Из точек, отмеченных на рисунке, к числу характерных относятся точки 1_2 и 5_2 – наиболее близкие к оси вертикального цилиндра на видимой и невидимой частях фронтальной проекции правой линии, 3_2 и $3'_2$ наиболее и наименее удаленных от плоскости Π_1 на очерковых образующих наклонного цилиндра, 4_2 и $4'_2$ – отделяющие проекцию очерковой образующей вертикального цилиндра от проекции кривой. В качестве посредников чаще всего принимают плоскости частного положения – проецирующие. В этом случае в сечении поверхностей получают линии или окружности, которые проецируются без искажения.

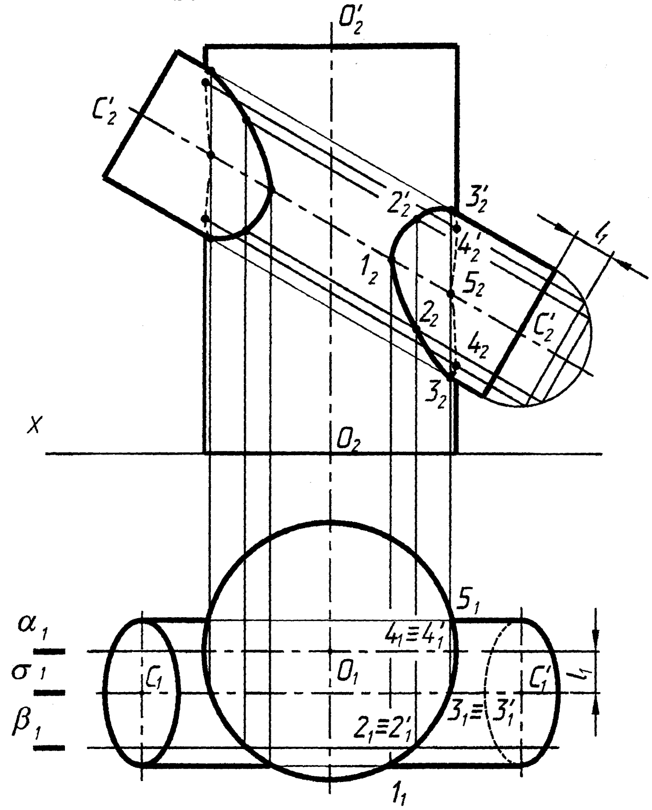


Рис. 1.51

Задача 1.42. Построить линию пресечения полукольца (образующая – окружность радиуса **r**, ось – прямая $O_1\ O'_1$,) с цилиндром (ось – прямая $O'_2\ O''_2$) – (рис. 1.52).

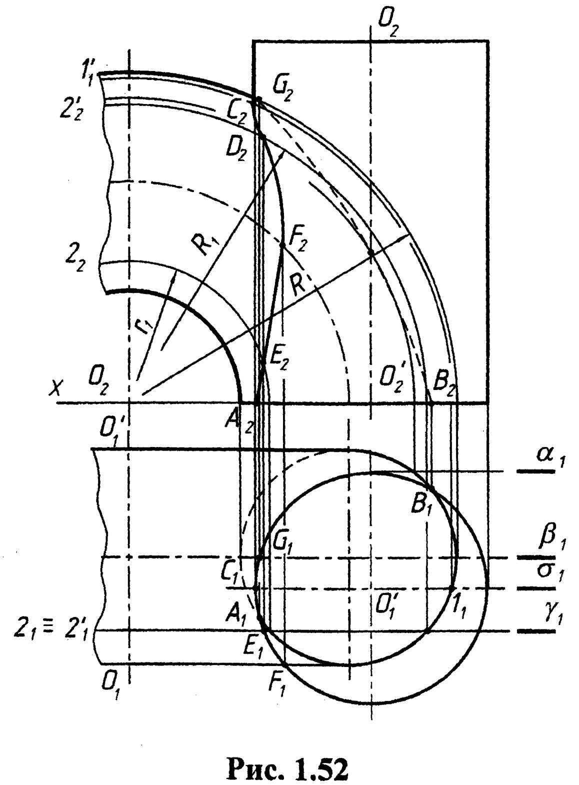


Рис. 1.52

Решение. Горизонтальная проекция искомой линии – дуга окружности F_1-A_1-B_1. Фронтальные проекции характерных точек A_2, B_2, F_2 и G_2 находим сразу, а для построения фронтальных проекций точки **C** и всех остальных точек искомой линии наносим на поверхность кольца ряд параллелей. Эти параллели – полуокружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси поверхности. O_1-O'_1. Горизонтальные проекции параллелей – отрезки прямых линий, фронтальные проекции – полуокружности с центром в точке O_2.

На рис. 1.48 показан пример построения точек **C** (C_1, C_2), **D** (D_1, D_2), и **E** (E_1, E_2). Проводим параллели 1_1 и 2_1.

Горизонтальные проекции параллелей 2_1 и $2'_1$ совпадают. Параллель 2_1 – окружность радиуса r_1, параллель $2'_1$- окружность радиуса R_1. Строим фронтальные проекции этих окружностей и находим на них точки C_2, D_2, E_2. Найдя фронтальные проекции еще ряда точек, соединяем их плавной кривой. Часть этой кривой от точки C_2 через D_2, F_2, E_2 до точки A_2 – видимая, остальная – невидимая.

1.3.14. Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных секущих плоскостей

Способ вспомогательных секущих плоскостей частного положения. Способом вспомогательных секущих плоскостей можно решать любую задачу на взаимное пересечение поверхностей. От выбора вспомогательной секущей плоскости и ее положения в пространстве зависит рациональность и простота решения задачи. В качестве вспомогательных плоскостей – посредников необходимо выбирать такие, которые пересекали бы заданные поверхности Σ и Ω (рис. 1.53) по наиболее простым для построения линиям – прямым или окружностям. Поэтому в качестве посредников чаще всего принимают плоскости частного положения – проецирующие. В этом случае в сечении поверхностей получают линии или окружности, которые проецируются без искажения.

На рис. 1.53 поверхности Σ и Ω пересекаются некоторой плоскостью θ. Эта вспомогательная плоскость пересекает поверхности Σ по окружности **n**, а Ω – по окружности **m**. Точки **K** и ***L*** являются общими для обоих поверхностей и, следовательно, принадлежат линии их пересечения. Повторяя такой прием, получим ряд точек искомой линии.

Плоскость общего положения используется для построения линии пересечения пирамидальных и призматических поверхностей, когда основания этих поверхностей расположены в одной плоскости.

Итак, при построении линии пересечения двух поверхностей способом вспомогательных секущих плоскостей используют следующий алгоритм:

1. Вводят соответствующий посредник – плоскость (рис. 1.53). Посредник выбирают так, чтобы в пересечении с поверхностями получились простейшие для построения линии ($\Sigma \cap \theta$ и $\Omega \cap \theta$).
2. Строят линии пересечения данных поверхностей посредником, каждую в отдельности ($\mathbf{n} = \Sigma \cap \theta$, $\mathbf{m} = \Omega \cap \theta$).
3. Определяют точки пересечения полученных линий между собой ($\mathbf{m} \cap \mathbf{n} = \mathbf{K}/\mathbf{L}$). Полученные точки принадлежат искомой линии пересечения поверхностей.
4. Повторив построения с несколькими посредниками и, соединив последовательно найденные точки, получим искомую линию пересечения поверхностей.
5. Определяет видимость участков линии пересечения поверхностей.

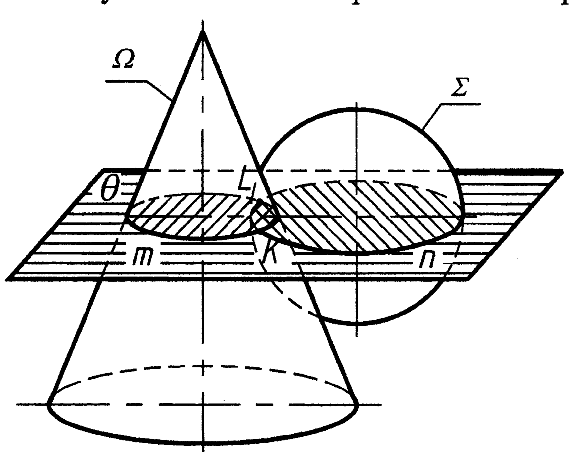


Рис. 1.53

Применение приведенного алгоритма рассмотрим на конкретных примерах.

Задача 1.43. Построить линию пересечения призмы и полусферы (рис. 1.54).

Решение.

1. Горизонтальная проекция линии пересечения в данном случае известна, т. к. она совпадает с горизонтальной проекцией боковой поверхности призмы. Это значительно упрощает построения. Они сводятся к нахождению фронтальных проекций точек, принадлежащих поверхности сферы, по их горизонтальным проекциям.

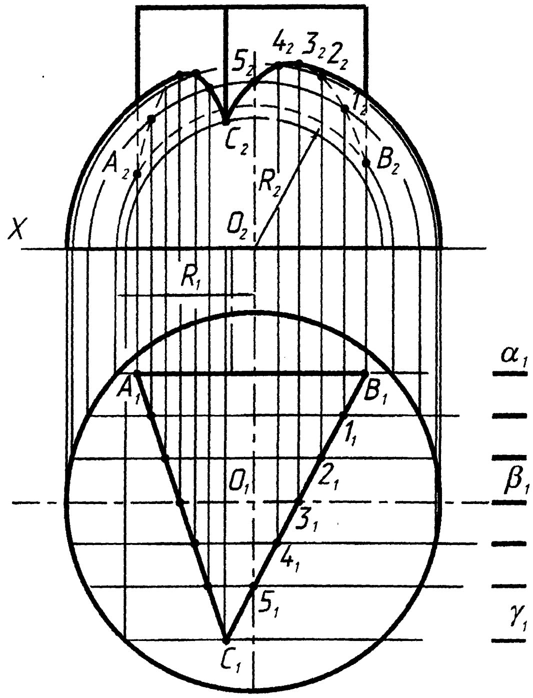


Рис. 1.54

2. Через горизонтальные проекции точек линии пересечения, например, A_1 и B_1 проводим вспомогательную горизонтально проецирующую секущую плоскость α.

3. Плоскость α рассекает полусферу по окружности радиуса **R**, а призму – по ребрам **A** и **B**.

4. На фронтальной проекции в пересечении полуокружности и ребер получаем точки A_2 и B_2, принадлежащие искомой линии.

5. Между точками A_2 и B_2 линией пересечения будет полуокружность радиуса **R**.

6. Для построения остальных точек повторяем указанные операции (точки **1, 2, 4, 5**) являются верхними точками линии пересечения.

7. Границами видимости отрезков линии пересечения будут точки 3_1 и $3'_1$. Для их построения на горизонтальной проекций вводим вспомогательную плоскость фронтального уровня β, которая рассекает полусферу по главному меридиану, а призму – по прямым линиям **3** и **3'**. В пересечении этих линий на фронтальной проекции находим точки 3_2 и $3'_2$.

Задача 1.44. Построить линию пересечения сферы с конусом (рис. 1.55).

Решение.

1. Для определения высшей **A** (A_1, A_2) и низшей **B** (B_1, B_2) точек кривой пересечения вводим горизонтально-проецирующую плоскость β, проходящую через ось конуса и центр сферы. Эта плоскость пересекает коническую поверхность по образующей **S1** ($S_1 1_1$, $S_2 1_2$), а сферическую – по окружности радиуса, равного радиусу сферы **r**. Искомые точки лежат на пересечении этих линий.

2. Для нахождения проекций A_1, A_2 и B_1, B_2 поворачиваем плоскость β вокруг оси конуса до положения, параллельного плоскости проекций Π_2.

3. Строим фронтальные проекции окружности пересечения сферической поверхности с плоскостью β и образующей $S_2 1_2$ в их новом положении.

4. Находим точки A'_2 и B'_2 на пересечении $S_2 1'_2$ с окружностью, проведенной из центра O'_2, а по ним точки A_2 и B_2 на $S_2 1_2$.

5. Для определения границ видимости кривой на горизонтальной плоскости проекций – точек E_1, E_2 и D_1, D_2 – используем вспомогательную плоскость γ, проходящую через центр сферы и пересекающую сферу по экватору, а конус – по окружности радиуса **R**.

Находим точки E_1 и D_1 на пересечении горизонтальных проекций этих окружностей, а по ним E_2 и D_2 на следе плоскости γ_2.

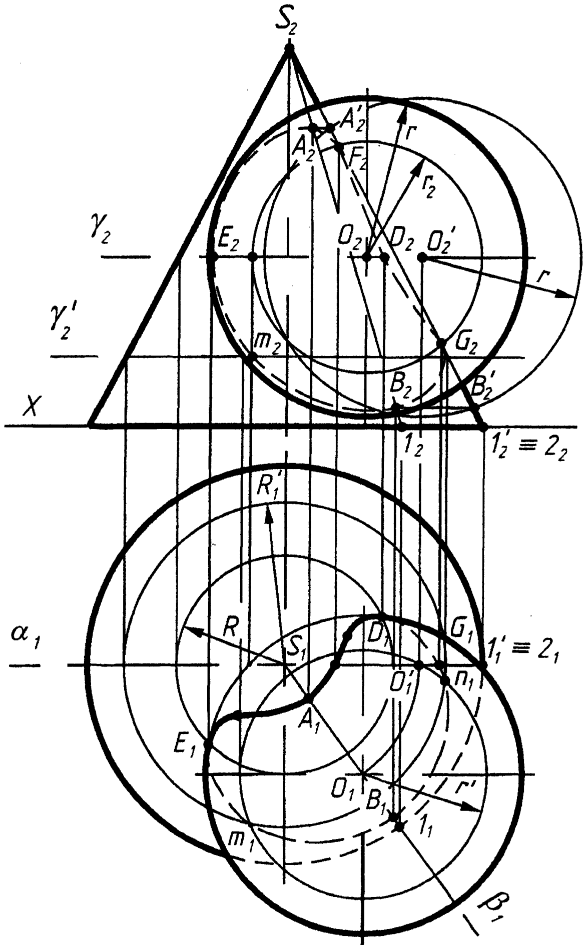


Рис 1. 55

Все точки искомой кривой, расположенные на сфере выше плоскости γ, видимы на горизонтальной плоскости проекций.

6. Проекции точек $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ и $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$, лежащих на образующей $\mathbf{S_1 2_1}$ конуса, строим с помощью плоскости α, пересекающей сферическую поверхность по окружности радиуса $\mathbf{r_2}$.

7. Промежуточные точки кривой находим вводя вспомогательные плоскости, перпендикулярные к оси конуса. Они пересекают обе поверхности по окружностям. На рис. 1.54 показано построение точек $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$ и $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$ с помощью плоскости γ' (рассекает сферу по окружности радиуса $\mathbf{r'}$, а конус – по окружности радиуса $\mathbf{R_1}$).

Задача 1.45. Построить линию пересечения поверхности кольца с поверхностью усеченного конуса (рис. 1.56).

Решение.

1. Оси кольцевой и конической поверхностей взаимно параллельны. Вводим вспомогательные плоскости, перпендикулярные осям поверхностей. Они пересекают обе поверхности по окружностям, которые проецируются на фронтальную плоскость проекций без искажения. На их пересечении получаем точки искомой кривой.

2. Характерные точки кривой **A** ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$), **A′** ($\mathbf{A'_1}$, $\mathbf{A'_2}$), **C** ($\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$), **E** ($\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$), **D** ($\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$) и **F** ($\mathbf{F_1}$ $\mathbf{F_2}$) находим с помощью соответственно плоскостей ω, α и α', а точки **G** ($\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$) и **B** ($\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$) - с помощью профильной плоскости γ. С ее помощью находим $\mathbf{G_3}$ и $\mathbf{B_3}$, а по ним $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{B_2}$.

3. На рисунке показано построение промежуточных точек кривой **1**…**8** с помощью плоскостей $\boldsymbol{\beta_1}$ и $\boldsymbol{\beta'_1}$.

4. На горизонтальной плоскости проекций видима та часть кривой, которая расположена на конусе выше плоскости σ, а на фронтальной плоскости – часть кривой, находящейся на кольцевой поверхности перед плоскостью ω.

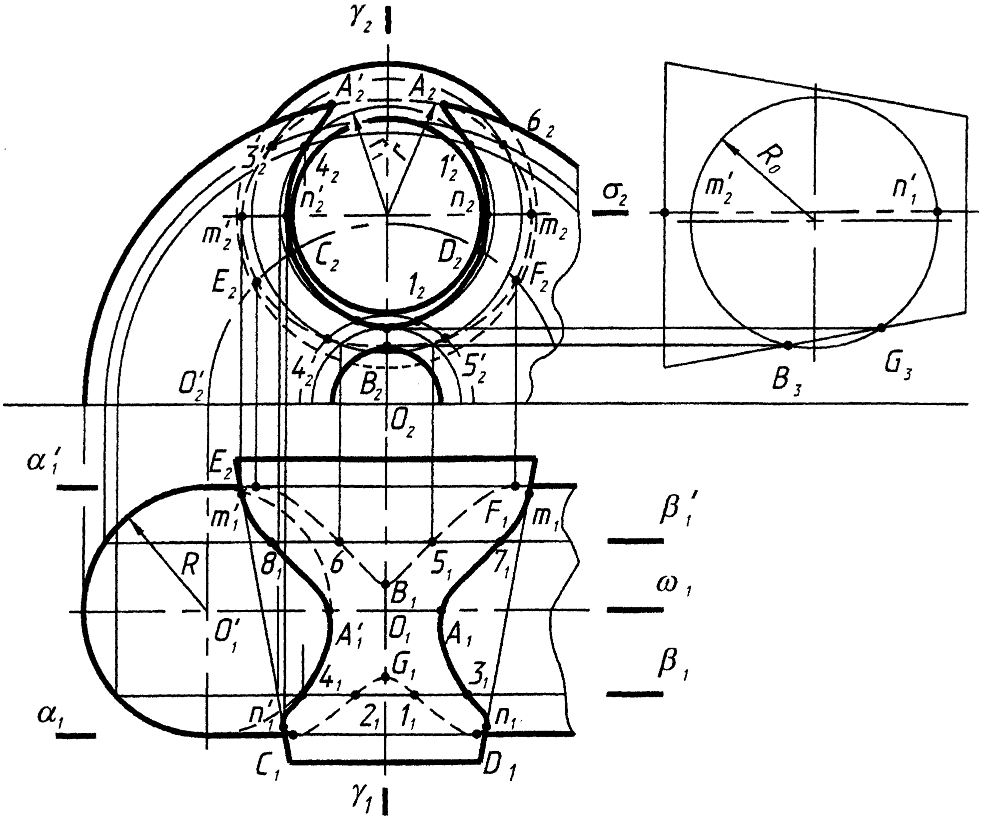


Рис 1.56

Задача 1.46. Построить линию пересечения двух цилиндров (рис. 1.57).

Решение.

1. Вводим вспомогательную плоскость **α**, параллельную плоскости Π_1 и пересекающую поверхность вертикального цилиндра по окружности, а поверхность горизонтального цилиндра – по образующим, на их пересечении получаем точки **1** и **2**.

2. Аналогично находим еще ряд точек. Соединив эти точки кривой линией, получим искомую линию пересечения.

Линию пересечения заданных поверхностей можно построить и с помощью плоскостей, параллельных плоскости Π_2.

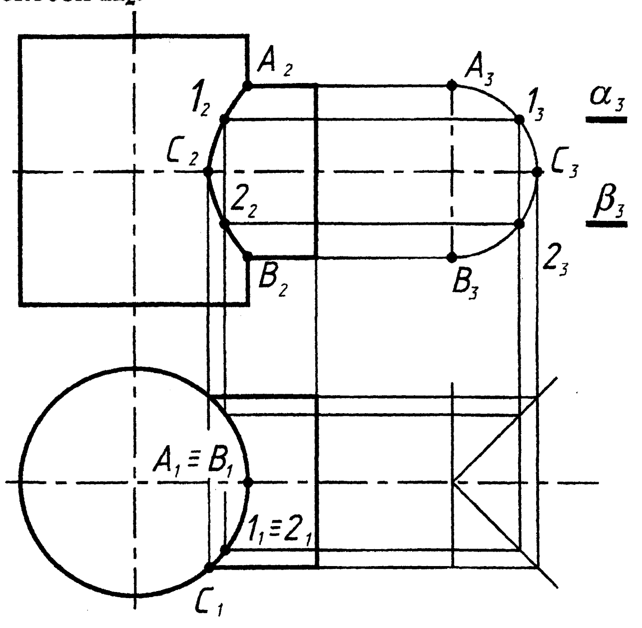


Рис. 1.57

1.3.15. Построение линии пересечения поверхностей с помощью вспомогательных секущих плоскостей общего положения

Данный способ применяют при построении линии пересечения конических (пирамидальных) и цилиндрических (призматических) поверхностей общего вида. Особенно целесообразно применение этого способа, когда основания (направляющие) обеих поверхностей находятся в одной плоскости.

При построении линии пересечения используется множество (пучок) плоскостей, проходящих через общую прямую, которая может быть собственной или несобственной прямой в зависимости от формы пересекающихся поверхностей.

Пучок плоскостей, проходящих через собственную прямую. Этот способ применяется при построении линий пересечения:

а) двух конических поверхностей;

б) конической и цилиндрической поверхностей;

в) конической поверхности с поверхностью пирамиды или призмы.

Пересечение двух конусов. Вспомогательные секущие плоскости целесообразно проводить через вершины конусов, так как такие плоскости будут пересекать конусы по их образующим. Чтобы провести такие плоскости, следует вершины конусов соединить между собой линией и продлить до пересечения с плоскостью проекций, на которой расположены основания конусов. Тогда любая плоскость, проведенная через общую линию, будет одновременно проходить и через вершины конусов.

Задача 1.47. Построить линию пересечения двух конических поверхностей **Ω** и **Ω′** (рис. 1.58).

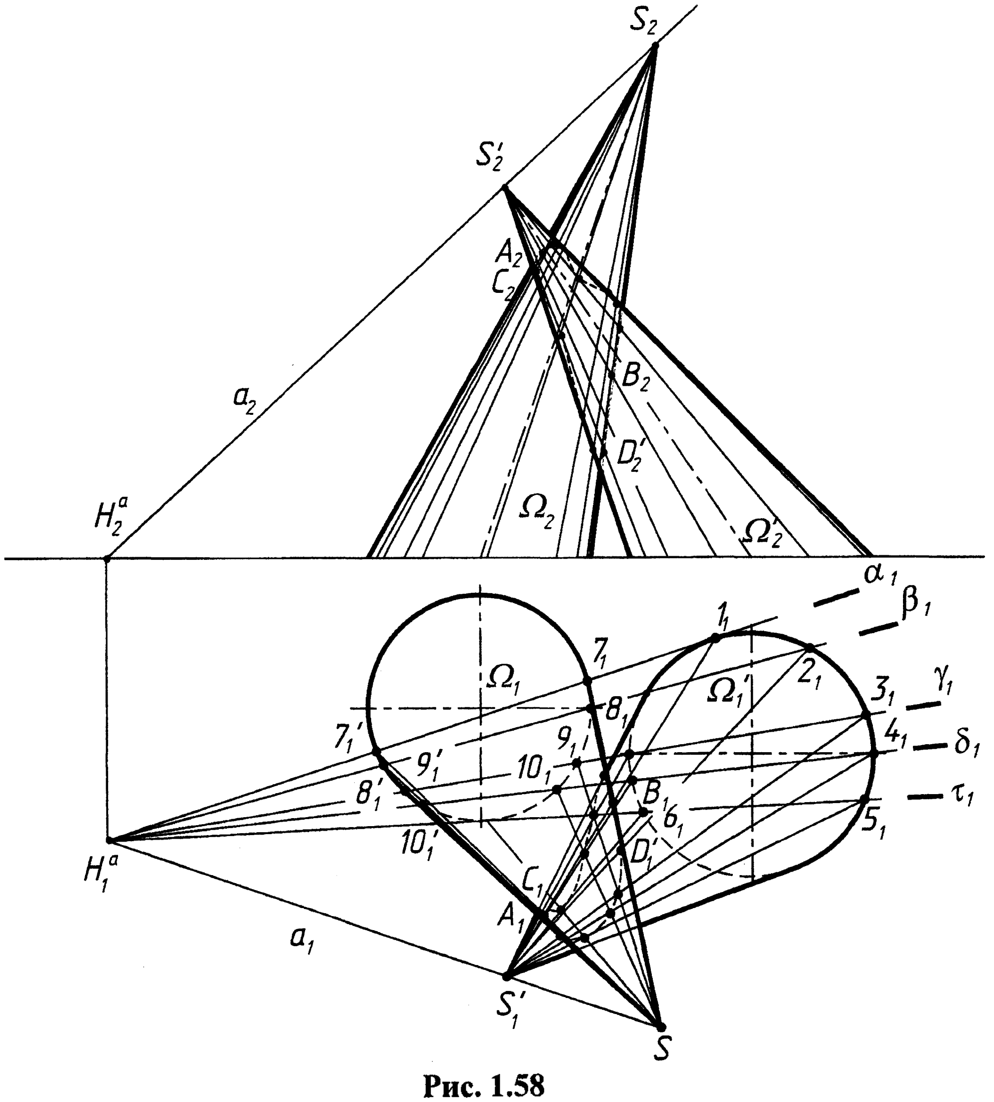


Рис. 1.58

Решение.

1. Через вершины S и S′ конических поверхностей Ω и Ω′ проводим общую прямую **a** (a_1, a_2).

2. Находим опорные точки. Для этого заключаем общую прямую **a** во вспомогательную секущую плоскость **α**, касательную к одной из поверхностей (**Ω′**) и пересекающую другую (**Ω**). Плоскость **α** (след α_1) пересекает основания конусов в точках 1_1, 7_1 и $7'_1$, а поверхности - по прямым $S'_1 1_1$, $S_1 7_1$ и $S_1 7'_1$.

3. На пересечении указанных выше прямых находим точки **A** и **B**, принадлежащие линии пересечения.

4. Находим промежуточные точки с помощью секущей плоскости β, след которой β_1 пересекает основание конусов в точках 2_1, $2'_1$, 8_1, и $8'_1$. Поверхности пересекаются плоскостью β по линиям $S_1 8_1$, $S_1 8'_1$, $S'_1 2_1$ и $S'_1 2_1$.

5. В пересечении находим точки **C, C′** и **D, D′**, принадлежащие линии пересечения.

6. На рисунке показано определение промежуточных точек с помощью секущей плоскостей γ, δ, τ.

Таким же образом можно определить и другие необходимые точки.

7. Соединив одноименные проекции в определенной последовательности плавной кривой линией, получаем проекции искомой линии пересечения двух конических поверхностей.

Пересечение конуса и цилиндра. Цилиндрическая поверхность отличается от конической тем, что вершиной цилиндрической поверхности является несобственная точка S_∞. Прямая **a**, проходящая через вершины S (конуса) и S_∞, будет параллельна образующей цилиндрической поверхности. Все остальные построения ничем не отличаются от рассмотренных в предыдущей задаче.

Задача 1.48. Построить линию пересечения конической α и цилиндрической β поверхностей (рис. 1.59).

Решение.

1. Через вершину конуса S (S_1, S_2) параллельно образующей цилиндра проводим общую прямую **a**.

2. Находим проекции m_1 и m_2 горизонтального следа общей прямой **a**.

3. Если горизонтальные следы секущих плоскостей будут проходить через точку m_1 и касаться или пересекать основание конуса и цилиндра, то поверхности цилиндра и конуса будут пересекаться по образующим, в пересечении которых находим точки, принадлежащие искомой линии пересечения.

Находим точки пересечения на очерковых образующих. Проводим следы плоскостей через точку m_1, касательных в точках **1** и **6** к проекциям оснований поверхностей.

4. Строим образующие: на конусе S_2**1**, S_2**5**, S_2**4**, на цилиндре из точек **2, 3** и **5** основания.

5. Находим точки пересечения соответствующих образующих – **a, b, c, d.**

6. Находим точки, лежащие на очерковых образующих. Для этого проводим следы плоскостей через горизонтальные проекции точек **7, 8, 9** и **10**.

7. В пересечении образующих, проведенных через точки **7, 8, 9** и **10**, находим точки **g, h, k, *l*, n, o, p**.

8.Промежуточные точки **e** и **f** находим подобными построениями.

9. Последовательность соединений точек линий пересечения устанавливается по ее дополнительной проекции – **3, 8, 13, 6, 12, 7, 2, 7, 12, 6, 13, 8, 3**.

10. Определение видимости линии пересечения производится по ее отдельным участкам, заключенным между точками видимости. При этом определяется видимость какой-либо точки рассматриваемого участка. Видимой будет та точка, которая принадлежит образующим обеих поверхностей.

Секущие плоскости проходят через несобственную прямую.

Этот способ является частным случаем предыдущего. Отличие состоит лишь в том, что общая прямая **a** – несобственная , она проходит через несобственные точки S_∞ и S'_∞.

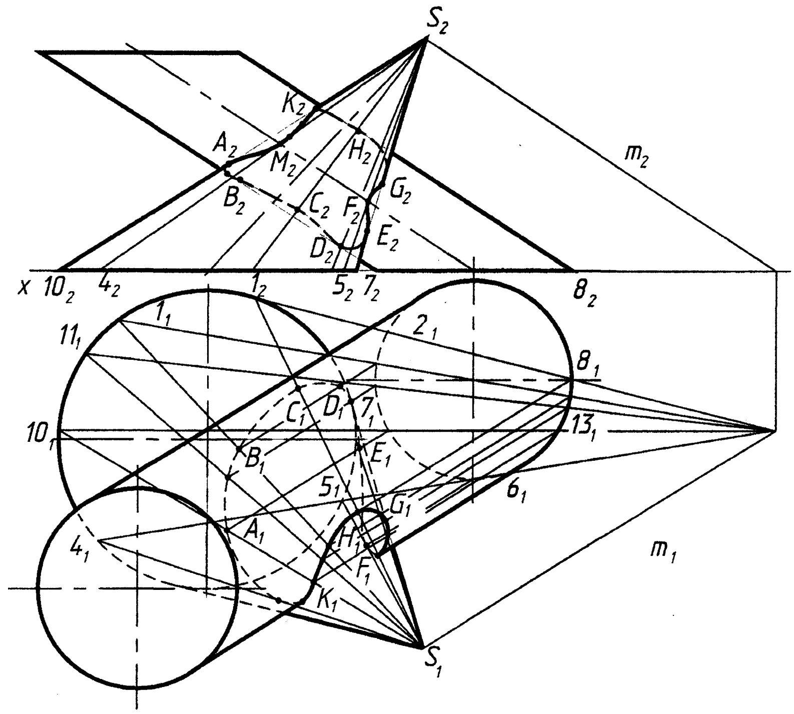


Рис. 1.59

Связка плоскостей, проходящих через несобственную прямую. Пересечение двух цилиндров. Если представить цилиндрические поверхности, как образованные из конических поверхностей с вершинами в несобственных точках, то пучок параллельных секущих плоскостей будет проходить через несобственную общую прямую $\mathbf{a}_\infty$ ($\mathbf{S}_\infty$ $\mathbf{S'}_\infty$).

Направление горизонтальных следов плоскостей этого пучка определяем следующим образом: из произвольной точки **P** проводим две прямые: **m**, параллельную образующей цилиндра Ω_1 и l - параллельную образующей цилиндра Ω_2. Эти две пересекающиеся прямые определяют направление секущих плоскостей, которые пересекают цилиндры по прямым линиям.

Задача 1.49. Построить линию пересечения двух эллиптических цилиндрических поверхностей Ω^1 и Ω^2 общего положения (рис. 1.60)

Решение.

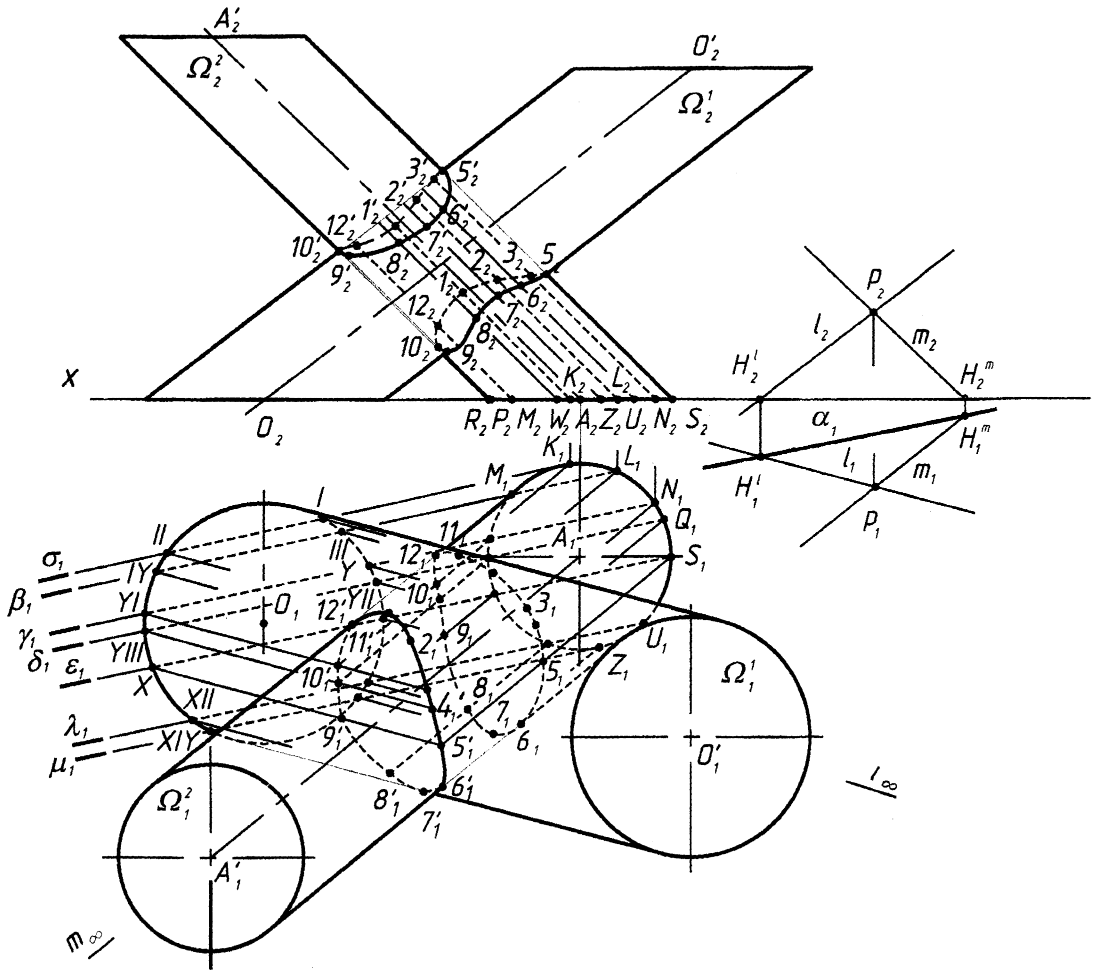
1. Определяем направление вспомогательных секущих плоскостей. Для этого через произвольную точку пространства **P** проводим прямые **m** и l, параллельные образующим цилиндрических поверхностей Ω^1 и Ω^2. Горизонтальные следы этих прямых $\mathbf{H_m}$ и $\mathbf{H}_l$ определяют след вспомогательной секущей плоскости α.

2. Проводим секущую плоскость σ, параллельную следу α_1 и касательную к поверхности Ω^2 . Эта плоскость пересечет цилиндрическую поверхность Ω^1 (l_∞ **I**, l_∞ **II**) и будет касаться поверхности Ω^2 по прямой ($\mathbf{m}_\infty$ **K**). Взаимное пересечение этих прямых определяет точки **1** и **1′**, принадлежащих искомой линии пересечения.

3. Проводим плоскость μ, параллельную следу α_1 и касательную к поверхности Ω_2 в точке **Z**. Получаем две прямые (l_∞ **III**) и (l_∞ **XIY**), по которым поверхность Ω_1 пересекается плоскостью μ. Поверхность Ω_2 пересекается по прямой ($\mathbf{m}_\infty$ **Z**). Указанные прямые пересекаются в точках **7** и **7′**.

4. Промежуточные точки найдены с помощью вспомогательных секущих плоскостей $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ и λ – это точки **2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11** и **12**.

5.Соединение полученных точек, принадлежащих линии сечения, производим по порядку, используя обозначения точек на основании **O** цилиндра Ω_1 – точки **I…XII**. В результате получаем две пространственные кривые пересечения.



а)

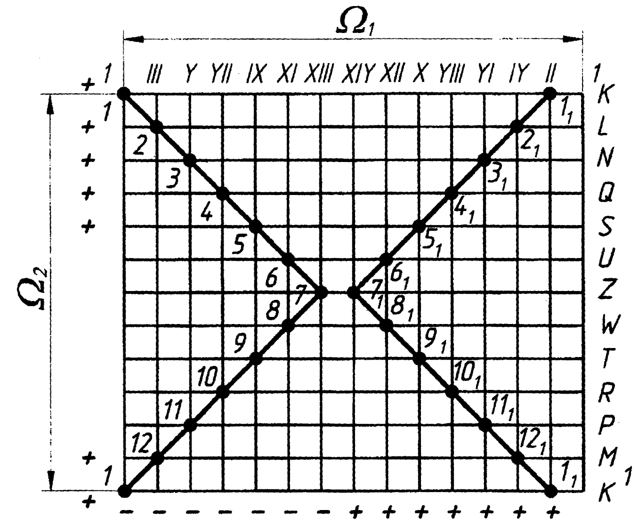


Рис. 1.60

Определить последовательность соединения точек по чертежу не всегда просто, п этому для контроля правильности соединения точек используется вспомогательная схе (рис. 1.56а), предложенный проф. Д. Г. Адановым. Строятся схематические развертки п верхности пересечения Ω_1 и Ω_2. Линии пересечения поверхностей вспомогательными сек щими плоскостями наносятся в виде горизонтальных и вертикальных прямых линий. В пер сечении этих линий находятся точки, принадлежащие линии пересечения.

6.Видимость участков кривых линий определяем с помощью видимых линий сечен (образующих). Так, например, точка **5′₁** будет видимой, т. к. линия сечения **X** и **S** видимые.

1.3.16. Построение линии пересечения способом вспомогательных секущих сфер

Свойство пересечения соосных поверхностей вращения со сферой лежит в основе применения сфер в качестве вспомогательных поверхностей при построении линии пересечения двух поверхностей вращения.

В зависимости от вида пересекающихся поверхностей и их взаимного расположения построение линии пересечения можно выполнить одним из способов:

1. Концентрических сфер,
2. Эксцентрических сфер.

Способ концентрических сфер. Этот способ применяется для построения линии пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются.

На рис. 1.61 из точки $\mathbf{O_2}$ пересечения фронтальных проекций осей поверхностей вращения α и β можно провести ряд сфер. Сфера пересекает каждую из поверхностей по окружностям $\mathbf{m}$, $\mathbf{m^1}$ и $\mathbf{m^2}$). В пересечении окружностей получаются точки общие для обеих поверхностей (**E** и **F**) и, следовательно, принадлежащих их линии пересечения.

Построения значительно упрощаются, если плоскость симметрии, определяемая осями поверхностей вращения $\mathbf{i^1}$ и $\mathbf{i^2}$), будет параллельна одной из плоскостей проекций (на рис. – $\mathbf{П_2}$). Окружности пересечения поверхностей сферой в этом случае проецируются в виде прямолинейных отрезков ($\mathbf{m}$, $\mathbf{m^1}$ и $\mathbf{m^2}$). Кроме того, проекция линии пересечения строится без помощи других проекций поверхностей.

В случае пересечения поверхностей, когда одна из поверхностей является сферой, центром вспомогательной секущей сферы может быть любая точка на оси поверхности вращения т.к. осью сферической поверхности может быть любая прямая, проходящая через центр этой поверхности.

Задача 1.50. Построить линию пересечения двух конусов (рис. 1.61).

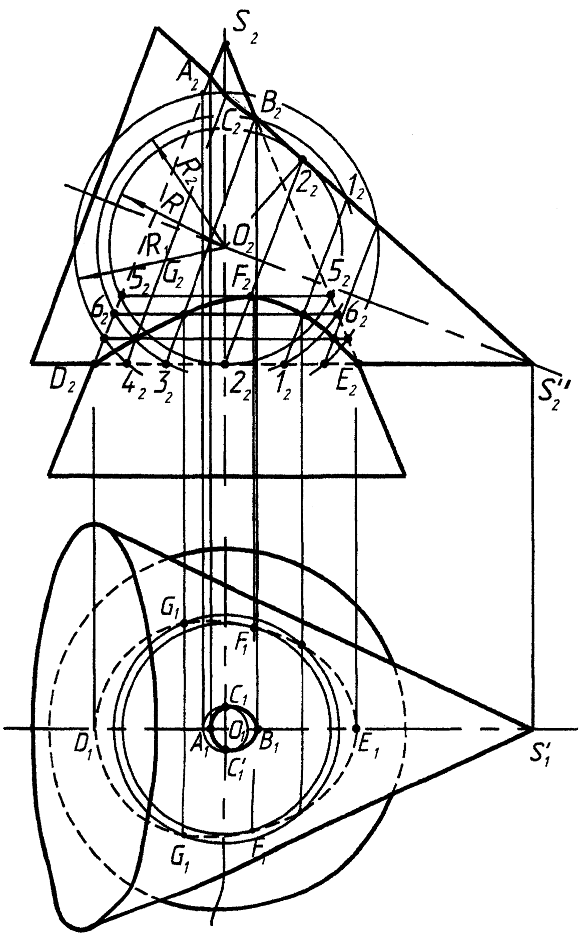


Рис. 1.61

Решение.

1. Находим точки **A, B, E** и **D** кривой пересечения без введения вспомогательных секущих сфер. Эти точки лежат в пересечении очерковых линий конусов в одной плоскости.

2. Для нахождения точек **F** и **F′** вводим сферу радиуса **R**, которая коснется конуса с вершиной **S′**. Фронтальная проекция окружности касания – отрезок $\mathbf{1_2\ 1'_2}$. Эта же сфера пересекает другой конус по окружности, фронтальная проекция которой отрезок $\mathbf{5_2\ 5'_2}$.

3. На пересечении отрезков $\mathbf{1_2\ 1'_2}$ и $\mathbf{5_2\ 5'_2}$ находим точки **F** и **F′**.

4. Промежуточные точки находим с помощью ряда концентрических сфер. Наибольший радиус сферы равен по величине отрезку $\mathbf{O_2A_2}$, а наименьший – $\mathbf{O_22_2}$. (радиус **R**).

5. На рисунке показано построение точек **C, C′** и **G, G′** с помощью сфер радиуса $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$.

Точку $\mathbf{C_2}$ находим на пересечении отрезков $\mathbf{5_2 - 5'_2}$ и $\mathbf{6_2 - 6'_2}$, а точку $\mathbf{G_2}$ – на пересечении $\mathbf{3_2\ 3'_2}$ и $\mathbf{6_2\ 6'_2}$. Горизонтальные проекции *их находим так же, как и точки* $\boldsymbol{F'}$ *и* $\boldsymbol{F'_1}$.

6. Проекции верхней кривой на горизонтальной плоскости проекций видимы, а нижней – невидимы.

Способ эксцентрических сфер. Такие сферы могут быть использованы в качестве вспомогательных секущих поверхностей только при условии, что:

1. Одна из поверхностей обязательно является поверхностью вращения.
2. Вторая поверхность имеет круговое сечение.
3. Поверхности имеют общую плоскость симметрии.

Каждое круговое сечение может быть принято за параллель сферы, центр которой лежит на прямой, проходящей через центр параллели перпендикулярно к ее плоскости. Центр сферы берется на пересечении этой прямой с осью поверхности вращения.

Для удобства решения плоскость симметрии поверхностей должна быть параллельна какой-либо плоскости проекций. Тогда окружности пересечения сферы с обеими поверхностями проецируются на эту плоскость в отрезки прямых, на пересечении которых находится соответствующая проекция искомой точки линии пересечения.

Задача 1.51. Построить линию пересечения тора с конусом (рис. 1.62).

Решение.

1. Высшую **A (A_1, A_2)** и низшую **B (B_1, B_2)** точки кривой находим сразу, без использования вспомогательных секущих поверхностей, как пересечение очерковых кривых, лежащих в одной плоскости.

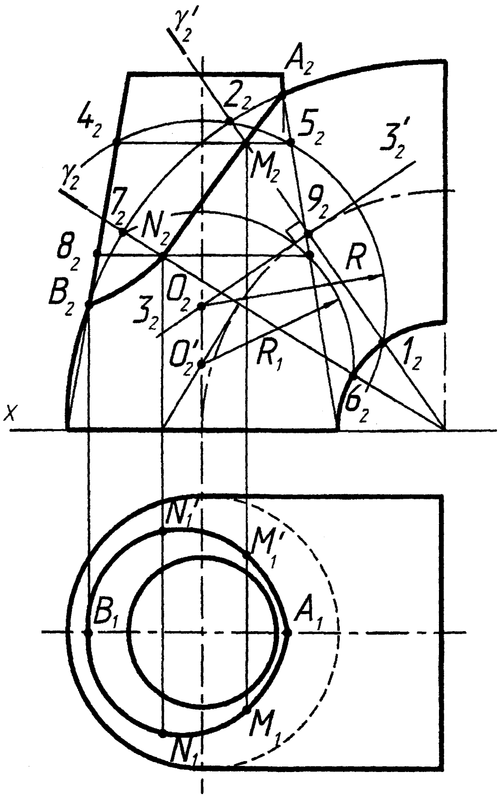


Рис. 1.62

2. Промежуточные точки **M (M'_1)** и **N (N'_1)** находим с помощью сфер, центры которых лежат на оси конуса. Здесь используется условие, что на поверхности кольца могут быть проведены окружности, плоскости которых проходят через его ось. Фронтальные проекции этих окружностей – отрезки прямых. Выполняем построение точек **M, M′, N,** и **N′** в следующей последовательности:

а) задаем фронтальную проекцию произвольной окружности на поверхности тора (например, 1_2 - 2_2) с помощью плоскости γ ($\gamma_2 \perp \Pi_2$);

б) проводим фронтальную проекцию прямой ($3_2\ 3'_2$), на которой лежат центры сфер, пересекающих тор по этой окружности;

в) находим точку O_2 пересечения прямой $3_2\ 3'_2$ с проекцией оси конуса. Это фронтальная проекция центра вспомогательной сферы;

г) с центром в точке O_2 проводим окружность радиуса **R**. Она является очерком фронтальной проекции вспомогательной сферы;

д) находим фронтальную проекцию окружности, по которой сфера пересекает конус – прямая $4_2\ 5_2$;

е) на пересечении $1_2\ 2_2$ и $4_2\ 5_2$ находим точку **M (M′)**;

ж) находим M_1 и M'_1 из условия, что точки **M** и **M′** лежат на поверхности конуса. Точно таким же способом находим точки **N (N_1, N_2)** и **N′ (N'_1, N'_2)**, вводя вспомогательную сферу $R_1 - O'_2 7_2$ с центром в точке O'_2.

Одноименные проекции найденных точек соединяем плавными кривыми.

ГЛАВА 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Метрическими принято считать задачи, решение которых связано с определением на комплексном чертеже истинных величин расстояний, углов и плоских фигур, а также задачи на построение отрезков, углов и фигур по заданными размерами и условиям.

В процессе решения той или иной метрической задачи часто на промежуточных этапах возникает необходимость выяснять позиционные отношения между геометрическими фигурами (строить взаимно перпендикулярные прямые и плоскости, находить точки пересечения) – решать позиционные задачи. Поэтому в чистом виде метрические задачи встречаются редко.

В основе решения любой метрической задачи лежит свойство ортогонального проецирования: любая прямая линия или плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется на эту плоскость без искажений (в конгруэнтную фигуру). При построении прямых углов используется теорема о частном случае проецирования прямого угла: прямой угол проецируется на плоскость в натуральную величину, если одна из его сторон параллельна плоскости, а другая – не перпендикулярна.

В общем случае геометрическая фигура на комплексном чертеже изображается в искажённом виде. Для получения метрических характеристик фигуры в этом случае чертеж необходимо преобразовать, т. е. геометрическую фигуру общего положения необходимо перевести в положение уровня. В некоторых случаях задача может быть решена и без преобразования чертежа, используя способ прямоугольного треугольника.

2.1. Классификация задач

Многообразие метрических задач создает определенные трудности при их решении. Поэтому для облегчения этих трудностей будет целесообразным систематизировать все метрические задачи, распределив их по группам. Признаком для отнесения задачи к той или другой группе может служить носитель метрической характеристики. Будем считать, что задачи принадлежат одной группе, если у них будет общий носитель метрической характеристики. Используя указанный критерий, все метрические задачи можно условно разделить на 4 группы:

А – определение расстояний;

Б – определение углов;

В – определение величины части геометрического образа (определение величины части плоскости);

Г – построение проекций геометрических фигур по заданным условиям – конструктивные задачи.

В группу **А** включаются задачи на определение расстояний между:

- двумя точками;
- точкой и прямой;
- точкой и плоскостью;
- точкой и поверхностью;
- двумя прямыми;
- прямой и плоскостью;
- параллельными плоскостями;
- плоскостью и поверхностью;
- поверхностями.

Носителем метрической характеристики является прямая, соединяющая две точки.

Рассмотрим на примере решение задач указанной группы с использованием общего алгоритма рассмотренного выше.

Пример. Определить расстояние от точки Адо прямой **m** (рис. 2.1а).

Решение.

1. В задаче требуется определить расстояние. Следовательно, задача относится к классу метрических задач.

2. По классификации метрических задач данную задачу относим к группе А «Определение расстояний», подгруппа «Определение расстояний между точкой и прямой».

3. Расстоянием между двумя точками является отрезок прямой линии, действительную величину которого определяют способом прямоугольного треугольника или способами преобразования комплексного чертежа.

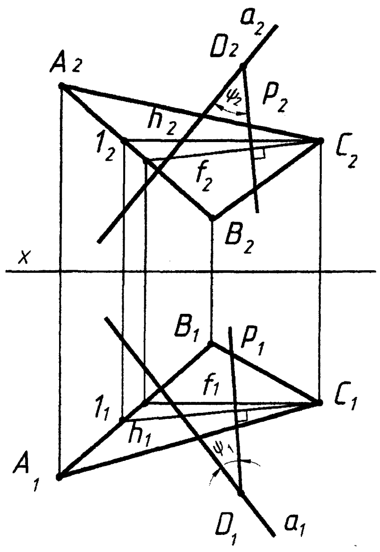


Рис. 2.2а

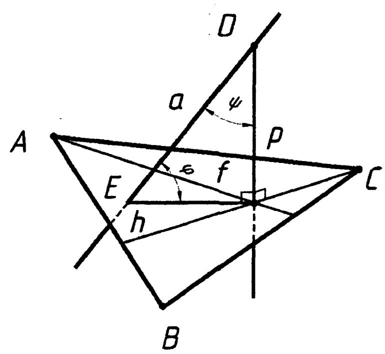


Рис. 2.2б

Искомый угол **φ** можно найти и через дополнительный угол **ψ**, между перпендикуляром к плоскости **α** и линией **а** – **φ= 90° - ψ**.

5. Задачу решаем согласно составленному плану.

В группу **В** включаются задачи на нахождение:

- длины отрезка прямой линии;
- длины части кривой линии (плоской и пространственной);
- величины части плоскости (плоской фигуры);
- размера части поверхности (построение развёрток).

В группу **Г** включаются задачи, связанные с построением проекций геометрических фигур по заданным условиям.

Ниже приводятся решения типовых задач, относящихся к перечисленным группам.

2.2. Определение расстояний

Искомая метрическая характеристика – отрезок прямой линии соединяющей две точки, - получается при преобразовании чертежа или без преобразования непосредственно на новой плоскости проекций или в новом положении. В любом случае носитель метрической характеристики занимает положение уровня (параллельно плоскости проекций).

2.2.1. Расстояние между двумя точками

Задача 2.1. Определить расстояние (рис. 2.3) между точками **А** и **В**.

Решение.

I вариант – способ прямоугольного треугольника.

1. Из точки $\mathbf{B_1}$ восстанавливаем перпендикуляр к $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_1}$.
2. На перпендикуляре откладываем отрезок $\mathbf{B_1B_0} = \mathbf{B_2B'_2}$ (разность координат z концов отрезка **АВ**) и соединяем прямой линией точки $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{B_0}$.
3. Построенный $\mathbf{\Delta A_1B_1B_0}$ конгруэнтен $\mathbf{\Delta ABB_1}$ в пространстве. Следовательно, отрезок $\mathbf{A_1B_0}$ конгруэнтен отрезку **АВ** в пространстве, а угол α ($\mathbf{\angle B_1A_1B_0}$) определяет угол наклона отрезка АВ к горизонтальной плоскости проекций $\mathbf{П_1}$ (α = $\mathbf{AB\hat{}П_1}$).

II вариант – способ замены плоскостей проекций.

1. Переходим от системы плоскостей $\mathbf{П_1/П_2}$ к новой $\mathbf{П_1/П_4}$ ($\mathbf{X_{14}}$). При этом $\mathbf{X_{14}}$ // $\mathbf{A_1B_1}$, а **П** ⊥ $\mathbf{П_1}$. На плоскость $\mathbf{П_4}$ отрезок проецируется в натуральную величину.
2. От оси $\mathbf{X_{14}}$ на соответствующих линиях связи откладываем координаты $\mathbf{Z_A}$ и $\mathbf{Z_B}$ и получаем проекции $\mathbf{A_4}$ и $\mathbf{B_4}$.
3. Отрезок $\mathbf{A_4B_4}$ и будет искомым расстоянием между точками **А** и **В**.

III вариант – плоскопараллельное перемещение.

1. Отрезок **АВ** переводим в положение параллельное плоскости проекций $\mathbf{П_2}$ (или $\mathbf{П_1}$).

2. Из точек A_2 и B_2 проводим прямые линии – траектории перемещения точек в плоскостях параллельных $П_1$.

3. Из точек A'_2 и B'_2 проводим линии связи.

4. В пересечении линий связи и траекторий находим точки A'_2 и B'_2.

5. Отрезок $A'_2B'_2$ – расстояние между точками **А** и **В**.

IV вариант – вращение вокруг проецирующей прямой.

1. Ось вращения **i** проводим через точку **А** перпендикулярно $П_1$.
2. Поворачиваем отрезок A_1B_1 в положение, параллельное $П_2$.
3. Строим фронтальную проекцию точки **В** – точка B'_2.
4. Отрезок $A_2B'_2$ – расстояние между заданными точками **А** и **В**.

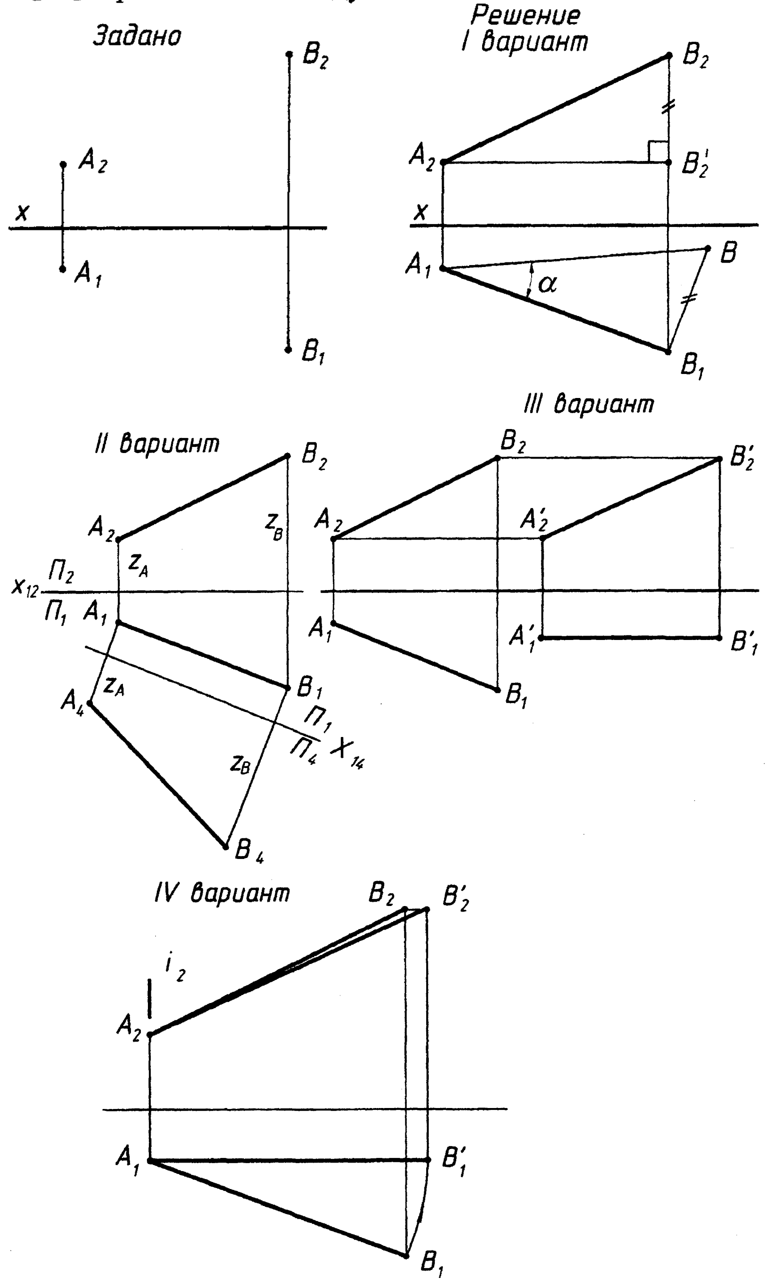


Рис. 2.3

2.2.2. Расстояние между точкой и прямой

Расстояние измеряется отрезком перпендикуляра, проведённого из точки к прямой. Перпендикуляр изображается в натуральную величину на плоскости в том случае, если он проведён к проецирующей прямой. Поэтому изображение прямой в общем положении необходимо перевести в проецирующее.

Задача 2.2. Определить расстояние от точки **M** до прямой **AB**.

Решение. Расстояние от точки **M** до прямой **AB** можно определить одним из пяти способов, приведенных ниже.

I – замена плоскостей проекций. В этом случае линию **AB** переводим в проецирующее положение (рис. 2.4):

1. Переходим от системы плоскостей Π_1/Π_2 к Π_1/Π_4, при этом $\Pi_4 \perp \Pi_1$ и $X_{14}//A_1B_1$.
2. Строим $X_{45} \perp A_4B_4$ и переходим от Π_1/Π_4 к Π_4/Π_5, при этом $\Pi_5 \perp \Pi_4$.
3. Соединяем точки M_5 и $A_5 \equiv B_5$, полученный отрезок прямой будет искомым расстоянием.

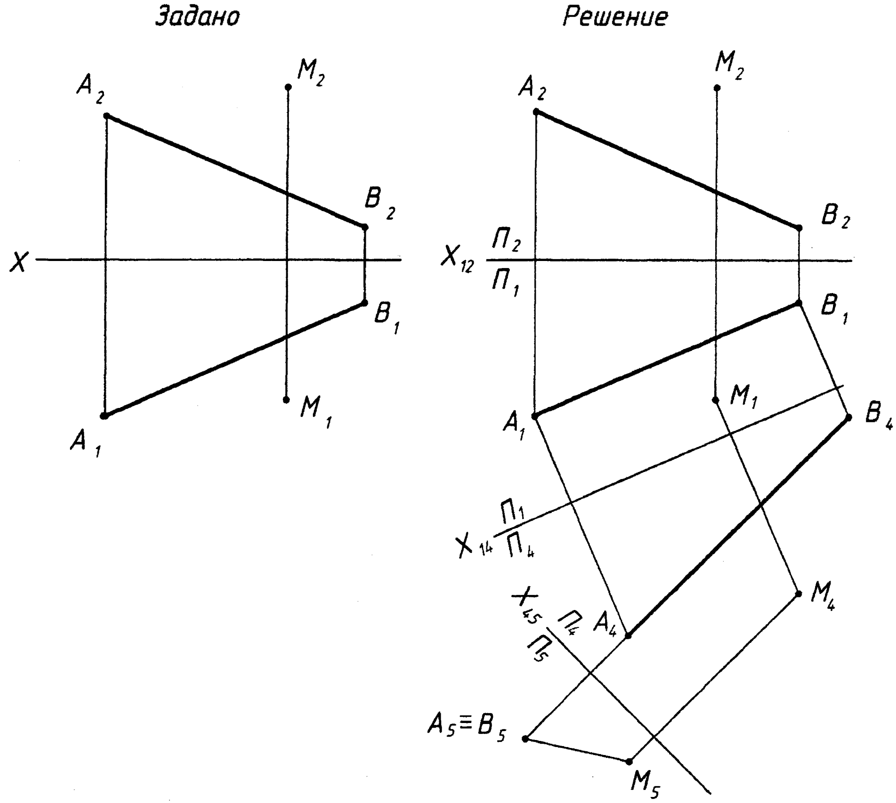


Рис. 2.4

II – плоскопараллельное перемещение (рис. 2.5)

1. Отрезок **AB** вначале переводим в положение, параллельное одной из плоскостей проекций – $A_1'B_1'//\Pi_2$.

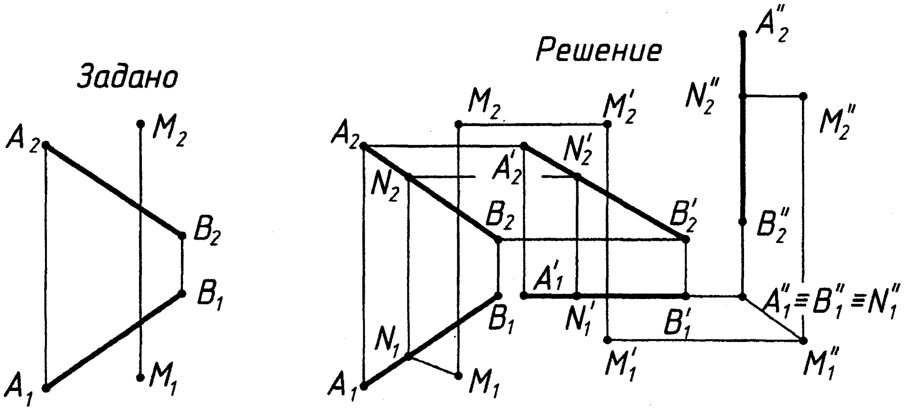


Рис. 2.5

2. Строим проекции точек A_2', B'_2 и M'_2.
3. Перемещением параллельно плоскости Π_2 переводим отрезок **AB** в положение, перпендикулярное плоскости Π_1 ($A_2''B_2'' \perp \Pi_1$).
4. Отрезок $A_1''M_1'$ – искомое расстояние.

III – вращение вокруг проецирующей прямой (рис. 2.6).

1. Ось вращения **i** (i_1, i_2) проводим через точку **B**, перпендикулярно плоскости Π_1.

2. Проекцию A_1B_1 поворачиваем в положение $B_1A'_1$, параллельное плоскости $П_2$ (проекция B_1 является центром вращения на $П_1$).

3. Строим фронтальные проекции отрезка $B_2A'_2$ и точки M'_2.

4. Из точки M'_2 опускаем перпендикуляр на A'_2B_2.

5. Отрезок $M'_2N'_2$ – искомое расстояние.

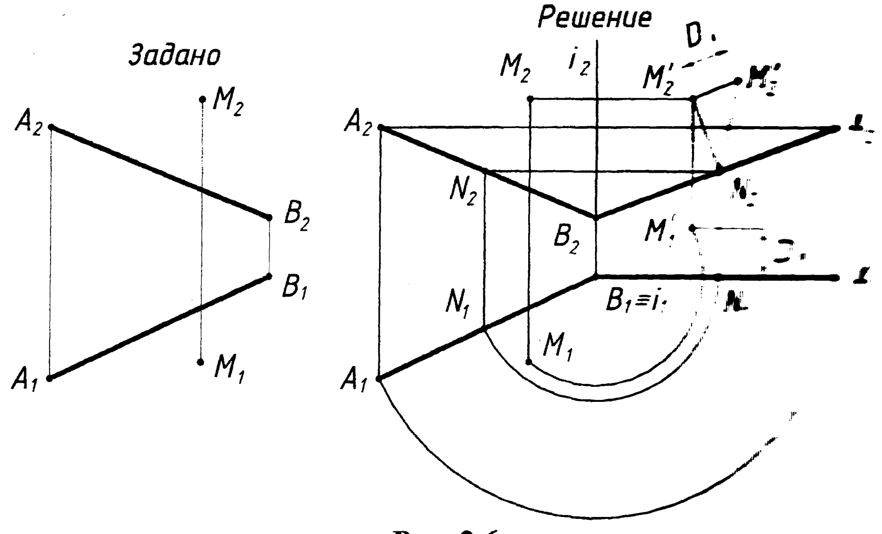


Рис. 2.6

IY – без преобразования чертежа (рис. 2.7)

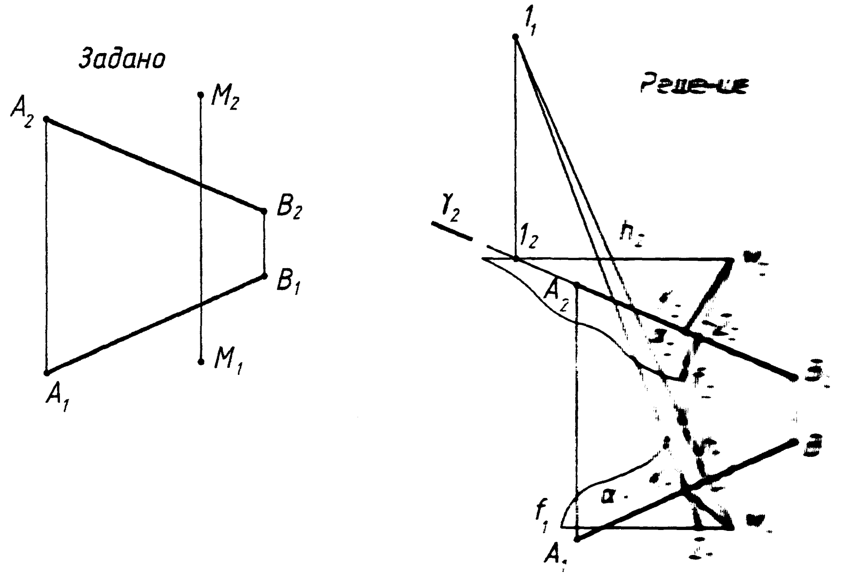


Рис. 2.7

1. Через точку **M** проводим плоскость α, перпендикулярную прямой **AB**. Плоскость α задается горизонталью **h** ($h_1 \perp A_1B_1$) и фронталью **f** ($f_2 \perp A_2B_2$).

2. Определяем точку пересечения прямой **AB** с плоскостью α, решая задачу на нахождение точки пересечения прямой с плоскостью (проекции K_1 и K_2).

3. Соединяя точки K_1 и K_2 с точками M_1 и M_2, соответственно получим проекции отрезка прямой, который является искомым расстоянием.

4. Определяем действительную величину расстояния от точки **M** до прямой **AB** одним из известных способов (способ прямоугольного треугольника).

Y – вращение вокруг линии уровня (рис. 2.8).

1. В плоскости, задаваемой прямой **AB** и точкой **M**, проведем горизонталь **h** через точку **M** (h_1, h_2) и выделим точки **1** и **2**.

2. Чтобы определить расстояние от точки **M** до прямой **AB**, необходимо плоскость, заданную прямой **AB** и точкой **M**, перевести в положение уровня, вращая вокруг горизонтали **h**. Вполне достаточно повернуть только точку **B**.

3. Точка **B** перемещается в горизонтально-проецирующей плоскости α (след α_1) перпендикулярно к **h** ($\mathbf{h_1}$). В точке **O** находится центр вращения точки **B**.

4. Определяем натуральную величину радиуса вращения $\mathbf{OB_0}$ способом прямоугольного треугольника. Когда плоскость определяемая прямой **AB** и точкой **M** станет параллельной плоскости $\mathbf{П_1}$, точка **B** получится на α_1 на расстоянии $\mathbf{OB_0}$ точки от **O** (может быть и другое положение на следе α_1, но по другую сторону от **O**).

5. Проведя прямую $\mathbf{B_01_1}$, получаем горизонтальную проекцию прямой **AB**, расположенной в плоскости, параллельной $\mathbf{П_1}$. В этом положении расстояние от точки $\mathbf{M_1}$ до прямой $\mathbf{A_0B_0}$ (отрезок $\mathbf{M_1M_0}$) равно искомому расстоянию.

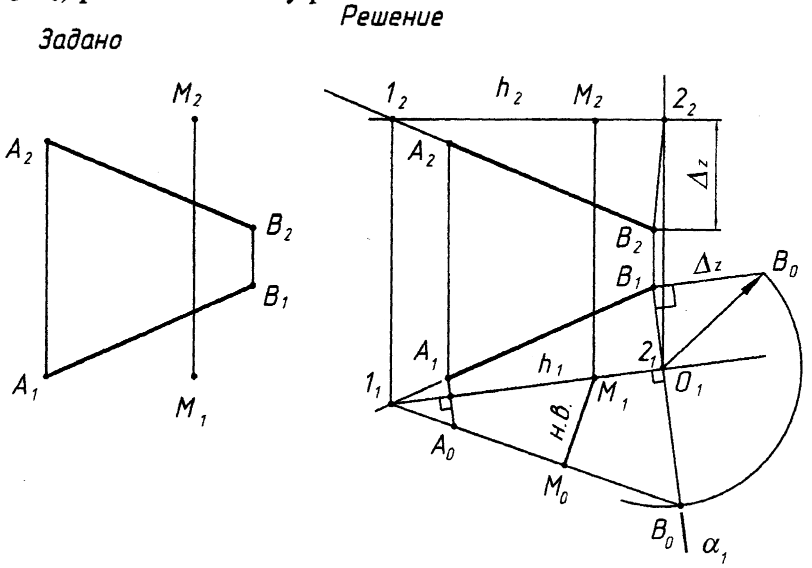


Рис. 2.8

2.2.3. Расстояние между точкой и плоскостью

Расстояние определяется величиной перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. При этом необходимо найти основание перпендикуляра, т.е. точку пересечения перпендикуляра с плоскостью.

Задача 2.3. Определить расстояние от точки **M** до плоскости α (**ABC**).

Решение.

I вариант – без преобразования чертежа (рис. 2.9):

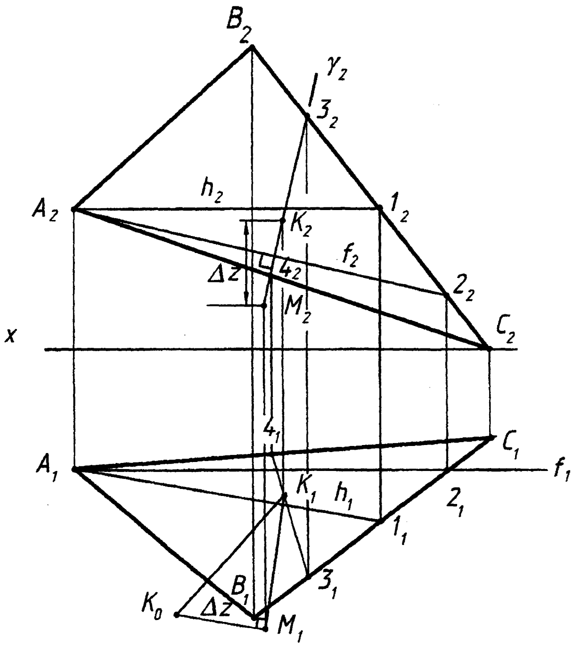


Рис. 2.9

1. Проводим в плоскости α горизонталь **h** и фронталь **f** как две пересекающиеся прямые.

2. Из точки **M** опускаем перпендикуляр на плоскость α. Проекции перпендикуляра перпендикулярны $\mathbf{h_1}$ и $\mathbf{f_2}$.

3. Находим основание перпендикуляра – точку пересечения перпендикуляра с плоскостью α. Для этого одну из проекций перпендикуляра заключаем в проецирующую плоскость γ (в данном случае фронтальную).

4. Находим линию пересечения введенной и заданной плоскостей – $l=\alpha\cap\gamma$; l_2 $(3_2, 4_2)$.

5. Строим горизонтальную проекцию линии пересечения плоскостей l_1 $(3_1, 4_1)$.

6. На пересечении перпендикуляра и линии l находим точку **K**, которая и будет основанием перпендикуляра $\mathbf{K_1 = M_1 K_1 \cap} l_1$.

7. Находим действительную величину отрезка **MK** способом прямоугольного треугольника, которая и будет расстоянием от точки **M** до плоскости **ABC**.

II вариант – способ замены плоскостей (рис. 2.10)

1. Переводим заданную плоскость в проецирующее положение, с помощью горизонтали **h**, .т.е. решаем третью типовую задачу.

2. Из полученной точки $\mathbf{M_4}$ опускаем на проекцию $\mathbf{A_4B_4C_4}$ (вырожденное изображение треугольника **ABC**) перпендикуляр. Отрезок $\mathbf{M_4N_4}$ и будет действительной величиной расстояния от точки М до плоскости **ABC.**

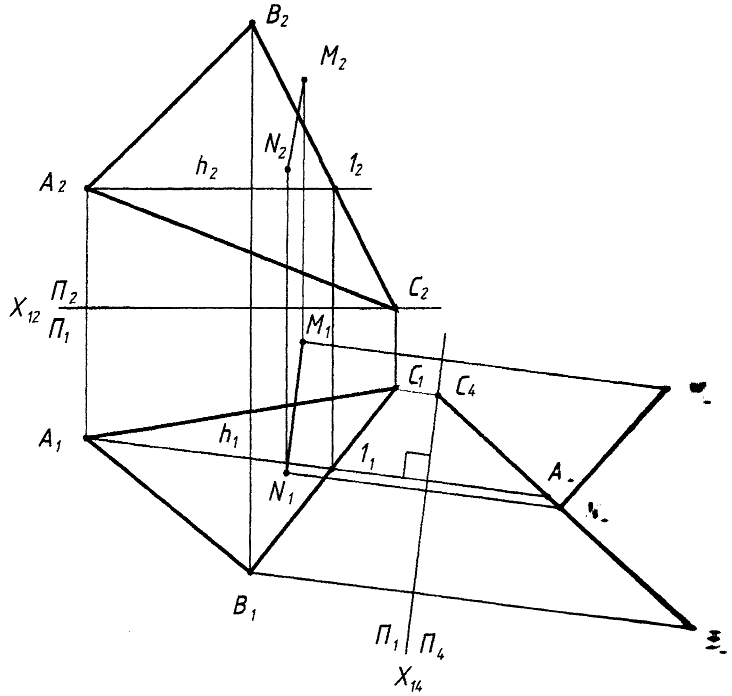


Рис. 2.10

III вариант – способ плоскопараллельного перемещения (рис. 2.11)

Как и при замене плоскостей проекций, заданную плоскость **ABC** переводим в проецирующее положение с помощью горизонтали (или фронтали, т.е. решаем третью типовую задачу. Находим новое положение точки **М** – $\mathbf{M'_2}$

Из полученной тоски $\mathbf{M'_2}$ опускаем перпендикуляр на $\mathbf{A'_2\ B'_2\ C'_2}$.

Отрезок $\mathbf{M'_2\ N'_2}$ - действительная величина расстояния от точки **М** до плоскости **ABC**.

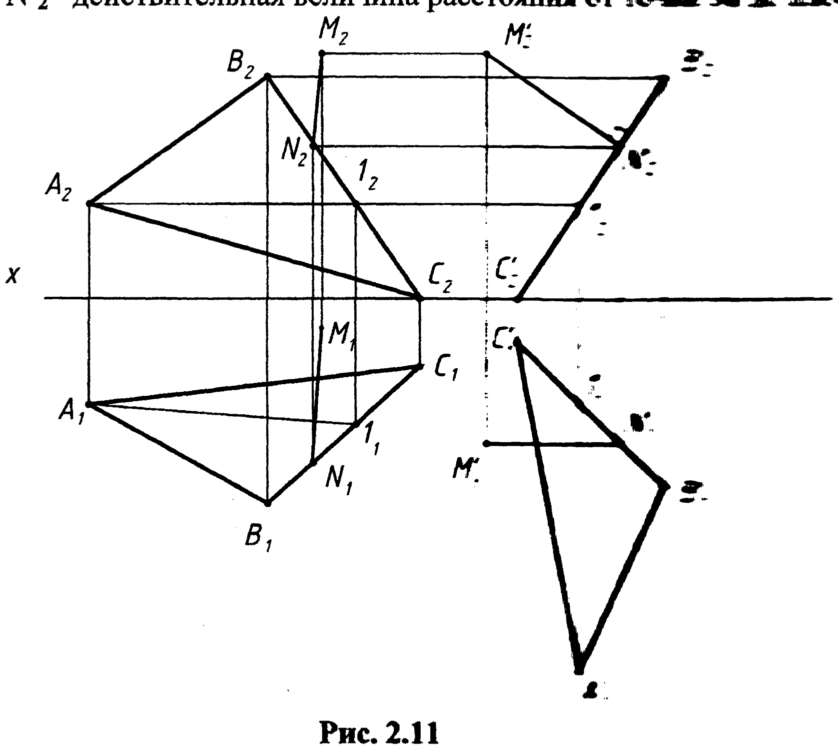


Рис. 2.11

Задача 2.4. Определить расстояние от точки **М** до плоскости β, заданной следами (рис. 2.12).

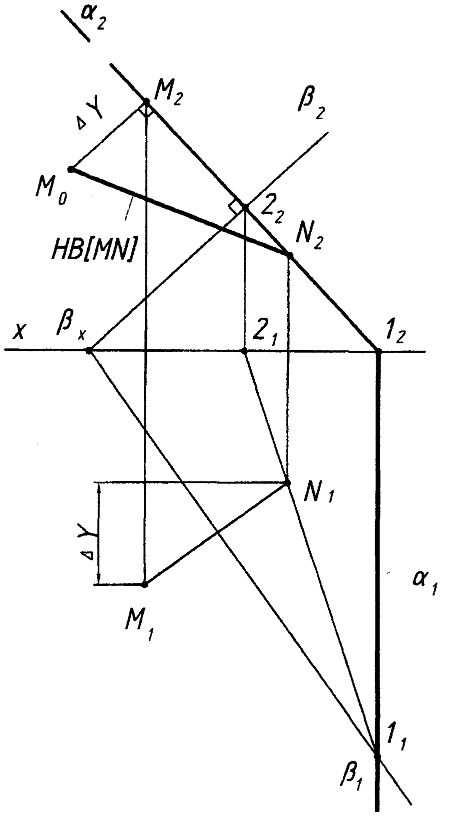


Рис. 2.12

Расстояние определяется величиной перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

Алгоритм решения задачи следующий:

1. Из точки М опускаем перпендикуляр на плоскость β (проекции перпендикуляра перпендикулярны следам плоскости).

2. Находим основание перпендикуляра (точку пересечения перпендикуляра с плоскостью β). Для этого заключаем фронтальную проекцию перпендикуляра во фронтально проецирующую плоскость α **($\alpha \perp \Pi_2$)**, т.е. решаем задачу на пересечение прямой с плоскостью.

3. Пересечение плоскостей β и α дает линию пересечения ***l*** **(*l_1*, *l_2*).**

4. В пересечении перпендикуляра и линии ***l*** получаем точку **N (N_1),** которая и будет основанием перпендикуляра.

5. Отрезок **MN (M_0 N $_2$**) и будет расстоянием от точки **М** до заданной плоскости.

2.2.4. Расстояние между точкой и поверхностью

Кратчайшим расстоянием от точки пространства до поверхности будет перпендикуляр, опущенный из точки на поверхность.

Задача 2.5. Определить расстояние от точки **А** пространства до сферической поверхности Θ (рис. 2.13).

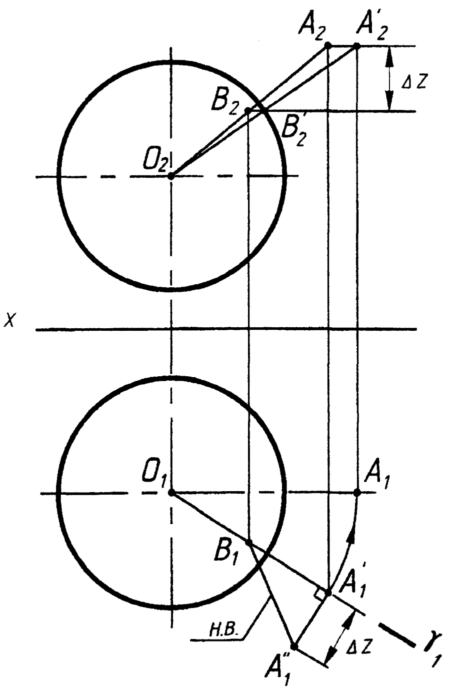


Рис. 2.13

Решение. Искомое расстояние измеряется по прямой **АО**. Для нахождения точки пересечения прямой **АО** с поверхностью Θ заключаем прямую **АО** в горизонтально-проецирующую плоскость γ. Поворотом вокруг вертикальной оси сферы переводим прямую **АО** в положение уровня, т.е. **$A_1O_1 // \Pi_2$**, а линия пересечения поверхности Θ и плоскости γ займет положение фронтальной проекции сферы. В пересечении указанных линий находим проекции точки **В**-проекция **B_2**. Отрезок **АВ** (**A_1,B_1** и **A_2,B_2**) и будет кратчайшим расстоянием от заданной точки **А** до сферы **Θ**, действительную величину которого определим способом треугольника. Она равна отрезку **$A_1''B_1$**.

Задача 2.6. Определить расстояние от точки А до ближайшей точки на поверхности конуса (рис. 2.14).

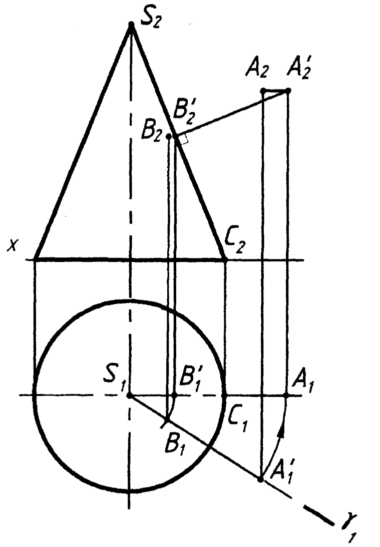


Рис. 2.14

Решение: Искомое расстояние равно расстоянию от заданной точки до ближайшей к ней образующей конуса. Эта образующая лежит в горизонтально-проецирующей плоскости γ, проходящей через точку **А** и ось конуса. Поворачиваем эту плоскость вместе с точкой **А** и линией пересечения конуса плоскостью γ до положения параллельного плоскости Π_2.

Точка **А** займет положение **A′** (A'_1, A'_2), а линия пересечения конуса совпадает с образующей S_2C_2. Искомое расстояние выразится отрезком $A'_2\,B'_2$, перпендикулярным к образующей S_2C_2.

Задача 2.7. Определить расстояние от точки А до ближайшей точки на поверхности цилиндра (рис. 2.15).

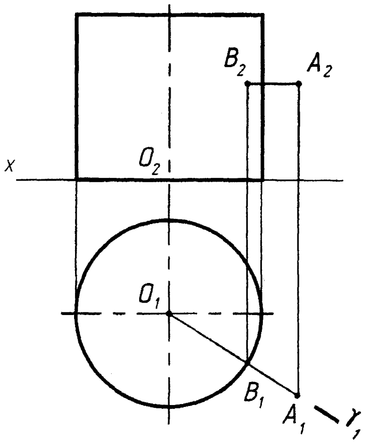


Рис. 2.15

Решение. Кратчайшим расстоянием будет перпендикуляр, опущенный из точки **А** на ближайшую образующую. Этот перпендикуляр лежит в горизонтально-проецирующей плоскости γ, проходящей через заданную точку и продольную ось цилиндра.

Так как цилиндр прямой, то точкой пересечения перпендикуляра с цилиндром будет точка **В**.

Отрезок **AB**//Π_1 и проекция A_1B_1 будет действительным расстоянием от точки **А** до поверхности цилиндра.

Задача 2.8. Определить расстояние от точки А до ближайшей точки на поверхности тора (рис. 2.16).

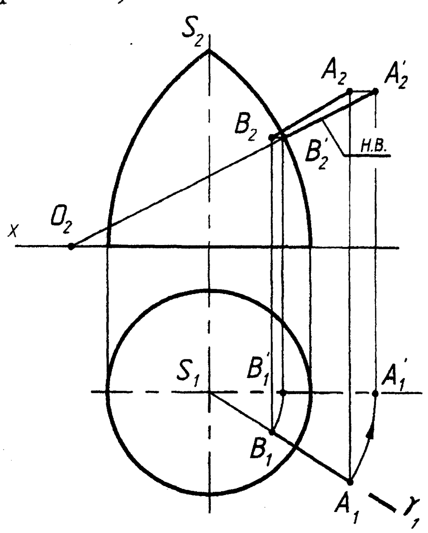


Рис. 2.16

Решение. Расстоянием от точки **А** до поверхности тора будет отрезок нормали к поверхности тора в горизонтально-проецирующей плоскости γ, проходящей через точку **А** и ось тора.

Повернув плоскость γ вокруг оси тора до положения параллельного плоскости проекций Π_2 и проведя прямую A'_2O_2, получим точку B'_2 и отрезок $A'_2\,B'_2$. Это и есть нормаль к поверхности тора, проходящая через точку A'_2, а до поворота - через точку **А**.

2.2.5. Расстояние между двумя параллельными прямыми

Расстояние измеряется отрезком перпендикуляра между ними.

Задача 2.9. Определить расстояние (рис. 2.17.) между двумя параллельными прямыми **m** и **n**.

Решение.

I вариант - вращение вокруг проецирующей линии.

1. На прямых **m** и **n** отмечаем произвольные точки **1** ($\mathbf{1_1}$, $\mathbf{1_2}$) и **2** ($\mathbf{2_1}$ $\mathbf{2_2}$).

2. Используя точки $\mathbf{1_1}$ и $\mathbf{2_1}$ вращаем прямые **m** и **n** вокруг оси **i** ($\mathbf{i} \perp \mathbf{\Pi_1}$, и $\mathbf{i} \in \mathbf{N}$) до положения, параллельного $\mathbf{\Pi_2}$ ($\mathbf{n'_1}$ и $\mathbf{n'_2}$; $\mathbf{m'_1}$ и $\mathbf{m'_2}$).

3. Из точки $\mathbf{N_2}$ опускаем перпендикуляр $\mathbf{M_2N_2}$ на прямую $\mathbf{m'_2}$.

4. Определяем действительную величину **[MN]** способом прямоугольного треугольника. Это будет отрезок $\mathbf{M_0\,N_2}$.

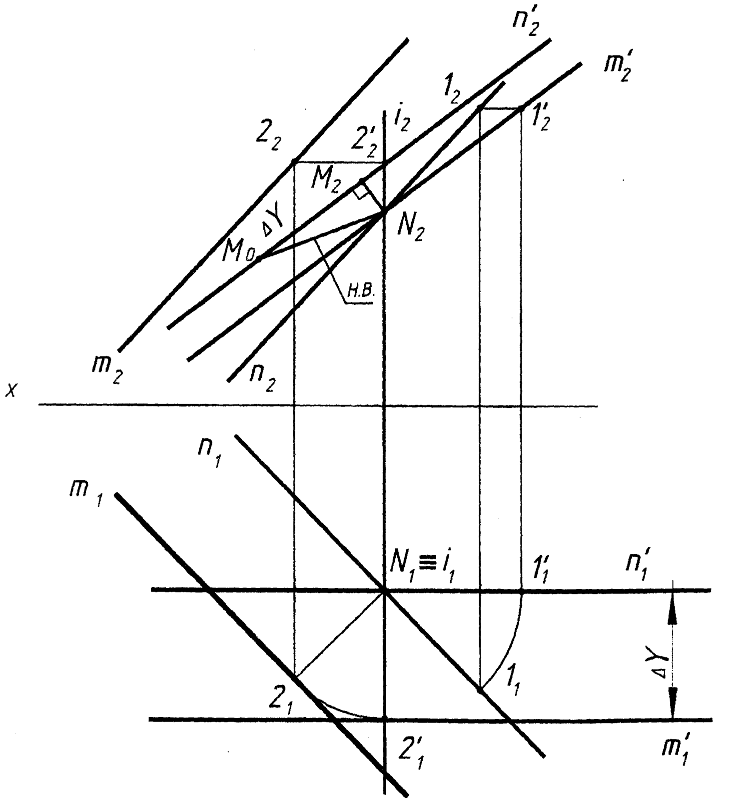


Рис. 2.17

II вариант - способ плоскопараллельного перемещения (рис. 2.18)

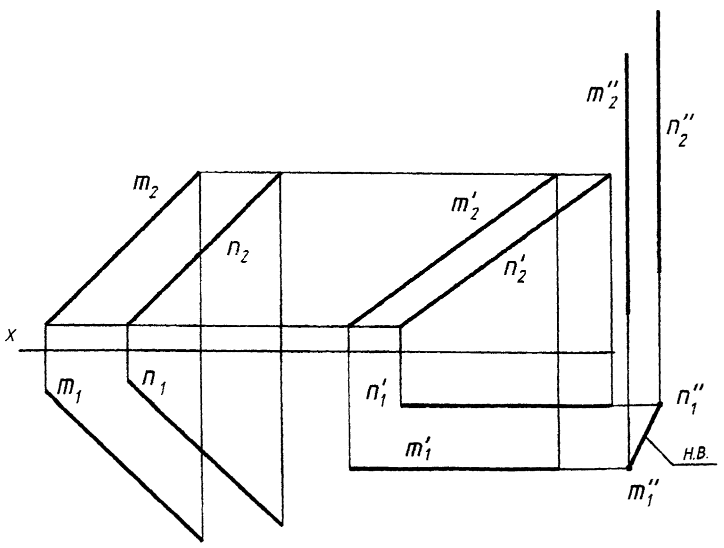


Рис. 2.18

1. Перемещаем прямые **m** и **n** в положение уровня, а затем в проецирующее положение (перпендикулярно Π_1).

2. В этом случае расстояние между точками m''_2 и n''_2 будет искомым расстоянием.

III вариант - способ замены плоскостей проекций (рис. 2.19).

Прямые **m** и **n** переводим в положение уровня, а затем в проецирующее. Расстояние между точками будет искомым. Действительно, при второй замене плоскость Π_5 расположена перпендикулярно прямым **m** и **n**. Следовательно, перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки одной прямой на другую, параллелен плоскости Π_5 и проецируется на нее без искажения.

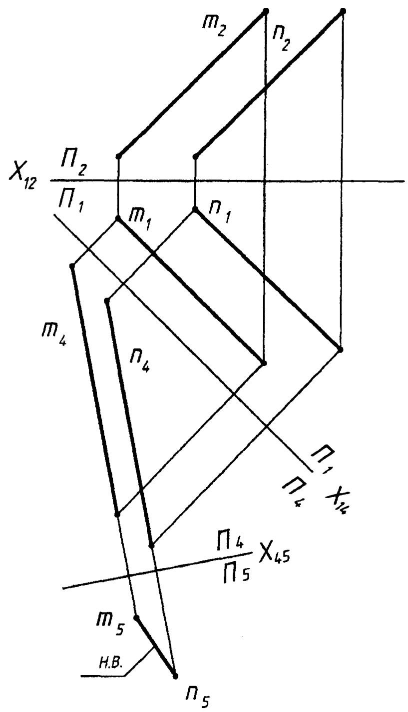


Рис. 2.19

2.2.6. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми является одновременно и расстоянием между параллельными плоскостями, в которых лежат скрещивающиеся прямые. На рис. 2.20. показан перпендикуляр общий к двум скрещивающимся прямым **AB** и **CD**. Если через данные прямые **AB** и **CD** провести параллельные между собой плоскости α и β, а через одну из этих прямых (**AB**) провести плоскость σ, перпендикулярную α и β, и найти прямую пересечения плоскостей σ и β (это прямая **MN // AB**), то в точке **E** пересечения прямых **CD** и **MN** будет проходить искомый перпендикуляр к прямым **AB** и **CD**

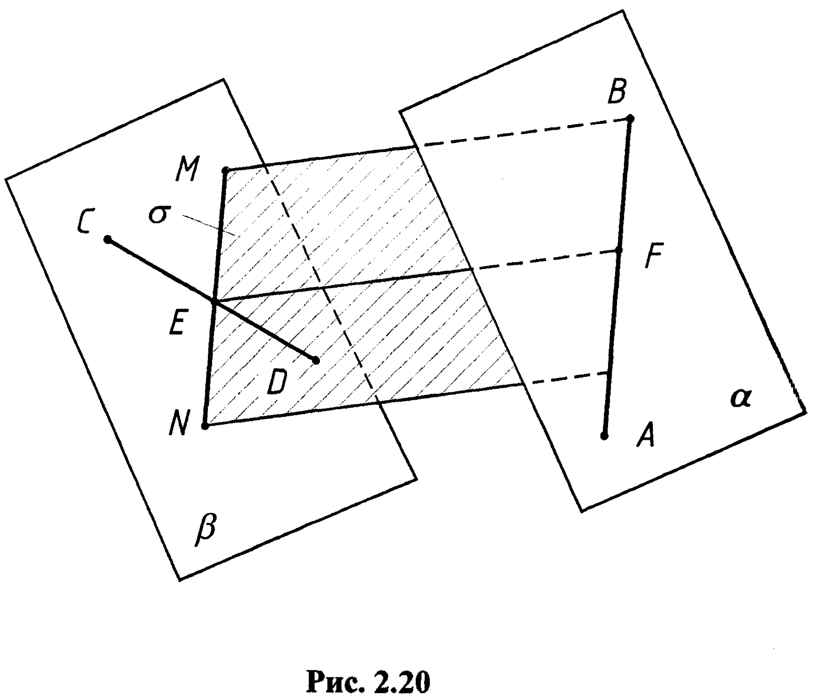


Рис. 2.20

Задача 2.10. Определить кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми **AB** и **CD** (рис. 2.21).

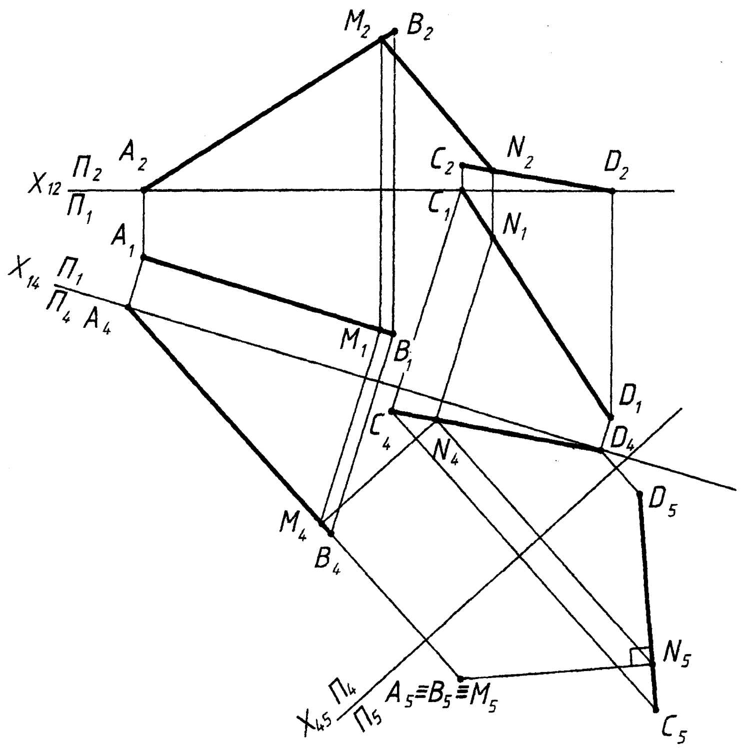


Рис. 2.21

Решение.

1. От системы плоскостей $П_1/П_2$ переходим к $П_1/П_4$, где $П_4 \perp П_1$ и $П_4 // AB$.
2. Переводим прямую **AB** в проецирующее положение, т.е. переходим от системы плоскостей $П_1/П_4$ к новой $П_4/П_5$, при этом $П_5 \perp П_4$ и $П_5 \perp AB$. Прямая **AB** на плоскости $П_5$ проецируется в виде точки $A_5 \equiv B_5$, а прямая **CD** – в виде прямой C_5D_5/
3. Проводим перпендикуляр из точки $A_5 \equiv B_5$ к прямой C_5D_5 и находим искомое расстояние между скрещивающимися прямыми. Это будет отрезок A_5N_5.

2.2.7. Расстояние между прямой и плоскостью

Плоскость должна быть параллельна прямой. Расстояние измеряется отрезком перпендикуляра.

Задача 2.11. Определить расстояние от прямой **DE** до плоскости α заданной **ΔABC**. Прямая **DE** параллельна заданной плоскости (рис. 2.22).

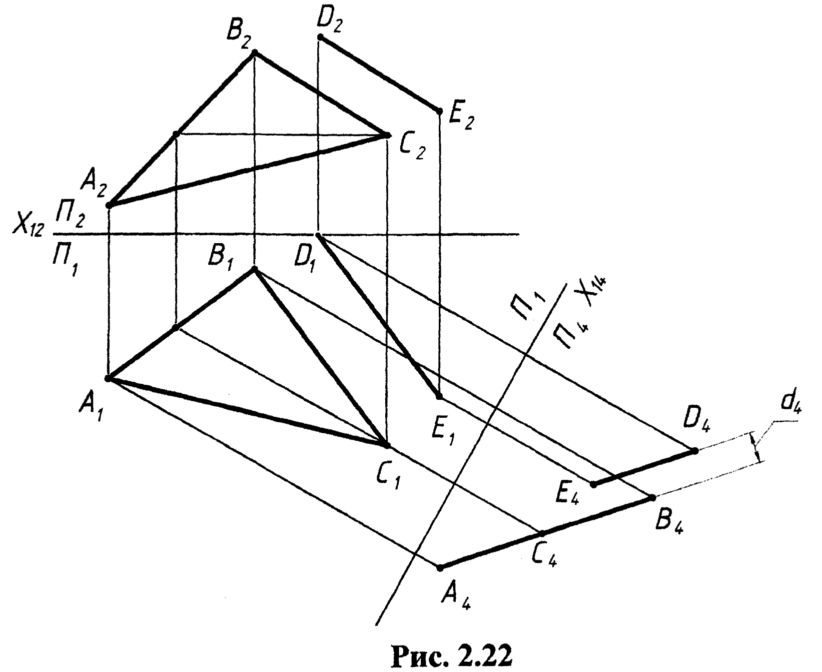


Рис. 2.22

Решение.

I вариант - способ замены плоскостей проекций:

1. Переводим плоскость общего положения **α(ΔABC)** в проецирующее положение.

2. Расстояние между вырожденной проекцией ΔABC ($A_4 B_4 C_4$) и линией D_4E_4 будет искомым расстоянием между заданными плоскостью α и параллельной ей прямой **ED**.

II вариант - способ плоскопараллельного перемещения (рис. 2.23):

1. Как и при замене плоскостей проекций переводим заданную плоскость в проецирующее положение.

2. Расстояние между вырожденной проекцией плоскости и прямой и будет искомым.

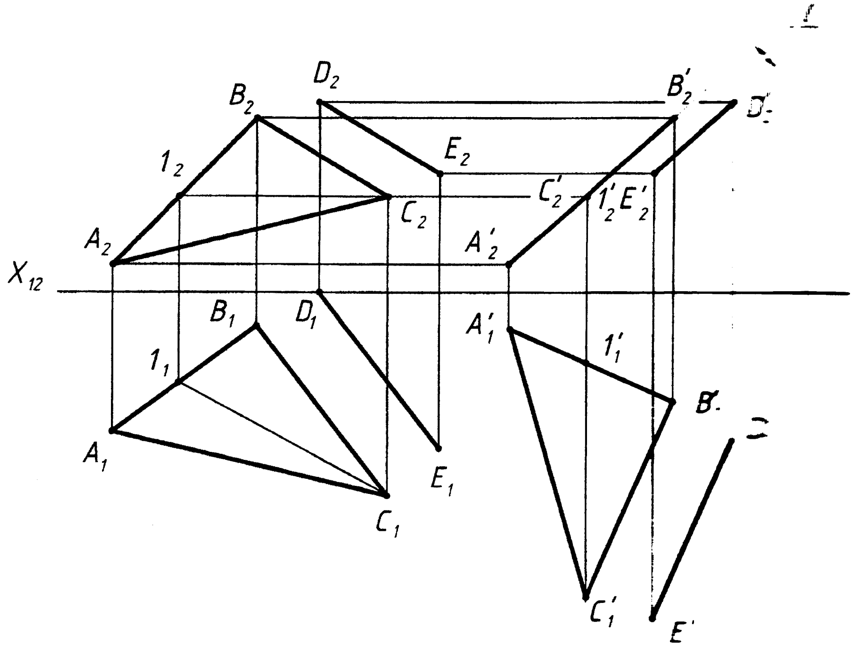


Рис. 2.23

2.2.8. Расстояние между прямой и поверхностью

Расстояние от прямой до поверхности измеряется расстоянием от прямой до ближайшей точки или образующей поверхности (у линейчатых поверхностей – это прямая). Следовательно, после определения этой точки или прямой (позиционная задача) получаем одну из ранее рассмотренных метрических задач.

Задача 2.12. Определить расстояние от прямой **m** до поверхности сферы Σ (рис. 2.24).

Кратчайшим расстоянием в данном случае будет перпендикуляр к заданной прямой и проходящий через ближайшую точку сферы. В этой точке перпендикуляр будет по отношению к сфере нормалью, проходящей через центр сферы.

Таким образом, необходимо найти основание перпендикуляра (точка на заданной прямой) и ближайшую точку на сфере.

Решение.

1. Из центра **O** сферы проводим плоскость **β**, перпендикулярную заданной прямой (с помощью горизонтали **h** и фронтали **f**).

2. Решая задачу на пересечение заданной прямой **m** с плоскостью **β**, находим точку **M** (**M_1, M_2**), которая является основанием перпендикуляра.

3. Соединяем полученную точку **M** с центром **O** сферы – прямая **MO**

4. Находим ближайшую точку **N**, лежащую на сфере. Для этого прямую **MO** заключаем в горизонтально проецирующую плоскость α и вращением вокруг оси **O** переводим в положение, параллельное плоскости **$П_2$**.

В пересечении **M_2O_2** сферы находим точку **N_2**, которая и будет искомой точкой перпендикуляра.

5. Отрезок прямой **$M'_2N'_2$** и будет расстоянием между заданной прямой и поверхностью (проекции **M_1N_1** и **M_2N_2**).

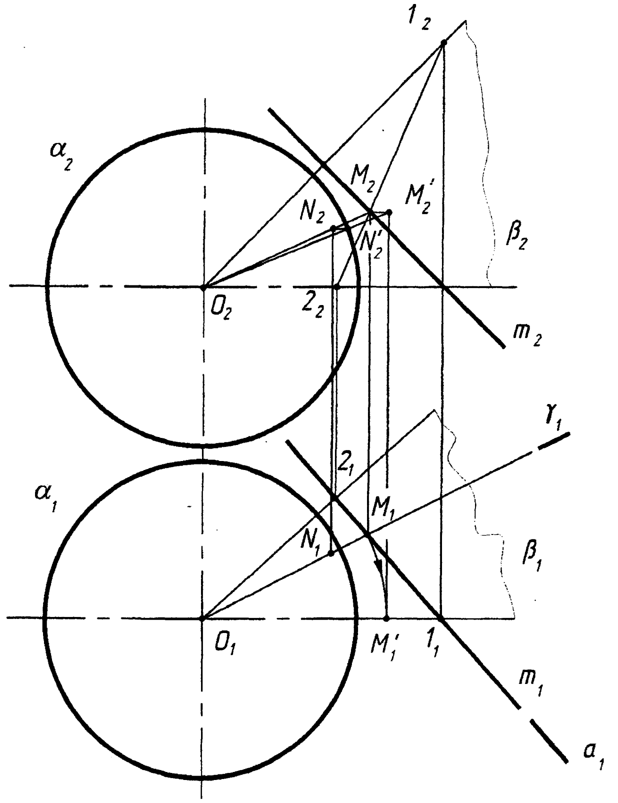


Рис. 2.24

Задача 2.13. Определить расстояние от прямой **m** до поверхности прямого кругового конуса α при условии, что прямая **m** параллельна образующей конуса (рис. 2.25).

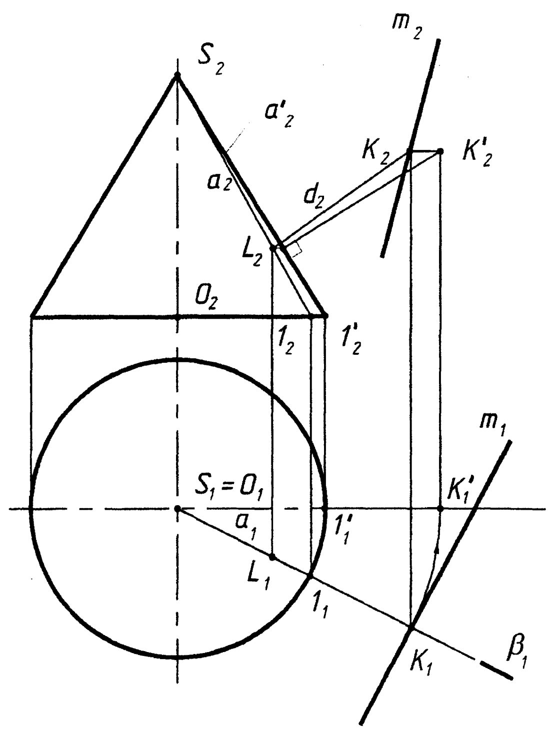


Рис. 2.25

Кратчайшим расстоянием между прямой **m** и поверхностью конуса будет перпендикуляр между заданной прямой **m** и ближайшей образующей конуса.

Перпендикуляр лежит в плоскости, проходящей через ось конуса и прямую **m.** Последовательность построений следующая:

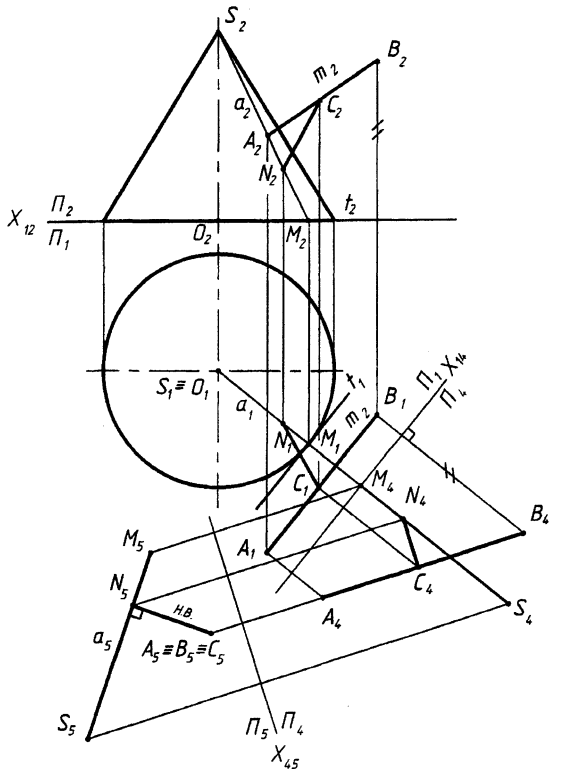
1. Через горизонтальную проекцию прямой **m** и ось конуса **OS** проводим плоскость $\beta \perp \Pi_1$ и $\beta \perp$ **m**.

2. Конус рассекается по образующей **a**, которая и будет ближайшей к заданной линии **m**.

3. Поворотом вокруг оси **OS** переводим плоскость **β**, а вместе с ней и образующую **a** в положение, параллельное плоскости проекций Π_2.

4. Расстояние между образующей **a'**$_2$ и новой проекцией K_2 и будет кратчайшим расстоянием между заданной линией **m** и поверхностью конуса (отрезок $K'_2 l'_2$).

Задача 2.14. Определить расстояние между поверхностью прямого кругового конуса и прямой **m** (рис. 2.26.), при условии, что прямая **m** не параллельна и не перпендикулярна образующей конуса (находится в общем положении).



Кратчайшим расстоянием между поверхностью конуса и заданной линией **m** будет длина перпендикуляра между прямой **m** и ближайшей образующей конуса. Так как образующая и линия **m** являются скрещивающимися линиями, то положение образующей **a** определяется с помощью касательной плоскости, построенной параллельно плоскости, принадлежащей линии **m**. Касательная плоскость задаётся линией t_1 // m_1, проведённой в точке m_1 и образующей a_1.

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми линиями определяют способом замены плоскостей проекций (см. задачу 2.10.)

Рис. 2.26

2.2.9. Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Расстояние между двумя параллельными плоскостями измеряется отрезком перпендикуляра между ними. Если плоскости будут занимать положение проецирующих плоскостей, то этот перпендикуляр будет проецироваться без искажения на плоскость проекций, перпендикулярную к заданным плоскостям.

Алгоритм решения задач данного типа может быть составлен из следующих элементарных задач (рис.2.27а):

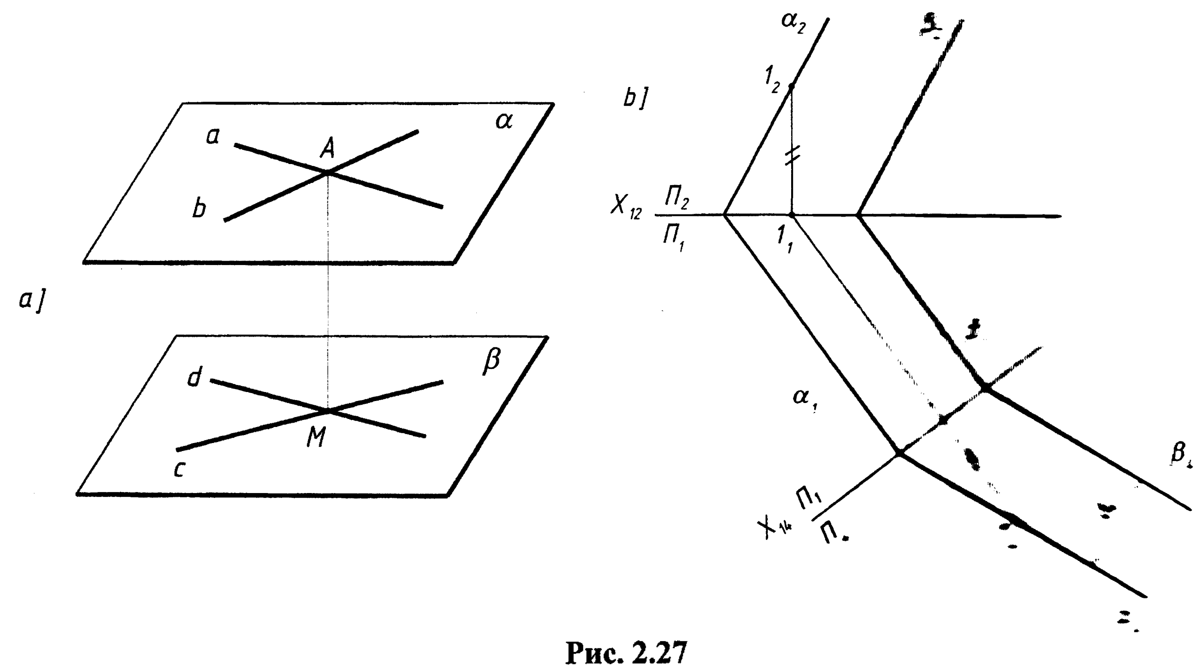


Рис. 2.27

1. Взять в плоскости α произвольную точку **A** (**A** ∈ α);
2. Из точки **A** опустить перпендикуляр **m** на плоскость **β** (**m** ∈ **A** и **m** ⊥ **β**);

3. Найти точку **M** пересечения перпендикуляра **m** с плоскостью β ($\mathbf{M} = \mathbf{m} \cap \beta$);

4. Определить действительную величину **[AM]** ($\mathbf{d} = |\mathbf{AM}|$).

На практике этот алгоритм можно упростить, если перед выполнением пункта 1 перевести плоскости в проецирующее положение. Это упрощает выполнение всех операций, что приводит к более простому решению.

Задача 2.15. Определить расстояние между плоскостями α и β, заданными следами (рис.2. 27б).

Решение.

1. Переводим плоскости α и β в проецирующее положение. Для этого переходим от системы плоскостей Π_1/Π_2 к новой Π_1/Π_4 ($\Pi_4 \perp \Pi_1$ и $X_{14} \perp \alpha_1 (\beta_1)$).

2. Расстояние $\mathbf{d}$ ($\mathbf{d_4}$) между фронтальными следами α_4 и β_4 является искомым.

Задача 2.16. Определить расстояние между параллельными плоскостями (рис. 2.28), одна из которых задана пересекающимися прямыми **AB** и **AC**, а вторая – треугольником **ΔDEF**.

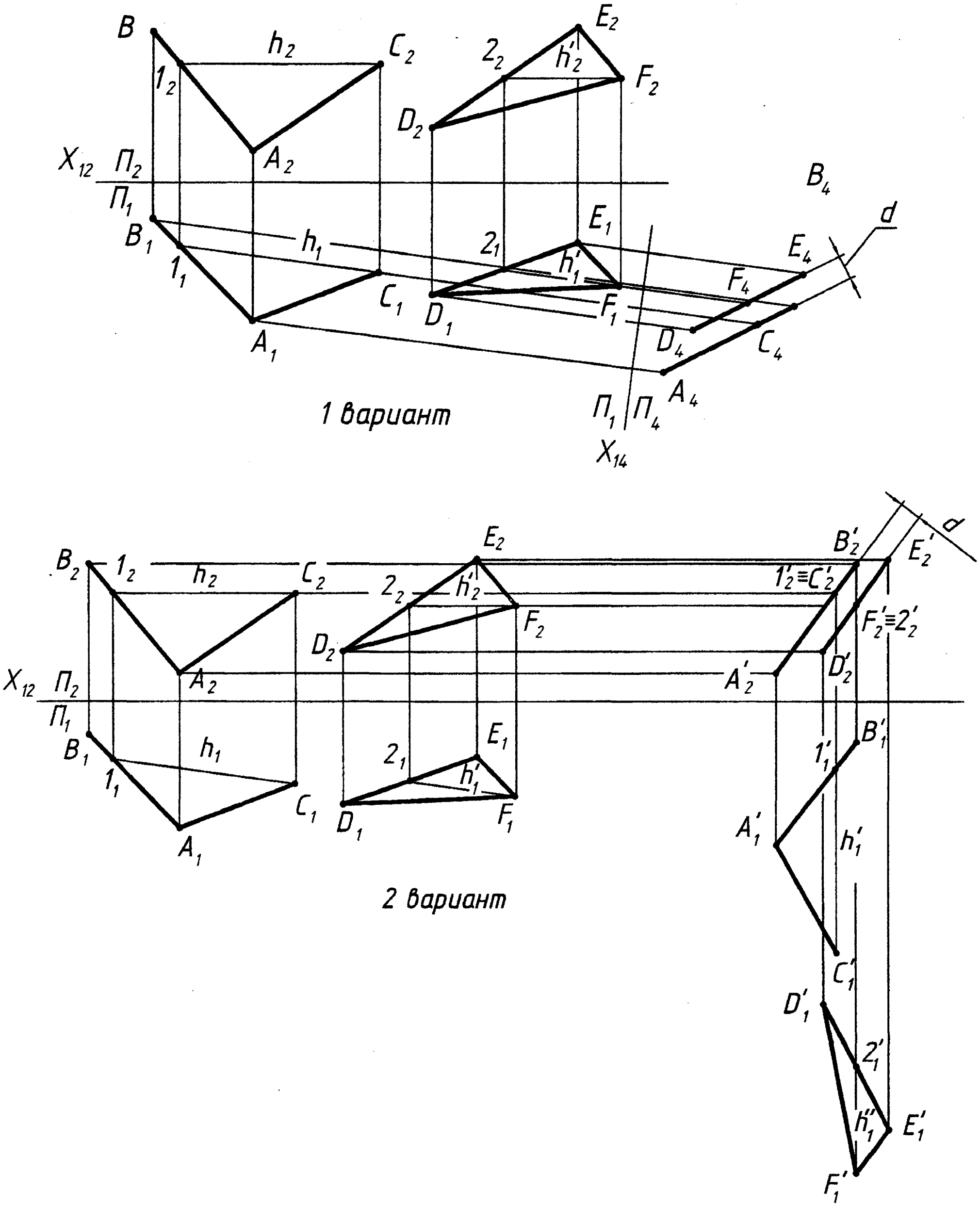


Рис. 2.28

Решение.

I вариант – замена плоскостей проекций:

1. Переходим от системы плоскостей Π_2/Π_1 к Π_4/Π_1 ($\Pi_4 \perp \Pi_1$ и $X_{14} \perp h_1$).

2. Строим на фронтальной плоскости проекций вырожденные проекции плоскостей – $A_4B_4C_4$ и $D_4E_4F_4$.

Расстояние d_4 между вырожденными проекциями плоскостей d_4 и будет искомым.

II вариант – плоскопараллельное перемещение.

Переводим заданные плоскости в фронтально проецирующее положение. Для этого горизонтальные проекции горизонталей h_1 и h'_1 плоскостей ставим перпендикулярно к оси X_{12}. Расстояние между фронтальными проекциями плоскостей d_4 равно искомому расстоянию между плоскостями.

2.2.10. Расстояние между плоскостью и поверхностью

Расстояние от плоскости до поверхности измеряется расстоянием от плоскости до ближайшей точки поверхности или прямой (для линейчатых поверхностей). После определения такой точки или прямой получаем одну из ранее рассмотренных метрических задач.

2.3. Определение углов

2.3.1. Угол между двумя пересекающимися прямыми

Плоский угол проецируется на плоскость проекций без искажения, если его стороны параллельны этой плоскости. Это свойство и используется при определении действительной величины угла по его ортогональным проекциям.

Решение задачи сводится к перемещению плоскости общего положения, которой принадлежит угол, в положение, параллельное одной из плоскостей проекций. Такое перемещение можно осуществить с помощью способов преобразования комплексного чертежа (поворот вокруг линии уровня и др.).

Задача 2.17. Определить угол между пересекающимися прямыми a и b (рис. 2.29)

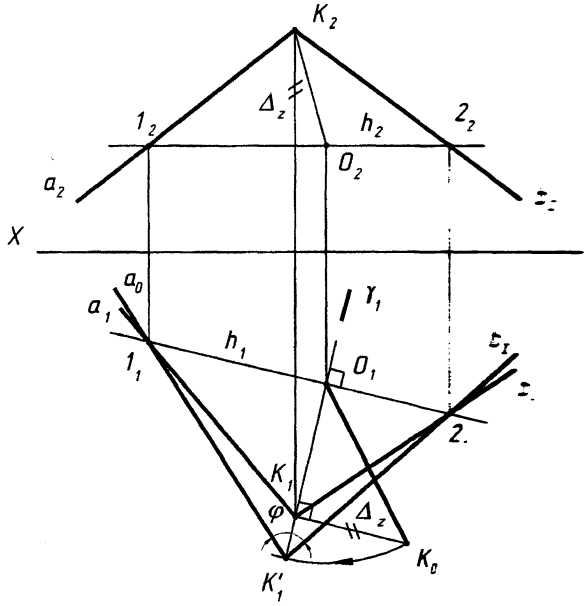


Рис. 2.29

Решение.

Определение угла между пересекающимися прямыми a и b производим способом вращения вокруг линии уровня.

Плоскость угла вращением вокруг горизонтали **h** переведем в горизонтальное положение. Для этого достаточно вокруг оси повернуть точку **K** и решить задачу по определению величины радиуса вращения R_A.

Построения выполняем в следующей последовательности:

1. Проводим горизонталь **h** (h_1 и h_2).

2. Находим центр вращения точки **K** вокруг оси. Для этого через точку **K** (K_1) проводим прямую, перпендикулярную к оси вращения h_1. Это след плоскости вращения точки **K** – горизонтально-проецирующая плоскость γ (след γ_1).

3. На пересечении γ_1 и оси вращения $\mathbf{h_1}$ отмечаем центр вращения - **O** ($\mathbf{O_1}$, $\mathbf{O_2}$). Отрезок **OK** - радиус вращения.

4. Находим действительную величину радиуса вращения как гипотезу прямоугольного треугольника $\mathbf{O_1K_1K_o}$, у которого катет $\mathbf{K_1K_o = [Z_k - Z_0] = \Delta Z}$.

5. Из центра $\mathbf{O_1}$ проводим дугу радиусом $\mathbf{O_1K_o}$ ($\mathbf{R_{вр}}$), точка пересечения которой с продолжением прямой $\mathbf{O_1K_1}$ (след γ_1) укажет положение точки $\mathbf{K'_1}$.

6. Соединяем точку $\mathbf{K'_1}$ с точками $\mathbf{1_1}$ и $\mathbf{2_1}$, лежащими на оси вращения и не меняющими своего положения.

7. Угол φ и будет действительным углом между пересекающимися прямыми **a** и **b**.

2.3.2. Угол между двумя скрещивающимися прямыми

Величиной угла между двумя скрещивающимися прямыми, является угол между двумя пересекающимися прямыми, проведенными из произвольной точки параллельно данным скрещивающимся. Следовательно, и в этом случае задача решается способом вращения вокруг линии уровня.

Задача 2.18. Определить угол между скрещивающимися прямыми **m** и **n** (рис. 2.30).

Решение.

1. Строим плоский угол, стороны которого параллельны заданным линиям (точка **K** выбирается произвольно).

Дальнейшие построения - см. задачу 2.17.

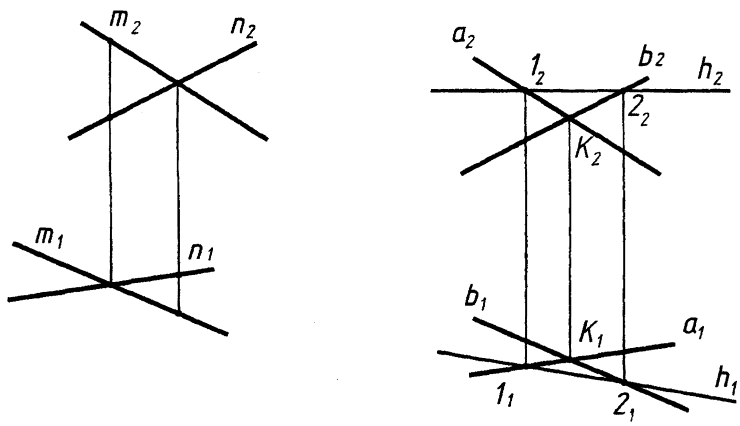


Рис. 2.30

2.3.3. Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой и плоскостью определяется величиной острого угла между этой прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Алгоритм нахождения угла φ (рис. 2.31):

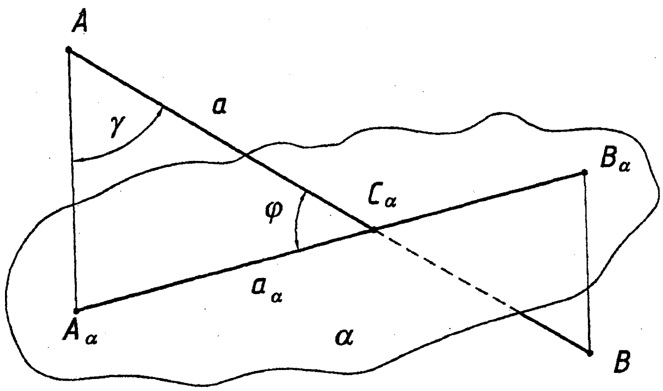


Рис. 2.31

1. Из произвольной точки A на прямой a опускаем перпендикуляр на плоскость α.

2. Определяем точку встречи этого перпендикуляра с плоскостью α (A_α - ортогональная проекция точки A на плоскость α).

3. Находим точку пересечения прямой a с плоскостью α ($C_\alpha = \alpha \cap a$).

4. Проводим $A_\alpha C_\alpha$ – проекцию прямой a на плоскости α (a_α).

5. Определяем действительную величину угла φ^0.

Задача 2.19. Определить угол между прямой **AB** и плоскостью α, заданной горизонталью **h** и фронталью **f** (рис. 2.32).

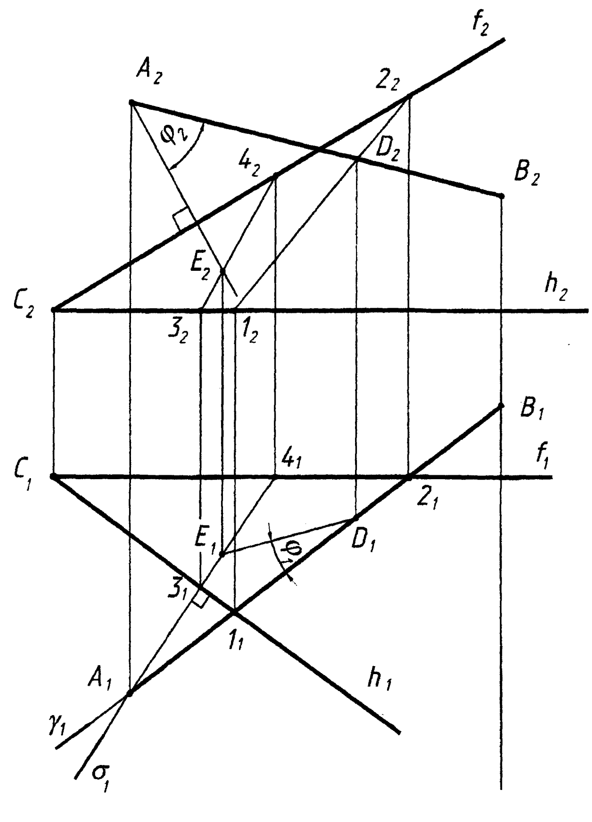


Рис. 2.32

Решение.

1. Находим точку **D** пересечения прямой **AB** с плоскостью α, решая задачу на пересечение прямой с плоскостью.

2. Из точки **A** проводим перпендикуляр к плоскости α ($\alpha_1 \perp h_1$ и $\alpha_2 \perp f_2$).

3. Находим точку **E** пересечения перпендикуляра с плоскостью, заключая перпендикуляр в горизонтально-проецирующую плоскость β (след β_1).

4. Соединяем точки **D** и **E**. Угол $A_1D_1E_1$ – горизонтальная проекция угла φ между прямой **AB** и плоскостью α, а угол $A_2D_2E_2$ – фронтальная проекция угла φ.

Натуральную величину угла φ определяем способом вращения вокруг линии уровня.

Если в задаче требуется определить только угол φ без изображения его проекций, то решение можно значительно упростить. Для этого достаточно определить угол ψ между данной прямой **AB** и перпендикуляром к плоскости α. Угол же $\varphi = 90^0 - \psi$. Не требуется определять точки **D** и **E**.

Задача 2.20. Определить угол между прямой **a** и плоскостью α, заданной треугольником **ABC** (рис. 2.33).

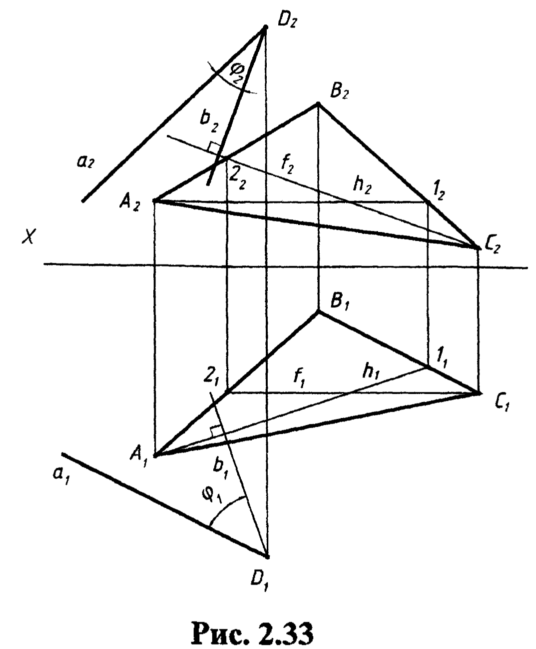


Рис. 2.33

Решение.

1. Строим горизонталь **h** и фронталь **f** в плоскости α.

2. Из произвольной точки **D**, принадлежащей прямой **a** ($D \in a$), опускаем перпендикуляр на плоскость α – $b \perp \alpha$ ($b_1 \perp h_1$, $b_2 \perp f_2$).

3. Угол ψ между перпендикуляром и линией **a** – дополнительный.

4. Определяем действительную величину угла ψ вращением вокруг линии уровня (см. задачу 2.17.).

5. Вычисляем значение искомого угла по формуле: $\varphi = 90^0 - \psi$.

Решение аналогичной задачи упрощается, если плоскость задана следами, т.к. отпадает необходимость в построении горизонтали и фронтали.

Задача 2.21. Определить угол между прямой **a** и плоскостью α, заданной следами (рис. 2.34).

Решение.

1. Из произвольной точки **A** прямой **a** опускаем перпендикуляр **b** на плоскость α ($b_1 \perp \alpha_1$, $b_2 \perp \alpha_2$).

2. Определяем действительную величину угла ψ^0.

3. Вычисляем значение искомого угла $\varphi = 90^0 - \psi^0$.

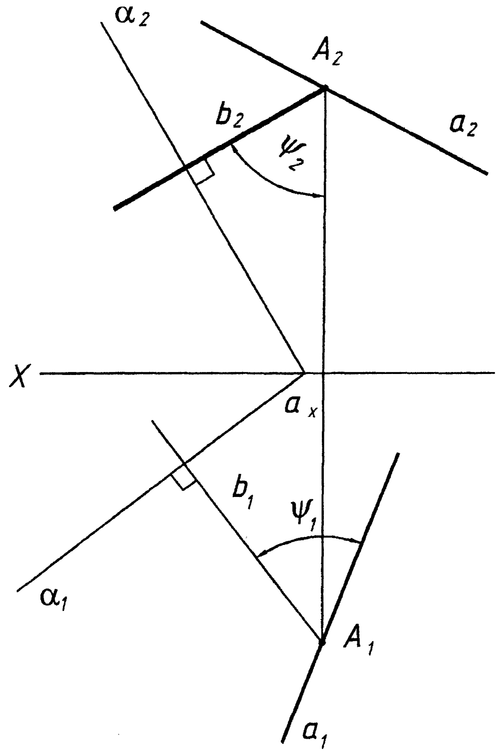


Рис. 2.34

2.3.4. Угол между двумя плоскостями

Угол между двумя плоскостями измеряется линейным углом, образованным двумя прямыми в результате сечения граней этого угла плоскостью, перпендикулярно к их ребру.

Выполним следующие построения (рис. 2.35):

1. Определяем прямую **n** – линию пересечения плоскостей α и β (**n=α∩β**).

2. Проводим плоскость $\delta \perp$ **n** (она будет перпендикулярна α и β).

3. Определяем прямые **a** и **b** ($a = \delta \cap \alpha$, $b = \delta \cap \beta$).

4. Находим действительную величину φ между прямыми **a** и **b**. Угол φ – искомый.

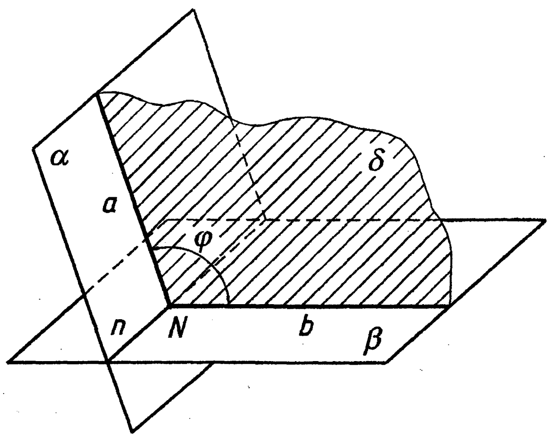


Рис. 2.35

Задачу можно упростить следующим образом (рис. 2.36):

1. В плоскости σ произвольно выбираем точку **M** ($M \in \delta$).

2. Из точки **M** опускаем перпендикуляры на прямые **a** и **b**. Точки **A** и **B** – пересечение $\alpha \cap k = A$ и $l \cap \beta = B$. Точка **N** получается в пересечении прямых **a** и **b** ($N = a \cap b$).

3. В четырехугольнике **MANB** определяем угол γ.

4. Определяем искомый угол φ из соотношения $\varphi = 180^0 - \gamma$.

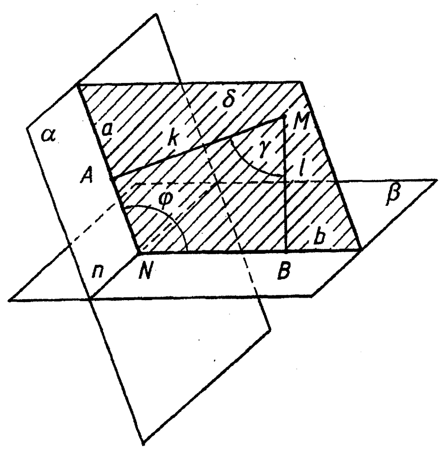


Рис. 2.36

Задача 2.22. Определить угол φ между плоскостями α и β. Плоскость α задана параллельными прямыми **a** и **b**, а плоскость β – пересекающимися прямыми **c** и **d** (рис. 2.37).

Решение.

1. Строим в плоскостях α и β горизонтали **h**, **h′** и фронтали **f**, **f′**.

2. Из произвольной точки **M** проводим перпендикуляры **k** и ***l*** к плоскостям α и β ($k_1 \perp h_1$ и $l_1 \perp h'_1$).

3. Находим действительную величину угла γ способом вращения вокруг горизонтали (на рис. не показано).

4. Вычисляем значения угла $\varphi = 180^0 - \gamma$.

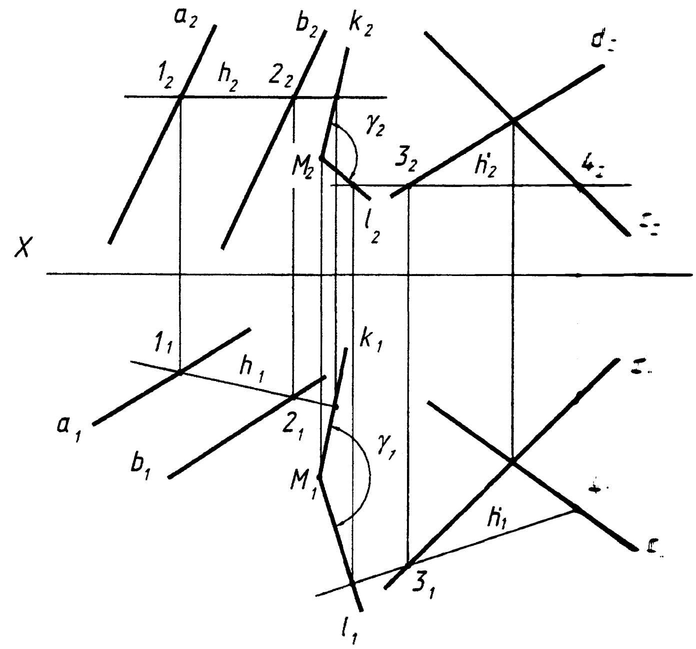


Рис. 2.37

Задача 2.23. Определить угол между плоскостями α и β заданными следами (рис.2.38).

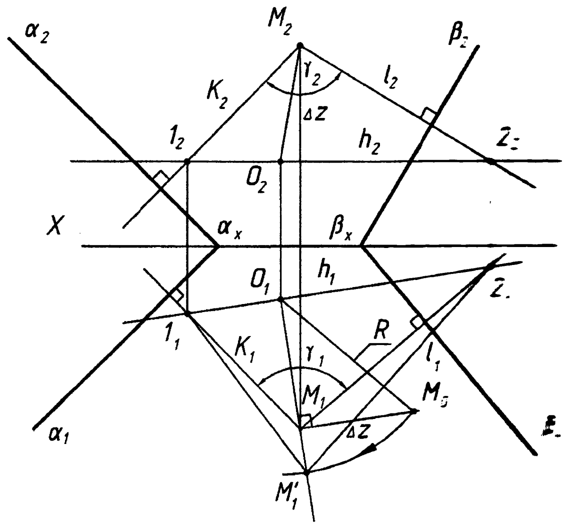


Рис. 2.38

Решение.

1. Так как плоскости заданы следами, то отпадает необходимость в выполнении пункта 1 предыдущего решения.

2. Из произвольной точки проводим перпендикуляры **k** и ***l*** к следам плоскостей ($k_1 \perp \alpha_1$, $k_2 \perp \alpha_2$; $l_1 \perp \beta_1$, $l_2 \perp \beta_2$)

3. Вращением вокруг линии уровня находим действительную величину угла γ.

4. Вычисляем угол $\varphi = 180^0 - \gamma$.

Задача 2.24. Определить угол при ребре **AB** между двумя плоскостями, заданными треугольниками **ABC** и **ABD** (рис. 2.39).

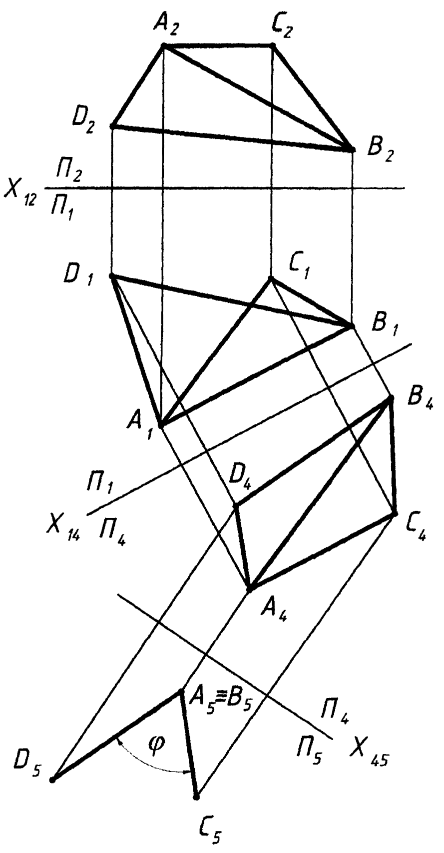


Рис. 2.39.

Решение. В этом случае угол при ребре определяется заменой плоскостей проекций. При этом ребро из общего положения переводится в проецирующее положение, т.е. выполняется последовательно 2 замены плоскостей.

1. Вводим новую систему плоскостей $\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4$ при этом $X_{14} // A_1B_1$ и $\Pi_4 \perp \Pi_1$.

2. Переходим от $\Pi_1/\Pi_4 \rightarrow \Pi_4/\Pi_5$. при этом $\Pi_5 \perp A_4B_4$ и $\Pi_5 \perp \Pi_4$.

3. Угол φ – искомый.

2.3.5. Угол между плоскостью общего положения и плоскостью проекций

Угол между плоскостью общего положения и плоскостью проекций – это линейный угол между линией наибольшего наклона плоскости и ее проекцией на плоскость проекций.

Отличительным признаком для проекции линии наибольшего наклона является перпендикулярность горизонтальной (фронтальной) проекции горизонтальной проекции горизонтали (фронтальной проекции фронтали) и горизонтальному (фронтальному) следу плоскости.

Задача 2.25. Определить угол наклона плоскости β (Δ**ABC**) к плоскости проекций Π_1 (рис. 2.40).

Решение.

1. В плоскости треугольника **ABC** строим горизонталь **h** (h_1 и h_2).

2. Из верхней точки B_1 проводим перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали h_1 - $B_1 2_1$.

3. Находим фронтальную проекцию линии наибольшего наклона $B_2 2_2$ к плоскости Π_1.

4. Находим действительную величину угла α = **ABC** ^ Π_1, способом треугольника. Это и будет искомый угол.

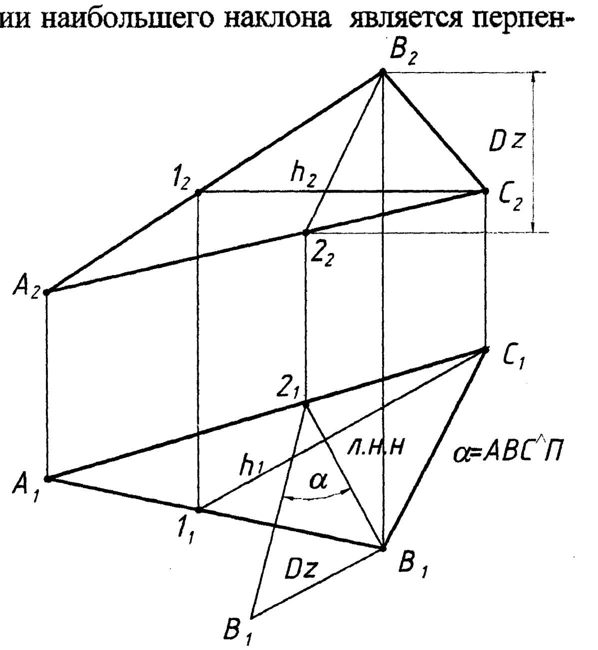


Рис. 2.40

2.4. Определение величины части геометрического образа

В эту группу входят задачи на определение:

– длины части линии (отрезка);

– величины части плоскости (плоской фигуры);

– величины части поверхности (развертки).

2.4.1. Определение длины части прямой линии

Определение длины части прямой, т.е. отрезка, осуществляется решением задачи преобразования чертежа или способом прямоугольного треугольника.

2.4.2. Определение длины части кривой линии

Определение длины части кривой линии осуществляется заменой кривой линии на ломаную и определением ее длины как суммы отрезков ломаной. Отрезки ломаной линии определяются, используя решения первой исходной задачи преобразования чертежа.

Задача 2.26. Определить длину плоской кривой, приведенной на рис. 2.41.

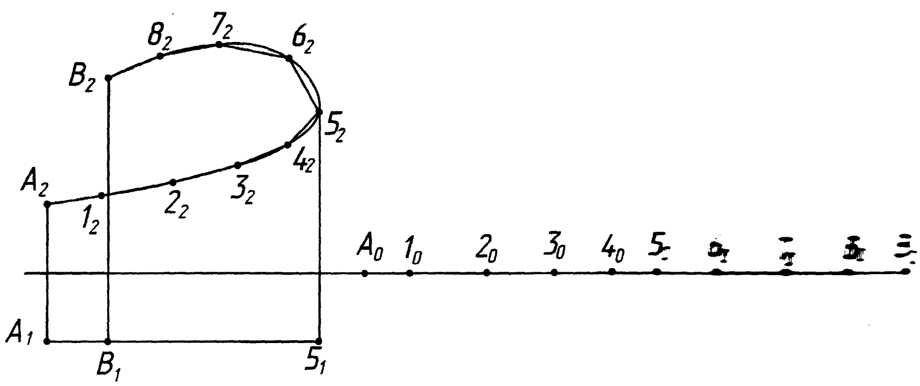


Рис. 2.41

Решение.

Используем способ хорд. Кривую линию делим на некоторое количество частей и проводим хорды. Затем эти хорды последовательно откладываем на прямой A_0B_0, которая и будет разверткой этой линии. Чем меньше хорды, тем точнее развертка этой кривой.

При построении развертки пространственной кривой обычно используют способ малых хорд и способ прямоугольного треугольника. Можно также использовать и способ замены плоскостей. При этом вначале находят предварительную развертку линии на базе одной из ее проекций, а затем искомую.

Задача 2.27. Построить развертку пространственной кривой, приведенной на чертеже (рис. 2.42).

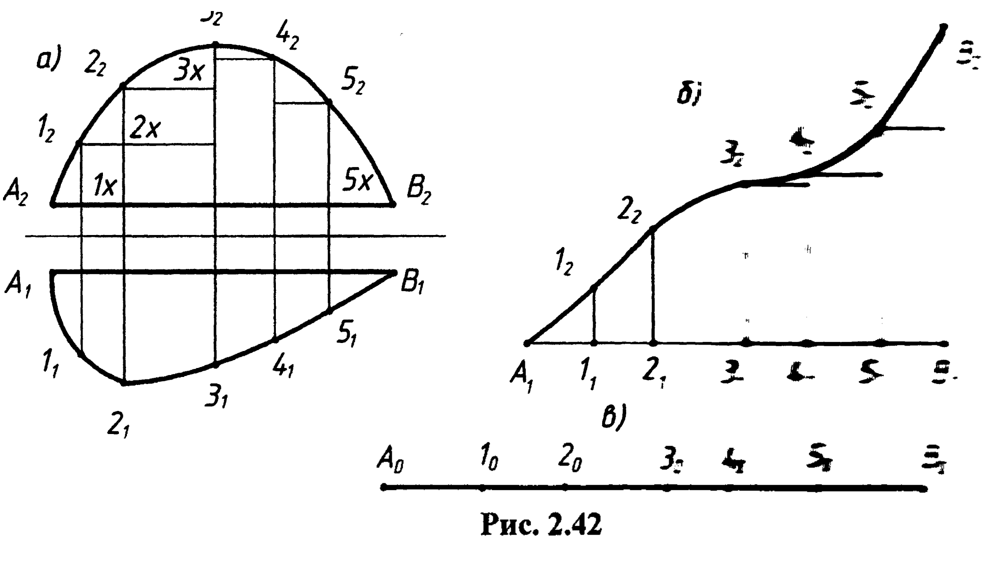


Рис. 2.42

Решение:

1. Предварительная развертка (рис. 2.40б).

Делим заданную линию на некоторое количество частей и находим развертку A_1 ... B_1 горизонтальной проекции заданной линии (аналогично, как в задаче 2.26.). Для этого проводим горизонтальную прямую A_1B_1 и на ней последовательно откладываем хорды $A_1 1_1$; $1_1 2_1$; $2_1 3_1$ ... - горизонтальной проекции кривой.

Из точек $1_1, 2_1$ ... , проводим перпендикуляры к прямой A_1B_1 и откладываем на них взаимное превышение точек (способ прямоугольного треугольника): $1_1 1_2 = 1_x 1_2$..., $2_{1x} 2_2 = 2_x 2_2$ ... Соединив полученные точки, получим предварительную развертку $A_1 3_2 B_2$ линии.

2. Искомая развертка (рис. 2.40в).

Находим развертку кривой A_1 ... B_2, как плоской кривой (аналогично задаче 2.26.) и получаем отрезок A_0 ... B_0, который и будет искомой разверткой заданной линии **A3B**.

2.4.3. Определение величины части плоскости

В общем случае часть плоскости может быть задана:

а) плоской замкнутой линией – треугольник, многоугольник, окружность, эллипс и т.п.;

б) кривой линией пересечения плоскости с поверхностью или другим каким-либо способом, но план решения не меняется.

Задача 2.28. Построить линию пересечения прямого кругового конуса фронтально проецирующей плоскостью α, определить натуральную величину сечения (рис. 2.43).

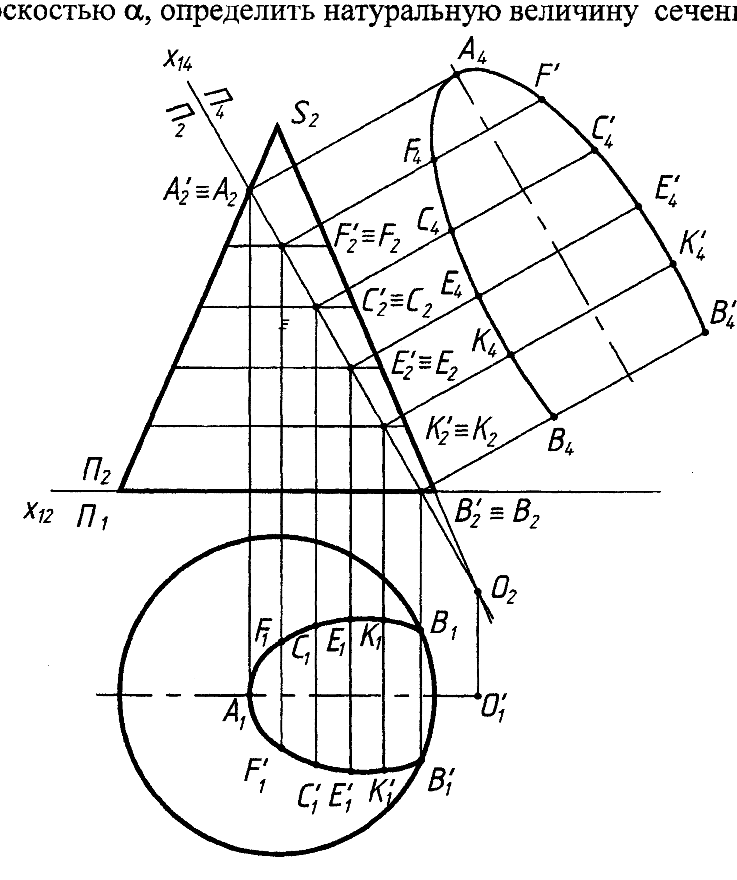


Рис. 2.43

Решение. Плоскость α пересекает поверхность конуса по эллипсу, фронтальная проекция которого совпадает со следом плоскости α_2.

Большая ось этого эллипса – отрезок A_2D_2. Разделив A_2D_2 пополам, получаем фронтальную проекцию центра эллипса – точку O_2 , а по ней и O_1. Малая ось проходит через O_1 и находится с помощью секущей плоскостью, проходящей через O_2 перпендикулярно оси конуса. Горизонтальная проекция линии пересечения также эллипс: большая ось $A_1 D_1$, а малая C_1C_1'.

Натуральную величину сечения конуса строим с помощью способа замены плоскостей. Ось X_{14} проводим совпадающей со следом α_2. Остальные построения по чертежу.

2.4.4. Определение части поверхности – построение разверток

Разверткой поверхности называется плоская фигура, образующаяся при совмещении поверхности с плоскостью. При этом поверхность представляется как гибкая, но нерастяжимая и несжимаемая пленка.

На развертках сохраняются длины отрезков линий, лежащих на поверхности, величины углов между линиями и площади фигур, образованных замкнутыми линиями.

Для построения разверток поверхностей используются следующие способы: способ треугольников (триангуляции), нормального сечения и раскатки.

Развертки пирамидальных поверхностей. Поверхность пирамиды всегда можно совместить с плоскостью, т.к. она состоит из плоских граней. Для построения развертки достаточно построить совокупность треугольников, равновеликих граням пирамиды. При этом достаточно определить натуральные величины этих треугольников, для чего необходимо иметь натуральные длины всех ребер пирамиды.

Построение развертки пирамиды проводится в следующей последовательности:

1. Определяются длины всех ребер, включая стороны основания пирамиды.

2. Строятся последовательно треугольники – грани пирамиды таким образом, чтобы они примыкали один к другому и у них была общая вершина.

Задача 2.29. Построить полную развертку пирамиды **SABC** (рис. 2.44).

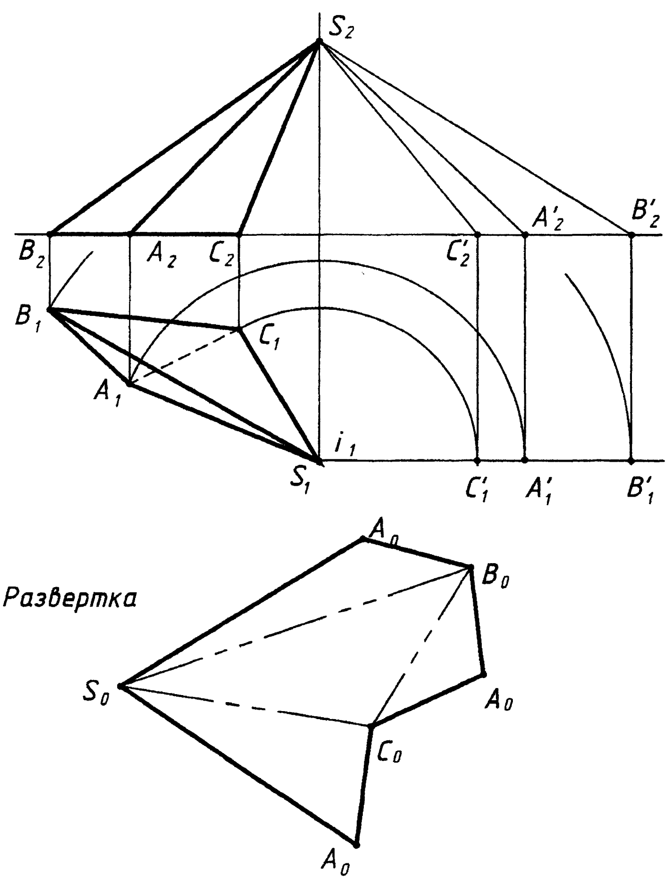


Рис. 2.44

Решение.

1. Основание треугольника **ABC** расположено в горизонтальной плоскости уровня. Поэтому его стороны на Π_1 проецируются в натуральную величину.

2. Для определения натуральных размеров боковых ребер используем метод вращения отрезка вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций Π_1 и проходящей через один из концов отрезка (точку **S**). Натуральной величиной боковых ребер являются отрезки S_2C_2, $S_2A'_2$, $S_2B'_2$.

3. На развертке последовательно строим треугольники граней пирамиды каждый по трем сторонам. Выполненные построения видны из рис. 2.42, на котором равновеликие отрезки отмечены одинаковыми значками.

4. Так как по условию задачи требуется построение полной развертки пирамиды, к развертке боковой поверхности пристраивается треугольник основания.

Развертки конических поверхностей. Развертка боковой поверхности прямого кругового конуса представляет круговой сектор, радиус которого равен длине образующей конической поверхности l = [SA], а центральный угол $\varphi = 360^\circ r/l$ (рис. 2.45). Нанесение точки **B** на развертку видно из построений.

Приближенная развертка поверхности наклонного конуса строится по аналогии с разверткой поверхности пирамиды. Для этого поверхность наклонного конуса аппроксимируем (заменяем) вписанной в него пирамидой. Чем меньше размеры граней аппроксимирующей пирамиды, тем более высока степень совпадения приближенной развертки с теоретической.

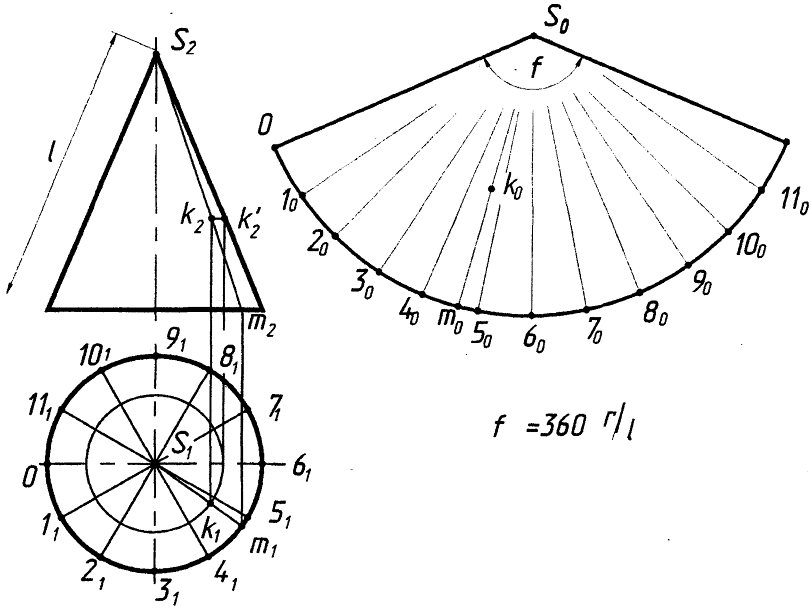


Рис. 2.45

Задача 2.30. Построить развертку боковой поверхности наклонного конуса (рис. 2.46)

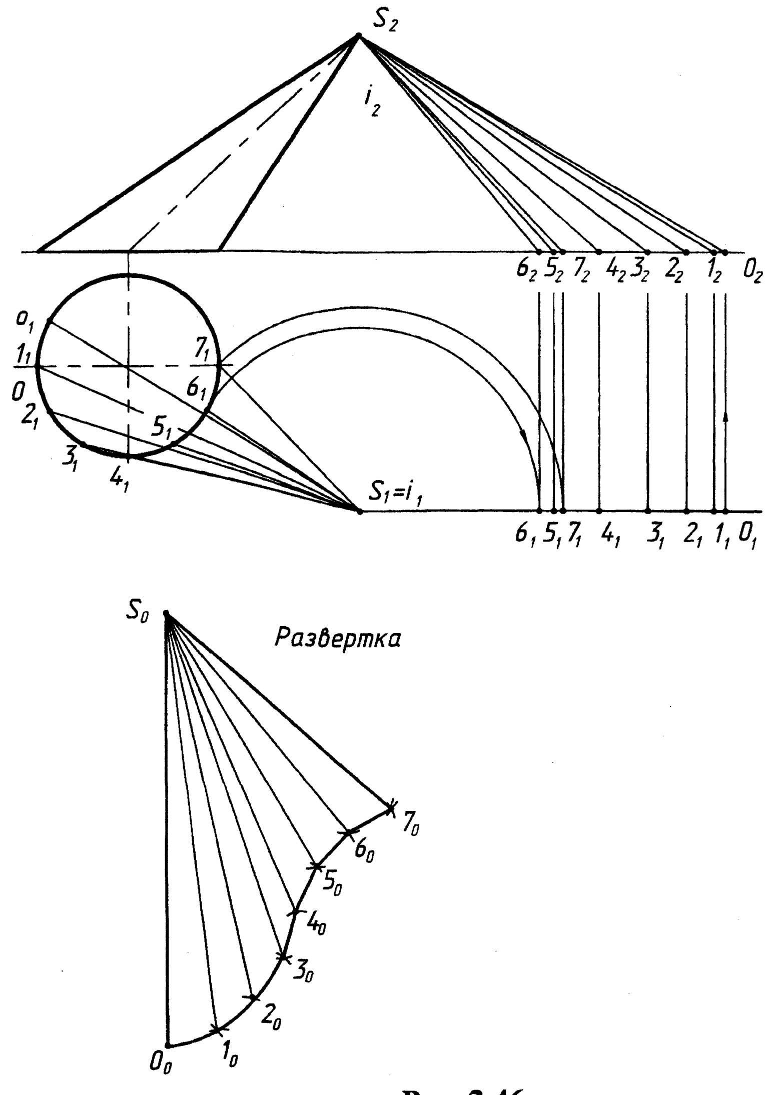


Рис. 2.46

Решение.

1. Коническую поверхность аппроксимируем (заменяем) поверхностью вписанной пирамиды. Так как коническая поверхность в данном случае имеет плоскость симметрии γ, то развертку можно построить только одной половины поверхности.

2. Разделим от точки O_1 половину окружности основания конической поверхности на 6 равных частей и полученные точки соединим. Это будет основание пирамиды. Соединив точки $1_1, 2_1, 3_1$ с вершиной S будем иметь ребра вписанной пирамиды.

2. Определяем натуральную величину ребер пирамиды, вращая их вокруг оси, проходящей через вершину S_1, перпендикулярно плоскости проекций Π_1: полученные отрезки $S_2O'_2$, $S_21'_2$, $S_22'_2$ ... и будут натуральными величинами ребер.

3. Строим развертку поверхности половины пирамиды. Для этого строим отрезок $S_2O_0 = S_2O'_2$ и к нему пристраиваем 6 треугольников, примыкающих друг к другу. Каждый из этих треугольников строится по трем сторонам - двум сторонам равным натуральным величинам ребер (образующим) и третьей - натуральной величине стороны основания.

После этого через точки O_0, 1_0, 2_0 ... основания конической поверхности проводим плавную кривую.

Развертки призматических поверхностей.

Способ треугольников. Построения проводятся по следующей схеме.

1. Разбиваем каждую боковую грань призмы, представляющей собой четырехугольник, диагональю на два треугольника.

2. Определяем натуральные величины сторон всех треугольников.

3. По трем сторонам строятся последовательно все треугольники.

Задача 2.31. Построить развертку наклонной призмы (рис. 2.47).

Решение:

1. Разбиваем боковые грани пирамиды с помощью диагоналей AK, BN и CM на треугольники.

2. Способом вращения вокруг фронтально-проецирующих осей (точки A_2, B_2 и C_2) определяем натуральные величины построенных диагоналей - это отрезки $A_1K'_1$, $B_1N'_1$, $C_1M'_1$.

3. Величины боковых граней призмы берем из фронтальной проекции, т.к. на фронтальную плоскость проекций они проецируются без искажений, а величины сторон оснований - из горизонтальной проекции, т.к. они тоже спроецированы без искажений.

4. По трем сторонам строим треугольники боковой поверхности, соблюдая их последовательность.

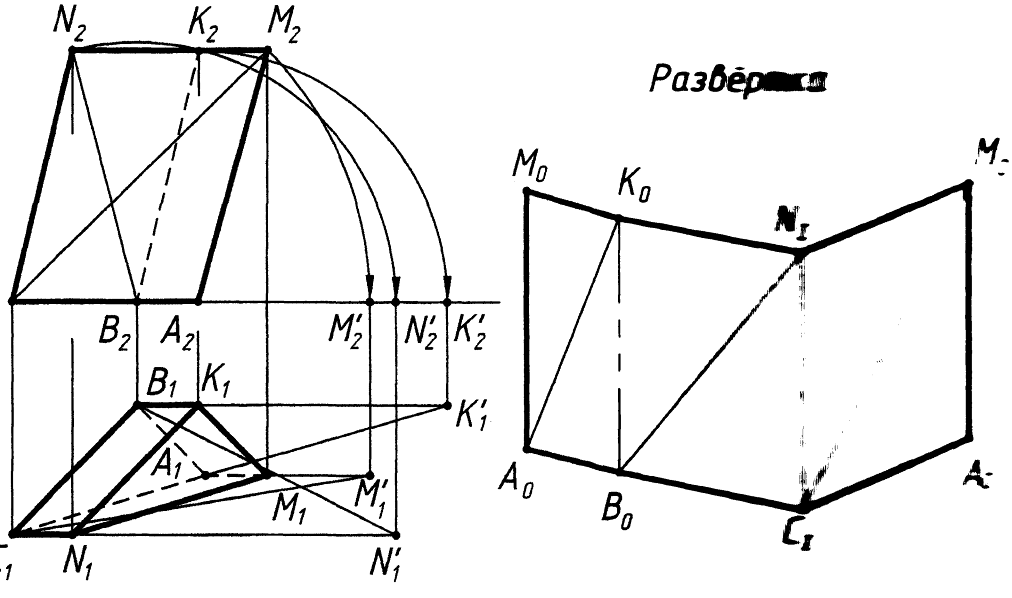


Рис. 2.47

2. Последовательным вращением вокруг боковых ребер (они являются линиями уровня) все боковые грани совмещаются с плоскостью уровня, проходящей через ребро, по которому разрезается данная призма.

Задача 2.33. Построить развертку треугольной призмы (рис. 2.49)

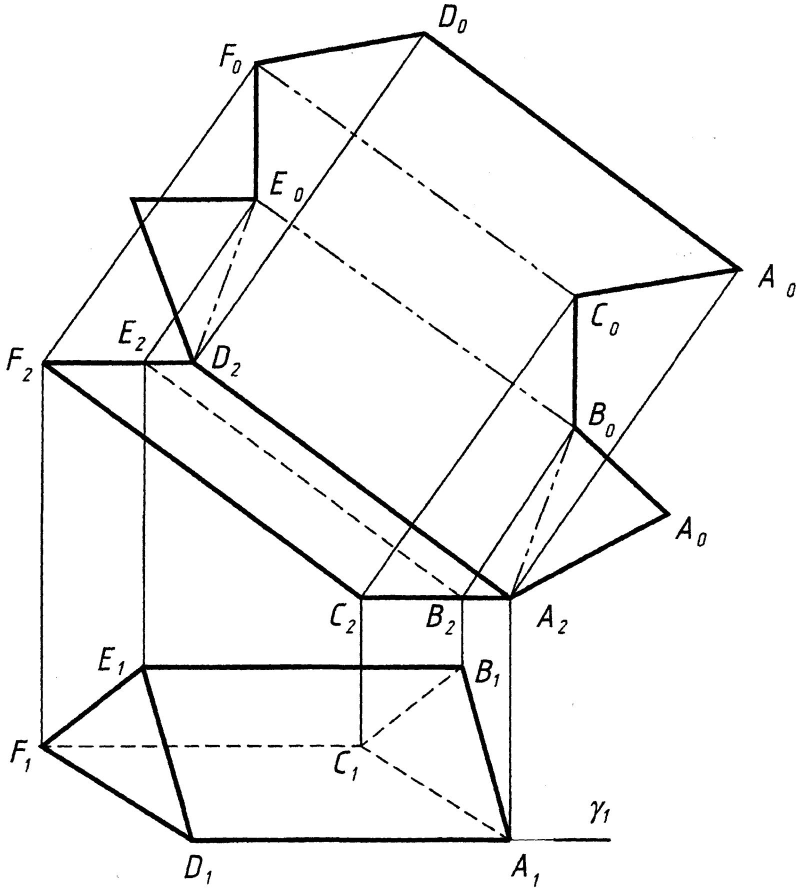


Рис. 2.49

Решение.

1. За плоскость развертки принимаем фронтальную плоскость γ, проходящую через ребро **АА′**.

2. Совместим грани **АА′В′В** с плоскостью γ, мысленно разрезаем боковую поверхность призмы по ребру **АА′** и осуществляем поворот грани **АА′В′В** вокруг ребра **АА′** ($A_2A'_2$). При этом повороте ребро **АА′** не меняет своего положения.

3. Находим совмещенное положение ребра $B_2B'_2$ с плоскостью γ. Для этого из точки B_2 проводим перпендикуляр к ребру $A_2A'_2$ и засекаем на нем дугой, радиуса $[A_1B_1]$, проведенного из точки A_2, точку B_0.

4. Через B_0 проводим прямую $B_0B'_0 \,//\, A_2A'_2$ $(B_0B'_0 = B_2B'_2)$.

5. Принимаем совмещенное положение ребра $B_0B'_0$ за новую ось вращения и поворачиваем грань **ВВ′ С′С** до совмещения с плоскость γ. Из точки C_2 проводим перпендикуляр к $B_0B'_0$ и из точки B_0 дугу радиусом равным отрезку **[ВС]**. В пересечении получаем точку C_0. Из точки C_0 проводим прямую $C_0C'_0 \,//\, B_0B'_0$.

6. Аналогично находим положение ребра $A_0A'_0$.

7. Соединив прямыми линиями точки A_2, B_0, C_0, A_0 и A'_2, B'_0, C'_0, A'_0, получим развертку боковой поверхности призмы.

8.Для получения полной развертки пристраиваем треугольники основания A_2, A_0, B_0 и A'_2, B'_0, A'_0.

Развертки цилиндрических поверхностей. Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра представляет собой прямоугольник с основанием, равным длине окружности основания цилиндра и высотой, равной высоте цилиндра.

Для построения развертки наклонной цилиндрической поверхности используются те же способы нормального сечения и раскатки, которые используются при развертывании боковой поверхности призмы. В обоих случаях цилиндрическую поверхность заменяют призматической поверхностью, вписанной в данную цилиндрическую. Предпочтение следует отдать способу нормального сечения, т.к. в этом случае можно не прибегать к замене цилиндрической поверхности призматической.

Задача 2.34. Построить развертку поверхности наклонного цилиндра методом нормального сечения (рис.2.50).

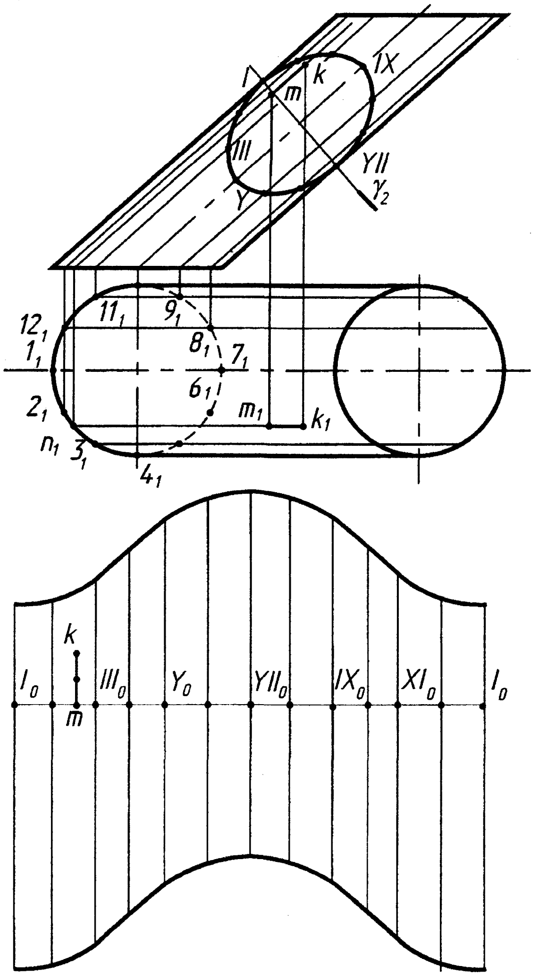


Рис. 2.50

Решение.

1. Проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость γ ($\gamma \perp \mathbf{\Pi_2}$), перпендикулярно образующим поверхности цилиндра.

2. Находим натуральную величину сечения.

3. Делим основание цилиндра на 12 равных частей (точки **1, 2, 3,...**) и через точки деления проводим образующие цилиндра, которые делят периметр сечения на 12 равных частей **I-II, II-III**...

4. На свободном поле чертежа проводим прямую линию и на ней откладываем прямолинейные отрезки **I-II, II-III**..., равные сторонам многоугольника, вписанного в кривую нормального сечения.

5. Через полученные точки **I, II, III**... к прямой **I-I** проводим перпендикуляры и на каждом из них откладываем отрезки образующих цилиндра от нормального сечения в натуральную величину.

6. Соединяем концы образующих плавными кривыми. Полученная фигура и будет разверткой боковой поверхности наклонного цилиндра.

Если ось цилиндра не параллельна какой-либо плоскости проекций, то переводим цилиндр в положение уровня, т.е. в положение, когда ось будет параллельна Π_1 или Π_2. Это необходимо, чтобы не производить дополнительно определение натуральной величины образующих цилиндра.

Задача 2.35. Построить развертку боковой поверхности цилиндрической поверхности методом раскатки (рис. 2.51).

Решение.

1. Разбиваем нижнее и верхнее основание цилиндрической поверхности на равное количество отрезков, например 12 и вписываем призматическую поверхность.

2. Мысленно разрезаем боковую поверхность призмы по ребру 1-1' (1_1-$1_1'$) и вращением вокруг него последовательно совмещаем все боковые грани вписанной призмы с фронтальной плоскостью, проходящей через это ребро. Построения ничем не отличаются от построений развертки призмы (см. задачу 2.33)

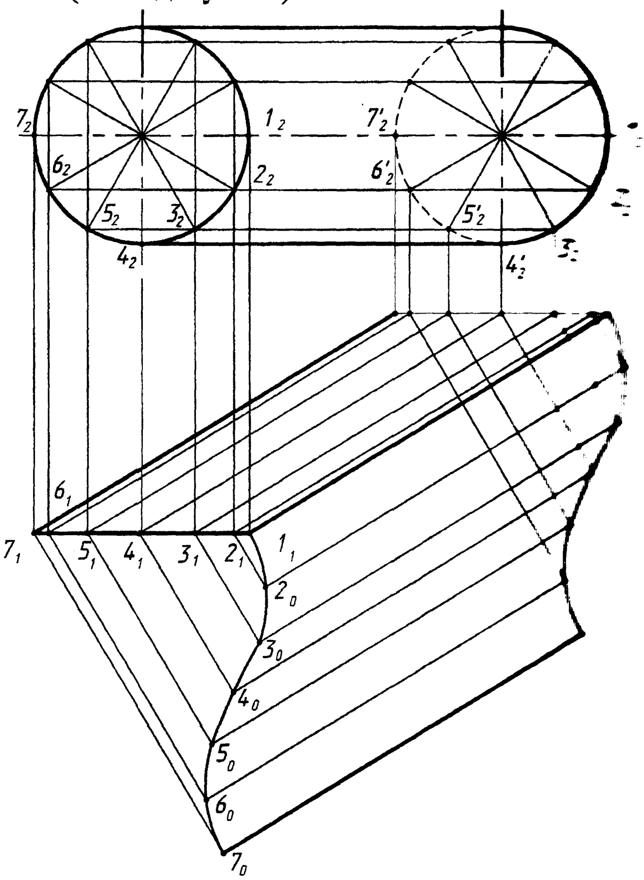


Рис. 2.51

Построение условных разверток неразвертываемых поверхностей.

Для неразвертываемых поверхностей строят условные развертки.

Построение условной развертки поверхности выполняют в такой последовательности:

1. Исходя из требуемой точности развертки, данную поверхность разрезают на несколько примерно равных частей.

2. Отсеки данной поверхности аппроксимируются (заменяются) отсеками развертывающихся поверхностей.

3. Строятся развертки этих отсеков, совокупность которых и представляет собой условную развертку неразвертываемой поверхности.

Для линейчатых неразвертываемых поверхностей условную развертку целесообразно строить способом треугольника, т.е. путем разбивки поверхности на треугольники, которые затем последовательно совмещаются с плоскостью.

Условные развертки поверхностной вращения обычно строят способом вспомогательных цилиндров и способом вспомогательных конусов.

Способ треугольника.

Задача 2.36. Построить развертку поверхности коноида, у которого одной направляющей является полуокружность *l*, другой - отрезок **AB**, а третья - плоскость параллелизма γ (рис. 2.52).

Решение.

1. Делим дугу направляющей *l* на три части.

2. Через полученные точки деления (5_2, 6_2, 7_2) проводим образующие поверхности, которые на фронтальной проекции горизонтальны (параллельны вырожденной проекции плоскости параллелизма γ), а на горизонтальной проекции пересекаются в одной точке - вырожденной проекции второй направляющей [**AB**].

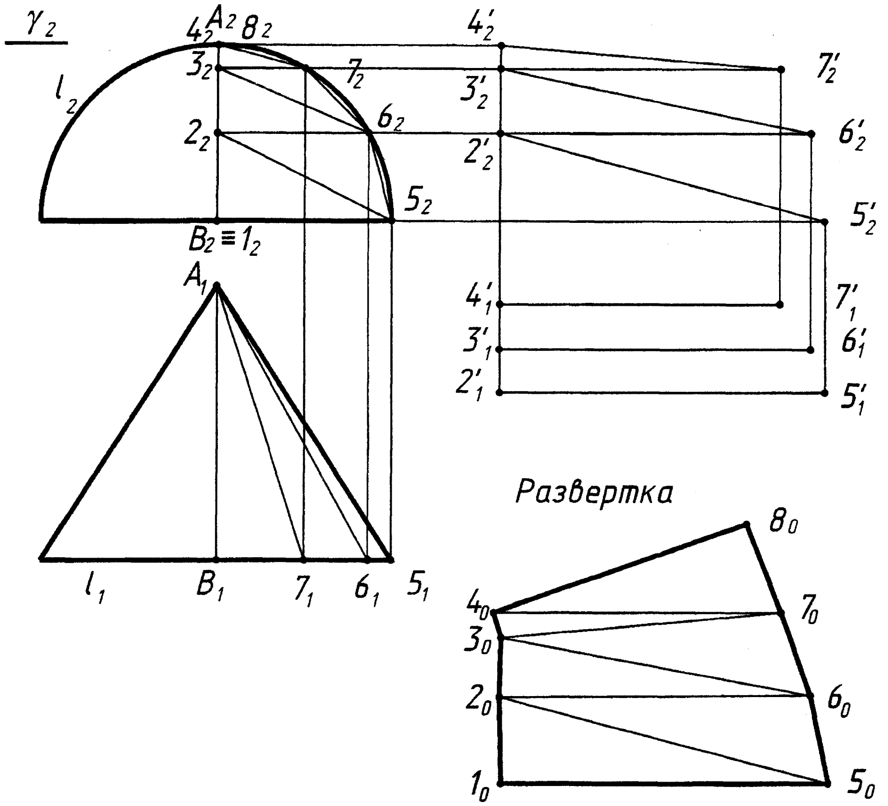


Рис. 2.52

3. Каждую полученную таким образом часть поверхности делим еще и наклонными прямыми на треугольники, натуральную величину которых можно построить, зная величины их сторон.

4. Поскольку обе направляющие поверхности параллельны плоскости $\mathbf{\Pi_2}$, их отрезки проецируются на $\mathbf{\Pi_2}$ без искажения. Натуральные величины дополнительных прямых строим с помощью плоскопараллельного перемещения.

5. Построение развертки начинаем с построения отрезка $1_0 5_0$, равного отрезку $1_1 5_1$. Точку 2_0 строим засечками, радиусы которых $1_0 2_0 = 1_2 2_2$ и $5_0 2_0 = 5'_2 2'_2$.

Таким же образом построены все треугольники на развертке. При этом, чем на большое число треугольников будет разбита поверхность, тем точнее будет развертка.

Способ вспомогательных цилиндров. При построении условной развертки поверхностей вращения способом цилиндров:

1. Поверхность делится меридиональными плоскостями на равное число частей.

2. Каждая часть заменяется отсеком цилиндрической поверхности с направляющим средним меридианом. Образующая отсека направлена по касательной к параллелям в точках их пересечения со средним меридианом.

3. Строится развертка отсеков вспомогательных цилиндрических поверхностей.

Задача 2.37. Построить развертку поверхности вращения (рис. 2.53).

Решение.

1. Разрезаем поверхность на 6 частей. Одну из частей, средним меридианом которой является главный меридиан **SA** поверхности, заменяем фронтально проецирующей цилиндрической поверхностью **ABCDES**, образующие которых ограничены плоскостями γ и γ'.

2. Направляющую **SA** поверхности вспомогательного цилиндра аппроксимируем ломаной **ABCDES** ($A_2B_2C_2D_2E_2S_2$).

3. Развертку отсека поверхности цилиндра строим по способу нормальных сечений, для чего ломаную **ABCDES** спрямляем в отрезок $A_0B_0C_0D_0E_0S_0$.

4. Через точки A_0, B_0 ... проводим прямые, перпендикулярные $A_0 - S_0$, на которых откладываем отрезки касательных, проведенных к соответствующим параллелям и ограничивающим плоскостями

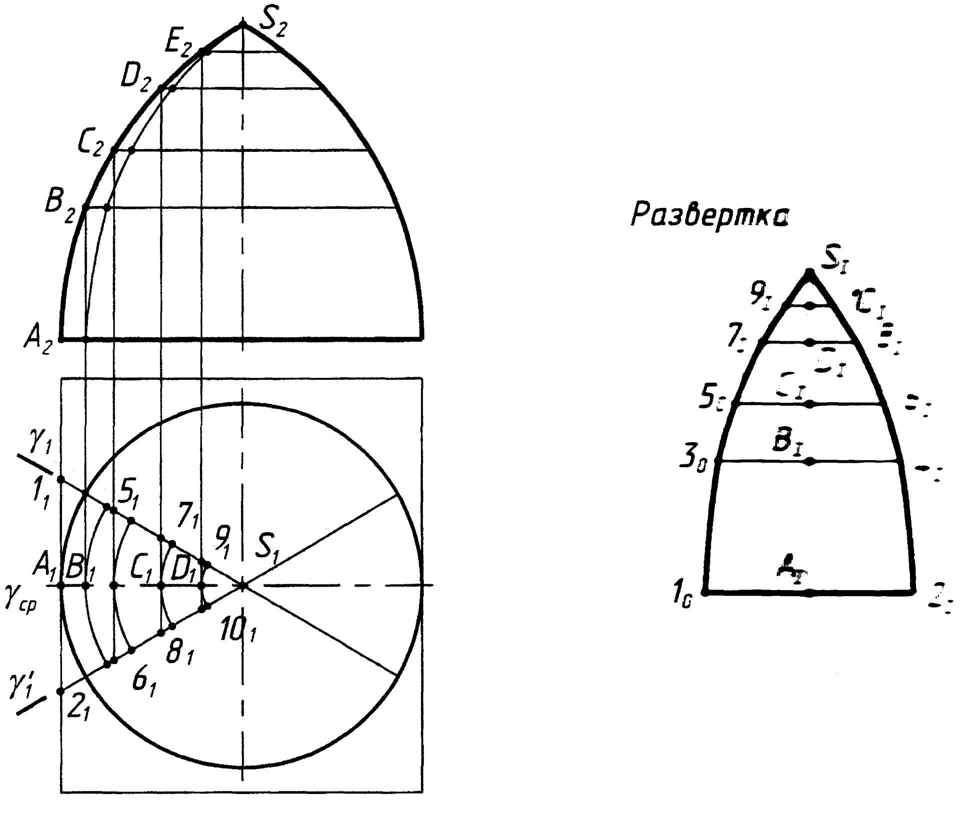


Рис. 2.53

Способ вспомогательных конусов. Способ вспомогательных конусов заключается в том, что поверхность вращения разрезается плоскостями, перпендикулярными ее оси, на несколько частей, которые апроксимируются коническими поверхностями. Совокупность разверток конусов и будет условной разверткой поверхности вращения.

Задача 2.38. Построить развертку поверхности вращения (рис. 2.54).

Решение.

1. Поверхность вращения разрезаем плоскостями γ и γ' на три части, каждую из которых заменяем вписанными коническими поверхностями в точке S, S' и S''. Основанием конусов являются параллели поверхности.

2. Развертка прямого кругового конуса представляет собой круговой сектор, радиус которого равен длине образующей, а центральный угол $\varphi = 360^{\circ} r / L$, где r – радиус основания конуса, а l – длина его образующей. Построения видны из рисунка.

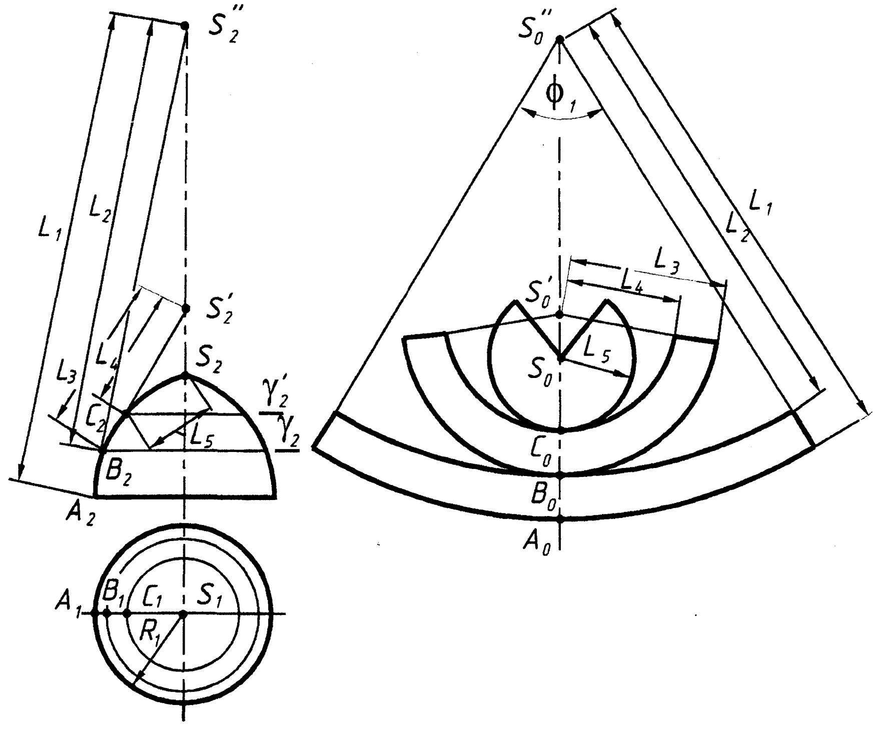


Рис.2.54

2.5. Построение проекций геометрических фигур по заданным условиям (конструктивные задачи)

Задачи, связанные с построением проекций геометрических фигур по заданным условиям, называют еще и конструктивными задачами.

Исходя из заданных условий, эту группу задач можно разделить на следующие подгруппы:

1. Построение проекций геометрической фигуры, принадлежащей заданной плоскости.
2. Построение проекций геометрической фигуры, элемент которых принадлежит заданной прямой в пространстве.
3. Построение проекций геометрического элемента, равноудалённого от заданных точек, линий или плоскостей.
4. Построение отрезков прямых линий под заданными углами к плоскостям проекций.

2.5.1. Построение проекций геометрической фигуры, принадлежащей заданной плоскости

По условиям задач этой подгруппы требуется построить проекции окружностей, треугольников, многоугольников, которые принадлежат заданным плоскостям. При этом плоскости могут быть заданы разными способами.

Общий алгоритм решения таких задач включает в себя следующие операции:

1. Заданную плоскость совмещают с одной из плоскостей проекций.
2. На совмещённой плоскости вычерчивают геометрическую фигуру в натуральную величину по заданным условиям и размерам.
3. Так как проекциями окружности являются эллипсы, то определяются положения большой и малой осей окружности и точки, лежащие на окружности и ограничивающие эти оси. Для построения проекции эллипса на Π_1 большая ось проходит через центр окружности параллельно следу плоскости α_1, малая ось – перпендикулярно большой.

Для фронтальной проекции эллипса большая ось проходит через центр окружности параллельно совмещённому следу α_0, малая – перпендикулярно большой оси.

4. Определяют промежуточные точки с помощью линий уровня или линии, проходящей через эти точки, и принадлежащей заданной плоскости. Таким же образом строят и точки треугольников и многоугольников.

5. По найденным точкам строят проекции окружности в виде эллипсов.

Рассмотрим применение общего алгоритма при решении конкретных задач.

Задача 2.39. Построить проекции окружности, расположенной в плоскости α_1 общего положения, заданной следами. Положение центра окружности задано горизонтальной проекцией $\mathbf{O_1}$, величина радиуса $\mathbf{R = 20}$ **мм** (рис. 2.55а).

Решение.

1. По принадлежности с помощью фронтали **f** находим фронтальную проекцию центра окружности – $\mathbf{O_2}$. Точки $\mathbf{O_1}$ и $\mathbf{O_2}$ и будут центрами эллипсов – проекций окружности, расположенной в плоскости β общего положения (рис. 2.55б).

2. Для определения осей горизонтальной проекции эллипса строим окружность в натуральную величину. Для этого используем способ совмещения плоскости α с плоскостью проекций $\mathbf{\Pi_1}$ (рис. 2.55б).

3. Диаметр $\mathbf{1_0}$-$\mathbf{2_0}$ соответствует большому диаметру эллипса, а диаметр $\mathbf{3_0}$-$\mathbf{4_0}$ – малому диаметру.

4. Через точку $\mathbf{3_0}$ проводим фронталь $\mathbf{f_0}$ плоскости в её совмещённом положении (параллельно α_0), а затем горизонтальную проекцию $\mathbf{f_1}$ этой фронтали, находим точку $\mathbf{3_1}$ и тем самым – полуось $\mathbf{O_1}$-$\mathbf{3_1}$. Откладывая $\mathbf{O_1}$-$\mathbf{4_1} = \mathbf{O_1}$-$\mathbf{3_1}$, получаем малую ось эллипса $\mathbf{3_1}$-$\mathbf{4_1}$.

5. На рис. 2.55в показано построение осей эллипса – фронтальной проекции окружности. Большая ось эллипса лежит на фронтальной проекции фронтали, проходящей через $\mathbf{O_1}$ и величина её $\mathbf{7_2}$-$\mathbf{8_2} = \mathbf{2R}$. Малая ось $\mathbf{5_2}$-$\mathbf{6_2}$ перпендикулярна к **оси** $\mathbf{7_2}$-$\mathbf{8_2}$.

6. Величина малой оси определяется при помощи диаметра $\mathbf{5_0}$-$\mathbf{6_0}$. Проведя через $\mathbf{5_0}$ фронталь $\mathbf{f_0^3}$ плоскости α до пересечения с α_1, находим затем фронтальную проекцию этой фронтали и на ней точку $\mathbf{6_2}$. Откладывая $\mathbf{O_2}$-$\mathbf{6_2} = \mathbf{O_2}$-$\mathbf{5_2}$, получим проекцию малой оси $\mathbf{5_2}$-$\mathbf{6_2}$.

7. Промежуточные точки окружности строятся с помощью линий уровня. Так, для построения проекций точек **9** и **10** проведены линии уровня - горизонтали $\mathbf{h_0}$ и $\mathbf{h_0^{\,2}}$ через $\mathbf{9_0 10_0}$ (рис 2.53-г), с помощью их находим проекции точек **9** и **10**.

Подобным образом находятся и другие точки.

8. Соединяя последовательно найденные точки, получим проекции заданной окружности – эллипсы.

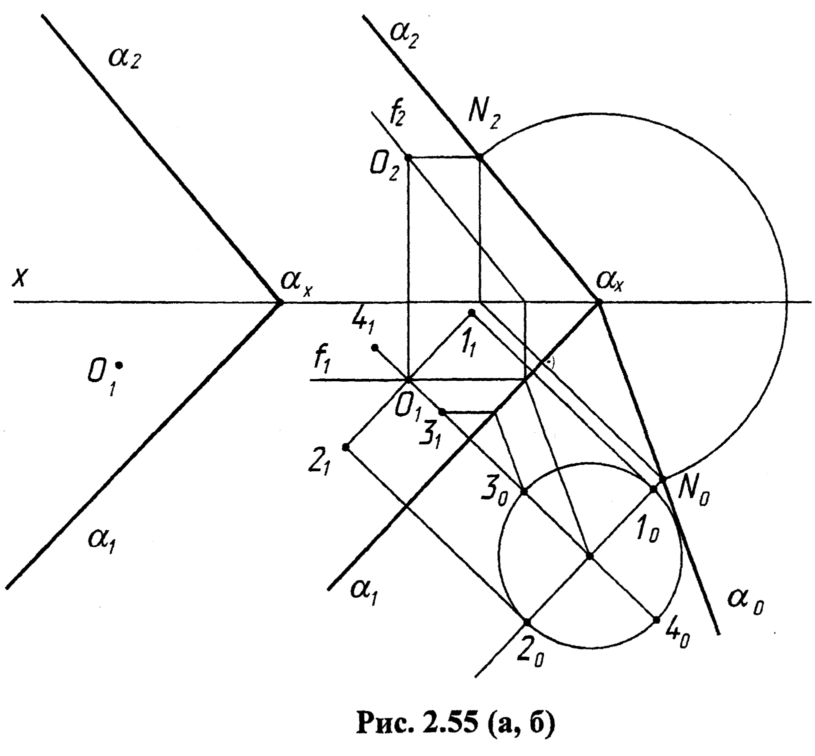


Рис. 2.55 (а, б)

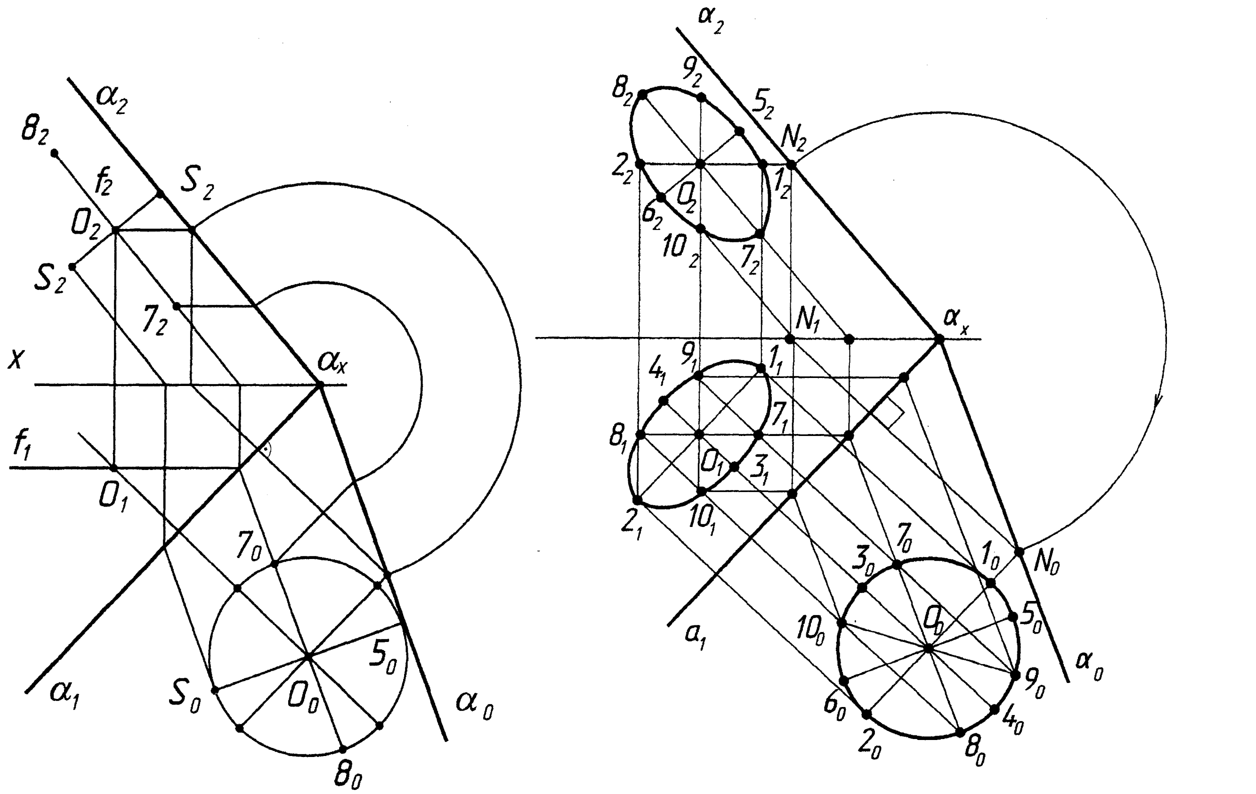


Рис 2.55 (в, г)

Задача 2.40. Построить проекции окружности радиусом **R=20**, расположенной в плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми – фронталью **f** и горизонталью **h.** Положение центра окружности **O** задано (рис 2.56а).

Решение:

1. Находим горизонтальный след горизонтали **h** - точку $\mathbf{m_1}$ и через нее проводим след плоскости α_1 параллельно горизонтальной проекции горизонтали $\mathbf{h_1}$ (рис.2.56б).

2. Находим совмещенное положение центра окружности с плоскостью Π_1 – точку $\mathbf{O_0}$ следующим образом: определяем натуральную величину радиуса $\mathbf{C_1O_1}$ способом прямоугольного треугольника. На горизонтальной проекции $\mathbf{h_1}$ от центра $\mathbf{O_1}$ откладываем отрезок $\mathbf{O_1C_1} = z_{O2}$; из центра $\mathbf{O_1}$ радиусом $\mathbf{C_1C'_1}$ проводим дугу до пересечения с перпендикуляром, проведенным из центра $\mathbf{O_1}$ к α_1 в точке $\mathbf{O_0}$.Строим окружность заданного радиуса.

3. Искомые проекции окружности – эллипсы. Для эллипса, являющегося горизонтальной проекцией окружности большая ось $\mathbf{1_1\,2_1}$ располагается на горизонтальной проекции горизонтали $\mathbf{h_1}$. Точки $\mathbf{1_1}$ и $\mathbf{2_1}$ находятся с помощью линий связи, проведенных из точек $\mathbf{1_0}$-$\mathbf{2_0}$, перпендикулярно к $\mathbf{h_1}$.

Малая ось $\mathbf{3_14_1}$ получена с помощью прямой $\mathbf{1_03_0}$, которую продолжают до пересечения со следом α_1 в точке $\mathbf{A_0}$ ($\mathbf{A_1}$). Соединяем $\mathbf{A_0}$ ($\mathbf{A_1}$) с точкой $\mathbf{1_1}$ и в пересечении с продолжением прямой $\mathbf{3_0\,4_0}$ получаем точку $\mathbf{3_1}$. Точку $\mathbf{4_1}$ находим, откладывая от $\mathbf{O_1}$ отрезок $\mathbf{O_14_1} = \mathbf{O_13_1}$.

4. Для фронтальной проекции окружности большая ось эллипса $\mathbf{7_2}$-$\mathbf{8_2}$ находится на фронтальной проекции фронтали $\mathbf{a_2}$. Прямую $\mathbf{7_0\,8_0}$ продлеваем до пересечения с α_1 в точке $\mathbf{m_1}$. В пересечении горизонтальной проекции фронтали $\mathbf{f_1}$ находим точки $\mathbf{7_1}$ и $\mathbf{8_1}$, а по ним – проекции $\mathbf{7_2}$ и $\mathbf{8_2}$.

Малая ось $\mathbf{5_2\,6_2}$ проведена перпендикулярно к оси $\mathbf{7_2\,8_2}$. Точка $\mathbf{5_2}$ построена при помощи точки $\mathbf{5_0}$ диаметра $\mathbf{5_06_0}$ окружности, проведенного перпендикулярно к диаметру $\mathbf{7_0}$ -$\mathbf{8_0}$ и продолженного до пересечения со следом α_1 в точке $\mathbf{D_0}$ ($\mathbf{D_1}$). На вспомогательной прямой $\mathbf{D_1O_1}$ находим точку $\mathbf{5_1}$, а по ней и $\mathbf{5_2}$. Откладываем отрезок $\mathbf{C_26_2}$=$\mathbf{C_25_2}$, получим малую ось $\mathbf{5_26_2}$.

5. Промежуточные точки, необходимые для построения эллипсов, находим аналогично построениям при нахождении точек $\mathbf{5_15_2}$. Например, точку **9** находим с помощью линии $\mathbf{O_0\,9_0}$, проведенной до пересечения с α_1 – точка $\mathbf{K_1}$. Точка $\mathbf{K_1}$ соединяется с $\mathbf{O_1}$ и на этой линии в пересечении с линией связи находим проекцию $\mathbf{9_1}$, а затем и $\mathbf{9_2}$.

6. Соединив найденные точки плавной кривой, получаем горизонтальную и фронтальную проекции заданной окружности в виде эллипсов.

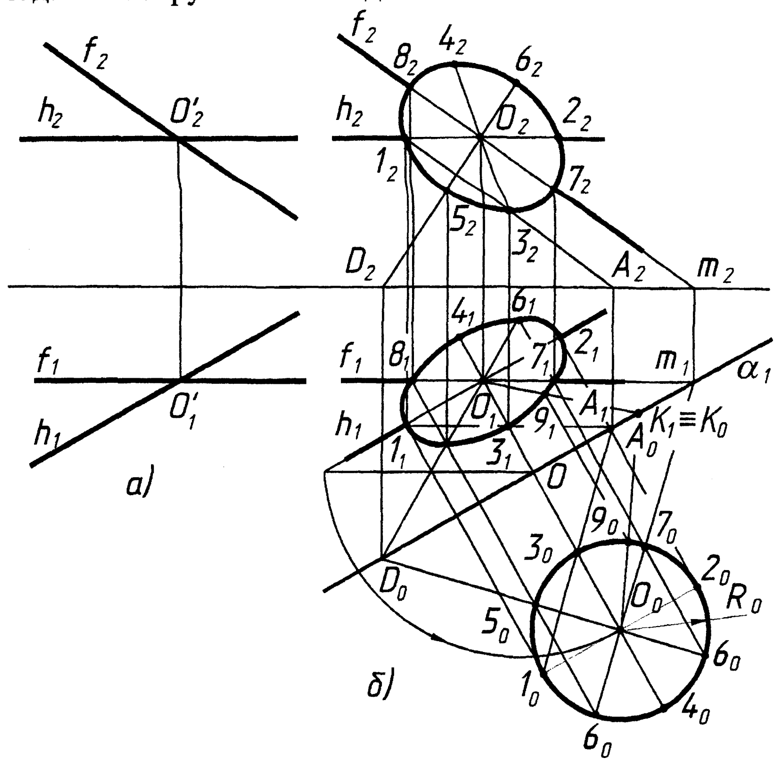


Рис. 2.56

Задача 2.41. Построить на плоскости α прямоугольный треугольник **ABC** с вершиной **B** прямого угла на горизонтальном следе плоскости, если дана фронтальная проекция стороны **AC** (рис. 2.57).

Решение.

1. С помощью горизонталей строим горизонтальную проекцию стороны **AC** треугольника – проекция A_1C_1.

2. Совмещаем плоскость α с плоскостью проекций Π_1, вращая её вокруг следа α_1. След α_0 – совмещённый след плоскости, а A_0C_0 – совмещённая проекция стороны **AC**.

3. В точке A_0 восстанавливаем перпендикуляр к стороне A_0C_0 до пересечения в точке B_0 со следом плоскости α_1.

4. Треугольник $A_0B_0C_0$ – прямоугольный. Построение точки B_1 и B_2 ясно из чертежа.

5. Проекции треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ – искомые. Точка B_0 лежит на горизонтальном следе плоскости α.

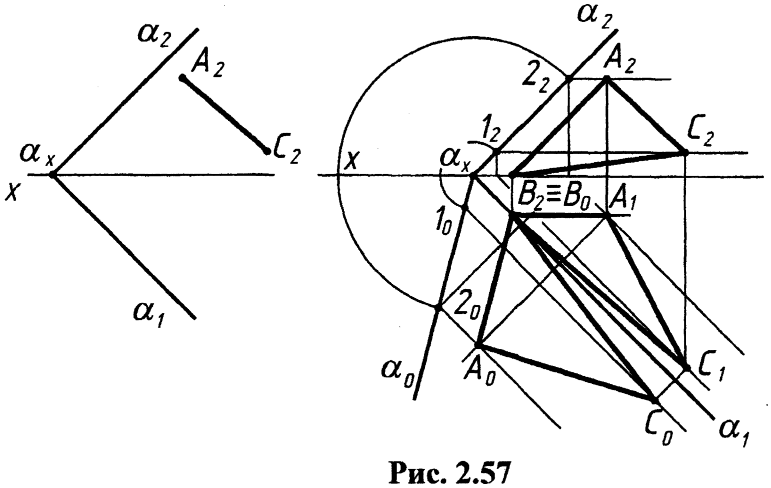


Рис. 2.57

2.5.2. Построение проекций геометрической фигуры, одним элементом принадлежащей заданной прямой

В основе решения задач данной подгруппы лежат задачи на построение перпендикуляра через точку к заданной прямой и определение натуральной величины отрезка способом прямоугольного треугольника.

Задача 2.42. Построить равнобедренный треугольник с основанием **BC** на прямой **m** (**m** // **П$_1$**) и вершиной **A** на прямой **n** (рис. 2.58а). Основание **BC** должно равняться высоте треугольника **AD**, точка **D** – основание высоты треугольника.

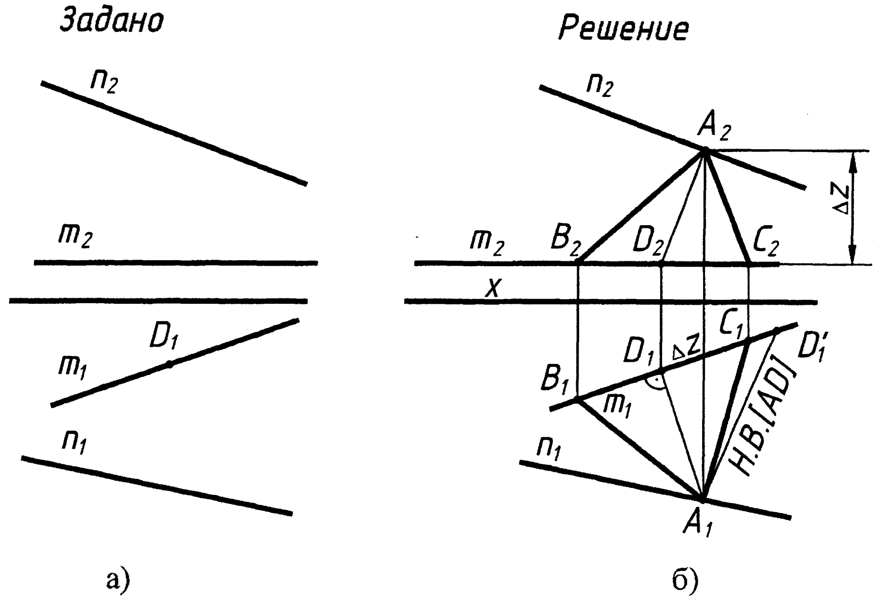


Рис.2.58

Решение.

1. Находим высоту треугольника. Для этого из точки **D$_1$** проводим перпендикуляр к прямой **m$_1$** (прямая **m** // **П$_1$** и угол между прямой **m** и перпендикуляром будет прямым).
2. Продолжаем перпендикуляр до пересечения с прямой **n**. Отрезок **AD** и будет искомой высотой (рис. 2.58б).
3. Находим натуральную величину высоты **AD** способом прямоугольного треугольника.
4. Находим точки **B** и **C**, откладывая **0.5[AD]** по обе стороны от точки **D**.
5. Соединяем точки **B**, **C** и **A**, получаем проекции равнобедренного треугольника **ABC**.

Задача 2.43. Построить проекции прямоугольника **ABCD** с основанием **BC** на прямой **m**, исходя из условия, что **2[AB] = [BC]** (рис. 2.59а).

Решение.

1. В точке **A** строим плоскость **α**, перпендикулярную прямой **m** (**α ⊥ m**) с помощью линий уровня (**h** и **f**) (рис. 2.59б).
2. Находим точку **B** – основание перпендикуляра, проведённого из точки **A** к прямой **m**, решая задачу на пересечение прямой **m** с плоскостью **α** (**B = α ∩ m**).
3. Определяем натуральную величину **[AB]**, используя способ вращения вокруг оси **i**, проходящей через точку **A** перпендикулярно **П$_2$** (**i ⊥ П$_2$**) - **A B'$_2$**.
4. На прямой **m** (**m$_1$**) выбираем произвольно точку **3** (**3$_1$**) и определяем натуральную величину отрезка **B$_1$3$_1$** способом прямоугольного треугольника (проекция **B$_1$ 3'$_1$**). На прямой **B$_1$ 3'$_1$** откладываем натуральную величину стороны **[BC] =2[AB]** – проекция **B$_1$ 3'$_1$**. Из точки **C'$_1$** проводим прямую, параллельную **3$_1$ 3'$_1$**. На прямой **m** получаем проекцию точки **C** (**C$_1$**, **C$_2$**). Отрезок **BC** на прямой **m** и будет искомой стороной **BC** (**B$_1$C$_1$** и **B$_2$C$_2$**).
5. Построение проекций точки **D** ясно из чертежа.
6. Соединяя последовательно найденные точки, получим проекции заданного прямоугольника.

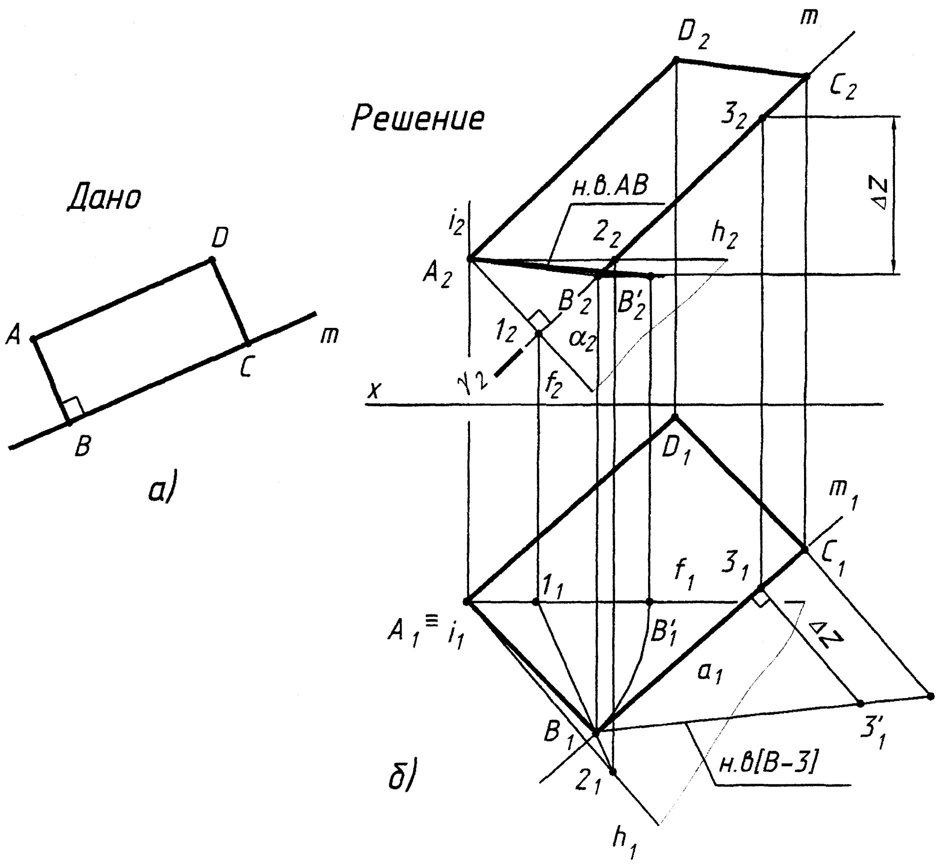


Рис. 2.59

Задача 2.44. Построить проекции ромба **ABCD** с диагональю **BD** на прямой **m**, исходя из условия, что отношение **[AC]** к **[BD]** равно двум. Решить без преобразования чертежа, записать план решения. Условие в пространстве – рис. 2.60а.

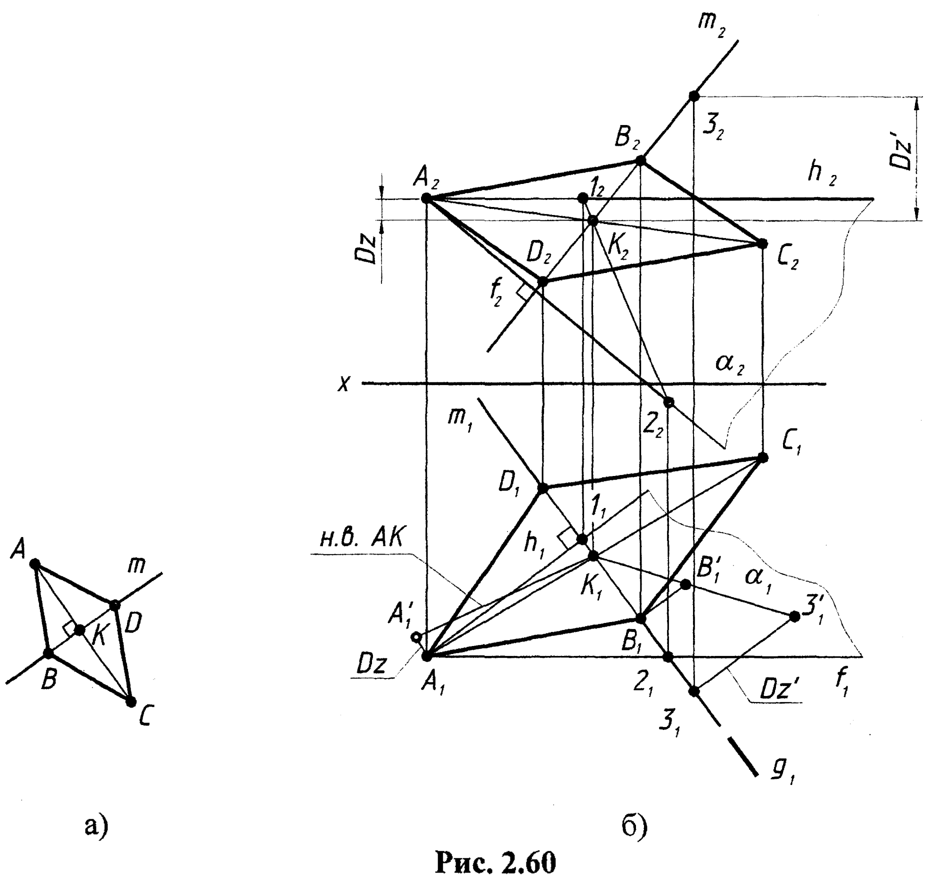


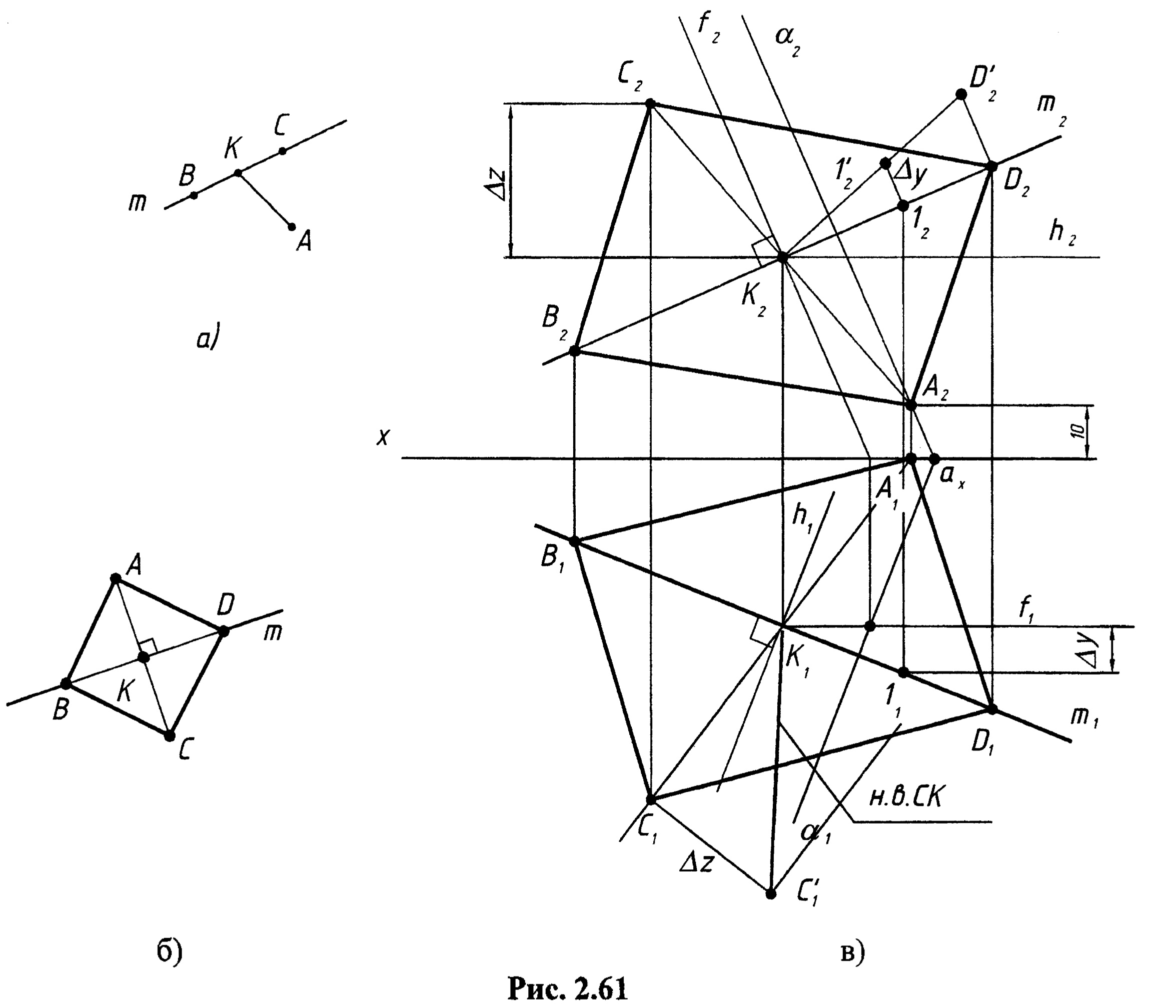
Рис. 2.60

Решение.

1. Диагональ **BD** принадлежит прямой **m**, а диагональ **AC** будет перпендикулярна диагонали **BD**. Из точки **A** опускаем на линию **m (BD)** перпендикуляр. Он лежит в плоскости **α**, проведённой из точки **A** перпендикулярно **m** с помощью линий уровня (**h** и **f**) – рис. 2.60б.
2. Находим основание перпендикуляра – точку пересечения диагоналей **K**, лежащей на прямой **m**, решая задачу на пересечение прямой **m** с плоскостью **α** (**K = α ∩ m**).
3. Соединив точки **A** и **K**, находим диагональ **AC**. Для этого продлеваем **AK** и на ней откладываем **KC = AK**.
4. Определяем натуральную величину отрезка **AK** способом прямоугольного треугольника (отрезок $K_1A'_1$).
5. От точки **K** на прямой **m** выделяем отрезок **3K** и находим его натуральную величину (отрезок $3'_1K$).
6. На отрезке $3'_1K$ откладываем половину **AK** (натуральную величину). Получаем точку **B**, а затем и **D**.

Соединив найденные точки, получим проекции ромба **ABCD**.

Задача 2.45. Построить проекции квадрата **ABCD** с диагональю **BD** на прямой **m** (рис. 2.61а), исходя из условия что вершина **A** расположена на фронтальной плоскости проекций Π_2 с удалением от горизонтальной плоскости проекций Π_1 на 10 мм, точка **K** – точка пересечения диагоналей.



б) в)

Рис. 2.61

Решение.

1. В точке **K** строим плоскость **α ⊥ m** с помощью линий уровня **h** и **f** (рис 2.61б).
2. Строим следы плоскости **α** – α_1 и α_2.
3. Строим проекции вершины **A**, откладывая от оси **x** вверх размер 10 мм, получаем проекцию A_2 в пересечении с α_2 и затем по линии связи на оси **x** – A_1.

4. Соединяем точки **К** и **А**. На продолжении этой прямой находим точку $\mathbf{C_2}$, откладывая от **К** отрезок **СК = АК**.

5. Определяем натуральную величину полуоси **КС** способом прямоугольного треугольника

6. На прямой **m** задаём точку **1** и определяем натуральную величину отрезка **1К**.

7. На отрезке **1К** откладываем натуральную величину полуоси **СК** и находим вершину **D** (проекции $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$), а затем и **B**.

Соединяем полученные проекции. Это и будут проекции квадрата **ABCD**.

Задача 2.46. Построить проекции равностороннего треугольника **ABCD** с основанием **ВС** на прямой **m**, если точка **К** является основанием высоты **АК**. Точка **А** задана проекцией $\mathbf{A_1}$ (рис. 2.62а).

Решение.

1. В точке **К** строим плоскость $\boldsymbol{\alpha} \perp \mathbf{m}$ с помощью линий уровня **h и f** (рис. 2.62б).
2. По принадлежности с помощью линии **1-2** находим проекцию $\mathbf{A_2}$.
3. Отрезок **[АК]** – высота треугольника. Определяем его натуральную величину способом вращения вокруг оси $\mathbf{i} \perp \mathbf{\Pi_1}$

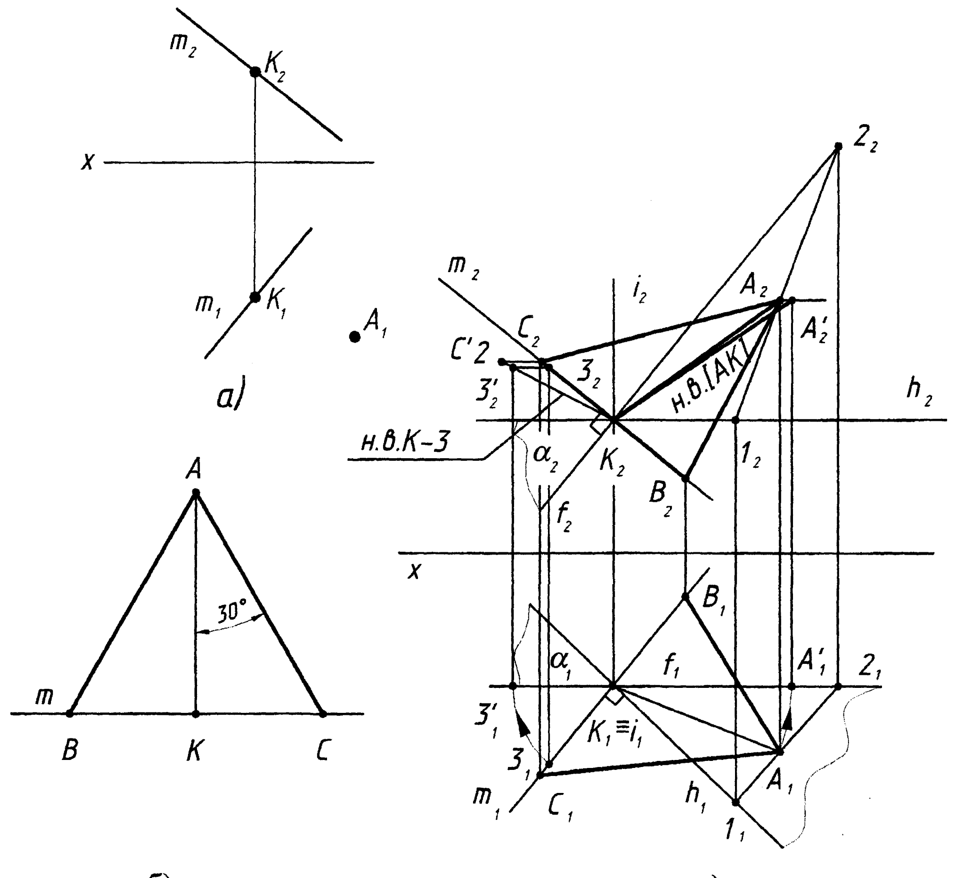


Рис. 2.62

4. На прямой **m** выделяем точку **3** и определяем натуральную величину отрезка **[К-3]** также вращением вокруг оси **i**.
5. Отдельно строим равносторонний треугольник **АВС** по его высоте **АК** и определяем величину основания **ВС** (рис. 2.62б).
6. На отрезке **К-3** откладываем от точки **К** отрезок **[КС]** и получаем точку **С** треугольника.
7. Проекции точки **В** ($\mathbf{B_1}$ и $\mathbf{B_2}$) получаем, откладывая от точки **К** отрезок **КС** на линии **m** в другую сторону от точки **К**.

Соединяя точки **В** и **С** с вершиной **А**, получаем проекции равностороннего треугольника **АВС**.

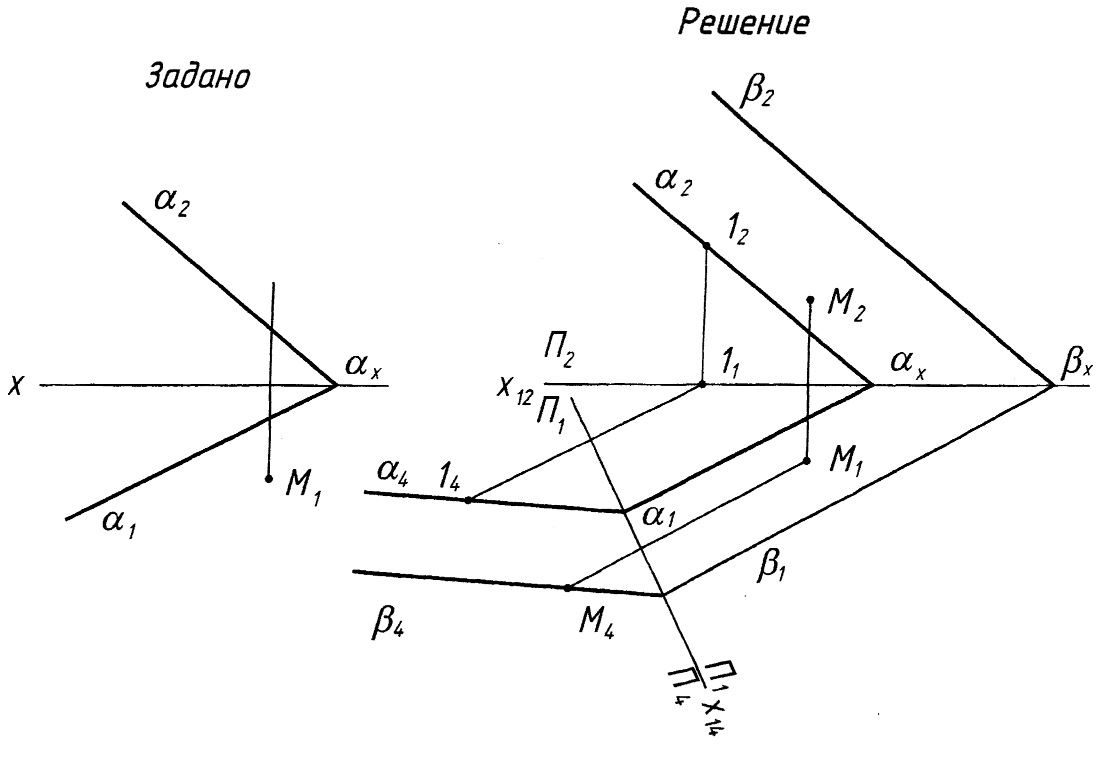
В построенной плоскости определяем фронтальную проекцию заданной точки **М** с помощью вспомогательной линии **1-2**, проведенной в плоскости **γ**.

Задача 2.48. Построить недостающую проекцию точки **М**, удалённой от плоскости **α** на расстояние, равное **15** мм (рис. 2.64а).

Множеством точек, удалённых от плоскости на какое-то расстояние, являются две плоскости, параллельные заданной плоскости и отстоящие от неё на заданное расстояние. Точка **М** принадлежит одной из таких плоскостей.

Решение.

1. Преобразуем плоскость общего положения, заданную следами в проецирующую плоскость (рис. 2.62б).
2. На расстоянии **15 мм** строим плоскость **β // α**, проведя **β_4 // α_4**.
3. Определяем проекцию **M_4** точки **М**, учитывая, что точка **М** принадлежит построенной плоскости **β (М є β)**.
4. Строим фронтальную проекцию **M_2** на расстоянии от оси **X_{12}**, равном расстоянию от проекции **M_4** до оси **X_{14}**.



а) б)

Рис. 2.64

Задача 2.49. На прямой **АВ** определить точки, находящиеся на расстоянии **20** мм от прямой **CD** (рис. 2.65).

Решение.

Множеством точек в пространстве, удалённых на какое-то расстояние от прямой **CD** является поверхность кругового цилиндра, осью которого служит данная прямая и радиус, равный заданному расстоянию.

Искомые точки будут точками пересечения прямой **АВ** с цилиндрической поверхностью .

1. Из центра **C_1 (D_1)**, проводим окружность радиусом **20** мм.
2. Находим точки пересечения прямой **АВ** с вырожденной проекцией цилиндра – точки **К** и **N**.

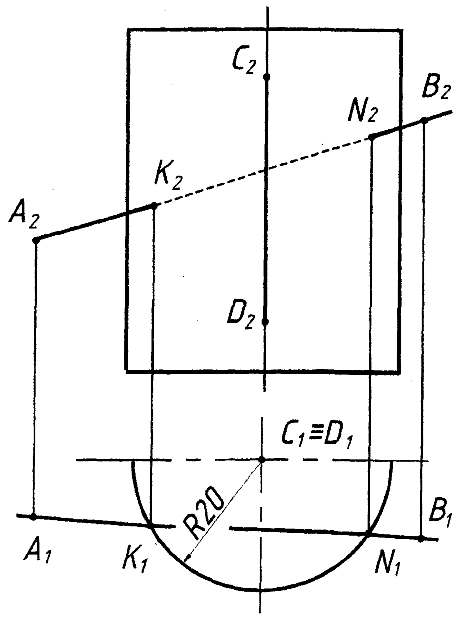


Рис. 2.65

Задача 2.50. Построить геометрическое место точек, равноудалённых от сторон угла **ВАС** (рис. 2.66).

Решение.

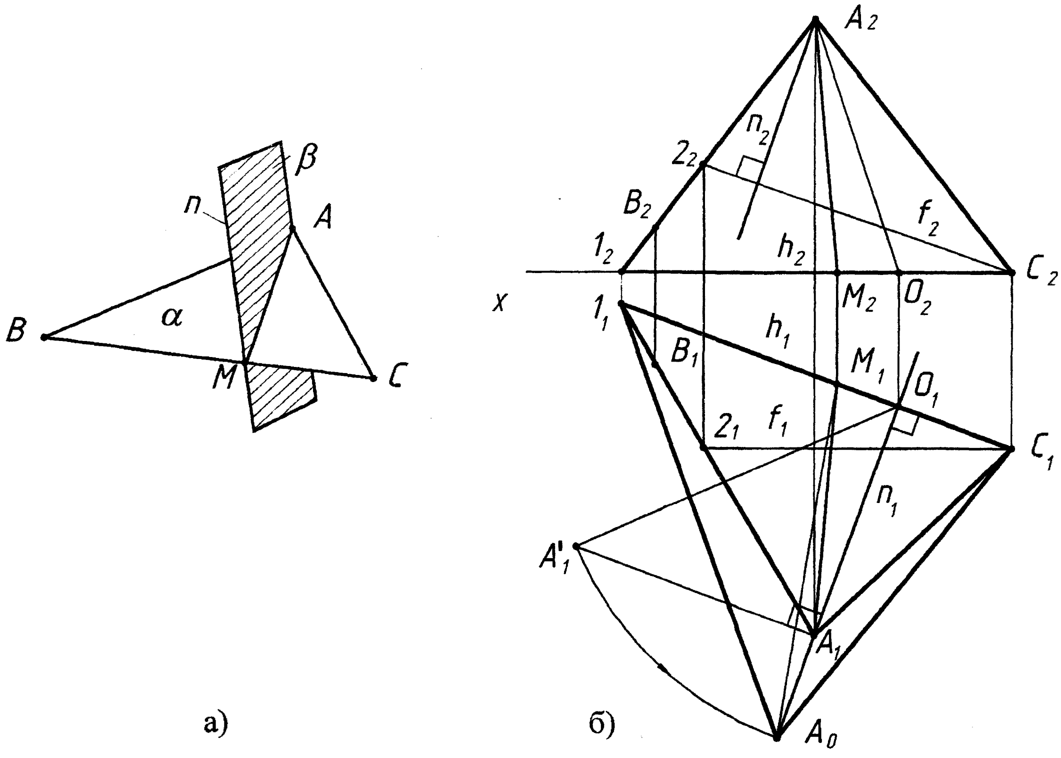


Рис. 2.66

Искомым геометрическим местом является плоскость β, проходящая через биссектрису **АМ** данного угла перпендикулярно к его плоскости α (рис. 2.66а).

1. Определяем натуральный вид заданного угла вращением вокруг линии уровня **1С** (рис. 2.66б).

2. Проводим биссектрису угла $\mathbf{1_1A_0C_1}$ – прямая $\mathbf{A_0M_1}$.

3. Проводим перпендикуляр к плоскости угла **ВАС** через точку **А** биссектрисы, для чего используем горизонтальную проекцию горизонтали **С1** ($\mathbf{h_1}$) и фронтальную проекцию фронтали **С2** ($\mathbf{f_2}$).

Биссектриса A_0M_0 и перпендикуляр **n** (n_1n_2) задают плоскость **β**, перпендикулярную плоскости Δ **ABC**.

Задача 2.51. На прямой **a** определить точки, удалённые от плоскости **α** (**h** ∩ **f**) на расстоянии **n** (рис. 2.67).

Решение.

Множество точек M_1, отвечающих первому условию, уже задано – это сама прямая **a**.

Второму условию будут удовлетворять точки двух плоскостей **β** и **γ**, параллельных **α** и удалённых на расстояние **n**. Точки этих плоскостей являются вторым множеством M_2. Пересечение M_1 и M_2 даёт искомый результат.

Решение задачи производят способом замены плоскостей проекций. Переход от системы плоскостей $П_1/П_2$ к $П_4/П_1$ осуществляем с таким расчётом, чтобы в новой системе $П_4/П_1$ плоскость **α** стала проецирующей (**α** ⊥ $П_4$). Напомним, что для этого необходимо обеспечить ортогональность плоскости $П_4$ и горизонтали **h** плоскости **α** ($П_4$ ⊥ **h**). Расстояние **n** между параллельными плоскостями на $П_4$ спроецируется без искажения, что позволяет без дополнительных построений провести следы $β_4$ и $γ_4$ плоскостей **β** и **γ**. Искомые точки обозначены через **K** (**K = α ∩ β**) и **L** (**L = α ∩ γ**).

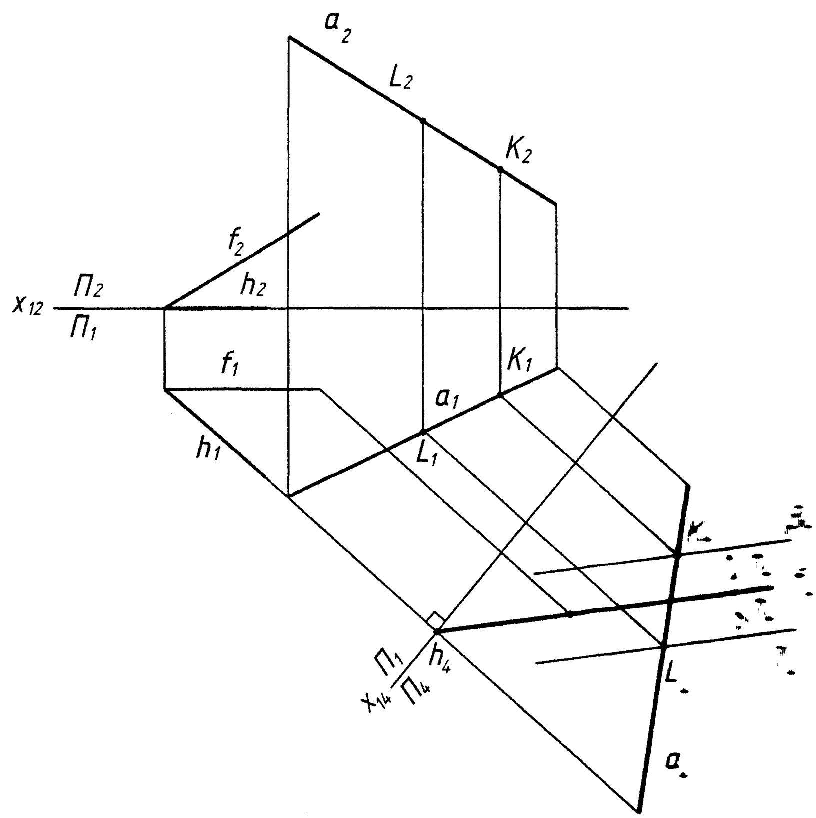


Рис. 2.67

Задача 2.52. Найти точку **K**, находящуюся внутри пирамиды и отстоящую от грани **SAB** – на l_1 = **10** мм, от грани **SAC** – на l_2 = **15** мм, от основания пирамиды – на l_3 = **13** мм (рис. 2.68).

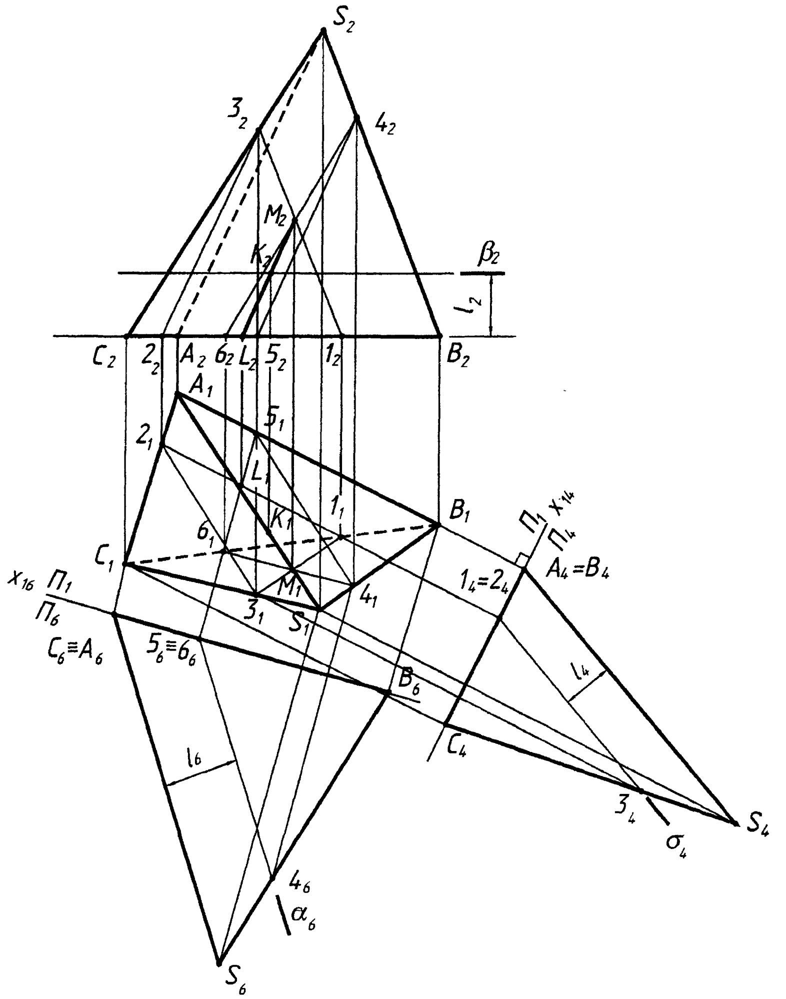
Решение.

Искомая точка находится как точка пересечения трёх плоскостей, каждая из которых является геометрическим местом точек, отстоящих на заданном расстоянии от граней пирамиды.

1. Вводим дополнительную плоскость $П_4$, перпендикулярно к грани **SAB**. Получаем проекцию пирамиды, на которой грань **SAB** изобразится в виде прямой линии $S_4A_4B_4$.

2. Проводим на расстоянии l_1 = **10** мм плоскость $σ_4$ параллельную грани **SAB**, в виде линии $1_42_43_4$. Эта плоскость пересекает пирамиду по треугольнику $1_42_43_4$ ($1_12_13_1$ – на горизонтальной проекции).

3. Переводим грань **SAC** в проецирующее положение с помощью плоскости $\mathbf{П_6}$. На расстоянии l_2 **= 15** мм от линии $\mathbf{S_6A_6C_6}$ проводим плоскость α_6, которая рассечёт пирамиду по треугольнику $\mathbf{4_65_66_6}$ (на горизонтальной плоскости проекций – $\mathbf{4_15_16_1}$).



4. Искомая точка **K** принадлежит линии пересечения двух плоскостей заданных треугольниками **1-2-3** и **4-5-6**. Эта прямая проходит через точки **L** и **M** полученные при пересечении сторон **1-2** и **5-6, 1-3** и **4-6** треугольников.

5. Находим фронтальную проекцию линии $\mathbf{L_2M_2}$.

6. На расстоянии l_3 = **13** мм от основания пирамиды проводим плоскость горизонтального уровня β.

7. В пересечении плоскости **β** и линии **LM** находим искомую точку **K**.

Рис. 2.68

Задача 2.53. Найти геометрическое место точек, равноудалённых от плоскостей α и β (рис. 2.69 и 2.70).

Решение.

Искомым геометрическим местом является плоскость γ, делящая пополам двугранный угол между плоскостями α и β (рис. 2.69).

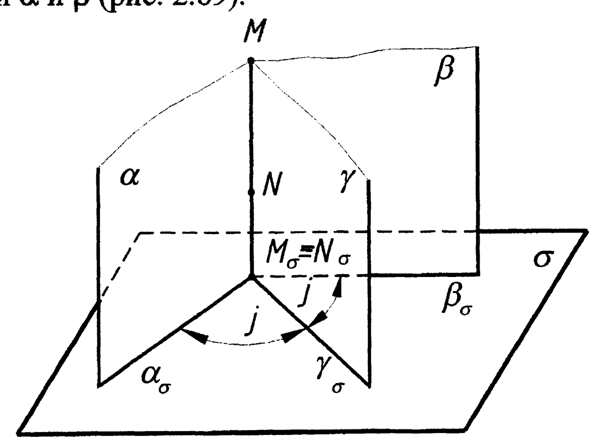


Рис. 2.69

Плоскость γ проходит через ребро **MN** двугранного угла. Если провести плоскость $\sigma \perp$ **MN**, то все три плоскости изобразятся на плоскости σ в виде прямых, причём плоскость γ делит угол между α и β пополам.

Задачу решаем, используя следующие построения.

1. Построим прямую **MN** – пересечение плоскостей α и β (рис. 2.70).
2. Вводим дополнительные плоскости Π_4 ($\Pi_4 \perp \Pi_1$ и $\Pi_4 \parallel$ MN), Π_5 ($\Pi_5 \perp \Pi_4$ и $\Pi_5 \perp$ MN).
3. Линейный угол между следами α_5 и β_5 плоскостей равен двугранному углу между плоскостями α и β. Разделим этот угол пополам. Биссектриса угла представляет собой след искомой плоскости γ на дополнительную плоскость σ.
4. Относя точку γ_5 к прямой $\alpha_4\beta_4$, т. е. к оси X_{14}, находим проекции γ_4 на оси X_{14} и γ_x на оси X_{12}. В точке γ_x следы искомой плоскости пересекут ось X_{12}, а так как плоскость γ проходит через прямую **MN**, то след γ_2 проходит через точку N_2, а след γ_1 – через M_1.

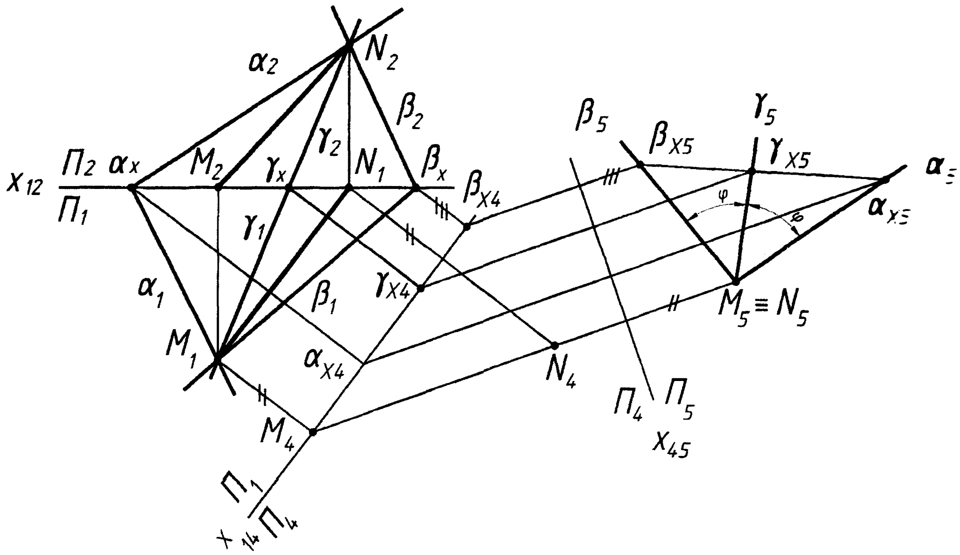
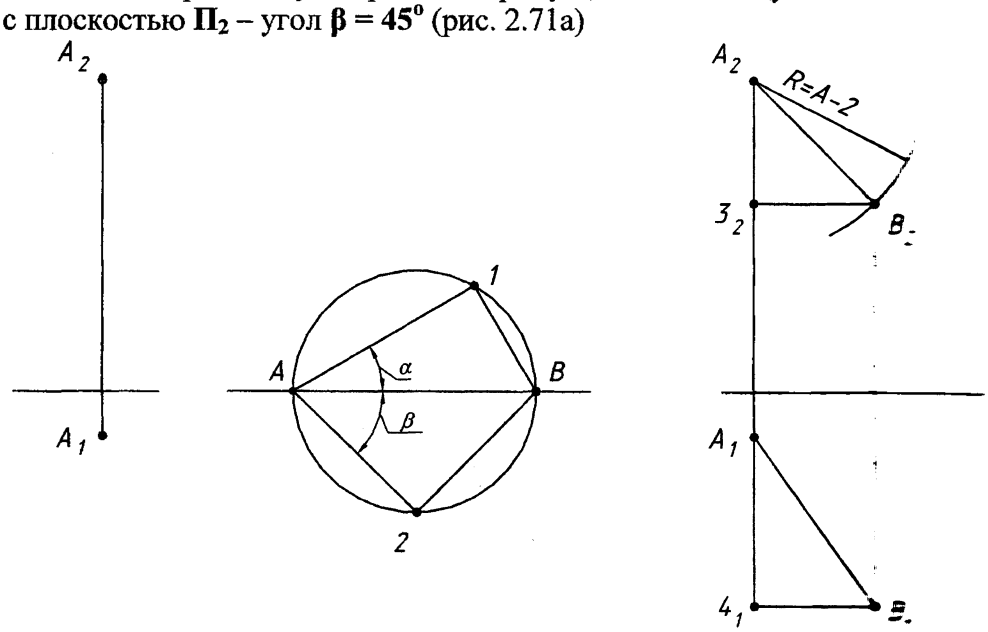


Рис. 2.70

2.5.4. Построение отрезков прямых линий под заданными углами к плоскостям проекций

Задача 2.54. Через точку **А** провести прямую, составляющую с плоскостью **П**$_1$ угол $\alpha = 30^\circ$ и с плоскостью Π_2 – угол $\beta = 45^\circ$ (рис. 2.71а)



а) б) в)

Рис. 2.71

Решение.

Проверяем условие: каждый из углов α и β должен быть острым, и сумма этих углов должна быть или меньше 90° (для прямой общего положения), или равной 90° (для профильной прямой). В задании $\alpha + \beta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ < 90^\circ$. Построение может быть выполнено.

Ход построений (рис. 2.69б и 2.69в).

1. Приняв отрезок **AB** за гипотенузу прямоугольного треугольника, построим два таких треугольника с учётом углов α и β.

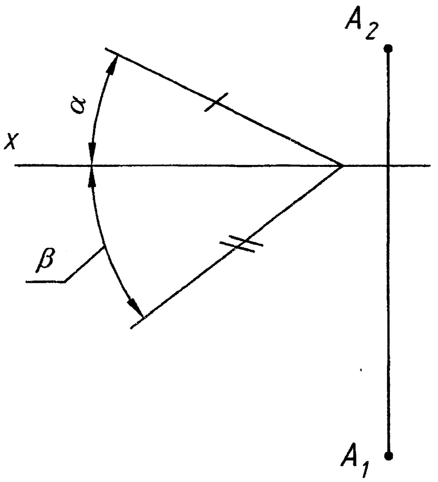
2. В треугольнике с углом α катет **1A** является горизонтальной проекцией отрезка **AB**, и катет **1B** – разность расстояний точек **B** и **1** от плоскости Π_1.

3. В другом треугольнике с углом β катет **2A** является фронтальной проекцией отрезка **AB**, а катет **2B** – разность расстояний точек **B** и **2** от плоскости Π_2.

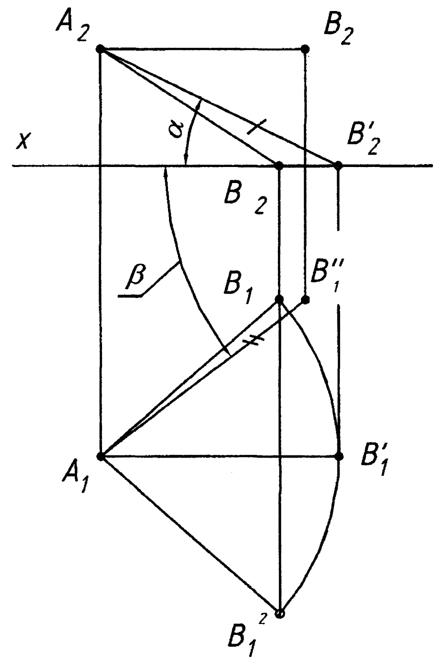
4. Откладываем на линии связи A_1A_2 от точки A_2 вниз отрезок A_23_2, равный найденному катету **1B**. Через точку **3** проводим прямую, перпендикулярную к линии связи A_2A_1, а из точки A_2 проводим дугу радиусом, равным катету **2A**. В пересечении прямой и дуги получаем точку B_2.

5. Откладываем на линии связи $A_1 A_2$ от точки A_1 вниз отрезок A_14_1, равный катету **2B**, проводим через точку 4_1 прямую перпендикулярно к линии A_1A_2 и находим на ней в пересечении с линией связи, проведенную из точки B_2, проекцию B_1. Проекция $A_1B_1 = 1A$.

Задача 2.55. Через точку **A** провести прямую общего положения, расположенную под углом $\alpha = 30^\circ$ к плоскости Π_1 и под углом $\beta = 50^\circ$ к плоскости Π_2 (рис. 2.72а)



а)



б)

Рис. 2.72

Решение.

1. Для прямой общего положения построение проекций под углами α и β возможно, если выполняется условие $\alpha + \beta < 90^0$. В данном случае $30^0 + 50^0 = 80^0 < 90^0$ – условие выполняется.

2. Из точки A_2 проводим прямую $A_2B'_2$ под углом α к плоскости Π_1 и параллельно плоскости Π_2 (проекция $A_1B'_1$).

3. Из точки A_1 проводим прямую $A_1B''_1$ под углом β к плоскости Π_2 и параллельно плоскости Π_1 (проекция $A_2B''_2$).

На обеих проекциях отложены равные отрезки **AB′** и **A B″**: $A_1B_1'' = A_2B''_2$

4. Повернем отрезок **AB′** ($A_1B'_1$) вокруг оси, перпендикулярной Π_1, а отрезок **A B″** ($A_2B''_2$) – вокруг оси, перпендикулярной Π_2

5. Обе оси вращения проходят через точку **A**. В некоторый момент оба эти отрезка совпадут - проекции A_1B_1 и A_2B_2. Это и будут проекции искомой прямой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бубенников А. В. Начертательная геометрия: Учебник для ВТУзов.-3-е изд., переработанное и дополненное. – М.: Высшая школа, 1985. – 288 с :, ил.
2. Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1973. – 416 с.: ил.
3. Виноградов В. Н. Начертательная геометрия: Учебник,3-е изд., переработанное и дополненное. – Мн.: Амалфея, 2001. – 368с.
4. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. Я. Курс начертательной геометрии: Учебное пособие для ВТУзов. – М.: Машиностроение,1999. –288с.: ил.
5. Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. Я. Курс начертательной геометрии: Учебное пособие для ВТУзов/ Под редакцией Гордона В. О. И Иванова Ю. Б. – М.: Высшая школа, 2004, – 272 с.: ил.
6. Власов М. П. Инженерная графика. – М., 1985.
7. Кузнецов Н. С. Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1981.
8. Лагерь А. И., Колесникова Э. А. – М.: 1985.
9. Начертательная геометрия : Учебник для ВТУзов под редакцией Н. Н. Крылова – М.: Высшая школа,. – 224 с.: ил.
10. Посвянский А. Д., Краткий курс начертательной геометрии. -М.: Высшая школа, 1970.
11. С. А. Фролов. Начертательная геометрия. – М. :Машиностроение, 1983. – 240с.
12. Х. А. Арустамов. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1978. – 445 с.
13. В. О. Гордон, Ю. Б. Иванов, Т. Е. Солнцева. Сборник задач по курсу “Начертательная геометрия”. – М.: Наука, 1977. – 320 с.
14. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. Задачи для упражнения: Учебное пособие.-М.: Высшая школа, 1981. – 296 с.
15. В. А. Пеклич. Задачи по начертательной геометрии: Учебное пособие -М.: Изд-во АВС , 1997. – 230 с.
16. С. А. Фролов. Сборник задач по начертательной геометрии.- М.: Машиностроение, 1980. – 441с.

Учебное издание

Кокошко Анатолий Федорович
Базенков Тимофей Николаевич
Житенева Наталья Сергеевна

Начертательная геометрия

Практикум

Рекомендовано Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов технических специальностей учреждений, обеспечивающих получение высшего образования

Ответственный за выпуск: ***Базенков Т.Н.***
Редактор: ***Строкач Т.В.***
Компьютерная верстка: ***Боровикова Е.А.***
Корректор: ***Никитчик Е.В.***

Лицензия №02330/0148711 от 30.04.2004 г.
Подписано к печати 26.12.2007 г. Бумага «Снегурочка». Усл. п.л. 7,0.
Уч.-изд.л. 7,5. Формат 60х84 $^1/_8$. Гарнитура Times New Roman.
Тираж 400 экз. Заказ № 1339.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Лицензия №02330/0133017 от 30.04.2004 г.

ISBN 978-985-493-077-0

9 789854 930770