Министерство образования Республики Беларусь

Брестский государственный технический университет

Кафедра начертательной геометрии и инженерной графики

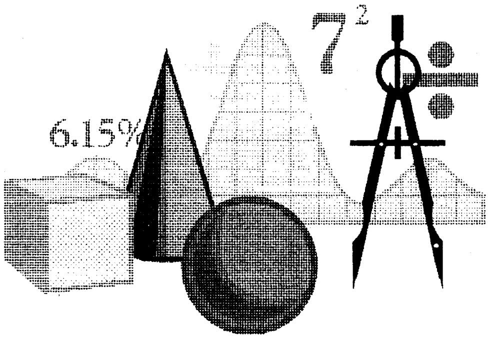
Методические указания

по начертательной геометрии

для студентов специальностей:

Т.19.02 – производство строительных изделий и конструкций (ПСиК);
С.04.02 – мелиорация и водное хозяйство (МиВХ);
Т.19.06 – водоснабжение, водоотведение, очистка природных и сточных вод (ВВОПиСВ).

Часть I



Брест 2001

Методические указания разработаны в соответствии с учебной и рабочей программами курса начертательной геометрии и предназначена для самостоятельной работы студентов при подготовке к практическим занятиям, экзаменам и при выполнении индивидуальных графических работ.

Составители: Уласевич З.Н. к.т.н., доцент
Шумская Л.П. ст. преподаватель
Яромич А.И. ст. преподаватель
Зубрицкий Н.Н. ассистент
Яромич Н.Н. ассистент

Под редакцией к.т.н., доцента Уласевич З.Н.

Рецензент: Ст. преподаватель кафедры инженерной графики строительного профиля БГПА Л.С. Ольшанская.

Содержание

Введение.

Прогресс в освоении какой-либо дисциплины в том числе и начертательной геометрии не может быть плодотворен без знания исторического процесса становления и развития этой области знаний.

К концу XVIII столетия знания методов изображения достигли высокой степени развития. Один из них, такие как перспектива, имели и определённое теоретическое обоснование. Другие – как ортогональные проекции преимущественно основывались на положениях, вытекающих из практического опыта и использовались различно в зависимости от конкретных задач без их теоретического обобщения. Этот метод изображения, как наиболее простой, полнее других отвечающий запросам бурно развивающейся техники и архитектуры, стал преобладающим и требовал своего теоретического обоснования.

Это удалось сделать французскому учёному Гаспару Монжу (1746-1818 г.г.), благодаря трудам которого ортогональные проекции сформировались, как научно-обоснованный метод изображения.

На основе анализа, применявшихся ранее изображений, ему удалось выделить в них основные теоретические положения, свести большое разнообразие практических случаев к выполнению небольшого количества основных задач, решаемых с помощью изображений на двух взаимно-перпендикулярных плоскостях с их последующим совмещением в одну плоскость. Это подвело теоретическую базу под ранее применявшиеся подобные изображения и свело в стройную систему весь ранее разрозненный материал и Г. Монж по заслугам считается творцом метода ортогональных проекций как науки. Впервые труд Г. Монжа был опубликован в 1799 г.

Значительную роль в совершенствовании методов изображений сыграли русские народные мастера-умельцы , как Рублёв, Барма, Кулибин, Ползунов и др. Они создали условия для освоения и дальнейшего развития “метода Монжа” и преподавания как предмета в учебных заведениях России.

Через очень короткий для того времени промежуток времени с момента опубликования труда Г. Монжа, в 1810 г. курс начертательной геометрии, как обязательный вводится в институте корпуса инженеров путей сообщения, куда приглашается ученик Г. Монжа – К.И. Потье.

С 1818 года курс ведет уже Я.А. Севастьянов – первый русский профессор по этой дисциплине. Он создаёт первые оригинальные труды по различным разделам дисциплины, стоявшие на уровне лучших мировых работ.

В последующий период издаются преимущественно учебных курсы на высоком научном уровне, в которые можно признать классическими, в отдельных случаях представляющие интерес и до сих пор.

Первый полный курс, с основательно разработанной теорией поверхностей, метода конического проецирования с решением обратных задач в перспективе, издаёт проф. Макаров Н.И. (1824-1906).

Проф. В.И. Курдюмов (1858-1906) в своих работах приводит систематический и углублённый материал по всем основным методам изображений с практическим их использованием.

Проф. Н.А. Рынин (1887-1943) в многочисленных трудах способствует развитию прикладных вопросов в ряде областей.

Дальнейшие успехи в развитии и совершенствовании методов изображений достигаются в результате педагогической и научной деятельности видных учёных, которые являются руководителями, организационных в эти годы самостоятельных кафедр начертательной геометрии в ведущих ВУЗах России. Помимо педагогического направления, создаются учебники и учебные пособия, защищаются докторские и кандидатские диссертации, организуются научные семинары и конференции.

Много труда в становлении начертательной геометрии и развитии научных достижений вложили профессора: Добряков А.И., Гордон В.О., Иванов Н.Н., Колотов С.М., Бубенников А.В., Фролов С.А., Четверухин Н.Ф., Рыжов Н.Н. и др.

1. Условные обозначения

В начертательной геометрии для сокращения записи элемента применяются определённые символы условных обозначений.

$A, B, C, M, 1, 2$ – точки
a, b, c, d, h, t – линии (прямые, кривые)
$\Phi, Q, \Theta, \Psi\ \Sigma, \Gamma, \Delta$ – поверхности, плоскости
$\bar{S}$ – направление проецирования
S – центр проецирования
i, j – ось вращения
Π_1, Π_2, Π_3 – плоскости проекций
X, Y, Z – оси системы координат
O – начало системы координат
X – ось проекций в системе (Π_1, Π_2)
Y – ось проекций в системе (Π_1, Π_3)
Z – ось проекций в системе (Π_2, Π_3)
$A_1, A_2, A_3; a_1, a_2, a_3$ – проекции геометрических образов
α, β, γ – углы наклона прямых и плоскостей к плоскостям проекций
Γ_1, Σ_2 – проецирующие плоскости
$|A, B|$ – натуральная величина отрезка
$[A, B, D]$ – ломаная линия, соединяющая точки A, B, D
$\left(\hat{a, b}\right)$ – угол между прямыми
$|A, l|$ – расстояние от точки A до прямой l
$|B, \Pi_1|$ – расстояние от точки B до плоскости проекций Π_1
$|B, \Pi_2|$ – расстояние от точки B до плоскости проекций Π_2
$|B, \Pi_3|$ – расстояние от точки В до плоскости проекций Π_3
$|\alpha|$ – натуральная величина угла
$\equiv$ – тождественное совпадение
$\cap$ – пересечение
$=$ – равенство, результат действия $(A = a \cap b)$
$\|$ – параллельность
$\perp$ – перпендикулярность
Ш – проецирующие
$\underset{-}{\bullet}$ – скрещивающиеся прямые
$\in$ – принадлежность
$\supset$ – включение в себя, проходит через
$\underset{-}{\cup}$ – касание
$\Rightarrow$ – логическое следствие «если…то», «следовательно»
$\xrightarrow{s}$ – параллельное проецирование
$\circlearrowleft$ – вращение вокруг указанной оси
Г – задать, взять, построить

2. Основные термины курса начертательной геометрии

Таблица 1.

Название термина	Сущность термина
Обратимость чертежа	решение прямой и обратной задач начертательной геометрии.
Прямая задача	представление геометрического образа (ГО) в пространстве, и по нему, на основании известных методов проецирования выполнение чертежа на соответствующих плоскостях проекций.
Обратная задача	по выполненному чертежу воспроизведение заданного ГО в пространстве.
Способы проецирования:	
• центральное (коническое)	все проецирующие лучи выходят из одной точки S, называемой центром проецирования (перспектива).
• параллельное (цилиндрическое)	если центр проецирования удалить в бесконечность, то проецирующие лучи станут параллельными.
• параллельное косоугольное	проецирующие лучи располагаются под любым углом к плоскости проекций (аксонометрические проекции).
• параллельное прямоугольное	проецирующие лучи располагаются под прямым углом к плоскости проекций (ортогональные проекции).
• проекции с числовыми отметками	предмет ортогонально проецируют на одну горизонтальную плоскость проекций $П_0$ – плоскость нулевого уровня.
Эпюр Монжа	плоскостной комплексный чертеж, состоящий из двух и более изображений, полученный путём совмещения пространственного комплексного чертежа с одной плоскостью.
Инварианты проецирования	изображения, сохраняющие все свойства оригинала.
Множество	совокупность элементов, объединённых по каким-либо общим признакам, выделяющих его из других.
Геометрический образ (ГО)	фигура, которая в той или иной степени моделирует геометрические свойства реального объекта.
Плоскость проекций	плоскость, на которую осуществляется проецирование пространственного объекта. В ортогональном проецировании применяются три взаимно перпендикулярные плоскости проекций: горизонтальная $П_1$, фронтальная $П_2$, профильная $П_3$.

Ось проекций	прямая, полученная в результате пересечения двух плоскостей проекций.
Проецирующий луч	прямая, проходящая через пространственную точку до пересечения с плоскостью проекций.
Проекция точки	точка пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.
Линия проекционной связи	прямая, перпендикулярная к оси проекций (OX, OY, OZ), и соединяющая две проекции точки.
Координаты точки	величины расстояний заданной точки от плоскостей проекций по осям X, Y, Z.
Биссектриса связи	прямая, проходящая через начало координат под углом 45^0.
Пространственный комплексный чертеж ГО	совокупность ортогональных проекций ГО на две и три взаимно перпендикулярные плоскости проекций.
Плоскостной комплексный чертеж ГО	геометрическая модель пространственного комплексного чертежа.
Способы преобразования комплексного чертежа (используются при решении метрических и позиционных задач).	
• замена плоскостей проекций	пространственное положение заданных ГО остается неизменным, а вводиться новые дополнительные плоскости проекций.
• вращения	при неизменном положении основных плоскостей проекций изменяется положение заданных ГО относительно этих плоскостей.
Определитель ГО	совокупность независимых геометрических элементов, определяющих указанный геометрический образ.
След ГО	пересечение ГО с плоскостью проекций.
Проецирующий ГО	ГО, основная проекция которого представляет измерение на единицу меньше, чем заданный геометрический образ по условию.
Конкурирующие точки	точки, принадлежащие скрещивающимся прямым, проекции которых совпадают только на одной из плоскостей проекций.
Алгоритм	способ решения задачи путем выполнения конечного цикла операций.
Позиционные свойства ГО-ов	свойства, которые отражают взаимное положение, взаимную принадлежность и взаимный порядок ГО.
Метрические свойства ГО-ов	свойства, отражающие численные характеристики ГО – расстояния, углы, площади и т. п.

Поверхность	• непрерывное двухпараметрическое множество точек; • геометрический образ, имеющий определённую закономерность, выражаемую уравнением; • непрерывное множество положений линии, перемещающейся в пространстве по определённому закону (*кинематический способ образования поверхности).*
Каркас поверхности	множество линий, ей принадлежащих и однозначно определяющих поверхность.
Элемент каркаса поверхности	линия каркаса (образующая, направляющая).
Определитель поверхности	совокупность геометрических элементов и условий, однозначно задающих поверхность в пространстве и на чертеже.
Параметр каркаса поверхности	зависимость, связывающая элементы каркаса поверхности.
Непрерывный каркас поверхности	непрерывное изменение параметра каркаса поверхности.
Дискретный каркас поверхности	дискретное изменение параметра каркаса поверхности.
Развертка пространственной кривой линии	плоская кривая, в которую преобразована пространственная кривая без изменения ее длины.
Аппроксимация кривой линии	сглаживание участков кривой линии, применяя определённые свойства и методы.
Развертка поверхности	плоская фигура, образованная последовательным совмещением всех плоских элементов поверхности с одной плоскостью.
Плоский элемент поверхности	элемент заданной поверхности, у которой смежные образующие параллельны или пересекаются т.е. образуют плоскость.
Развертываемые поверхности	многогранные поверхности; линейчатые кривые поверхности, у которых смежные образующие параллельны или пересекаются (цилиндрические, конические и торсовые).
Неразвертываемые поверхности	поверхности, у которых смежные образующие скрещиваются (криволинейные поверхности).
Соосные поверхности	поверхности вращения с общей осью вращения.
Опорные (характерные) точки линии пересечения поверхностей	наивысшие и наинизшие точки; точки видимости (точки, отделяющие видимую часть линии от невидимой); точки пересечения ребер многогранной поверхности с другой поверхностью; точки, проекции которых являются особыми точками для проекции линии пересечения (точки перегиба и т. д.).

Числовые отметки	числа, указывающие расстояния от точек проецируемого объекта до плоскости нулевого уровня H_0.
Заложение отрезка прямой линии	проекция этого отрезка на плоскость H_0.
Превышение отрезка прямой линии	разность числовых отметок точек, ограничивающих отрезок.
Интервал отрезка прямой линии	величина заложения, которая соответствует единице превышения.
Градуирование прямой линии	определение на прямой линии точек, отметки которых выражены последовательными целыми числами.
Уклон прямой линии	отношение превышения данного отрезка к его заложению. Он равен тангенсу угла наклона отрезка к плоскости проекций.
Горизонталь	линия, все точки которой имеют одинаковые числовые отметки.
Масштаб уклона плоскости	проградуированная горизонтальная проекция линии наибольшего ската данной плоскости.
Линия наибольшего ската плоскости	линия, принадлежащая данной плоскости и перпендикулярная её горизонталям.
Поверхность постоянного ската	огибающая поверхность, образованная движением конуса вращения с вертикальной осью, при этом вершина конуса перемещается по направляющей пространственной кривой линии.
Берг-штрихи	чередующиеся короткие и удлинённые штрихи, проведённые перпендикулярно горизонталям, которые указывают направление уклона плоскости и поверхности.

Обобщение групп, характеристик и свойств геометрических образов.

Определённая группа геометрических образов на комплексном чертеже характеризуется рядом свойств, в виду особенностей расположения их относительно плоскостей проекций. При этом имеют место параметры и методы, позволяющие конкретизировать и определить эти свойства. Такая обобщённая система позволяет подходить целенаправленно к разработке графического алгоритма в решении поставленной задачи (см. табл. 2).

Таблица. 2.

№ п/п	ГО на комплексном чертеже	Свойства, определяющие группу ГО	Параметры и методы определяющие свойства групп ГО
1	**2**	**3**	**4**
1.	Точка	Точка в системе 2-х и 3-х плоскостей проекций - $П_1$, $П_2$, $П_3$.	Значения координат *X*, *Y*, *Z*.
2. **2.1**	Прямая Прямые общего поло-	1. Определитель прямой.	1. Определитель прямой – две точки.

	жения	2. Натуральная величина отрезка прямой. 3. Следы прямой. 4. Принадлежность точки прямой. 5. Углы наклона прямой к плоскостям проекций. 6. Взаимное положение 2-х прямых. 7. Расстояние между прямыми	2. Метод прямоугольного треугольника. 2.1. Методы преобразования комплексного чертежа. 3. Методы построения следов прямых. 4. Теорема о принадлежности точки прямой. 5. Метод прямоугольного треугольника; метод преобразования комплексного чертежа. 6. Теоремы о взаимном положении двух прямых. 7. Алгоритмы решения задач применяя методы без преобразования комплексного чертежа или с преобразованием комплексного чертежа.
2.2	Прямые уровня: - горизонтального ǁ $П_1$; - фронтального ǁ $П_2$; - профильного ǁ $П_3$;	1. Натуральная величина отрезка прямой. 2. Следы прямой. 3. Принадлежность точки прямой. 4. Углы наклона прямой к плоскостям проекций. 5. Взаимное положение 2-х прямых.	1. Определена на чертеже по заданному условию, соответственно на $П_1$,$П_2$,$П_3$. 2. Метод построения следов. 3. По определению теоремы о принадлежности точки прямой. 4. Определены на чертеже для прямых ǁ $П_1$, $П_2$. (Для прямой ǁ $П_3$ необходимо построение профильной проекции). 5. По определению теоремы о взаимном расположении двух прямых.
2.3	Прямые проецирующие: - горизонтально-проецирующие $\perp П_1$; - фронтально-проецирующие $\perp П_2$; - профильно-проецирующие $\perp П_3$.	1. Натуральная величина отрезка прямой. 2. След прямой. 3. Принадлежность точки пря-	1. Определена на чертеже: перпендикулярно $П_1$ - по заданному условию в системе 2-х плоскостей проекций на плоскости $П_2$, в системе 3-х плоскостей проекций на плоскости $П_2$ и $П_3$. перпендикулярно $П_2$ - по заданному условию в системе 2-х плоскостей проекций на плоскости $П_1$,в системе 3-х плоскостей проекций на плоскости $П_1$ и $П_3$. перпендикулярно $П_3$ - по заданному условию в системе 2-х и 3-х плоскостей проекций на плоскости $П_1$ и $П_2$. 2. Метод построения следов. 3. По определению теоремы с

		мой.	учетом свойства собирательности проецирующих ГО.
		4. Углы наклона прямой к плоскостям проекций.	4. Составляют с плоскостями, к которым они перпендикулярны, угол 90°.
		5. Взаимные положения 2-х прямых.	5. По определению теоремы о взаимном расположении двух прямых.
3. **3.1**	Плоскость Плоскость общего положения.	1. Определитель.	1. Три точки не принадлежащие одной прямой.
		2. Натуральная величина отсека плоскости.	2. Метод прямоугольного треугольника, методы преобразования комплексного чертежа.
		3. След плоскости.	3. Метод построения следов плоскости.
		4. Принадлежность точки и прямой плоскости.	4. По определению теоремы о принадлежности точки и прямой плоскости.
		5. Особые линии плоскости.	5. Построение на основании определения (горизонтали, фронтали и л.н.с.).
		6. Углы наклона плоскости к плоскостям проекций.	6. Алгоритм решения задачи, применяя линию наибольшего ската плоскости.
		7. Взаимное положение двух плоскостей, прямой и плоскости. 8. Расстояние от точки до плоскости.	7,8. Алгоритмы решения задач, применяя методы без преобразования или с преобразованием комплексного чертежа.
3.2	Плоскость уровня. - горизонтального уровня $\|\Pi_1$; - фронтального уровня $\|\Pi_2$; - профильного уровня $\|\Pi_3$.	1. Натуральная величина отсека плоскости.	1. Определена на чертеже по заданному условию соответственно: - $\|\Pi_1$ на плоскости Π_1; - $\|\Pi_2$ на плоскости Π_2; - $\|\Pi_3$ на плоскости Π_3.
		2. След плоскости.	2. Метод построения следов.
		3. Принадлежность точки и прямой плоскости.	3. По определению теоремы о принадлежности точки и прямой плоскости.
		4. Особые линии в плоскости.	4. Построение на основании определения главных линий плоскости.
		5. Углы наклона плоскости к плоскостям проекций.	5. 0°, 90°, 90°.
		6. Взаимное положение 2-х плоскостей, прямой и плоскости. 7. Расстояние от точки до плоскости.	6,7. Алгоритмы решения задач применяя методы без преобразования комплексного чертежа.
3.3	Проецирующие плоскости: - горизонтально проецирующие $\perp\Pi_1$;	1. Натуральная величина отсека плоскости.	1. Методы преобразования комплексного чертежа.
		2. След плоскости.	2. Метод построения следов.
		3. Принадлежность точки и	3. По определению теоремы с

	рующие $\perp П_1$; - фронтально проецирующие $\perp П_2$; - профильно проецирующие $\perp П_3$.	прямой плоскости. 4. Особые линии в плоскости. 5. Углы наклона плоскости к плоскостям проекций. 6. Взаимное положение 2-х плоскостей, прямой и плоскости.	учетом собирательности проецирующих ГО. 4. Построение на основание определения. 5. Определение на чертеже по заданному условию. 6. Алгоритма решения конкретных задач с преобразованием или без преобразования комплексного чертежа.
4.	Поверхности.	1.1. Определитель.	1.1. Классификация в соответствии с определителем.
4.1	Поверхности общего положения.	1.2. Определитель.	1.2. Классификация по наличию в их определителе проецирующего ГО (прямой или плоскости).
4.2	Поверхности частного положения: $\perp П_1$; $\perp П_2$; $\perp П_3$;	2. Принадлежность точки и линии поверхности. Характерные особые точки и линии принадлежащие каркасу поверхности. 3. Взаимное положение 2-х поверхностей, поверхности и прямой линии, поверхности и плоскости.	2. По определению теоремы из условия принадлежности точки поверхности. 3. Составление алгоритмов решения задач, используя методы секущих плоскостей-посредников частного и общего положения, методы концентрических сфер, методы преобразования комплексного чертежа.
4.3	Развертки поверхностей.	1. Построение точной развертки.	1. Методы треугольников, раскатки, нормального (перпендикулярного) сечения.
5.	Проекции с числовыми отметками.	1. Определитель.	1. Прямая заданная: двумя точками; 1.2. Точкой, направлением и величиной уклона.
5.1	- прямые	2. Уклон прямой. 3. Заложение, превышение, интервал и градуирование отрезка прямой.	2. Графический и аналитический метод.
5.2	- плоскости	1. Определитель. 2. Градуирование линии наибольшего уклона плоскости. 3. Пересечение двух плоскостей.	1. Масштаб уклона плоскости. 2. Графический и аналитический метод. 3. Методы используемые в проекциях с числовыми отметками, где секущие плоскости не проводятся, а их заменяют горизонталями с одноимёнными отметками.

		4. Пересечение прямой и плоскости.	4.. Методы аналогичные применяемым для решения задач в ортогональных проекциях.
5.3	- поверхности	1. Определитель. 2. Градуирование. 3. Пересечение поверхностей.	1. Горизонтали; профили (вертикальные сечения). 2. Графический и аналитический метод. 3. Методы используемые в проекциях с числовыми отметками, где секущие плоскости не проводиться, а их заменяют горизонталями с одноимёнными отметками.
6.1	Комплексные задачи в проекциях с числовыми отметками.	1. Определение границ земляных работ для насыпи и выемки; определение точек нулевых работ для дорог имеющих определённый уклон; построение поперечного профиля.	1.1. градуирование оси полотна дороги и проведение на нём горизонталей; 1.2. выявление положения откосов насыпи и выемки дороги; 1.3. построение горизонталей откосов насыпей и выемок; 1.4. построение масштабов уклонов откосов выемок и насыпей по заданным уклонам; 1.5. построение линии подошвы откосов насыпей и бровок откосов выемок; 1.6. построение поперечного профиля.

3. Основные проекционные методы построения чертежа

Требования, предъявляемые к чертежам, привели к созданию определённого научного направления – “теории изображений”. Теория изображений – это основа начертательной геометрии. Для построения чертежей на плоскости проекций в начертательной геометрии применяются два основных проекционных метода.

Центральное проецирование (коническое). Проецирующие лучи проходят через одну точку (*S*) – центр проецирования (рис. 1)

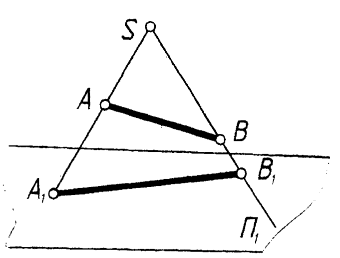


Рис. 1

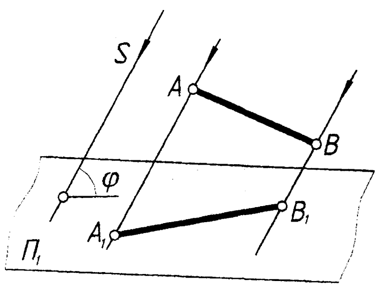


Рис. 2

Параллельное проецирование (цилиндрическое). Проецирующие лучи параллельны заданному направлению ↓S (рис. 2). В зависимости от заданного направления имеет место косоугольное, либо *прямоугольное (ортогональное) проецирование*.

На основании центрального и параллельного проецирования выполняются графические изображения, которые подробно будут рассмотрены при изучении курса начертательной геометрии.

Рассмотрим основные проекции построения чертежа.

3.1. Перспективные проекции

В основу построения перспективного изображения положен метод центрального проецирования (рис.3). Более подробно перспективное проецирование будет рассмотрено в методических указаниях, часть II.

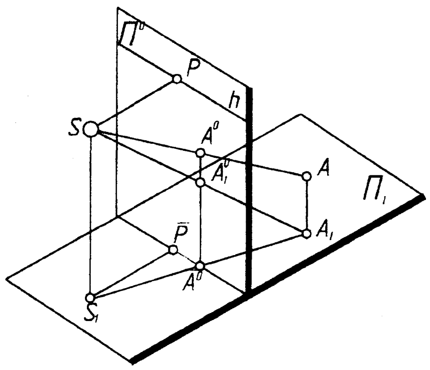


Рис. 3.

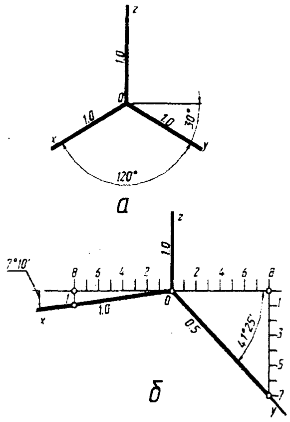


Рис. 4.

3.2. Аксонометрические проекции

В основу построения аксонометрического изображения положен метод параллельного проецирования.

В зависимости от направления проецирования их подразделяют на прямоугольные и косоугольные. Распространенные, широко используемые в инженерной практике прямоугольные аксонометрические проекции установленные стандартом (рис.4) ГОСТ 2.317-68:

- прямоугольная изометрия (рис 4а);
- прямоугольная диметрия (рис. 4б).

Более подробно характерные особенности аксонометрических проекций будут рассмотрены в методических указаниях, часть II.

3.3. Проекции с числовыми отметками

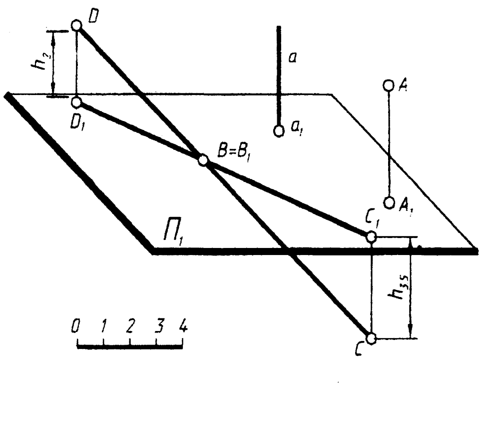


Рис. 5.

Построение геометрического объекта в проекциях с числовыми отметками осуществляется на основе метода ортогонального проецирования на одну плоскость проекций. Плоскость проекций называется плоскостью нулевого уровня (рис.5). Другую проекцию геометрического образа заменяют числовой отметкой в метрах т.е. простановкой у этой проекции величины расстояния точки от принятой плоскости проекции. Рядом с чертежом выполняется линейный масштаб.

Характерные особенности задания ГО в проекциях с числовыми отметками, решение задач по построению границ земляных работ будут приведены в методических указаниях, часть II.

3.4. Ортогональное проецирование на две и три взаимно перпендикулярные плоскости проекций

При изучении курса начертательной геометрии основным разделом является ортогональное проецирование. В основу построения ортогонального изображения положен метод параллельного проецирования. Направление проецирующих лучей в этом случае перпендикулярно плоскостям проекций (рис. 6, 7).

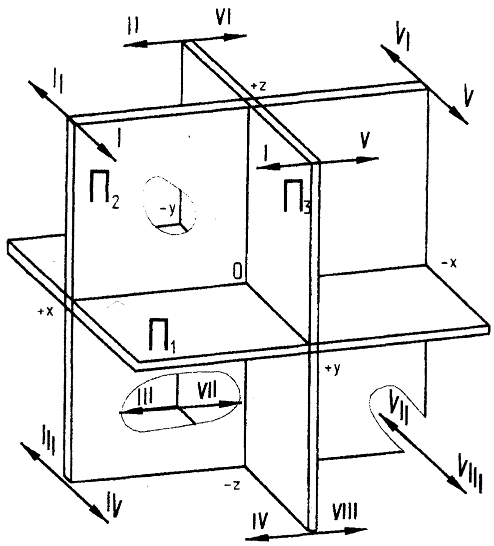


Рис. 6.

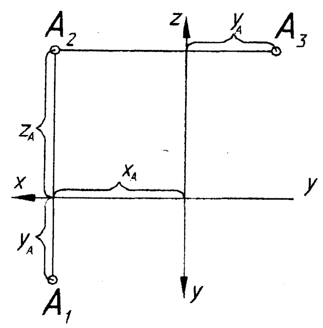


Рис.7.

3.4.1. Инвариантные свойства ортогонального проецирования

1. $A \xrightarrow{S} A_1$ - проекция точки есть точка.
2. $l \xrightarrow{S} l_1$ - проекция прямой есть прямая. $l // s \Rightarrow \mu(l_1) = \mu(l) - 1 = 0$ - если прямая параллельна направлению проецирования, то проекцией прямой является точка.
3. $A \in l \Rightarrow A_1 \in l_1$ - если точка принадлежит линии, то проекция точки принадлежит проекции линии.
4. $l // a \Rightarrow l_1 // a_1$ - проекции параллельных прямых параллельны между собой.
5. $|A_1B_1| : |B_1C_1| = |AB| : |BC|$ - если отрезок прямой делится точкой в каком-то отношении, то и проекции отрезка делятся проекциями точки в том же отношении.
6. $l \perp a \wedge a // \Pi_1 \Rightarrow l_1 \perp a_1$ Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна ей, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажений.

3.4.2. Образование комплексного чертежа

Проецирование осуществляется на две либо три взаимно перпендикулярные плоскости проекций (рис. 6).

Для наглядности и удобства построения изображения (чертежа) осуществляется переход от комплексного пространственного чертежа (рис. 6) к комплексному плоскостному чертежу (рис.7). Плоскостной комплексный чертёж называется эпюром Монжа (по имени автора данного метода, французского учёного Г. Монжа 1746-1818 г.г.), благодаря трудам которого ортогональное проецирование сформулировалось, как научно-обоснованный метод изображений. На основе анализа, применявшихся ранее изображений ему удалось выделить в них основные теоретические предпосылки, свести большое разнообразие практических случаев к выполнению основных задач, решаемых с помощью изображений на двух взаимно перпендикулярных плоскостях с их последующим совмещением в одну плоскость.

Проанализируем более подробно особенности образования комплексного пространственного чертежа (рис. 6) и комплексного плоскостного чертежа (рис. 7).

Рассмотрим проецирование ГО на плоскости проекций на примере точки *A*:

- Три взаимно-перпендикулярные плоскости проекций.
  Π_1 – горизонтальная;
  Π_2 – фронтальная;
  Π_3 – профильная.
  При этом плоскости Π_1 и Π_2 – делят пространство на 4 четверти (I, II, III, IV), а плоскости Π_1 и Π_2 и Π_3 – на 8 октантов.
- Геометрический образ (точка *A*) проецируется на плоскости проекций перпендикулярными прямыми, которые называются проецирующими лучами;
- Точки пересечения проецирующих лучей с плоскостями проекций называются проекциями (изображениями) точек соответственно:
  A_1 – горизонтальной;
  A_2 – фронтальной;
  A_3 – профильной.
- Линия пересечения плоскостей проекций Π_1 и Π_2 называется осью проекций *Ox*. Пересечение плоскостей проекций Π_1 и Π_3 образуют ось проекций *Oy*, а пересечение Π_3 и Π_2 - ось проекций *Oz*. Оси проекций фиксируют положение плоскостей проекций, они могут иметь как положительное, так и отрицательное направление.
- Совмещением плоскостей Π_1 и Π_3 с плоскостью Π_2 образуется комплексный плоскостной чертёж (эпюр Монжа). На этом чертеже выполняются все графические построения.
- Величины расстояний точки от плоскости проекций называется координатами точки *A*:
  X_A – абсцисса точки *A*, определяет расстояние точки *A* от профильной плоскости проекций Π_3;
  Y_A – ордината точки *A*, определяет расстояние точки *A* от фронтальной плоскости проекций Π_2;
  Z_A – аппликата точки *A*, определяет расстояние точки *A* от горизонтальной плоскости проекций Π_1;
  Если известны числовые значения, выражающие координаты точки *A*, например, x=15; y=10; z=12, то координаты точки *A* записывают так: *A*(15, 10, 12).
- Прямая, перпендикулярная к осям проекций и соединяющая разноимённые проекции точки *A* называется линией проекционной связи.
- Горизонтальная проекция точки *A* (A_1) всегда расположена на одной линии проекционной связи с фронтальной проекцией точки *A* (A_2) перпендикулярна оси *Ox*;
  Фронтальная проекция точки *A* (A_2) всегда расположена на одной линии проекционной связи с профильной проекцией точки *A* (A_3) перпендикулярна *Oz*;
- Важным свойством при ортогональном проецировании является возможность варьировать проекциями ГО относительно осей проекций. В связи с этим в системе двух плоскостей проекций Π_1 и Π_2 ось проекций *Ox*, как прямая может быть на чертеже исключена и чертёж в этом случае называют безосным. Однако при использовании преобразования комплексного чертежа ось проекций *Ox* необходима.

4. Позиционные задачи

В курсе начертательной геометрии рассматриваются основные позиционные и метрические задачи. Такое деление носит условный характер, поскольку в комплексных задачах обычно присутствует как позиционная, так и метрическая характеристика.

Группу позиционных составляют:

- задачи на взаимный порядок геометрических образов (задание ГО на чертеже; положение ГО, т.е. точки, прямой, плоскости, поверхности относительно плоскостей проекций);
- задачи на взаимную принадлежность геометрических образов (точки – прямой, плоскости и поверхности; линии – плоскости и поверхности);
- задачи на взаимное пересечение геометрических образов (двух линий, линии и плоскости, двух плоскостей; линии и поверхности; плоскости и поверхности; двух поверхностей).

Рассмотрим в соответствующей последовательности группу позиционных задач.

4.1. Задачи на взаимный порядок геометрических образов

4.1.1. Задание геометрических образов на чертеже

При изучении ГО необходимо конкретизировать их с понятиями определителей и параметров формы.

- *Задание точки.*

Точка - абстрактный геометрический образ, не имеющий измерений и определителя. На чертеже в системе двух плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$ задаётся двумя проекциями (горизонтальной и фронтальной) (рис. 8). В системе трёх плоскостей проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$ задаётся тремя проекциями – горизонтальной, фронтальной и профильной (рис. 9).

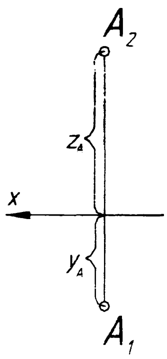


Рис. 8

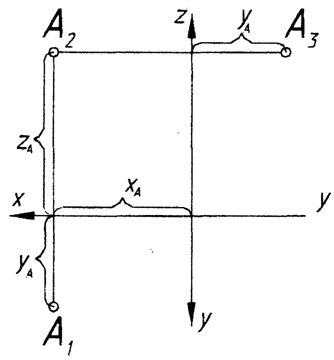


Рис. 9

- *Задание прямой линии.*

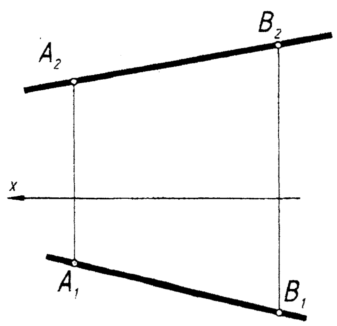


Рис. 10

Определитель прямой линии - две точки (•)A(•)B. Параметр формы – длина, поэтому прямая относится к однопараметрическому ГО (рис. 10). На чертеже прямая линия задаётся проекциями: в системе двух плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$ – горизонтальной A_1B_1 и фронтальной A_2B_2. Задание прямой линии в системе трёх плоскостей проекций $П_1$,$П_2$,$П_3$ необходимо для профильной и профильно-проецирующей прямой (см. табл. 2).

Для задания ломаной линии на чертеже указываются все точки вершин и их последовательность (рис. 11)

Кривая линия на комплексном чертеже также задаётся проекциями (рис. 12).

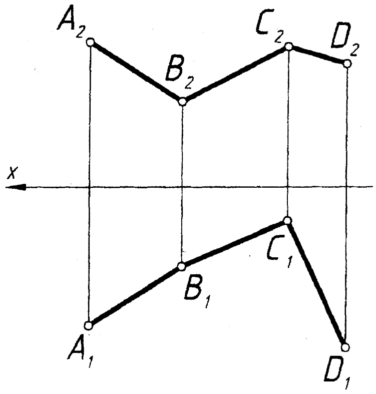


Рис. 11.

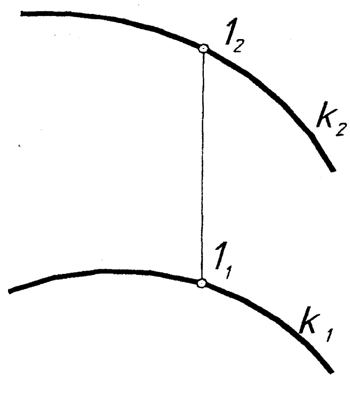


Рис. 12.

- *Задание плоскости.*

Определитель плоскости - три точки не лежащих на одной прямой (•)A(•)B(•)C (рис. 13а). Плоскость имеет два параметра формы: длину и ширину, и относиться к двухпараметрическому ГО.

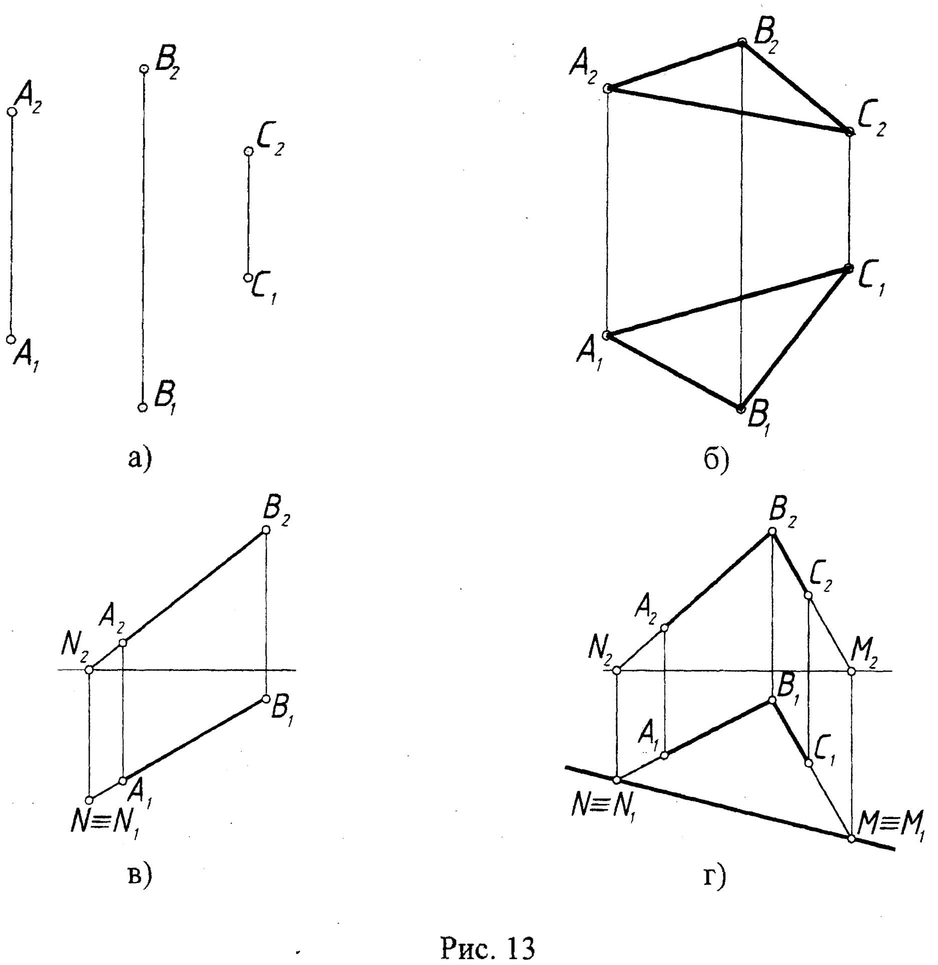


Рис. 13

Задавать на комплексном чертеже плоскость необходимо совокупностью проекций геометрических элементов, определяющих плоскость: точкой и прямой, двумя параллельными или пересекающимися прямыми, отсеком, следами. На рис. 13б плоскость задана отсеком в виде треугольника.

След плоскости проходит через следы 2-х прямых этой плоскости. Следом прямой является (рис. 13в) точка пересечения её с плоскостью проекций (N_1 – горизонтальная проекция следа). Следом плоскости является (рис. 13г) линия пересечения её с плоскостью проекций (M_1N_1 – горизонтальная проекция следа плоскости).

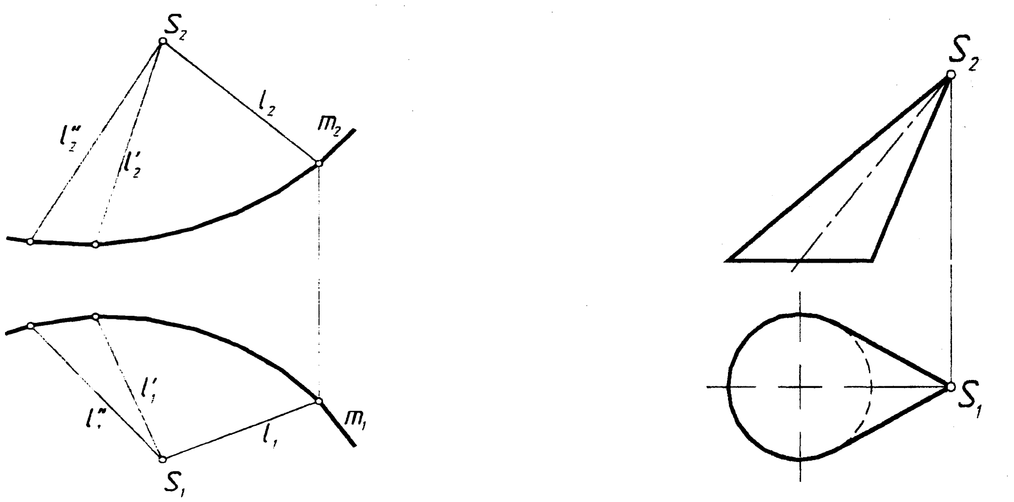
- *Задание поверхности.*

Определителем поверхности является совокупность геометрических элементов реализующих закон каркаса поверхности, как в пространстве, так и на чертеже. Определитель поверхности состоит из двух частей: геометрической и алгоритмической.

Геометрическая часть констатирует форму образующей и направляющей.

Алгоритмическая часть определяет условия перемещения или же изменения образующей.

Одна и та же поверхность может иметь несколько каркасов. Поэтому для каждой поверхности может быть и несколько определителей. Поверхности относятся к многопараметрическим ГО с определёнными заранее заданными требованиями. Эти требования интерпретированы в первую очередь геометрически, с точки зрения позиционных и метрических условий.



а) б)

Рис.14

В зависимости от требований предъявляемых в каждом конкретном случае поверхности могут быть заданы на комплексном чертеже проекциями каркаса, либо проекциями контура поверхности, т.е. очерком.

На рис. 14 задана коническая поверхность. Определителем является образующая l (l_1, l_2), проходящая через неподвижную точку S (S_1, S_2) и пересекающая направляющую кривую линию m (m_1, m_2).

4.1.2. Расположение геометрических образов относительно плоскостей проекций

Геометрические образы в начертательной геометрии по своему расположению относительно плоскостей проекций классифицируются на:

- геометрические образы общего положения
- геометрические образы частного положения, которые в свою очередь подразделяются на геометрические образы уровня и проецирующие.

Отличительной особенностью геометрических образов общего положения является не параллельность и не перпендикулярность их по отношению к плоскостям проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$.

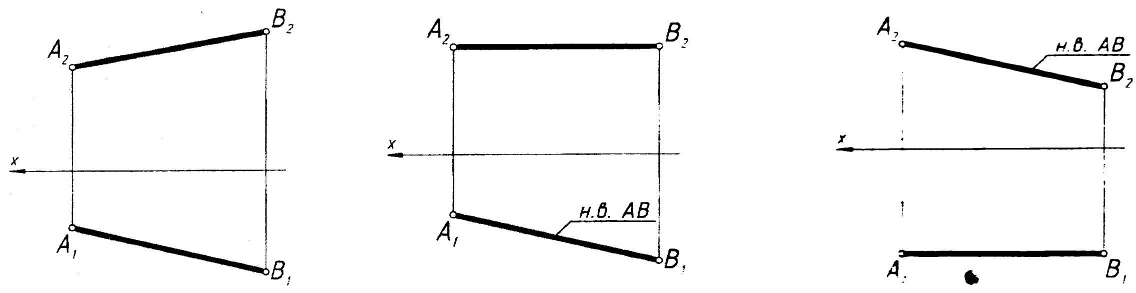
Отличительной особенностью геометрических образов частного положения, является признак их параллельности либо перпендикулярности к плоскостям проекций $П_1$, $П_2$, $П_3$.

Рассмотрим классификацию геометрических образов на примере прямой.

Прямая AB (рис. 15а) не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций называется прямой общего положения.

$AB\ (A_1B_1;\ A_2B_2) \parallel \Pi_1$
A_1B_1 – натуральная величина
$A_2B_2 \parallel$ оси 0X

$AB\ (A_1B_1;\ A_2B_2) \parallel \Pi_2$
A_2B_2 – натуральная величина
$A_1B_1 \parallel$ оси 0y



а) б) в)

Рис. 15.

Прямая AB (рис. 15б) параллельна Π_1 называется **прямой горизонтального уровня**. По аналогии – прямая AB (рис. 15в) параллельна Π_2 - называется **прямой фронтального уровня**. При наличии такой характерной особенности, как параллельности прямой одной из плоскостей проекций на чертеже одна из её проекций параллельна оси Ox, а другая проекция является натуральной величиной (рис. 15 б, в).

В курсе начертательной геометрии согласно приведенной выше классификации и определения ГО частного положения имеют место:

- прямые горизонтального уровня ($\parallel \Pi_1$);
- прямые фронтального уровня ($\parallel \Pi_2$);
- прямые профильного уровня ($\parallel \Pi_3$);
- прямые горизонтально проецирующие ($\perp \Pi_1$);
- прямые фронтально проецирующие ($\perp \Pi_2$);
- прямые профильно проецирующие ($\perp \Pi_3$);
- плоскости горизонтального уровня ($\parallel \Pi_1$);
- плоскости фронтального уровня ($\parallel \Pi_2$);
- плоскости профильного уровня ($\parallel \Pi_3$);
- плоскости горизонтально проецирующие ($\perp \Pi_1$);
- плоскости фронтально проецирующие ($\perp \Pi_2$);
- плоскости профильно проецирующие ($\perp \Pi_3$);
- поверхности горизонтально проецирующие ($\perp \Pi_1$);
- поверхности фронтально проецирующие ($\perp \Pi_2$);
- поверхности профильно проецирующие ($\perp \Pi_3$);

- *Проецирующие геометрические образы*

Проецирующий ГО имеет отличительные особенности, в связи с наличием на комплексном чертеже *вырожденной основной* его проекции. На рис. 16 представлены комплексные чертежи заданных горизонтально-проецирующих ГО в том числе: отсеков поверхности Ω, цилиндрической поверхности вращения Φ, плоскости Γ и прямой AB.

В данном случае каждая горизонтальная проекция ГО соответственно ($A_1B_1C_1D_1$; Φ_1; $C_1B_1A_1$; $A_1 \equiv B_1$) называется вырожденной основной проекцией. Такая проекция обладает некоторыми отличительными свойствами. Одним из таких свойств, является свойство "собирательности". Свойство "собирательности" позволяет существенно снизить степень сложности алгоритма решения задач. Суть данного свойства заключается в том, что одна из проекций какой-либо точки, принадлежащей проецирующему ГО, всегда будет проецироваться на вырожденную его основную проекцию (см. рис. 16).

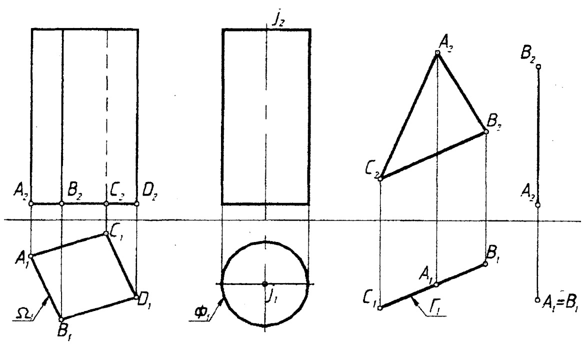


Рис. 16.

Ещё одной характерной особенностью вырожденной основной проекции является то, что она имеет измерение на единицу меньше чем заданный проецирующий ГО по условию.

Прямая будет проецирующей, если её вырожденной основной проекцией является точка.

Для плоскости основной проекцией является прямая линия; для цилиндрической поверхности – кривая линия (окружность): для призматической поверхности – ломаная линия.

При этом, поверхность проецируется в линию, если она несёт на себе полный непрерывный каркас проецирующих прямых линий. Тогда каждая такая линия проецируется в точку, а вся поверхность – в линию.

Исходя из вышеизложенного, можно заключить, что для задания на комплексном чертеже проецирующего ГО, необходимо знать его вырожденную основную проекцию, обладающую свойством собирательности и проанализировать соответствие условий принадлежности какой-либо точки проецирующему ГО.

4.2. Задачи на взаимную принадлежность геометрических образов

В соответствующих теоремах начертательной геометрии отражается сущность условий принадлежности ГО как в пространстве (см. инварианты ортогонального проецирования п. 3.4.1.), так и на чертеже. При этом, задачи на принадлежность точки ГО являются основой критерия задания ГО на комплексном чертеже в целом. Учитывая эту закономерность в данном разделе будут проанализированы некоторые варианты применения теорем о взаимной принадлежности ГО на комплексном чертеже в системе двух плоскостей проекций (Π_1 и Π_2).

- *Условие принадлежности точки прямой.* Точка принадлежит прямой, если на чертеже одноимённые проекции точки принадлежат одноимённым проекциям прямой (см. (•) $D \in m$, (•) A $\notin m$, (•) B $\notin m$ (рис. 17)).

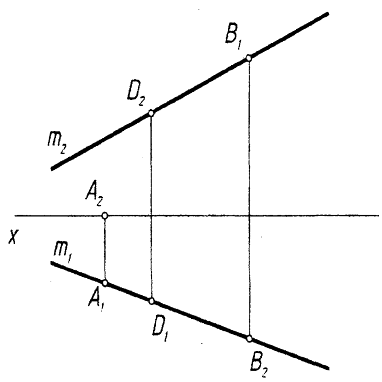
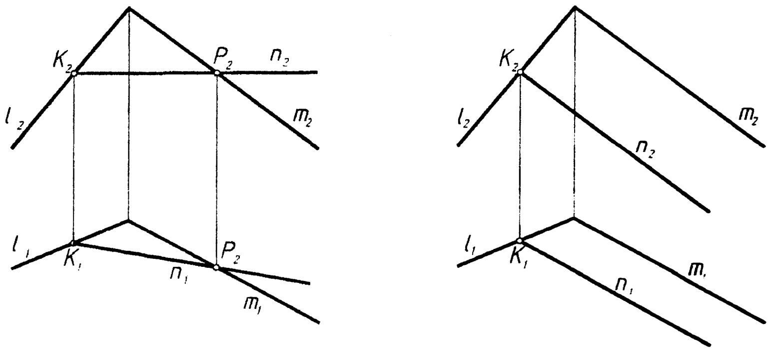


Рис. 17

- *Условие принадлежности точки и прямой линии плоскости.*

Прямая принадлежит плоскости, если она пересекается с прямыми, задающими эту плоскость, или пересекается с одной из них и параллельна другой (рис. 18 а, б).

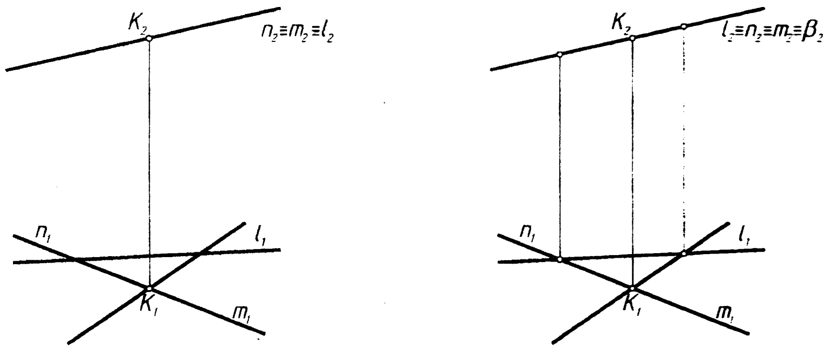


а) б)

Рис. 18

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит **любой прямой**, принадлежащей данной плоскости (рис18).

- *Признаком принадлежности точки и прямой плоскости частного положения* является совмещение на эпюре их проекций с одноимёнными **вырожденными** проекциями данной плоскости на основании свойства собирательности (рис. 19а, б). Таким образом, произвольный геометрический элемент (точка, прямая) принадлежит заданному ГО в том случае, если на комплексном чертеже соответствующая проекция геометрического элемента принадлежит вырожденной основной проекции проецирующего ГО.



а) б)

Рис. 19

- *Главные (особые) линии принадлежащие плоскости*

  К главным (особым) линиям плоскости относятся:
  - линии уровня (горизонталь и фронталь);
  - линии наибольшего наклона (ската);

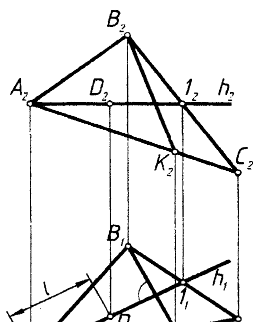


Рис. 20

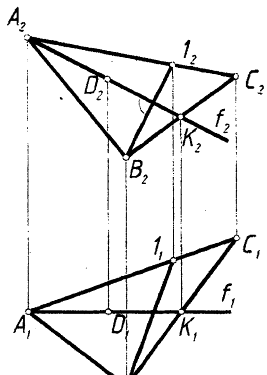


Рис. 21

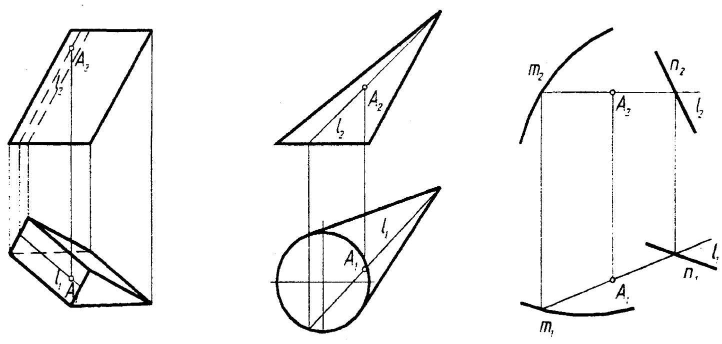
Горизонталь плоскости – это прямая $h(h_1 h_2)$, принадлежащая плоскости и параллельная Π_1. Горизонтальная проекция горизонтали является натуральной величиной (рис. 20).

Фронталь плоскости – это прямая $f(f_1 f_2)$, принадлежащая плоскости и параллельная Π_2. Фронтальная проекция фронтали является натуральной величиной (рис. 21).

- *Линии наибольшего наклона (ската) плоскости* – это прямые принадлежащие плоскости и перпендикулярные линиям уровням, т.е. горизонталям либо фронталям плоскости. На рис. 20 – BK (B_1K_1; B_2K_2) – линия наибольшего наклона в горизонтальной плоскости, на чертеже $B_1K_1 \perp h_1$. На рис. 21 – $B1$ ($B_1 1_1$; $B_2 1_2$) – линия наибольшего наклона во фронтальной плоскости, на чертеже $B_2 1_2 \perp f_2$.
- *Условие принадлежности точки и линии поверхности.*

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии этой поверхности. В качестве линий на поверхности выбирают графически простые линии – прямые или окружности.

На рис. 22а,б,в показано решение задач на построение ортогональных проекций точки A, принадлежащей поверхности с помощью прямой линии.

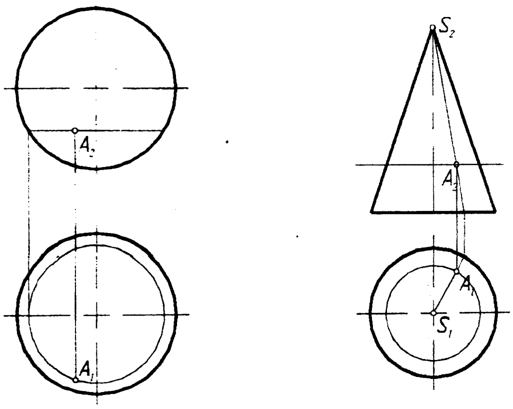


а) б) в)

Рис. 22.

Решение задач на построение точки, принадлежащей поверхности, проводится в данной последовательности.

- Одна проекция точки на чертеже задаётся произвольно в пределах очерка поверхности;
- Через заданную проекцию точки проводим проекцию линии, принадлежащую поверхности;
- Определяем вторую проекцию линии исходя из принадлежности её данной поверхности;
- На построенной проекции линии принадлежащей поверхности отмечаем искомую проекцию точки.

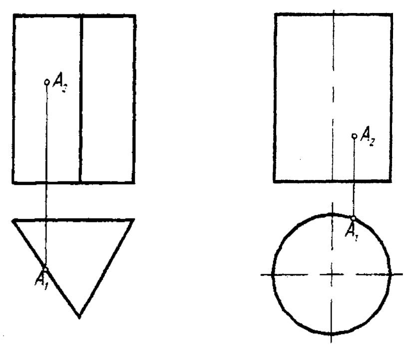


а) б)

Рис. 23

На рис. 23а точка A, принадлежит поверхности вращения – сфере. Решение выполнено, с помощью вспомогательной окружности (параллели), проходящих через эту точку.

Проекции точки A принадлежащей поверхности кругового конуса могут быть построены как с помощью прямолинейной образующей, SA так и с помощью окружности-параллели (рис. 23б).



а) б)

Рис. 24

Построение проекции точки принадлежащей проецирующей поверхности упрощается, т.к. соответствующие проекции этой точки будут всегда расположены на вырожденной основной проекции заданной поверхности (рис. 24 а, б).

4.3. Задачи на взаимное пересечение геометрических образов

Они подразделяются на три следующих группы:

- Задачи на пересечение двух линий (прямых и кривых);
- Задачи на пересечение линий с плоскостью либо поверхностью;
- Задачи на пересечение двух плоскостей, поверхности и плоскости либо двух поверхностей;

Алгоритм решения задач пересечения двух линий

Решение первой группы задач основано на одном из инвариантов проецирования (см п. 3.4.1.). Две линии пересекаются, если точки пересечения одноименных проекций линий лежат на одной линии проекционной связи (рис. 25 а, б).

а) б)

Рис. 25.

Алгоритм решения второй и третей группы задач

Из трёх выше перечисленных позиционных задач для детального рассмотрения остались две:

- Задачи на пересечение прямой и плоскости либо поверхности;
- Задачи на пересечение двух плоскостей, плоскости с поверхностью либо двух поверхностей;

Эти две задачи называются главными позиционными задачами (ГПЗ).

Методика решения их в начертательной геометрии заслуживает особого внимания.

Методы решения главных позиционных задач основываются на трех алгоритмах, соответствующих трем случаям расположения пересекающихся геометрических образов относительно плоскостей проекций:

1 случай: оба геометрических образа (ГО) занимают общее положение относительно плоскостей проекций;

2 случай: один ГО является общего положения, а второй – частного;

3 случай: оба ГО являются частного положения.

Рассмотрим возможные алгоритмы решения каждой группы задач в определённой последовательности на конкретных примерах.

4.3.1. Алгоритм решения задач пересекающихся ГО, которые занимают общее положение.

В этом случае возможно определение точек и линий пересечения в следующих вариантах:

- прямой общего положения с плоскостью общего положения;
- двух плоскостей общего положения;
- прямой общего положения с поверхностью общего положения;
- плоскостью общего положения с поверхностью общего положения;
- двух поверхностей общего положения (кроме соосных поверхностей вращения с пересекающимися осями).

Во всех этих случаях применяется способ вспомогательных плоскостей-посредников. В качестве таких плоскостей – посредников, как правило, применяются проецирующие плоскости. Однако, в некоторых случаях в качестве плоскостей-посредников применяются и плоскости общего положения.

В данной методической разработке, при построении линии пересечения заданных ГО будут применяться плоскости-посредники частного положения. Выбор плоскости-посредника должен быть таким, чтобы линии, получаемые в результате пересечения плоскости-посредника с заданными ГО, были бы графически простыми: прямыми и окружностями.

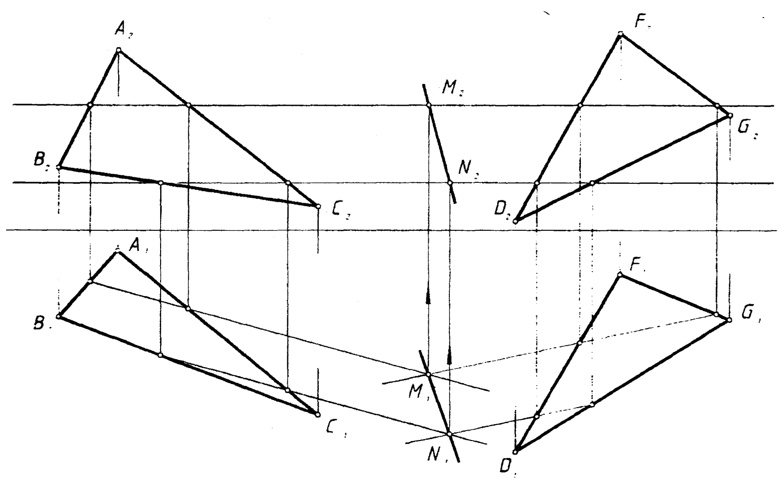


Рис. 26

На примере, построения линий пересечения двух плоскостей общего положения заданных ΔABC и ΔDFG (рис.26) рассмотрим общий подход в составлении алгоритма решения задач.

- Линия пересечения плоскостей определяется двумя точками N и M, которые одновременно принадлежат и плоскости ABC, и плоскости DFG:
- для определения точек N и M проводим плоскости-посредники частного α_2 и β_2, которые пересекают обе заданные плоскости;
- находим поочередно линии пересечения плоскостей-посредников с плоскостями ABC и DFG;
- на пересечении соответствующих проекций (в данном случая горизонтальных) линий пересечения плоскостей (заданных и посредников) определяем точки N и M соответственно.

Рассмотрим следующий пример. На чертеже по условию задачи заданы ГО:

- плоскость ABC – общего положения;
- прямая l – также занимает общее положение.

В результате пересечение прямой l с плоскостью ABC (рис. 27) образуется $(\bullet)T \in L \in ABC$.

Для решения задачи используем способ вспомогательных плоскостей-посредников частного положения.

1. Посредник, плоскость β, проводим через прямую *l* (рис. 27), ($l_2 \equiv \beta_2$).

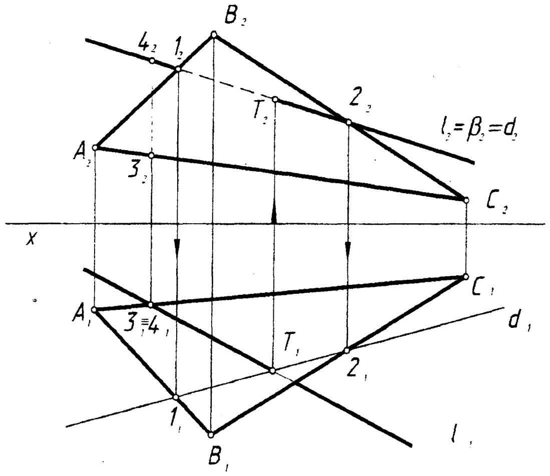


Рис. 27

2. Находим линию пересечения плоскости-посредника с заданной плоскостью *ABC*, т.е. линию *d* . Общие точки в пределах плоскостей *ABC* и β принадлежат линии пересечения *d* (на чертеже точки 1 и 2).
3. В пересечении линии 1- 2 с заданной прямой *l* отмечаем искомую точку *T* (T_1, T_2).
4. Видимость прямой *l* относительно плоскости *ABC* определяем по конкурирующим точкам. В плоскости Π_1 используем конкурирующие точки 3, 4. По аналогии определяем видимость прямой *l* во фронтальной плоскости проекций.

Так как плоскость является частным видом поверхности, аналогично, при помощи метода секущих плоскостей-посредников определяется точка пересечения прямой с поверхностью. На рис. 28 приведен пример решения задачи по определению точек пересечения прямой с поверхностью призмы. Заданная прямая $a(a_1a_2)$ общего положения заключена в проецирующую плоскость α. Алгоритм её решения сводится к следующей очерёдности:

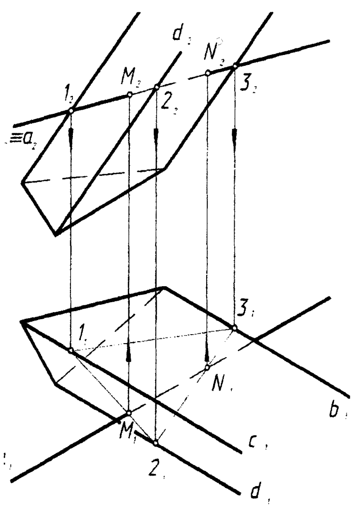


Рис. 28

1. Через прямую *a* проведем вспомогательную секущую плоскость $\alpha\ (\alpha_2) \perp \Pi_2\ (\alpha_2 \equiv a_2)$.
2. Построим линию (1-2-3) = $\Phi \cap \alpha$. Фронтальная проекция $1_2 2_2 3_2$ этой линии совпадает с α_2; горизонтальная проекция $1_1 2_1 3_1$ построена на основании принадлежности точки прямой.
3. Искомые точки *M*, *N* определены на пересечении ломаной линии 1 2 3 и прямой *a*.

Применение проецирующей вспомогательной секущей плоскости для построения точек пересечения прямой с поверхностью приводит к простым построениям в том случае, если поверхность многогранная. Если поверхность криволинейная, то чаще всего при определении точек пересечения прямой с этой поверхностью применяется вспомогательная секущая плоскость общего положения. При чём эта плоскость проходит через прямую и должна пересекать поверхность по простейшим линиям (прямым, окружностям).

На рис. 29 продемонстрирован ещё один вариант решения такой группы задач.

Для построения линии пересечения двух плоскостей необходимо, как было сказано выше, определить две точки, которые одновременно будут принадлежать двум плоскостям.

При составлении алгоритма решения данной задачи можно применять две плоскости-посредники частного положения, которые проводятся непосредственно через прямые заданных плоскостей. В конечном итоге решение аналогично представленному на рис. 27.

В данном случае общие точки для обеих плоскостей найдены как точки пересечения: *M* – стороны *DE* треугольника *DEF* с плоскостью *ABC*; *N* – стороны *BC* треугольника *ABC* с плоскостью треугольника *DEF*. Точка *M* определена с помощью вспомогательной фронтально проецирующей плоскости Θ (Θ_2), точка N – посредством горизонтально проецирующей плоскости Σ (Σ_1).

Линия пересечения плоскостей ограничена отрезком MN.

Найдя линию пересечения, переходим к определению видимых участков плоскостей с помощью метода конкурирующих точек.

Применение способа секущих плоскостей посредников при построении линий пересечения 2-х поверхностей общего вида строится по аналогичному алгоритму. На рис. 30 приведено построение линии пересечения поверхности тора и сферы.

Секущие плоскости-посредники выбираются так, чтобы при пересечении их с каждой из поверхностей образовались удобные для построения линии (прямые или окружности).

В данном примере в качестве посредников выбираем горизонтальные плоскости, которые рассекают тор и сферу по окружностям.

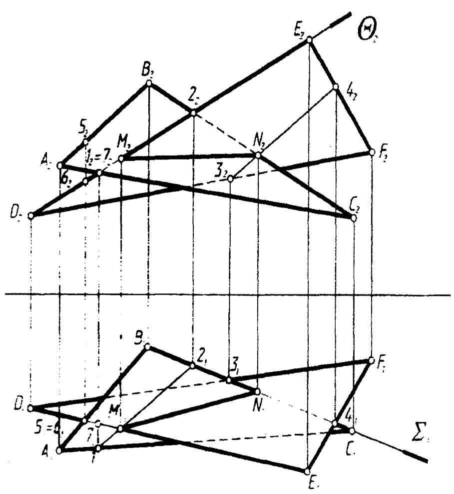


Рис. 29

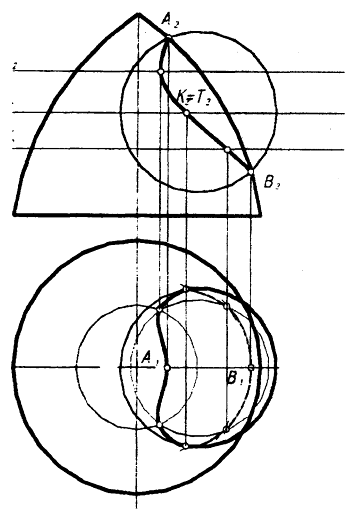


Рис. 30

Определяем характерные точки A, B. Для определения характерных точек K и T используем плоскость-посредник Θ. Случайные точки определяем с помощью плоскостей Σ, Ψ.

Определяем видимость кривой пересечения, учитывая, что на горизонтальной проекции видима только верхняя половина сферы.

4.3.2. Алгоритм решения задач пересекающихся поверхностей вращения.

В этом случае рассматриваются поверхности вращения с общей осью, которые называются соосными, пересекающиеся по окружностям-параллелям. Число окружностей-параллелей определяется числом точек пересечения их меридианов.

Если центр сферы поместить на ось какой-либо поверхности вращения, то сфера станет соосной с данной поверхностью вращения, и следовательно также пересечет эту поверхность по окружностям-параллелям (см. рис. 31).

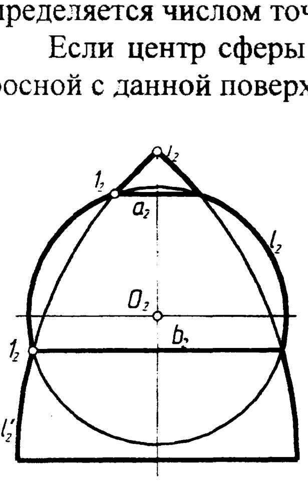


Рис. 31.

Из сказанного можно сделать следующие выводы:

1. Для того, чтобы вспомогательная секущая сфера пересекала по параллелям две заданные поверхности вращения, центр сферы должен лежать в точке пересечения осей этих поверхностей.
2. Если оси заданных поверхностей вращения параллельны плоскости проекций, то параллели пересечения вспомогательной секущей сферы с этими поверхностями проецируются на эту плоскость в прямые линии.

Рассмотрим на примере построение линии пересечения поверхностей вращения: конуса и цилиндра (рис. 32). Обе поверхности занимают общее положение. Оси вращения их пересекаются и образуют плоскость $\|П_2 \perp П_1$. При решении таких задач используется метод концентрических сфер-посредников.

Проанализируем алгоритм решения.

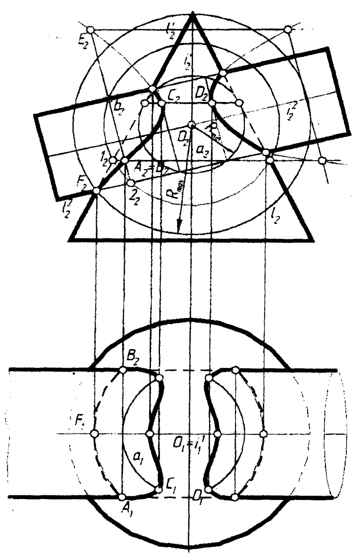


Рис. 32.

Опорными характерным точками искомой линии пересечения будут наиболее близко расположенные точки C_2 и D_2 противоположных участков этой линии. Для их построения нужно провести сферу, касающуюся одной поверхности и пересекающую другую. Радиус R_{min} такой сферы будет наименьшим из возможных. Опорными также будут точки пересечения очерковых образующих во фронтальной плоскости проекций.

Если сфера R_{min} касается одновременно обеих поверхностей, то имеем полное пересечение соприкасающихся поверхностей и пространственная кривая распадается на две плоских. Расстояние от O_2 до наиболее удаленной точки F_2 будет радиусом наибольшей сферы (R_{max}).Радиусы сфер для построения промежуточных точек выбираются в пределах от R_{max} до R_{min}.

Две поверхности вращения второго порядка взаимно пересекаются в общем случае по пространственной кривой линии четвертого порядка.

Частный случай пересечения поверхностей вращения.

В некоторых случаях кривая четвертого порядка распадается на две плоские кривые второго порядка. Любая плоская кривая, лежащая на поверхности второго порядка, является кривой второго порядка. В частных случаях кривая второго порядка может распадаться на две кривые. Исходя из этих положений в аналитической геометрии доказываются теоремы, используемые при построении линии пересечения поверхностей вращения второго порядка.

Теорема 1. Если две поверхности вращения второго порядка пересекаются на одной плоской кривой, то они пересекаются еще по другой плоской кривой .

Теорема 2. (Теорема Монжа). Две поверхности вращения второго порядка, вписанные в третью поверхность вращения второго порядка или описанные вокруг нее, пересекаются между собой по двум плоским кривым второго порядка.

Иллюстрация теоремы 2 приведена на рис. 33, 34. Поверхность второго порядка, описанная вокруг сферы, касается ее по плоской кривой второго порядка. На рис. 33 цилиндр с осью i^1 (i^1_2) касается сферы по окружности k (k_2), цилиндр с осью i^2 (i^2_2) — по окружности n (n_2).

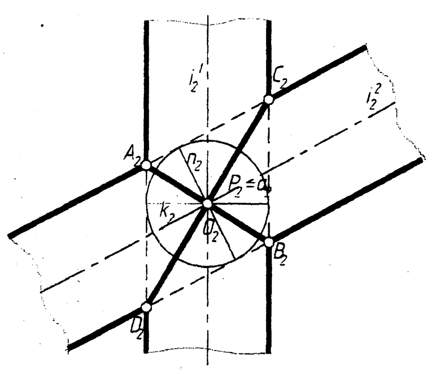


Рис. 33

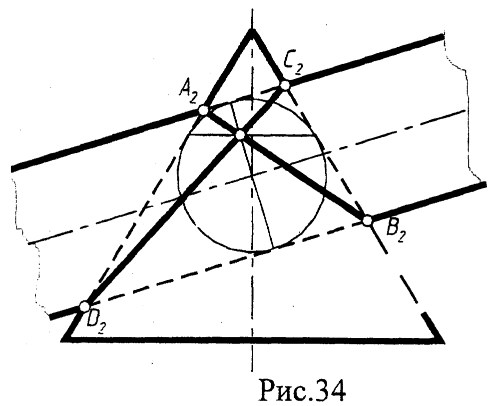


Рис.34

Рассматриваемые окружности, перпендикулярны к осям симметрии поверхностей и перпендикулярны плоскости проекции $П_2$. Фронтальными проекциями линий пересечения цилиндров будут прямые A_2B_2 и C_2D_2, проходящие через точки пересечения очерков поверхностей вращения и точки пересечения окружности n и k. Этими положениями руководствуются при решении такой группы задач.

4.3.3. Алгоритмы решения задач пересекающихся ГО, один из которых занимает общее положение, а второй - частное

Если один геометрический образ перпендикулярен какой-либо плоскости проекций, а другой занимает общее положение, то одна проекция искомого общего элемента уже непосредственно задана на чертеже. Она принадлежит вырожденной основной проекции проецирующего ГО. Вторую проекцию линии пересечения следует находить из условия принадлежности искомого общего элемента к непроецирующему образу, т.е. геометрическому образу общего положения.

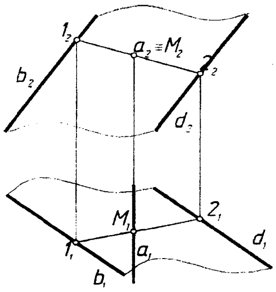


Рис. 35

Проанализируем реализацию данного алгоритма на конкретных примерах. На рис. 35 приведено построение точки пересечения прямой a (a_1,a_2), занимающей проецирующее положение ($a \perp \Pi_2$) с плоскостью β – общего положения. Фронтальная проекция M_2 известна, так как $M_2 \equiv a_2$. Исходя из принадлежности точки A плоскости определяем проекцию M_1 следующим образом:

- через M_2 проводим любой отрезок $1_2 2_2$
- определяем горизонтальную проекцию $1_1 2_1$
- на пересечении $1_1 2_1$ и a_1 находиться M_1.

Характерным примером является построение линии пересечения 2-х плоскостей α и φ (рис. 36). Одна из заданных плоскостей α - общего положения, а φ - частного положения. Алгоритм решения задачи основывается на следующем подходе: φ - горизонтальная плоскость и в тоже время фронтально проецирующая. Следовательно, фронтальная проекция линии пересечения совпадает со следом φ_2 ($\varphi_2 = h_2$), т.е. является горизонталью, проходящей через точку $1(1_2, 1_1)$ (см. рис. 36).

На рис. 37 показано определение точек пересечения прямой l с поверхностью наклонного конуса. Поверхность конуса – общего положения. Прямая l фронтально проецирующая, следовательно $l_2 \equiv T_2 \equiv K_2$. Проекции T_1 и K_1 находим по принадлежности искомых точек T, K поверхности конуса, для чего используем вспомогательные образующие S-1, S-2.

Решение задач по определению точек пересечения прямой a ($a_1 a_2$) с поверхностью прямого кругового конуса представлено на рис. 38. Поверхность конуса занимает общее положение. Прямая a – фронтально-проецирующая. На плоскости Π_2 изображена её основная проекция a_2, с которой совпадают фронтальные проекции точек пересечения прямой a с поверхностью конуса т.е. $a_2 \equiv M_2 \equiv N_2$. Определяются горизонтальные проекции точек пересечения т.е. M_1 и N_1 на основании принадлежности их непроецирующему ГО, т.е. поверхности конуса.

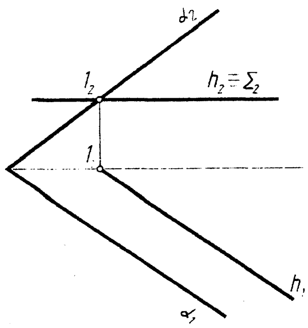


Рис. 36

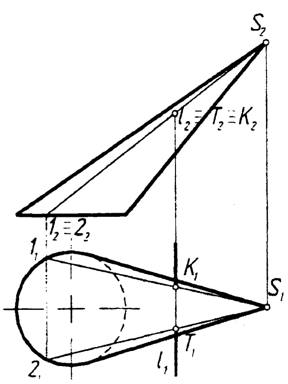


Рис. 37

Построение линии пересечения наклонного цилиндра общего положения с плоскостью α частного положения приведена на рис. 39.

Искомая линия будет кривой. Плоскость α – горизонтально проецирующая, следовательно, горизонтальная проекция искомой кривой совпадает со следом α_1.

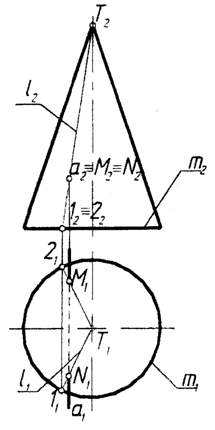


Рис. 38

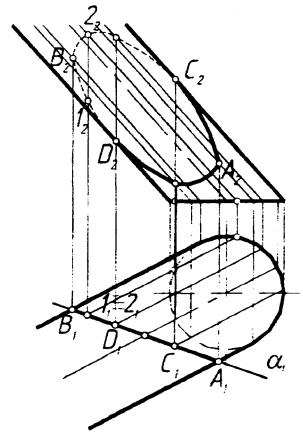


Рис. 39

Отметим на следе α_1 ряд точек, подлежащих построению во фронтальной проекции, выделив при этом обязательно точки, принадлежащие очерковым образующим.

Каждую из отмеченных точек находим во фронтальной проекции по принадлежности их поверхности цилиндра т.е. поверхности общего положения. Выполняем эти построения с помощью образующих цилиндра. Определяем видимость линии сечения на фронтальной проекции.

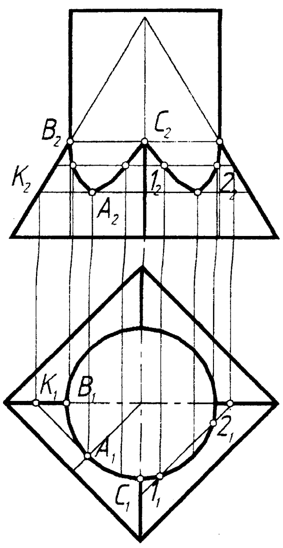


Рис. 40

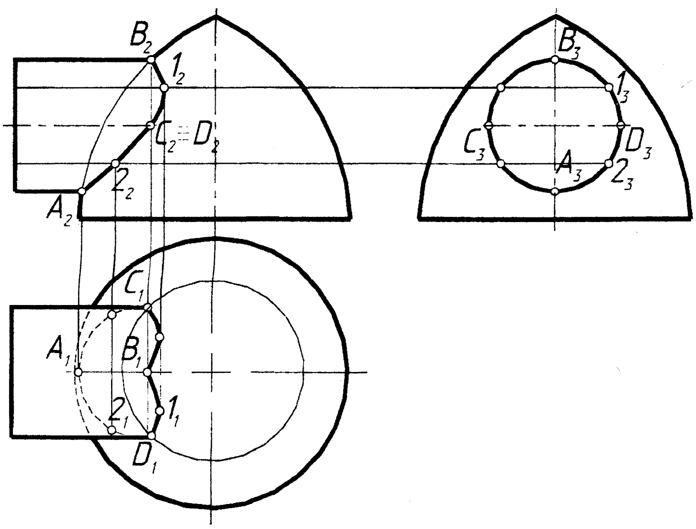


Рис. 41.

Такая же методика находит отражение и при построении линии пересечения двух поверхностей, одна из которых занимает общее положение, а вторая – проецирующая.

На рис. 40 показано построение линии пересечения двух поверхностей – цилиндра и пирамиды. Поверхность цилиндра расположена $\perp \Pi_1$, а поверхность пирамиды занимает общее положение. Следовательно, с горизонтальной проекцией поверхности цилиндра совпадает горизонтальная проекция искомой линии. Фронтальные проекции характерных и промежуточных точек, отмеченных на этой линии, находим по принадлежности их поверхности пирамиды. Эти построения выполняем с помощью линий, параллельных основанию пирамиды, либо линий проходящих через вершину пирамиды $S(S_1)$ и пересекающих основание пирамиды (см. построение точки A).

На примере определения линии пересечения поверхностей тора и цилиндра (рис. 41) также виден алгоритм решения задачи в следующей очерёдности. Поверхность цилиндра занимает профильно-проецирующее положение, а поверхность тора – общее. Следовательно, с профильной проекцией цилиндра совпадает профильная проекция искомой линии пересечения.

Намечаем на ней точки, подлежащие определению в других проекциях, и находим каждую из них по принадлежности фигуре общего вида, т.е. поверхности тора. Делаем это с помощью окружностей-параллелей.

Точки A,B,C,D характерные. Точки C,D определяют видимость кривой в горизонтальной проекции.

4.3.4. Алгоритмы решения задач пересекающихся ГО занимающих частное (проецирующее) положение

Если поверхность проецирующая, то на чертеже проекции всех точек и линий, принадлежащие этой поверхности, принадлежат вырожденной основной проекции поверхности рис. 42.

Поэтому, если оба пересекающихся геометрических образа являются проецирующими, то на комплексном чертеже даны их две основные проекции, которым принадлежат проекции их общих элементов – точек или линий пересечения.

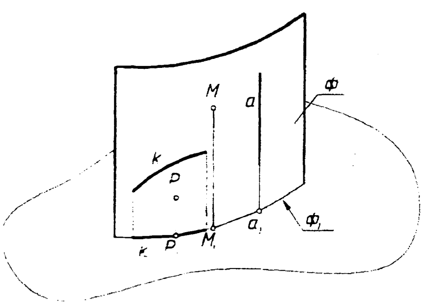


Рис. 42

На основании этого, можно заключить, что если оба ГО проецирующие то:
- искомый общий элемент пересечения уже непосредственно задан на чертеже;
- его проекции принадлежат основным проекциям пересекающихся геометрических образов;
- после проведения пространственного анализа задачи решение её на чертеже сводится к простановке соответствующих обозначений искомого элемента пересечения.

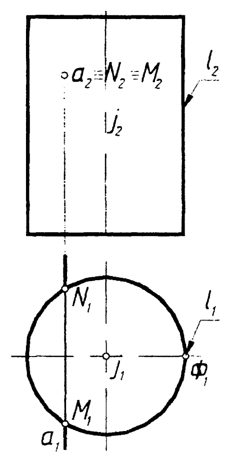


Рис. 43

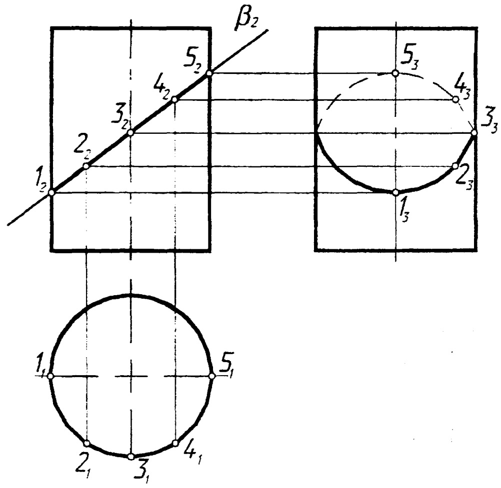


Рис. 44

В данном случае (рис. 43) необходимо построить точки пересечения прямой $a(a_1a_2) \perp \Pi_1$ с поверхностью цилиндра. Поскольку оба ГО проецирующие, решение задачи свелось к обозначению на чертеже в плоскости Π_1 горизонтальных проекций точек N_1 и M_1 одновременно принадлежащих и поверхности цилиндра и прямой a, и фронтальных проекций точек N_2 и M_2 совпадающих с a_2.

Рассмотрим ещё один вариант решения аналогичной задачи. На рис. 44 приведены пересекающиеся ГО:
- поверхность цилиндра $\perp \Pi_1$;

- плоскость $\beta \perp П_2$.

Аналогично предыдущему примеру, горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с основной проекцией цилиндра, т.е. с окружностью, в плоскости $П_1$, а фронтальная – со следом β_2.

В итоге решение задачи сводиться к обозначению характерных и промежуточных точек (1..5) принадлежащих линии пересечения. Задача решена в системе трёх плоскостей проекций – $П_1$, $П_2$, $П_3$. Линией пересечения будет эллипс.

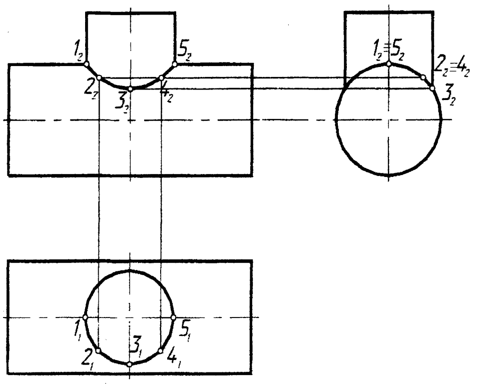


Рис. 45

На рис. 45 приведено решение задачи по определению линии пересечения двух цилиндров, занимающих проецирующее положение относительно плоскостей проекций $П_1$ и $П_3$.

Следовательно горизонтальные и профильные проекции характерных и промежуточных точек, принадлежащих линии пересечения, могут быть отмечены на соответствующих вырожденных основных проекциях цилиндров, т.е. в плоскости $П_1$ и $П_3$.

Фронтальную проекцию искомой линии находим по двум имеющимся проекциям.

Выводы по разделу главные позиционные задачи:

Методика их решения основывается на трёх алгоритмах, соответствующих трём случаям расположения пересекающихся геометрических образов относительно плоскостей проекций.

1-й случай – оба геометрических образа являются непроецирующими, т.е. занимают общее положение. Следовательно на чертеже нет вырожденных основных проекций. Основным способом решения задач является способ вспомогательных секущих плоскостей-посредников частного положения. Если заданы поверхности вращения с пересекающимися осями, применяется способ концентрических сфер.

2-й случай – один геометрический образ занимает частное положение, второй общее. В этом случае известна одна проекция искомого общего элемента. Имея одну проекцию искомого общего элемента можно найти вторую, решив при этом задачу на принадлежность искомого элемента непроецирующему геометрическому образу.

Исходя из сказанного, можно сформулировать алгоритм решения задач для второго случая:

- одна проекция искомого общего элемента уже непосредственно задана на чертеже. Она принадлежит основной проекции проецирующего геометрического образа;
- вторую проекцию следует определить по принципу принадлежности искомого элемента непроецирующему геометрическому образу

3-й случай – оба геометрических образа занимают частное положение относительно одной и той же плоскости проекций, или относительно разных плоскостей проекций.

Исходя из выше сказанного, можно сформулировать алгоритм решения задач для третьего случая.

- искомый общий элемент пересечения уже непосредственно задан на чертеже;
- его проекции принадлежат основным проекциям пересекающихся геометрических образов;
- после проведения пространственного анализа задачи решение её на чертеже сводится к простановке соответствующих обозначений искомого элемента пересечения.

5. Метрические задачи

Задача, в условии или в процессе решения которой присутствует численная характеристика, называется метрической.

К метрическим задачам относятся задачи на определение расстояний, углов, площадей и др. Однако при этом обычно задача является комплексной, включающей в себя позиционно-метрические условия.

В начертательной геометрии метрических задач бесконечное множество и возникает некоторая сложность в разработке их алгоритма решения, поэтому необходимо разработать обобщенную методику и общие алгоритмы их решения.

Из всего разнообразия метрических задач выделяют две задачи, которые имеют приоритетную значимость в начертательной геометрии:

1. задача на перпендикулярность прямой линии и плоскости;
2. задача на определение расстояния между двумя точками (или на определение натуральной величины отрезка прямой).

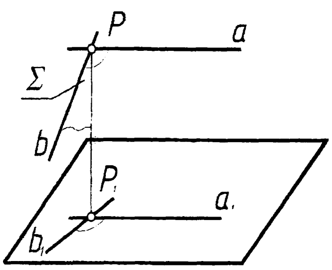


Рис. 46

Для решения метрических задач необходимо знать теорему о проецировании прямого угла.

Теорема: Если две прямые в пространстве взаимно перпендикулярны и одна из них параллельна некоторой плоскости проекции, а вторая ей не перпендикулярна, то проекции этих прямых на эту плоскость проекций перпендикулярны и прямой угол при этом проецируется в натуральную величину (рис. 46).

Как видно из условия теоремы, она связывает три условия: перпендикулярность прямых в пространстве, параллельность одной из них плоскости проекций и перпендикулярность проекций прямых. Если любые два условия из этих трех принять за данные, то третье условие является результатом. При этом справедлива обратная теорема.

Следует отметить, что очевиден и частный случай этой теоремы, когда обе взаимно перпендикулярные прямые параллельны плоскости проекций.

5.1. Алгоритмы решения задач по определению расстояний между двумя ГО

5.1.1. Первая метрическая задача

Первая метрическая задача может выступать в двух конкретных формулировках:

- через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной плоскости;
- через данную точку провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

Проведём анализ её решения задачи. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. Допустим, что мы уже каким-то образом построили $n \perp \Sigma(ABD)$, Тогда n должна быть перпендикулярна всем прямым, лежащим в Σ, в том числе и горизонталям и фронталям плоскости Σ: $n \perp \Sigma \Rightarrow n_1 \perp h_1$, $n_2 \perp f_2$. Построим проекции какой-нибудь горизонтали h и какой-нибудь фронтали f, принадлежащих Σ (рис. 47).

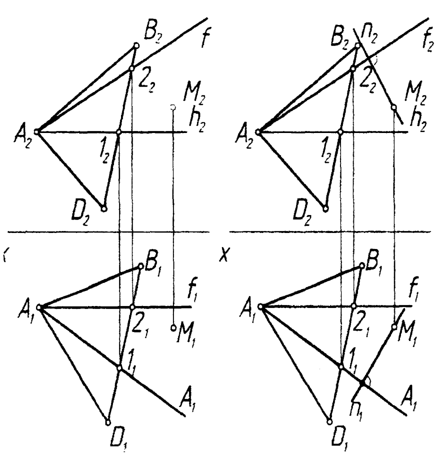

а) б)

Рис. 47

Рассмотрим прямые f и n, их взаимное положение в пространстве и относительно $П_2$: f и n взаимно перпендикулярны, и одна из них, а именно f, параллельна плоскости проекций $П_2$, Следовательно, выполнено условие теоремы, и поэтому проекции f_2 и n_2 должны быть взаимно перпендикулярны. Через точку M_2 проводим прямую n_2, перпендикулярную f_2 (рис. 47). Таким образом будет построена фронтальная проекция прямой $n \perp f$, Рассуждая аналогично относительных прямых h и n и плоскости проекции $П_1$, можно сказать, что и здесь сохраняется положение теоремы, так как $h \perp n$ и $h \| П_1$ (рис. 47а). Поэтому n_1 должна быть перпендикулярна h_1. Таким образом, задана прямая n, которая перпендикулярна и h и f, т.е. перпендикулярна двум пересекающим прямым плоскости, а, следовательно, перпендикулярна и самой плоскости.

Две плоскости будут перпендикулярны друг другу, если одна из них содержит прямую перпендикулярную ко второй плоскости.

5.1.2. Вторая метрическая задача

Вторая метрическая задача имеет следующую формулировку условий: определение проекций расстояния между двумя точками; определение натуральной величины полученного отрезка (решается на основании первой).

Рассмотрим на конкретном примере решение задачи на определение расстояния от заданной точки до заданной плоскости (рис. 48).

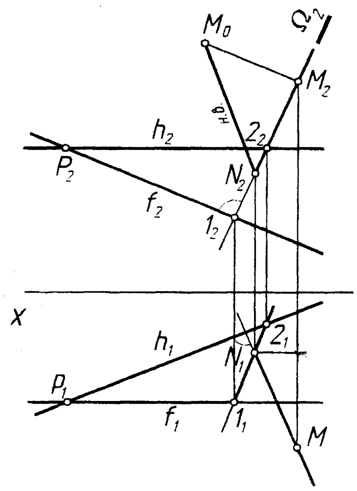


Рис. 48

Известно, что расстояние от точки до плоскости определяется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Отрезок этот ограничен данной точкой и точкой пересечения перпендикуляра с данной плоскостью.

Алгоритм решения выполняется в следующем порядке:

1. Из точки M опускаем перпендикуляр на плоскость $\Sigma(f \cap h)$
2. Находим точку N пересечения этого перпендикуляра с плоскостью $\Sigma(f \cap h)$
3. Определяем натуральную величину отрезка $[M, N]$ перпендикуляра по правилу прямоугольного треугольника.

Аналогичный анализ решения на основании этих двух можно провести и для других групп метрических задач.

5.2. Алгоритмы решения задач на взаимную параллельность ГО

Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей.

Признаком параллельности плоскости и прямой является параллельность этой прямой некоторой прямой, принадлежащей плоскости.

Признаком параллельности прямой и плоскости частного положения является параллельность вырожденной основной проекции плоскости и соответствующей проекции прямой.

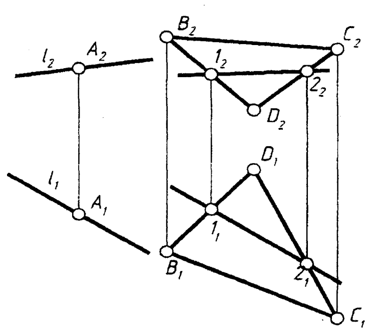


Рис. 49.

Признаком параллельности двух плоскостей является параллельность двух пересекающихся прямых одной плоскости, соответственно, двум пересекающимся прямым второй плоскости. Признаком параллельности плоскостей частного положения является взаимная параллельность одноименных вырожденных основных проекций. У параллельных плоскостей одноименные линии уровня взаимно параллельны.

Проанализируем решение на примере, где необходимо построить горизонтальную проекцию прямой l, проходящей через точку A и параллельной плоскости BCD (рис. 49).

Последовательность решения:
- в плоскости BCD проводим фронтальную проекцию прямой $1_2 2_2 \parallel l_2$;
- строим горизонтальную проекцию $1_1 2_1$, учитывая принадлежность прямой 1,2 плоскости BCD;
- строим l_1 параллельно $1_1 2_1$.

Выводы по разделу метрические задачи

1. Группу основных метрических задач составляют:
- задачи на перпендикулярность прямой линии к плоскости;
- задачи на определение расстояния между двумя точками.

На основании их можно решить другие метрические задачи, при этом необходимо уметь решать и позиционные задачи.

2. Решение задач на параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей общего и частного положения последовательно соответствует формулировкам приведенных теорем.

6. Решение главных позиционных и метрических задач с применением преобразования комплексного чертежа

Решение позиционных и метрических задач упрощается, когда заданные ГО занимают частное положение относительно плоскостей проекций. В связи с этим целесообразно применять различные методы преобразования комплексного чертежа.

Как правило, выделяют четыре основные задачи на преобразование, на которых базируется решение различных задач:
1) прямую общего положения преобразовать в прямую уровня;
2) прямую уровня преобразовать в проецирующую;
3) плоскость общего положения преобразовать в проецирующую;
4) проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня.

6.1. Применение способа замены плоскостей проекций

В данном способе заданные ГО не перемещаются в пространстве, а выбирается такая новая система плоскостей проекций, относительно которой ГО будут занимать частное положение, удобное для решения задач (рис 50).

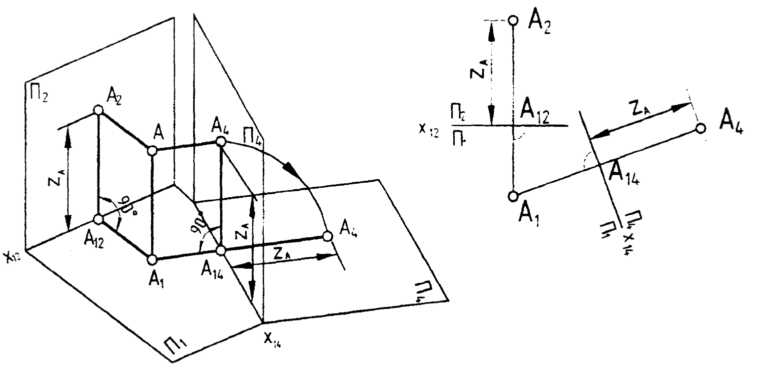


Рис.50

Анализируем возможность таких преобразований комплексного чертежа на конкретных примерах.

На чертеже заданна плоскость ΔABC – общего положения. Необходимо определить натуральную величину расстояния от точки K до плоскости ΔABC.

Известно, что расстояние от точки до плоскости определяется отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость (рис. 51). Решение такой задачи в системе двух плоскостей проекций традиционными методами рассмотрено выше (см. рис. 48). Известно так же, что если заданная плоскость перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то расстояние от точки до неё на эту плоскость проекций спроецируется в натуральную величину. В данном случае решение такого типа задач сводиться к следующей методике (рис. 51):

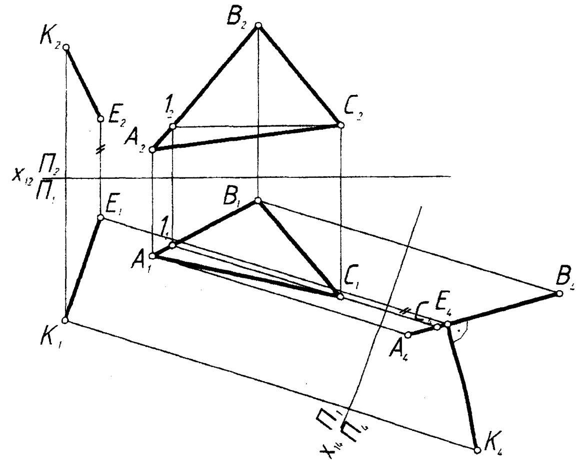


Рис. 51

В плоскости проводим горизонталь $C1$ ($C_1 1_1$, $C_2 1_2$). Направление горизонтальной проекции горизонтали $C_1 1_1$ указывает новое направление ортогонального проецирования в системе $x_{14}(П_1,П_4)$. В этой системе плоскостей проекций известными методами строим новую проекцию $\Delta ABC \rightarrow \Delta A_4B_4C_4$ и точку $K \rightarrow K_4$ ($\Delta ABC \perp П_4$).

1. Перпендикуляр K_4E_4 определяет искомое расстояние от точки K до плоскости треугольника ABC.

2. Обратными проекционными лучами выполняем построение проекций точки E (E_1, E_2) в первоначальной системе плоскостей проекций x_{12} ($П_1$, $П_2$).

Предположим, что по условию задачи (рис. 52) необходимо определить линию пересечения двух плоскостей заданны треугольниками ABC и DEK общего положения.

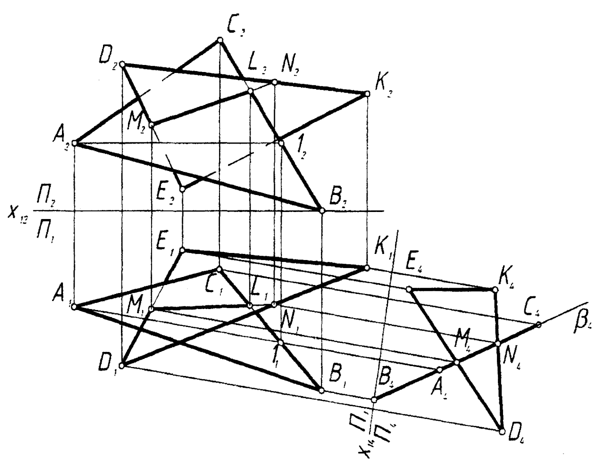


Рис. 52

В разделе 4 п. 4.3.1 представлено решение этой задачи без преобразования чертежа. Здесь алгоритм решения выполнен в следующей очерёдности:

1. В плоскости треугольника ABC проводим горизонталь $A1$ ($A_1 1_1$, $A_2 1_2$);
2. Способом перемены плоскостей проекций преобразовываем плоскость треугольника ABC в проецирующую т.е. в новой системе плоскостей проекций $x_{14}(П_1,П_4)$ - $\Delta ABC \perp П_4$. Плоскости двух треугольников ABC и KED пересекаются по прямой линии. Проекция $A_4B_4C_4$ представляет вырожденную основную проекцию плоскости треугольника ABC, которой будет принадлежать линия пересечения заданных плоскостей, т.е. прямая $ML \rightarrow M_4L_4$.
3. Обратными проекционными лучами выполняем построение проекций прямой ML в первоначальной системе плоскостей проекций $x_1(П_1,П_2)$.
4. Видимость сторон плоскостей треугольников ABC и ECD определяем методом конкурирующих точек.

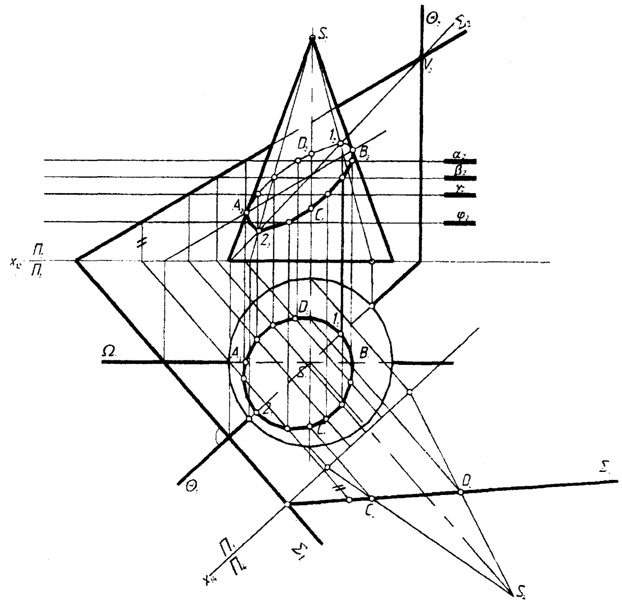


Рис. 53

В задаче на рис. 53 необходимо построить линию пересечения поверхности прямого кругового конуса плоскостью Σ. Точки пересечения передней и задней образующей конуса с плоскостью Σ невозможно определить без дополнительных построений. В данном случае применён способ замены плоскостей проекций. Секущая плоскость Σ преобразована в проецирующую, т.е. $\Sigma \perp \Pi_4$. На плоскость Π_4 спроецированы также передние и задние образующие конуса. Полученные проекции образующих пересекаются со следом Σ_4 в искомых точках $C(C_4)$ и $D(D_4)$. Обратными проекционными лучами выполняем построение проекций этих точек в первоначальной системе $x_{12}(\Pi_1, \Pi_2)$.

В целом подход к решению задачи сводится к следующему:

1. Для определения наивысшей точки 2 и найнизшей точки 1 линии сечения проводим через вершину конуса горизонтально проецирующую плоскость Θ.
2. Для определения видимости линии сечения проводим через вершину конуса плоскость фронтального уровня Ω.
3. Для определения точек линии сечения принадлежащие профильным образующим используется способ замены плоскостей проекций.

В задаче представленной на рис. 54 необходимо построить линию пересечения поверхности конуса плоскостью треугольника ABC.

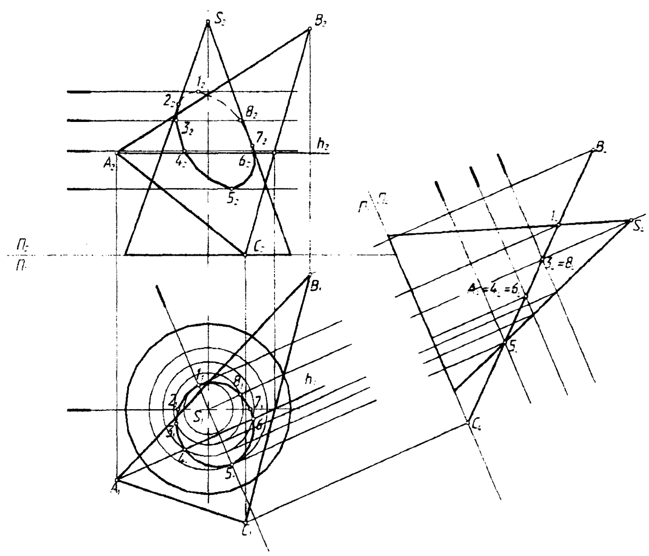


Рис. 54

Поверхность и конус занимают общее положение.

Решение значительно упрощается, если плоскость треугольника *ABC*, методом замены плоскостей проекций преобразовать в проецирующую. Алгоритм в этом случае должен быть выполнен в следующем порядке:

1. В плоскости треугольника *ABC* проводим горизонталь h (h_1, h_2). Направление горизонтальной проекции горизонтали h_1 указывает новое направление ортогонального проецирования в системе плоскостей проекций $x_{14}(П_1, П_4)$.
2. В новой системе $x_{14}(П_1, П_4)$ плоскость треугольника *ABC* займёт фронтально-проецирующее положение т.е. перпендикулярно $П_4$. Вырожденной основной проекцией $A_4B_4C_4$ будет принадлежать одна искомая проекция линии пересечения.
3. Известными методами (см. гл. 4) определяем характерные и промежуточные точки, принадлежащие линии сечения (точки 1..8).
4. Выполняем построение точек линии сечения в системе $x_{14}(П_1,П_4)$ и определяем видимость линии сечения.

6.2. Применение способов вращения вокруг линии частного положения

Сущность метода вращения состоит в том, что при неизменном положении плоскостей проекций изменяется положение заданных ГО относительно плоскостей проекций до тех пор, пока они не займут удобное для решения задач положение, т.е. частное положение.

Точка *A*, вращаясь вокруг оси *i*, опишет окружность, плоскость которой α перпендикулярна оси *i*. Центр окружности О расположен в точке пересечения оси вращения с плоскостью вращения, а радиус R определиться как расстояние от точки *A* до оси вращения (рис. 55). Если ось вращения параллельна какой-либо плоскости проекций, то проекция окружности, которую описывает вращающаяся точка, на эту же плоскость представляет собой прямую линию, перпендикулярную проекции оси. Поэтому в качестве осей вращения необходимо применять различные линии частного положения.

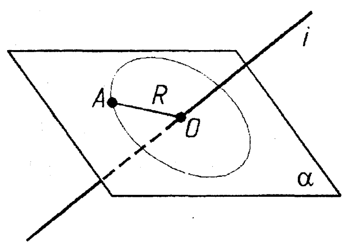


Рис. 55

Анализируя приведенную модель вращения, можно заключить, что основу методов вращения положен *аппарат вращения*:

1. точка A (A_1,A_2) – объект вращения;
2. i (i_1,i_2) – ось вращения;
3. α – плоскость вращения точки A; $\alpha\perp i$;
4. O (O_1,O_2) – центр вращения $\alpha\cap i$;
5. R (R_1,R_2) – радиус вращения точки A; $R=OA$.

Приведём алгоритм решения задачи по определению натуральной величины отсека плоскости (ΔABC) методом вращения относительно горизонтали (рис. 56)

Последовательность построений:

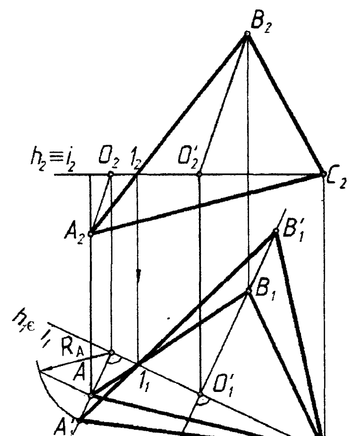


Рис. 56

1. Выбираем объекты вращения: точки *A* и *B*;
2. Выбираем ось вращения – горизонталь $C1$ (C_11_1, C_21_2);
3. Определяем плоскости вращения точек *A* и *B*;
4. Определяем центры вращения O (O_1,O_2) и O^1 ($O^1{}_1$, $O^1{}_2$);
5. Строим проекции радиусов вращения AO (A_1O_1, A_2O_2) и BO^1 ($B_1O^1{}_1$, $B_2O^1{}_2$);
6. Определяем натуральные величины R_A и R_B;
7. Натуральная величина радиуса вращения R_A откладывается от центра O в плоскости вращения. Та же операция выполняется с R_B;
8. $A'_1B'_1C_1$ – натуральная величина треугольника *ABC*.

Фронтальная проекция треугольника преобразуется в прямую, совпадающую с i_2.

Выводы по разделу: решение главных позиционных и метрических задач с применением преобразования комплексного чертежа:

Решение многих геометрических задач на комплексных чертежах значительно упрощается, если геометрические образы занимают частное положение (т.е. расположены параллельно или перпендикулярно к плоскостям проекций). С этой целью используется два способа преобразования чертежа:

- способ замены плоскостей проекций;
- способ вращения.

Выделяют решение четырёх основных задач преобразования комплексного чертежа:

- прямая общего положения преобразовалась в прямую уровня;
- прямая уровня преобразовалась в проецирующую;
- плоскость общего положения стала проецирующей;
- проецирующая плоскость стала плоскостью уровня.

Целью всякого преобразования комплексного чертежа является получение новой проекции геометрического образа, частного положения.

Когда при частном расположении объекта, отдельные его элементы (прямые, рёбра, грани) располагаются параллельно или перпендикулярно плоскостям проекций, тогда эти элементы на одной из плоскостей проекций изображаются без искажения, т.е. в натуральную величину. Эта возможность достигается тогда, когда:

- отрезок, когда он параллелен плоскости проекций
- плоская фигура – когда её плоскость параллельна плоскости проекций
- расстояние между скрещивающимися прямыми – когда одна прямая – проецирующая
- двугранный угол – когда его общее ребро в проецирующем положении
- расстояние от точки до плоскости – когда эта плоскость перпендикулярна плоскости проекций
- угол между прямой и плоскостью, когда прямая параллельна, а плоскость перпендикулярна одной и той же плоскости проекций
- расстояние между двумя прямыми – когда они обе – проецирующие.

В зависимости от исходного положения и поставленных условий выполняется однократное либо двукратное действие, до установления того положения геометрического образа которое необходимо для выполнения поставленной задачи

Литература

1. Уласевич З.Н. Обобщение методик преподавания курса начертательной геометрии / Труды X научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, аспирантов и студентов. Ч. I. – Брест, 1998.
2. Уласевич З.Н. Уласевич В.П. К параметризации геометрического образа математической модели конструкции Тезисы докладов юбилейной научно-преподавательской конференции посвященной 25-летию БрПИ. Ч. II. – Брест, 1991.
3. Шумская Л.П. Структура цифровых моделей рельефа, используемых при решении задач проектирования объектов строительства Тезисы докладов юбилейной научно-преподавательской конференции посвященной 25-летию БрПИ. Ч. I. – Брест, 1991.
4. Фролов С.А. Курс начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1983.
5. Кузнецов Н.С. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1981.
6. Крылов Н.Н. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1990.
7. Гордон В.О. и др. Курс начертательной геометрии. – М.: Наука, 1998.
8. Локтев О.В. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1999.
9. Начертательная геометрия. Инженерная и машинная графика / Под ред. К.И. Валькова. – М.: Высш. шк., 1997.

Учебное издание

Составители: Уласевич Зинаида Николаевна
Шумская Людмила Павловна
Яромич Алла Ивановна
Зубрицкий Николай Николаевич
Яромич Наталья Николаевна

Методические указания

по начертательной геометрии для студентов специальностей

Т.19.02 – производство строительных изделий и конструкций (ПСиК);
С.04.02 – мелиорация и водное хозяйство (МиВХ);
Т.19.06 – водоснабжение, водоотведение, очистка природных и сточных вод (ВВОПиСВ).

Часть I

Ответственный за выпуск: Зубрицкий Н.Н.

Редактор: Строкач Т.В.
Техн. редактор: Никитчик А.Д.

Подписано к печати 08.12.2000 г. Формат 60x84/8. Бумага писчая №1. Усл. п.л. 4.65. Уч. изд. л. 5. Заказ № 311. Тираж 150. Отпечатанно на ризографе Брестского государственного технического университета. 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.