$$=e^{-\frac{\pi}{2}p}\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos y\cdot e^{-py}dy+\int_{0}^{\infty}x(y)\cdot e^{-py}dy\right)=e^{-\frac{\pi}{2}p}\cdot\left(\frac{-p\cos y+\sin y}{p^2+1}e^{-py}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+X(p)\right)=$$

$$=e^{-\frac{\pi}{2}p}\cdot\left(-\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}e^{\frac{\pi}{2}p}+X(p)\right).$$

Получаем операторное уравнение относительно изображения $X(p)$:

$$pX(p)-1-\frac{p}{p^2+1}\cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}+\frac{1}{p^2+1}+X(p)\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}=0,$$

отсюда операторное решение получим в виде

$$\left(p+e^{-\frac{\pi}{2}p}\right)\cdot X(p)=\frac{p^2+p\cdot e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^2+1},\qquad X(p)=\frac{p}{p^2+1}.$$

Значит, искомое решение $x(t)=\cos t,\quad -\frac{\pi}{2}\le t\le+\infty.$

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения

$$x'(t)=x(t-1)+t,\quad \phi(t)=1,\quad -1\le t\le 0.$$

Решение.

После преобразования по Лапласу получаем уравнение

$$pX(p)-1=\int_0^{\infty}x(t-1)\cdot e^{-pt}dt+\frac{1}{p^2},\qquad \left(p-e^{-p}\right)X(p)=\frac{1-p-e^{-p}}{p^2}.$$

$$X(p)=\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^2}\right)\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^n}\right)-\frac{e^{-p}}{p^3}\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^n}\right),$$

$$X(p)=\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^{n+3}}-2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-np}}{p^{n+2}}.$$

Берем обратное преобразование Лапласа и получаем решение данного ДУ:

$$x(t)=\left(-t+\frac{t^2}{2}\right)\cdot\eta(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(t-n)^{n+2}}{(n+2)!}-2\cdot\frac{(t-n)^{n+1}}{(n+1)!}\right)\cdot\eta(t-n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М.А. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981. – 304 с.

УДК 551.492

Лахмицкий А.А., Согоян А.Л.
Научный руководитель: к.ф.-мат.н, доцент Махнист Л.П.

О СВОЙСТВАХ И СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение для описания колебаний речного стока, используемое в стохастической гидрологии [1]:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\frac{d\theta_1}{d\xi}=-1,\quad \frac{d\theta_1}{d\xi}(\infty)=0,\quad \theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0.\qquad (1)$$

Уравнение (1) при решении различных прикладных задач, например в [2], интегрировалось численными методами. Приведем решение этого уравнения [3].

Введем обозначение $\frac{d\theta_1}{d\xi}=f(\xi)$. Тогда, учитывая, что $\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}=\frac{df}{d\xi}$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df}{d\xi}-\xi f=-1$, с начальным условием $f(\xi)|_{\xi=\infty}=0$.

Решение последнего уравнения будем отыскивать в виде $f(\xi)=u(\xi)v(\xi)$. Тогда, учитывая, что $f'(\xi)=u'(\xi)v(\xi)+u(\xi)v'(\xi)$, получим уравнение $u'v+uv'-\xi uv=-1$ или $u'v+u(v'-\xi v)=-1$ (*).

Найдем одно из ненулевых решений уравнения $v'-\xi v=0$. Разделяя переменные в уравнении $\frac{dv}{d\xi}=\xi v$, решением которого, очевидно является $v=0$, получим $\frac{dv}{v}=\xi d\xi$. Интегрируя последнее уравнение, имеем $\int\frac{dv}{v}=\int\xi d\xi+C_2$. Откуда $ln|v|=\frac{\xi^2}{2}+ln\,C_1$ или $v=\pm C_1e^{\frac{\xi^2}{2}}$. Следовательно, $v=Ce^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $v'-\xi v=0$.

Выберем одно из ненулевых решений этого уравнения, например, $v=e^{\frac{\xi^2}{2}}$, при $C=1$. Подставляя его, в уравнение (*), имеем $u'e^{\frac{\xi^2}{2}}=-1$ или $u'=-e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Откуда $u=-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi+C$.

Следовательно, $f(\xi)=u(\xi)v(\xi)=(-\int e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi+C)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ или $f(\xi)=(C-\int\limits_{-\infty}^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $\frac{df}{d\xi}-\xi f=-1$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=2\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$ и, учитывая начальное условие $f(\xi)|_{\xi=\infty}=0$, имеем $f(\xi)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Используя разложение функции e^z в ряд Тейлора, имеем $e^{\frac{\xi^2}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}$ и $e^{-\frac{t^2}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}$.

Тогда $\int\limits_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int\limits_0^{\xi}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}\right)dt=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\Bigg|_0^{\xi}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$.

Следовательно, решение $f(\xi)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\xi}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ можно представить в виде

$$f(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k k!(2k+1)2^{n-k}(n-k)!}\right)\xi^{2n+1}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)(n-k)!}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{2^n}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{(2k+1)}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!}.$$

Докажем, что $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Действительно, используя бином Ньютона, $(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k}$ и интегрируя, имеем $\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k}dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k x^{2k+1}}{2k+1}\Big|_0^1=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$.

Заметим, что с другой стороны

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x^2)^n dx=\int_0^1\frac{(1-x^2)^n}{m+1}dx^{m+1}=\frac{x^{m+1}(1-x^2)^n}{m+1}\Big|_0^1-$$

$$-\int_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}d(1-x^2)^n=2n\int_0^1\frac{x^{m+2}}{m+1}(1-x^2)^{n-1}dx=\frac{2n}{m+1}I_{m+2,n-1}.$$

Тогда

$$I_{m,n}=\frac{(2n)!!}{\prod_{k=1}^{n}(m+2k-1)}I_{m+2n,0}\text{ и }I_{0,n}=\frac{(2n)!!}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}I_{2n,0}=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n,0}.$$

Учитывая, что $I_{2n,0}=\int_0^1 x^{2n}dx=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+1}$, имеем $I_{0,n}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ и

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}=\int_0^1(1-x^2)^n dx=I_{0,n}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Заметим также, что значения $I_{m,n}$ связаны с бета-функцией $B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ соотношением:

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m(1-x^2)^n dx=\left|\begin{matrix}x^2=t,x=\sqrt{t}\\2xdx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^n dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},n+1\right).$$

Тогда, используя свойства бета-функции $B(p,q)$ и гамма-функции $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ – интегралы Эйлера первого и второго рода, получим

$$I_{0,n}=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},n+1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{n+1}n!}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(2n+1)!!}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Следовательно, $f(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}$.

Так как $\frac{d\theta_1}{d\xi}=f(\xi)$ и, учитывая начальное условие $\theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0$, получаем, что

$$\theta_1(\xi)=S_1(\xi)-S_1(\xi_*),$$

где $S_1(\xi)=A(\xi)-B(\xi)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$.

Общие члены этих рядов $a_n=a_n(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $b_n=b_n(\xi)=$ $=\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям $a_{n+1}=\frac{(2n+1)\xi^2}{(2n+2)(2n+3)}a_n$,

$a_0 = \xi\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ и $b_{n+1} = \dfrac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)}$, $b_0 = \dfrac{\xi^2}{2}$. Эти соотношения можно использовать для вычисления значений частичных сумм рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$.

Исследуем на сходимость ряды $A(\xi)$, $B(\xi)$. Используя признак Д'Аламбера, имеем

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\xi^2(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1, \text{ если } n > \frac{\xi^2}{2q} - 1{,}5 \text{ и}$$

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1, \text{ если } n > \frac{\xi^2}{2q} - 2.$$

Следовательно существует такое число q, $0 < q < 1$, что, начиная с некоторого номера, например, $n_0 = \left[\dfrac{\xi^2}{2q}\right]$, выполняются неравенства $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} < q$. Тогда остатки рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$, удовлетворяют неравенствам: $\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k\right| \le \dfrac{|a_n|}{1-q}$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} b_k \le \dfrac{b_n}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q.

Таким образом, значения рядов $A(\xi)$, $B(\xi)$, с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n-ые частичные суммы этих рядов $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k$, если выполняются неравенства:

$$|a_n| \le \varepsilon(1-q), \; b_n \le \varepsilon(1-q), \text{ и } n \ge n_0 = \left[\frac{\xi^2}{2q}\right]. \tag{3}$$

Так, например, для $q = 0{,}5$ неравенства принимают вид: $|a_n| \le \varepsilon$, $b_n \le \varepsilon$, и $n \ge n_0 = \left[\xi^2\right]$.

Таким образом, точность 2ε вычисления значения $S_1(\xi)$ обеспечивается вычислением n-ых частичных сумм рядов $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(\xi)$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k(\xi)$ при выполнении условий (3), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$.

Учитывая следствие формулы Стирлинга: $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} < n! < n^n\sqrt{2\pi n e^{-n+\frac{1}{12n}}}$, имеем

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(2n+1)!!(2n+2)}{|\xi|(2n)!!(2n+1)} = \frac{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(2n)!(2n+2)}{|\xi|2^{2n}(n!)^2} >$$

$$> \frac{\sqrt{\pi}}{|\xi|\sqrt{2}} \frac{(2n+2)(2n)^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi n}}{2^{2n}n^{2n}2\pi n e^{-2n+\frac{1}{6n}}} = \frac{(n+1)\sqrt{2\pi}}{n e^{\frac{1}{6n}}|\xi|} > \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{1}{6}}|\xi|} \ge 1,$$

если $n \ge \dfrac{\sqrt[3]{e}\xi^2}{2}$. Следовательно, для $n \ge n_0 = \left[\xi^2\right]$ выполняется неравенство $|a_n| \ge b_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Найденов В.И., Швейкина В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока // Водные ресурсы. – М., 2002. – Том 29, № 1. – С. 62-67.

2. Волчек А.А., Парфомук С.И. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси // Вестник БрГТУ. – Брест, 2006. – № 5. – С. 56-60.

3. Волчек А.А., Гладкий И.И., Махнист Л.П., Парфомук С.И. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока // Вестник БрГТУ. – Брест, 2008. – № 5. – С. 83-87.