МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические рекомендации и варианты заданий по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей.

Брест 2002

УДК 517.9
ББК 22.11

В соответствии с действующей программой для студентов первого курса технических специальностей подобраны индивидуальные задания к двум аттестационным работам, даны решения типовых вариантов к каждой из них, перечислены основные вопросы учебной программы и задачи первого семестра

Составители:
Тузик Т.А., доцент
Журавель М.Г., ассистент

Рецензент:
Зав. кафедрой алгебры и геометрии
Брестского государственного университета им. А.С.Пушкина,
к.ф.-м.н., доцент **Савчук В.Ф.**

Вопросы учебной программы
1-й семестр

1. Определители 2,3 и n-го порядков. Их свойства, вычисление.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом определителей.
3. Матрицы. Действия над ними.
4. Обратная матрица, ее нахождение.
5. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным способом.
6. Метод Гаусса. Элементарные преобразования матриц.
7. Решение однородных систем линейных алгебраических уравнений.
8. Собственные векторы и собственные значения матриц.
9. Решение произвольных линейных систем. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
10. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Разложение вектора по базису в R_2, R_3.
11. Скалярное произведение векторов, свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.
12. Векторное произведение векторов, свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.
13. Смешанное произведение векторов, свойства, выражение через координаты перемножаемых векторов.
14. Евклидово пространство R_n. Длина вектора, скалярное произведение. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника.
15. Прямая в R_2. Различные виды уравнений прямой. Угол между двумя прямыми. Условия перпендикулярности, параллельности. Расстояние от точки до прямой.
16. Окружность.
17. Эллипс: вывод уравнения, исследование формы, параметры эллипса, его директрисы.
18. Гипербола: вывод уравнения, исследование формы, директрисы и асимптоты гиперболы.
19. Парабола: вывод уравнения, исследование формы, параметр параболы, ее директриса.
20. Преобразование координат (параллельный перенос, поворот осей координат).
21. Уравнение плоскости (общее, нормальное). Расстояние от точки до плоскости.
22. Взаимное расположение двух плоскостей (аналитические условия).

23. Прямая в R_3. Различные виды уравнений прямой.
24. Взаимное расположение прямой и плоскости (аналитические условия).
25. Взаимное расположение двух прямых (аналитические условия).
26. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Исследование формы поверхностей методом параллельных сечений.
27. Функции (основные, элементарные, гиперболические). Их свойства и графики.
28. Предел числовой последовательности.
29. Предел функции.
30. Свойства бесконечно малых функций.
31. Основные теоремы о пределах функции.
32. Замечательные пределы.
33. Непрерывность функции в точке. Действия над непрерывными функциями.
34. Точки разрыва функции, их классификация.
35. Свойства непрерывных на отрезке функций.
36. Определение производной. Ее геометрический и механический смысл.
37. Теоремы о производных.
38. Производная сложной, неявной, параметрической функций.
39. Обратные функции и их дифференцирование.
40. Производные обратных тригонометрических функций.
41. Таблица основных производных.
42. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.
43. Дифференциал функции, его свойства. Применение в приближенных вычислениях.
44. Производные и дифференциалы высших порядков.
45. Теоремы Ферма, Ролля, Коши и Лагранжа.
46. Правило Лопиталя.
47. Формула Тейлора.
48. Формула Маклорена для основных элементарных функций.
49. Условия монотонности функции.
50. Необходимое и достаточные условия локального экстремума.
51. Глобальные экстремумы функции.
52. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба кривой.
53. Асимптоты кривой.
54. Векторные функции скалярного аргумента, их дифференцирование.
55. Кривизна плоской и пространственной кривых.
56. Различные формы записи комплексного числа.
57. Основные действия над комплексными числами (сложение, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

Перечень основных задач по темам первого семестра.

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

Выполнить действия над матрицами:

3. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

Решить системы линейных алгебраических уравнений методом определителей, методом Гаусса и матричным методом.

5. $\begin{cases} x - y + 3z = 13, \\ 2x + y + z = 0, \\ 3x - 2y - 4z = -15. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1, \\ 2x - y - 3t = 2, \\ 3x - z + t = -3, \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x + 5y + z = 0, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ 3x + 4y + 2z = 8. \end{cases}$

8. *Даны векторы:* $\vec{a} = (3;-6;-1)$, $\vec{b} = (1;4;-5)$, $\vec{c} = (3;-4;12)$. *Найти:*

   а) проекцию вектора $\vec{a} + \vec{b}$ *на вектор* $\vec{c}$;

   б) $\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{c}$;

   в) $\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{a} \times \vec{c} - 3\vec{b} \times \vec{c}$;

   г) смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

9. *Доказать, что четыре точки* $A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1)$ *и* $D(2;1;3)$ *лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости.*

10. *Найти собственные векторы и собственные числа матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. *Найти расстояние от точки M(3;1;-1) до плоскости:*

$$22x + 4y - 20z - 45 = 0.$$

12. *Определить двугранный угол, образованный плоскостями*

$$6x + 3y - 2z = 0 \quad и \quad x + 2y + 6z - 12 = 0.$$

13. *Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, перпендикулярную к плоскости* $5x-2y+5z-10=0$ *и образующую с плоскостью* $x-4y-8z+12=0$ *угол* 45^0.

14. *Даны вершины треугольника* $ABC: A(4;4),\ B(-6,-1)$ *и* $C(-2;-4)$. *Записать уравнения биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине* C; *медианы* AD *и высоты* BH.

15. *Даны уравнения двух сторон прямоугольника* $3x-2y-5=0$ *и* $2x+3y+7=0$ *и одна из его вершин* $A(-2;1)$. *Вычислить площадь этого прямоугольника.*

16. *Проверить, пересекаются ли прямые* $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$ *и* $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$. *Записать уравнение плоскости, в которой они лежат.*

17. *Найти точку, симметричную точке* $P(4;3;10)$ *относительно прямой* $x=1+2t,\ y=2+4t,\ z=3+5t$.

18. *Какую линию определяют следующие уравнения:*

а) $3x^2+3y^2-2x+7y+1=0$;

б) $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0$;

в) $x^2-y^2-6x+10=0$;

г) $x=2y^2-12y+14$;

д) $x=1-\frac{1}{4}\sqrt{y-3}$;

е) $4x^2-y^2+32x+6y+55=0$.

19. *Определить тип указанной поверхности и построить ее:*

а) $z=2+x^2+y^2$;

б) $x^2+y^2=2x$;

в) $y^2=x^2+z^2$;

г) $x^2-y^2-z^2-4=0$;

д) $x^2=4z$.

20. *Найти пределы:*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{3x^2}}$.

21. Исследовать на непрерывность функции:

а) $y=\begin{cases} x^2-1, \text{ если } x\le 0, \\ x+2, \text{ если } x>0. \end{cases}$ б) $y=\begin{cases} 2-x, \text{ если } x>0, \\ 2^{\frac{1}{x+1}}, \text{ если } x<0. \end{cases}$

в) $y=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}|x|}$, г) $y=\begin{cases} x+2, \text{ если } x\le -1, \\ x^2+1, \text{ если } -1<x\le 1, \\ 3-x, \text{ если } x>1. \end{cases}$

22. Найти производные функций:

а) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2arctg\sqrt{\sin x}$; б) $y=7^{\frac{x\sin x}{1-x}}$;

в) $y=\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-5}}$; г) $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}$; д) $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$;

е) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln(1-t^2), \end{cases}$ $t\in(-1;1)$, $y'_x=?$ $y''_{xx}=?$

ж) $xy=arctg\dfrac{y}{x}$, $y'=?$ $y''=?$

23. Записать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2;2)$ к кривой

$x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}$.

24. Показать, что функция $y=c_1e^{2x}\sin 3x+c_2e^{2x}\cos 3x$ удовлетворяет уравнению $y''-4y'+13y=0$ (c_1 и $c_2-\forall\ const$).

25. Используя правило Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\cdot\ln x$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$.

26. Провести полное исследование функций и построить их графики:

а) $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^3+\dfrac{11}{2}x^2-6x+\dfrac{9}{4}$; б) $y=\dfrac{2x^2-9}{x+2}$; в) $y=\dfrac{x^2}{e^x}$.

Аттестационная работа № 1
«Основы линейной алгебры и аналитической геометрии»
Теоретические вопросы

1. Векторы. Линейные операции над векторами.
2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их основные свойства.
3. Записать условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов.
4. Канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы.
5. Выпишите основные виды прямой на плоскости и в пространстве. Расстояние от точки до прямой $l \in R_2$ $и$ $l \in R_3$.
6. Уравнение плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей.
7. Условия параллельности, перпендикулярности прямой и плоскости; двух прямых на плоскости и в пространстве.
8. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Практические задания

Задание 1. По координатам точек А, В, С для указанных векторов найти : а) модуль вектора $\vec{a}$;

б) скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

в) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$;

г) векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
A	(2;-3;0)	(2;2;7)	(3;-3;1)	(-4;-2;0)	(1;4;-1)
B	(1;1;-4)	(0;1;6)	(5;1;-2)	(-1;-2;4)	(-2;4;-5)
C	(3;-2;0)	(-2;5;7)	(4;1;-3)	(3;-2;1)	(8;4;0)
$\vec{a}$	$\overline{AB}+\overline{AC}$	$\overline{AB}-3\overline{BC}$	$\overline{AB}+2\overline{AC}$	$2\overline{AB}+\overline{BC}$	$\overline{AC}+2\overline{AB}$
$\vec{b}$	$\overline{BC}-2\overline{AC}$	$\overline{AC}+2\overline{AB}$	$4\overline{AC}-\overline{BC}$	$3\overline{AB}-2\overline{AC}$	$\overline{AB}-3\overline{BC}$

Вариант	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	(3;3;-1)	(2;1;-1)	(0;-3;6)	(1;-1;0)	(3;-6;9)
B	(5;1;-2)	(6;-1;-4)	(-12;-3;-3)	(-2;-1;4)	(0;-3;6)
C	(4;1;1)	(4;2;1)	(-9;-3;-6)	(8;-1;-1)	(9;-12;-15)
$\vec{a}$	$5\overline{AB}-4\overline{BC}$	$\overline{AB}-5\overline{BC}$	$\overline{AB}+2\overline{BC}$	$-\overline{AB}+2\overline{BC}$	$3\overline{AB}-2\overline{AC}$
$\vec{b}$	$\overline{AC}+\overline{AB}$	$2\overline{AB}+3\overline{AC}$	$3\overline{AB}-\overline{AC}$	$2\overline{AC}+3\overline{AB}$	$\overline{BC}+\overline{AB}$

Вариант	11	12	13	14	15
A	(-1;-2;1)	(1;-2;3)	(2;-4;6)	(3;3;-1)	(-4;3;0)
B	(-4;-2;5)	(0;-1;2)	(0;-2;4)	(1;5;-2)	(0;1;3)
C	(-8;2;2)	(3;-4;5)	(6;-8;10)	(-4;1;1)	(-2;4;-2)
$\vec{a}$	$5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}$	$6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$	$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$
$\vec{b}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$	$3\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}$	$3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$

Вариант	16	17	18	19	20
A	(1;0;4)	(0;2;-4)	(2;-8;1)	(3;3;-1)	(6;2;-3)
B	(-3;-6;1)	(8;2;2)	(4;-6;0)	(5;5;-2)	(6;3;-2)
C	(-5;-10;-1)	(6;2;4)	(-2;-5;1)	(4;-1;1)	(7;3;0)
$\vec{a}$	$2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$	$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$	$5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{BC}$
$\vec{b}$	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$

Вариант	21	22	23	24	25
A	(0;1;-2)	(-3;-7;-5)	(5;3;-1)	(-4;6;7)	(-1;2;-3)
B	(3;1;2)	(0;-1;-2)	(5;2;0)	(2;5;3)	(0;1;-2)
C	(4;1;1)	(2;3;0)	(6;4;-1)	(-6;1;0)	(-3;4;-5)
$\vec{a}$	$3\overrightarrow{AB}+9\overrightarrow{BC}$	$4\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$	$3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{BC}$
$\vec{b}$	$-\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$	$4\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

Вариант	26	27	28	29	30
A	(2;3;2)	(-2;1;1)	(2;0;-3)	(7;0;2)	(-1;2;-3)
B	(-3;-3;-1)	(2;3;-2)	(1;4;5)	(7;1;3)	(3;4;-6)
C	(-3;-7;-3)	(0;0;3)	(-7;2;11)	(8;-1;2)	(1;1;-1)
$\vec{a}$	$2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$	$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$	$5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$	$4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$
$\vec{b}$	$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

Задание 2. Установить компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
1	(4;1;-2)	(-8;2;4)	(6;2;0)
2	(3;1;-1)	(1;0;-1)	(8;3;-2)
3	(1;-2;6)	(1;0;1)	(2;-6;17)
4	(5;3;4)	(4;3;3)	(9;5;8)
5	(4;3;1)	(6;7;-4)	(2;0;-1)
6	(3;7;2)	(6;7;-4)	(2;0;-1)
7	(4;2;2)	(-3;-3;-3)	(2;1;2)

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
8	(3;2;1)	(2;3;4)	(3;1;-1)
9	(4;1;2)	(9;2;5)	(1;1;-1)
10	(3;10;5)	(-2;-2;-3)	(2;4;3)
11	(6;3;4)	(-1;-2;-1)	(2;1;2)
12	(-3;3;3)	(-4;7;6)	(1;-1;-1)
13	(4;-1;-6)	(1;-3;-7)	(2;-1;-4)
14	(1;-1;4)	(1;0;3)	(1;-3;8)
15	(3;3;1)	(1;-2;1)	(1;1;1)
16	(2;3;1)	(-1;0;-1)	(2;2;2)
17	(7;3;4)	(-1;-2;-1)	(4;2;4)
18	(3;2;1)	(1;-3;-7)	(1;-2;3)
19	(4;3;1)	(1;-2;1)	(2;2;2)
20	(3;1;-1)	(-2;-1;0)	(5;2;-1)
21	(2;3;-1)	(1;-1;3)	(-3;3;9)
22	(3;1;0)	(-5;-4;-5)	(4;2;4)
23	(3;4;2)	(1;1;0)	(8;11;6)
24	(6;3;4)	(-1;-2;-1)	(2;1;2)
25	(3;-2;1)	(7;8;-1)	(-6;4;-2)
26	(2;3;2)	(4;7;5)	(2;0;-2)
27	(-2;-4;-3)	(4;3;1)	(6;7;4)
28	(5;3;4)	(-1;0;-1)	(4;2;4)
29	(1;5;2)	(-1;1;-1)	(1;6;1)
30	(1;-1;-3)	(3;2;1)	(2;3;4)

Задание 3. Даны вершины треугольника ABC. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы BM;

г) расстояние от точки A до прямой BC.

Вариант	A	B	C
1	(2;5)	(1;-3)	(4;0)
3	(7;2)	(1;3)	(0;-4)
5	(1;-3)	(3;1)	(2;-6)
7	(3;-2)	(1;0)	(8;6)
9	(-1;1)	(-4;5)	(-8;2)
11	(7;-1)	(1;3)	(0;5)
13	(5;1)	(4;-2)	(1;-3)
15	(6;-3)	(-1;4)	(7;0)
Вариант	A	B	C

Вариант	A	B	C
2	(2;7)	(0;6)	(-2;4)
4	(-3;-1)	(0;2)	(4;-5)
6	(4;-1)	(-2;5)	(8;0)
8	(4;7)	(-2;3)	(-6;0)
10	(2;6)	(0;-4)	(6;10)
12	(-4;0)	(-1;4)	(3;1)
14	(3;5)	(-2;4)	(1;-1)
16	(3;4)	(-1;4)	(0;-12)
Вариант	A	B	C

Вариант	A	B	C
17	(1;4)	(3;-1)	(2;5)
19	(1;5)	(-1;7)	(2;-3)
21	(0;-4)	(8;2)	(6;4)
23	(2;1)	(-1;0)	(3;2)
25	(2;-8)	(4;0)	(-5;-1)
27	(1;0)	(-2;4)	(8;-1)
29	(0;-2)	(3;2)	(4;1)

Вариант	A	B	C
18	(-5;2)	(3;4)	(1;0)
20	(-2;1)	(-4;3)	(0;5)
22	(3;-1)	(5;-2)	(4;1)
24	(-4;0)	(1;3)	(-2;4)
26	(3;2)	(-1;8)	(0;-5)
28	(-3;-5)	(0;2)	(3;-1)
30	(9;-1)	(6;-4)	(4;1)

Задание 4. Установить, какая линия определяется уравнением. Изобразить ее на чертеже.

Вар.	Уравнение
1	$x=-6-2\sqrt{y+4}$
3	$y=3-4\sqrt{x-1}$
5	$5x^2+3y^2-20x+18y+2=0$
7	$9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$
9	$x^2+10x-3y^2+24y-26=0$
11	$4x^2+3y^2-8x+12y-20=0$
13	$y=-\frac{1}{6}x^2+2x-7$
15	$16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$
17	$y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$
19	$x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$
21	$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$
23	$y=7+3\sqrt{x+5}$
25	$y=7-\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$
27	$x=-y^2+2y-1$
29	$y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-x^2-6x}$

Вар.	Уравнение
2	$x=2-\sqrt{6-2y}$
4	$y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+16x-x^2}$
6	$7x^2+28x+6y^2-12y-50=0$
8	$2x^2+5y^2+8x-10y-17=0$
10	$16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$
12	$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$
14	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$
16	$y=4x^2-8x+7$
18	$4x^2+18y^2-16x+36y-38=0$
20	$6x^2-12x+7y^2+28y-8=0$
22	$y=-5+\sqrt{-3x-21}$
24	$x=-2+\sqrt{-5-6y-y^2}$
26	$5x^2-2y^2+10x+8y-13=0$
28	$x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$
30	$x=-4+3\sqrt{y+5}$

Задание 5.

1. Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0, \\ 2x-y-z-1=0; \end{cases}$ лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.

2. Доказать перпендикулярность прямых:
$\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1. \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0; \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

3. Найти точку Q, симметричную точке P(3;-4;-6) относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(-6;1;-5)$; $M_2(7;-2;-1)$; $M_3(10;-7;1)$.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+1}{3}$ и перпендикулярной к плоскости $2x-5y+z-2=0$.

5. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(3;0;-1)$; $B(1;2;-4)$; $C(0;7;-2)$. Найти уравнения сторон AD *и* CD.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z+3}{2}$; $\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;-3)$ параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$; $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

8. Даны точки $A(1;1;1)$; $B(2;3;3)$; $C(3;3;2)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к векторам $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$.

9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;3;-5)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0; \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

10. Доказать параллельность прямых:
$\begin{cases} x+2y-3z+1=0, \\ 2x-4y+z-5=0, \end{cases}$ $\frac{x+3}{10}=\frac{y-1}{7}=\frac{z+5}{8}$.

11. Найти точку пересечения прямой, проходящей через точки $A(0;0;4)$; $B(2;2;0)$ с плоскостью $x+y-z=0$.

12. Написать уравнения прямой, которая проходит через точку $A(-1;2;-3)$ перпендикулярно к вектору $\bar{a}=(6;-2;-3)$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{3}$ и точку $A(3;-4;0)$.

14. Найти точку Q, симметричную точке $P(1;3;-4)$ относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

15. Найти проекцию точки $P(2;-1;3)$ на прямую $x=2t;\ y=5t-7;\ z=2t+2$.

16. Найти проекцию точки $A(3;1;-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

17. Доказать параллельность прямых

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0, \end{cases} \qquad \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}.$$

18. Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$.

19. Составить уравнение плоскости, которая проходит через прямую пересечения плоскостей $3x-y+2z+9=0$, $x+z-3=0$ и через точку $M_1(4;-2;-3)$.

20. Найти проекцию точки $A(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

21. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ с плоскостью $x+2y+3z-29=0$.

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-1;-1)$ перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

23. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ перпендикулярно плоскости $3x+y-z+2=0$.

24. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=2t+1;\ y=-3t+2;\ z=2t-3$ и точку $M(2;-2;1)$.

25. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{2}$; $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+5}{2}$.

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;5)$ перпендикулярной к плоскостям $3x-2y+z+7=0$; $5x-4y+3z+1=0$.

27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $P(2;0;-1)$, $Q(1;-1;3)$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z+5=0$.

28. Определить косинус угла между прямыми $\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-3z-4=0. \end{cases}$ и $\begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$

29. Найти точку Q, симметричную точке $P(4;1;6)$ относительно прямой $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

30. Вычислить расстояние d от точки $P(2;3;-1)$ до прямой $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$.

Задание 6. Изобразить тело, ограниченное поверхностями:

Вариант.	Поверхности
1.	$x+y=6;\ y=\sqrt{3x};\ z=4y;\ z=0.$
2.	$x^2+z^2=a^2;\ y=0;\ z=0;\ y=x.$
3.	$x^2+y^2=a^2;\ x^2+y^2-z^2=-a^2.$
4.	$z=0,\ x^2+y^2=2x;\ x^2+y^2=z^2.$
5.	$x+y+z=a;\ 3x+y=a;\ \frac{3}{2}x+y=a;\ y=0;\ z=0.$
6.	$x^2+y^2=2z;\ x^2+y^2+z^2=3.$
7.	$x^2+y^2=2y;\ x^2+y^2+z^2=4.$
8.	$x+z=3;\ y=\sqrt{3x};\ y=6\sqrt{3x};\ z=0.$
9.	$y^2+z^2=2x;\ y^2+z^2=4.$
10.	$x=2;\ y=0{,}5x;\ y=0;\ z=0;\ z=1.$
11.	$z^2=\frac{h^2}{r^2}\left(x^2+y^2\right);\ z=h.$
12.	$z=2x^2+y^2+1;\ x+y=1;\ x=0;\ z=0.$

Вариант.	Поверхности
13.	$x^2+y^2=1;\ x^2+y^2+z^2=4;\ z=0.$
14.	$y=\sqrt{x};\ \ y=2\sqrt{x};\ \ x+z=6;\ z=0.$
15.	$x^2+y^2=2z;\ x^2+y^2-z^2=1;\ z=0.$
16.	$y=x^2;\ x^2+y^2=3;\ \ z=0;\ z=4.$
17.	$y^2=4a^2-3ax;\ y^2=ax;\ \ z=\pm h.$
18.	$x^2+y^2=3y;\ x^2+y^2=6y;\ \ z=\sqrt{x^2+y^2};\ \ z=0.$
19.	$x^2+y^2=4x;\ \ z=10-y^2;\ \ z=0.$
20.	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1;\ \ z=-2;\ \ z+x=2.$
21.	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1;\ \ z=5;\ \ y^2-x^2=1.$
22.	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1;\ \ y=0;\ \ y=2x;\ z=0;\ z=4.$
23.	$z=x^2+y^2;\ \ \ y=x^2;\ y=1;\ \ \ z=0.$
24.	$z^2=9-x^2-y^2;\ \ x^2+y^2=z^2;\ \ x\geq 0;\ z\geq 0.$
25.	$x=7\sqrt{3y};\ \ \ x=\sqrt{3y};\ \ z=0;\ \ z+y=3.$
26.	$z=x^2+y^2\ \ \ y=x;\ y=0;\ \ \ z=0.$
27.	$x^2+y^2=2x;\ \ z=-1;\ z=2-x.$
28.	$x^2+y^2=4x;\ \ z=0;\ z=6-x^2.$
29.	$x^2+y^2=2z;\ x^2+y^2-z^2=1;\ \ z=0.$
30.	$x^2+y^2=16;\ 5z=25-x^2-y^2;\ \ z\geq 1{,}8.$

Задание 7. Составить таблицу значений функции, заданной полярным уравнением $r=r(\varphi)$, построить график кривой. Записать уравнение кривой в декартовых прямоугольных координатах:

Вариант	$r=r(\varphi)$	Вариант	$r=r(\varphi)$
1.	$r=2(1+\sin\varphi)$.	**2.**	$r=\frac{1}{3(1-\cos\varphi)}$.
3.	$r=2+\sin\varphi$.	**4.**	$r=4\cos 3\varphi$.

Вариант	$r=r(\varphi)$	Вариант	$r=r(\varphi)$
5.	$r=\dfrac{10}{2+\cos\varphi}$.	**6.**	$r=6\sin 3\varphi$.
7.	$r=\dfrac{2}{2-3\cos\varphi}$.	**8.**	$r=\dfrac{1}{1+\cos\varphi}$.
9.	$r=4(1-\sin\varphi)$.	**10.**	$r=2\lvert\sin\varphi\rvert$.
11.	$r=\dfrac{4}{\cos\varphi}$.	**12.**	$r=\dfrac{5}{6+3\cos\varphi}$.
13.	$r=3\sin\varphi$.	**14.**	$r=6\sin 2\varphi$.
15.	$r=5(1+\cos\varphi)$.	**16.**	$r=\dfrac{1}{2+2\cos\varphi}$.
17.	$r=3+\cos\varphi$.	**18.**	$r=2\sin 4\varphi$.
19.	$r^2=9\cos 2\varphi$.	**20.**	$r=\dfrac{3}{1-2\cos\varphi}$.
21.	$r=\dfrac{12}{2+\cos\varphi}$.	**22.**	$r=\dfrac{1}{3+\cos\varphi}$.
23.	$r^2=16\sin 2\varphi$.	**24.**	$r=2\lvert\cos\varphi\rvert$.
25.	$r=\dfrac{6}{1-\cos\varphi}$.	**26.**	$r=3(1-\cos\varphi)$.
27.	$r=\dfrac{21}{5-2\cos\varphi}$.	**28.**	$r=\dfrac{1}{2+\cos\varphi}$.
29.	$r=6\cos 4\varphi$.	**30.**	$r^2=25\sin 2\varphi$.

Решение типового варианта АР № 1

«Основы линейной алгебры и аналитической геометрии»

Задание 1. По координатам точек А,В,С для указанных векторов найти : а) модуль вектора $\vec{a}$;

б) скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

в) проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$;

г) векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$.

$A(-1;2;-3);\ B(3;4;-6);\ C(1;1;-1);\ \ \vec{a}=4\overline{AB}+3\overline{BC};\ \ \vec{b}=\overline{AB}-2\overline{AC}.$

Решение:

Найдем координаты векторов $\overline{AB}; \overline{BC};\ \overline{AC}$, зная, что $x_{\overline{AB}}=x_B-x_A;$

$$y_{\overline{AB}}=y_B-y_A;\ z_{\overline{AB}}=z_B-z_A;.$$

$$\overrightarrow{AB}=(4;2;-3);\ \overline{BC}=(-2;-3;5);\ \ \overrightarrow{AC}=(2;-1;2).$$

Тогда $\vec{a}=4(4;2;-3)+3(-2;-3;5)=(10;-1;3).$

$$\vec{b}=(4;2;-3)-2(2;-1;2)=(0;4;-7).$$

а) Модуль вектора $\vec{a}=(x,y,z)$ найдем по формуле

$$\vec{a}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{10^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{110}\approx 10{,}488.$$

б) Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1);\ \ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2),$ определяется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\ \vec{a}\cdot\vec{b}=10\cdot 0+(-1)\cdot 4+3\cdot(-7)=-25.$$

в) По определению скалярного произведения вектора на ось имеем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}.$$

Из этого равенства следует, что $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}.$

Т.к. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-25;\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{0^2+4^2+(-7)^2}=\sqrt{65},$ *то*

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{-25}{\sqrt{65}}=-\frac{5}{13}\sqrt{65}\approx -3{,}101.$$

г) Векторное произведение векторов, заданных координатами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1);\ \ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2),$ определяется по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Для нашей задачи $\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 10 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -5\vec i + 70\vec j + 40\vec k.$

Ответ: $|\vec a| = \sqrt{110}$; $\vec a \cdot \vec b = -25$; $пр_{\vec b} = -\frac{5}{13}\sqrt{65}$; $\vec a \times \vec b = (-5;70;40)$.

Задание 2. Установить, компланарны ли векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$.

$$\vec a = (1;-1;3),\ \vec b = (3;2;1),\ \vec c = (2;3:4).$$

Условием компланарности трех векторов, заданных своими координатами, является равенство нулю их смешанного произведения, т.е. $(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = 0$ или в координатной форме: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$

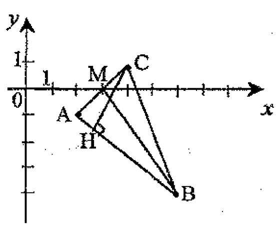
Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 27 - 2 + 12 - 3 + 12 = 32 - 32 = 0.$$

Следовательно, векторы $\vec a,,\vec b,\vec c$ - компланарны.

Задание 3. Даны вершины треугольника ABC: A(2;-1); B(6;-4); C(4;1);
Найти: а) уравнение стороны *AB*;
б) уравнение высоты *CH*;
в) уравнение медианы *BM*;
г) расстояние от точки *A* до прямой *BC*.

а) Построим треугольник в системе координат. Составим уравнение прямой *AB*, проходящей через две заданные точки:



$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A};$$

$$(AB): \frac{y+1}{-4+1} = \frac{x-2}{6-2}$$

$$4(y+1) = -3(x-2)$$

или

$$(AB): 3x + 4y - 2 = 0.$$

б) Уравнение высоты *CH* найдем, зная координаты точки *C* и условие перпендикулярности прямых *CH и AB*. Т.к.

$$CH \perp AB \Rightarrow k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}},\ k_{AB} = -\frac{3}{4},\ k_{CH} = \frac{4}{3}.$$

$$y - y_C = k_{CH}(x - x_C),\ \textit{т.е.}\ y - 1 = \frac{4}{3}(x-4)\ \ \textit{или}\ \ (CH): 4x - 3y - 13 = 0.$$

в) Уравнение медианы BM найдем, зная координаты двух точек B и M. Координаты середины отрезка $[AC]$ находим по формулам:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2};\qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Значит, M (3;0), а B (6;-4) и уравнение (BM): $\dfrac{x - x_B}{x_M - x_B} = \dfrac{y - y_B}{y_M - y_B}$;

$$\frac{x-6}{3-6} = \frac{y+4}{0+4}\ \ \textit{или}\ \ 4(x-6) = -3(y+4);\ \ (BM): 4x + 3y - 12 = 0.$$

г) Расстояние от т. A до прямой BC.

Расстояние от точка $A(x_A; y_A)$ до прямой BC: $ax + by + c = 0$ вычислим по формуле: $d = \dfrac{|a\cdot x_A + b\cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$$(BC): \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B};\ \frac{y-4}{1+4} = \frac{x-6}{4-6}\ \ \textit{или}\ \ -2(y+4) = 5(x-6),$$

$5x + 2y - 22 = 0$ (BC).

$$d = \frac{|5\cdot 2 + 2\cdot(-1) - 22|}{\sqrt{5^2+2^2}} = \frac{14}{\sqrt{29}} = \frac{14}{29}\sqrt{29} \approx 2{,}600.$$

Ответ:
$3x + 4y - 2 = 0$ (AB), $4x + 3y - 12 = 0$ (BM),
$4x - 3y - 13 = 0$ (CH), $d = \dfrac{14}{29}\sqrt{29}$.

Задание 4. Установить, какая линия определяется уравнением $x = -4 + 3\sqrt{y+5}$. Изобразить ее на чертеже.

Решение:

Преобразуем данное уравнение таким образом: $x + 4 = 3\sqrt{y+5}$. (*)

ОДЗ этого равенства:

$$\begin{cases} x + 4 \ge 0, \\ y + 5 \ge 0. \end{cases}\quad \textit{или}\quad \begin{cases} x \ge -4, \\ y \ge -5. \end{cases}$$

Возводя обе части равенства (*) в квадрат, получим каноническое уравнение параболы

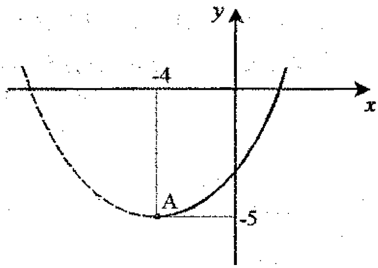
$$(x+4)^2 = 9(y+5),$$

вершина которой находится в точке

$$A(-4;-5),$$

а ось симметрии параллельна оси $0y$.

С учетом ОДЗ исходное уравнение определяет часть параболы (на графике она выделена жирным шрифтом).



Задание 5. Вычислим расстояние d от точки P (2;3;-1) до прямой

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}.$$

Решение:

1 способ:

Чтобы найти кратчайшее расстояние от точки до прямой в пространстве, необходимо найти точку пересечения перпендикуляра к данной прямой, проходящего через данную точку, и взять расстояние между двумя точками. Точку пересечения перпендикуляра с данной прямой можно найти путем пересечения прямой с плоскостью, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой.

(Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости и проходящей через точку пересечения прямой и плоскости).

Напишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку:

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z-1) = 0.$$

Т.к. искомая плоскость перпендикулярна данной прямой, то нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (A;B;C) = (3;2;-2) = \vec{s}$ – направляющему вектору прямой.

Тогда получим уравнение плоскости:

$$3(x-2) + 2(y-3) - 2(z-1) = 0 \quad или \quad 3x + 2y - 2z - 14 = 0.$$

Найдем точку пересечения данной прямой с найденной плоскостью:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z - 14 = 0, \\ \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+25}{-2}. \end{cases}$$

Перепишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} 3x+2y-2z-14=0, \\ x=3t+5, \\ y=2t, \\ z=-2t-25. \end{cases}$$

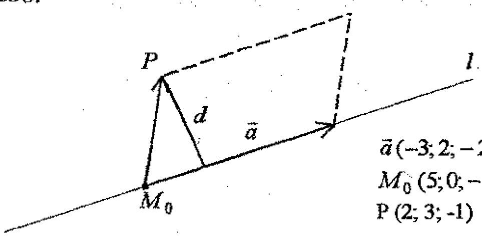
Решая эту систему, найдем: $t=-3$, $x=-4$, $y=-6$, $z=-19$. Точка пересечения Q (-4;-6;-19). Найдем теперь расстояние между точками P и Q по формуле:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

$$d=\sqrt{(-4-2)^2+(-6-3)^2+(-19+1)^2}=\sqrt{36+87+324}=21.$$

Ответ: d=21 ед. длины.

2-й способ:



$\vec{a}\,(-3;2;-2)$
$M_0\,(5;0;-25)$
P (2; 3; -1)

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$$ - расстояние от точки P до прямой l.

$$|\vec{a}|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}.$$

$$\overrightarrow{M_0P}=(2-5;3-0;-1+25)=(-3;3;24).$$

Находим векторное произведение векторов $\overrightarrow{M_0P}$ *и* $\vec{a}$ и его длину:

$$\overrightarrow{M_0P}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 3 & 24\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 8\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot\left(\begin{vmatrix}1 & 8\\ 2 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 8\\ 3 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\right)=3(-18\vec{i}+22\vec{j}-5\vec{k}).$$

$$\left|\overrightarrow{M_0P}\times\vec{a}\right|=3\sqrt{18^2+22^2+5^2}=3\sqrt{324+484+25}=21\sqrt{17}.$$

$$d=\frac{21\sqrt{17}}{\sqrt{17}}=21(\text{ед. длины}).$$

Ответ: d=21 (ед. длины).

Задание 6. Изобразить тело, ограниченное поверхностями:
а) $x^2+y^2=16,\quad 2z=25-x^2-y^2,\quad 0\le z\le 1{,}8.$

Решение:

Уравнение $x^2+y^2=16$ в пространстве R^3 определяет круговой цилиндр с радиусом основания 4 ед. и образующей, параллельной оси $0z$. Уравнение $2z=25-x^2-y^2$ или $x^2+y^2=25-5z$ определяет круговой параболоид с вершиной в точке (0;0;5), чаша которого опущена вниз. Найдем линии пересечения параболоида с координатными плоскостями для его построения:

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2=25-5z, \end{cases} \quad x^2+y^2=25 - \text{окружность радиуса 5.}$$

$$\begin{cases} y=0, \\ x^2+y^2=25-5z, \end{cases}$$

$x^2=25-5z;\quad x^2=-5(z-5)$ – *парабола с центром в т.*(0;5),

симметричная оси $0z$, ветви направлены вниз.

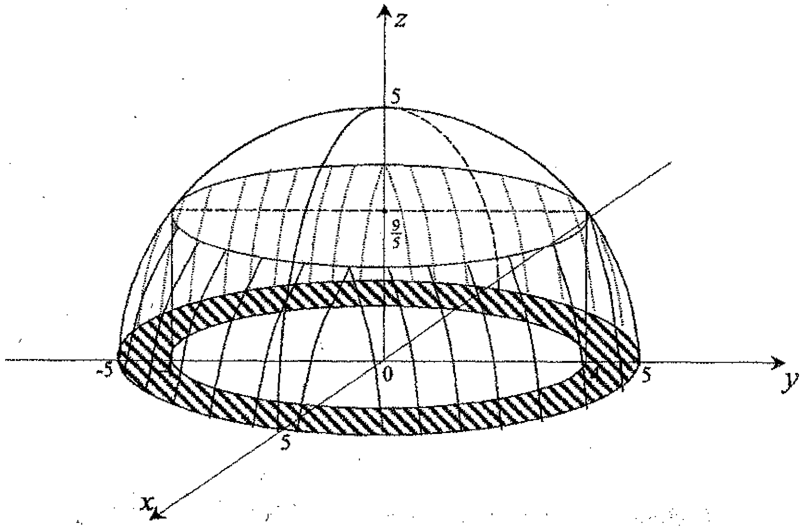
$$\begin{cases} x=0, \\ x^2+y^2=25-5z, \end{cases}$$

$y^2=25-5z;\quad y^2=-5(z-5)$ – *парабола.*

Найдем теперь линию пересечения поверхностей $x^2+y^2=16$ и $5z=25-x^2-y^2$ и высоту их пересечения:

$$\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x^2+y^2=25-5z, \end{cases} \quad 25-5z=16,\ 5z=9,\ z=\frac{9}{5}.$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{9}{5}, \\ x^2+y^2=16. \end{cases} \quad - \textit{окружность радиуса 4 на плоскости } z=1{,}8.$$



б) Изобразить тело, ограниченное поверхностями:

$$z = x^2 + y^2; \; y = x^2; \; y = 1; \; z = 0.$$

Решение:

Уравнение $z = x^2 + y^2$ определяет круговой параболоид с вершиной в т.(0;0;0).

$y = x^2$ - параболический цилиндр с образующей, параллельной оси $0z$, а направляющая - парабола, симметричная относительно оси $0y$.

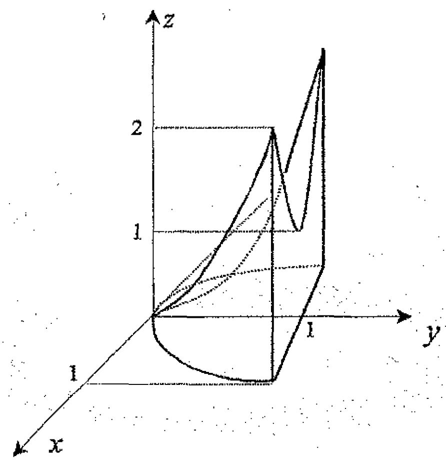
$y = 1$ - плоскость, параллельная плоскости $x0z$ и отстоящая от нее на единицу.

$z = 0$ - координатная плоскость $x0y$.

Для построения тела найдем линии и точки пересечения.

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ y = 1. \end{cases} \quad z = x^2 + 1 - \textit{парабола}.$$

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 1. \end{cases} \quad x = \pm 1. \quad \textit{При} \;\; x = \pm 1, \; y = 1, \; z = 2.$$



Задание 7. Составить таблицу значений функции, заданной полярным уравнением $r = r(\varphi)$, построить график кривой. Записать уравнение кривой в декартовых координатах:

$$a)\ r = \frac{8}{3-\cos\varphi};\quad б)\ r = \frac{3}{1+\sin\varphi}\quad в)\ r = -2\cos\varphi.$$

В полярной системе координат положение точки $M \in R_2$ определяется парой чисел $(r;\varphi)$, где

$$r = \left|\overrightarrow{OM}\right|,\quad \varphi = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}).\ r \ge 0,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Решение

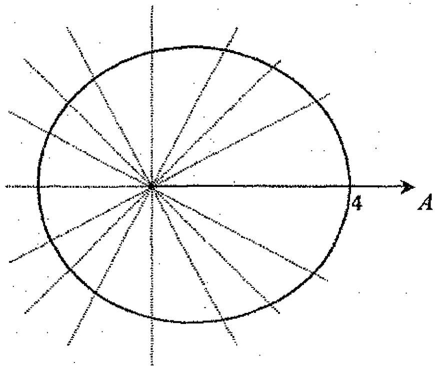
$$a)\ r = \frac{8}{3-\cos\varphi}.$$

Допустимыми являются углы $\varphi \in [0;2\pi]$. Воспользуемся четностью $\cos\varphi$ и составим таблицу значений для $\varphi \in [0;\pi]$.

Пусть $\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{8}$.

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/8$
$\cos\varphi$	1	0,92	0,71	0,38
r	4	3,85	3,49	3,05

φ	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\cos\varphi$	0	-0,38	-0,71	-0,92	-1
r	2,67	2,36	2,16	2,04	2



Запишем декартово уравнение кривой: $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

$$r = \frac{8}{3-\cos\varphi} \Rightarrow r(3-\cos\varphi) = 8 \Rightarrow 3r = 8 + r\cos\varphi \Rightarrow 3\sqrt{x^2+y^2} = 8 + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(x^2+y^2) = 64 + 16x + x^2 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 - 16x + 9y^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 - 64 - 8 = 0.$$

$$8(x-1)^2 + 9y^2 = 72 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Эллипс, центр которого в точке (1;0), полуоси $a = 3,\ b = 2\sqrt{2}$.

б) $r = \dfrac{3}{1+\sin\varphi}$.

Допустимые углы: $\sin\varphi + 1 > 0, \quad \sin\varphi > -1$.

$$\sin\varphi \neq -1, \quad \varphi \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Если рассматривать $\varphi \in [0;2\pi]$, то $\varphi \neq \dfrac{3\pi}{2}$ или $\varphi \neq 270°$.

Если $\varphi \in (-\pi;\pi]$, *то* $\varphi \neq -\dfrac{\pi}{2}$.

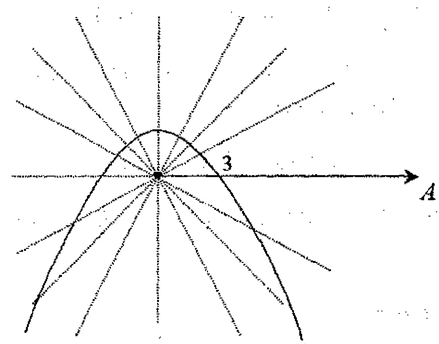
Составляем таблицу значений функции $r = r(\varphi)$.

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$
$\sin\varphi$	0	0,38	0,71	0,92
r	3	2,17	1,75	1,56

φ	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
$\sin\varphi$	1	0,92	0,71	0,38
r	1,5	1,56	1,75	2,17

φ	π	$9\pi/8$	$5\pi/4$	$11\pi/8$
$\sin\varphi$	0	-0,38	-0,71	-0,92
r	3	4,84	10,34	37,5

φ	261^0	279^0	$13\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$	2π
$\sin\varphi$	-0,99	-0,99	-0,92	-0,71	-0,38	0
r	300	300	37,5	10,34	4,84	3



Запишем декартово уравнение линиями

$$r = \frac{3}{1+\sin\varphi} \Rightarrow r + r\sin\varphi = 3 \Rightarrow$$

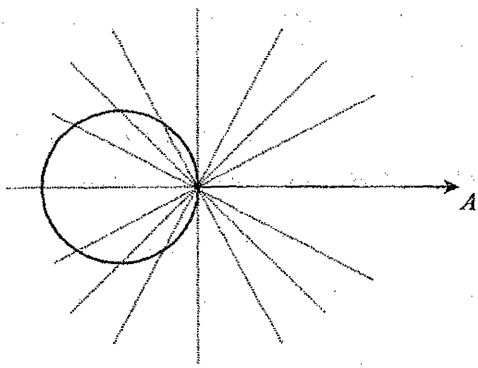
$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3 - y \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 - 6y + y^2,\ x^2 = -6\left(y - \frac{9}{6}\right) \Rightarrow$ парабола с вершиной в точке (0;1,5).

в) $r = -\cos\varphi$.

Так как $r \geq 0$, то $-\cos\varphi \geq 0, \Rightarrow \cos\varphi \leq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

φ	$\pi/2$	$5\pi/8$	$6\pi/8$	$7\pi/8$	π	$9\pi/8$
r	0	0,38	0,71	0,92	4,84	0,92

φ	$10\pi/8$	$11\pi/8$	$12\pi/8$
r	0,71	0,38	0



$r = -\cos\varphi \Rightarrow r^2 = -r\cos\varphi \Rightarrow x^2 + y^2 = -x \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ *окружность* $R = 0{,}5$ *с центром в точке* $(-0{,}5;\ 0)$.

Аттестационная работа № 2

«Дифференцирование»

Теоретические вопросы

1. Определение, геометрический и механический смысл производной.
2. Правила дифференцирования. Таблица производных основных элементарных функций.
3. Производная сложной функции. Логарифмическая производная.
4. Непрерывность дифференцируемой функции.
5. Приращение и дифференциал функции.
6. Производные параметрически заданных функций.
7. Гиперболические функции, их свойства, производные.
8. Необходимое и достаточные условия локального экстремума.
9. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба кривой.
10. Асимптоты.

Практические задания

Задание 1. Найти производные функций:

1

а) $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x};$

б) $y = \dfrac{x-3}{2}\sqrt{6x - x^2 - 8} + \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2} - 2};$

в) $y = \dfrac{ctg\left(\sin\dfrac{1}{3}\right)\cdot \sin^2 17x}{17\cos 34x};$

г) $y = -\dfrac{shx}{2ch^2x} + \dfrac{3}{2}\arcsin(thx).$

2

а) $y = \dfrac{x+1}{2} - \ln(1 + e^x);$

в) $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17}\cdot arctg(x-4) - \ln(x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 17});$

б) $y = \dfrac{\cos(ctg3)\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x};$

г) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + arctg\sqrt{x}.$

3 *а)* $y = x - 3\ln\left((1+e^{x/6})\cdot\sqrt{1+e^{x/3}}\right) - 3arctg\, e^{x/6}$;

б) $y = \dfrac{1+8ch^2x\cdot\ln chx}{2ch^2x}$;

в) $y = \dfrac{\cos\left(tg\,\frac{1}{3}\right)\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$;

г) $y = 2\arcsin\dfrac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2+6x-3},\ 3x+1>0.$

4 *а)* $y = \dfrac{1}{3}\cos tg\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$;

б) $y = (2x+3)^4\arcsin\dfrac{1}{2x+3} + \dfrac{2}{3}(4x^2+12x+11)\cdot\sqrt{x^2+3x+2},\quad 2x+3>0$;

в) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1+x}{2x}arctg\sqrt{x}$;

г) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+thx}{1-thx}}$.

5 *а)* $y = \dfrac{\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}$;

б) $y = \dfrac{shx}{1+chx}$;

в) $y = \ln\sin\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$;

г) $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \sqrt{3}arctg\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

6 *а)* $y = 5x - \ln(1+\sqrt{1-e^{10x}}) - e^{-5x}\arcsin(e^{5x})$;

б) $y = \dfrac{chx}{\sqrt{sh2x}}$;

в) $y = 8\sin(ctg3) + \dfrac{\sin^2 5x}{5\cos 10x}$;

г) $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}arctg\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

7 а) $y=2\left(\sqrt{2^x-1}-arctg\sqrt{2^x-1}\right)\cdot\dfrac{1}{\ln 2};$

б) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{1-sh2x}{1+sh2x};$

в) $y=ctg\cos 2+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x};$

г) $y=\sqrt{1-3x-2x^2}+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}.$

8 а) $y=2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1};$

в) $y=\dfrac{(1+x)arctg\sqrt{x}}{x^3}+\dfrac{1}{3x\sqrt{x}};$

б) $y=\sqrt[3]{ctg 2}-\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x};$

г) $y=arctg\dfrac{\sqrt{sh2x}}{chx-shx}.$

9 а) $y=e^{2x}(2-\sin 2x-\cos 2x);$

б) $y=\dfrac{shx}{4ch^4x}+\dfrac{3shx}{8ch^2x}+\dfrac{3}{8}arctg(shx);$

в) $y=\cos\ln 2-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x};$

г) $y=4\ln\dfrac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$

10 а) $y=\dfrac{1}{2}e^x((x^2-1)\cos x+(x-1)^2\sin x);$

б) $y=\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{5+3chx}{3+5chx};$

в) $y=\cos\ln 13-\dfrac{1}{44}\cdot\dfrac{\cos^2 2x}{\sin 44x};$

г) $y=(2+3x)\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{2}arctg\sqrt{x-1}.$

11 а) $y=\frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1+2^x}{1-2^x}$;

б) $y=\frac{3}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+thx}{\sqrt{2}-thx}-\frac{thx}{4(2-th^2x)}$;

в) $y=ctg\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$;

г) $y=x^3a\arcsin x+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

12 а) $y=2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1}$;

б) $y=\frac{1}{2}thx+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}thx}{1-\sqrt{2}thx}$;

в) $y=\frac{\cos(\sin 5)\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$;

г) $y=3\arcsin\frac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$, $4x+1>0$.

13 а) $y=\sqrt{1+x^2}\,arctgx-\ln(x+\sqrt{1+x^2}$;

б) $y=\frac{1}{2}\ln th\frac{x}{2}-\frac{chx}{2sh^2x}$;

в) $y=\frac{\sin(\cos 3)\cdot cos^2 2x}{4\sin 4x}$;

г) $y=\frac{x^4}{81}\arcsin\frac{3}{x}+\frac{1}{81}(x^2+18)\sqrt{x^2-9}$, $x>0$.

14 а) $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}arctgx$;

б) $y=\frac{1}{2a\sqrt{1+a^2}}\ln\frac{a+\sqrt{1+a^2}\cdot thx}{a-\sqrt{1+a^2}\cdot thx}$;

в) $y=\cos(\ln 7)\frac{\sin^2 7x}{7\cos 14x}$;

г) $y=2\arcsin\frac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+12}$, $3x+4>0$.

15

а) $y=\ln(e^x+1)+\dfrac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$;

б) $y=\dfrac{1}{18\sqrt{2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\cdot cthx}{1-\sqrt{2}\cdot cthx}$;

в) $y=\cos ctg2-\dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$;

г) $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}$.

16

а) $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$;

б) $y=arctg\dfrac{thx-cthx}{\sqrt{2}}$;

в) $y=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}\ln\dfrac{2+\sqrt{5}\cdot tgx}{2-\sqrt{5}\cdot tgx}$;

г) $y=\dfrac{1}{24}(x^2+8)\sqrt{x^2-4}+\dfrac{x^4}{16}\arcsin\dfrac{2}{x}$.

17

а) $y=-\dfrac{1}{3}e^{-x^2}(x^4+2x^2+2)$;

б) $y=-\dfrac{chx}{2shx}-\dfrac{1}{2}\ln th\dfrac{x}{2}$;

в) $y=\sin^3\cos 2-\dfrac{cos^2 30x}{60\sin 60x}$;

г) $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}\ arctg\sqrt{x}$.

18

а) $y=(2x^2-x+1)arctg\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{3}}-\dfrac{x^3}{2\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$,

б) $y=\dfrac{shx}{2ch^2x}+\dfrac{1}{2}arctg(shx)$;

в) $y=\sin^3\sqrt[3]{tg2}-\dfrac{cos^2 28x}{56\sin 56x}$;

г) $y=\ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right)+\arcsin e^{-3x}$.

19 *а)* $y = \arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}}$;

б) $y = \frac{1}{2}\left(\frac{shx}{ch^2 x} + arctg(shx)\right)$;

в) $y = \cos^2 \sin 3x + \frac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$;

г) $y = \sqrt{49x^2+1}\; arctg\, 7x - \ln\left(7x + \sqrt{49x^2+1}\right)$

20 *а)* $y = (2x^2+6x+5)\cdot arctg\,\frac{x+1}{x+2} - x$;

б) $y = \frac{3}{2}\ln th\frac{x}{2} + chx - \frac{chx}{2sh^2 x}$;

в) $y = \sqrt[3]{\cos 2} - \frac{1}{52}\cdot\frac{cos^2 26x}{\sin 52x}$;

г) $y = (3x+1)^4 \arcsin\frac{1}{3x+1} + (3x^2+2x+1)\sqrt{9x^2+16}, \qquad 3x+1>0.$

21 *а)* $y = 3e^{3\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120\right)$;

б) $y = -\frac{shx}{2ch^2 x} - \frac{1}{shx} - \frac{3}{2}arctg(shx)$;

в) $y = \sqrt[7]{tg\cos 2} + \frac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$;

г) $y = \frac{x}{2\sqrt{1-4x^2}}\arcsin 2x + \frac{1}{8}\ln(1-4x^2)$.

22 *а)* $y = e^{\sin x}\left(x - \frac{1}{\cos x}\right)$;

б) $y = \frac{8}{3}cth 2x - \frac{1}{3chx\; sh^3 x}$;

в) $y = ctg\sin\frac{1}{3} - \frac{cos^2 24x}{48\sin 48x}$;

г) $y = \ln\left(5x + \sqrt{25x^2+1}\right) - \sqrt{25x^2+1}\cdot arctg 5x.$

23

а) $y=\frac{e^x}{2}((x^2+1)\cos x+(x^2+1)\sin x);$

б) $y=\frac{1}{2}arctg(shx)-\frac{shx}{2ch^2x};$

в) $y=\sin\ln\frac{1}{2}+\frac{\sin^2 25x}{25\cos 50x};$

г) $y=\frac{2}{3x-2}\sqrt{9x^2+12x-3}+\ln\frac{1+\sqrt{9x^2+12x-3}}{3x-2}.$

24

а) $y=3e^{3\sqrt{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right);$

б) $y=\frac{1-8ch^2x}{4ch^4x};$

в) $y=\cos\ln 13-\frac{\cos^2 22x}{44\sin 44x};$

г) $y=\frac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{2}}.$

25

а) $y=\ln\frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1};$

б) $y=\frac{2}{shx}-\frac{1}{3sh^2x}+\frac{shx}{2ch^2x}+\frac{5}{2}arctgshx;$

в) $y=\ln\cos\frac{1}{3}-\frac{\sin^2 23x}{23\cos 46x};$

г) $y=\sqrt{1-x^2}-x\arcsin\sqrt{1-x^2}.$

26

а) $y=\frac{2x-5}{4}\sqrt{5x-4-x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-1}{3}};$

б) $y=\frac{1}{4}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\ln\frac{3+chx}{shx};$

в) $y=ctg\cos\frac{1}{3}-\frac{\cos^2 20x}{40\sin 40x};$

г) $y=\frac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2}-\frac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}.$

27 а) $y=\frac{1}{m\sqrt{ab}}arctg\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right);$

б) $y=\frac{1}{4}\arcsin\frac{5+3chx}{3+5shx};$

в) $y=\sqrt{tg4}-\frac{\sin^2 21x}{21\cos 42x};$

г) $y=\frac{2}{3}\left(4x^2-4x+3\right)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\frac{1}{2x-1}, \quad 2x-1>0.$

28 а) $y=x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$

б) $y=\frac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\frac{3+chx}{1+3shx};$

в) $y=\frac{\sqrt[5]{ctg2}\cdot cos^2 18x}{36\sin 36x};$

г) $y=\frac{(1+x)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}.$

29 а) $y=x-\ln(1+e^x)-2e^{\frac{x}{2}}arctge^{-\frac{x}{2}}-arctg^2 e^{\frac{x}{2}};$

б) $y=\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\frac{4+\sqrt{8}\ th\frac{x}{2}}{4-\sqrt{8}\ th\frac{x}{2}};$

в) $y=\frac{tg\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19\cos 38x};$

г) $y=\frac{2\sqrt{1-x}\ \arcsin\sqrt{x}}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}.$

30 а) $y=x+\frac{8}{1+e^{x/4}};$

б) $y=-\frac{12sh^2x+1}{3sh^3x};$

в) $y=\sin\lg\frac{1}{7}+\frac{cos^2 16x}{32\sin 32x};$

г) $y=(3x^2-4x+2)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\cdot\arcsin\frac{1}{3x-2}, \quad 3x-2>0.$

Задание 2. Найти дифференциал функции.

1	$y=\sqrt{(4+x)(1+x)}+3\ln\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x}\right)$	2	$y=\dfrac{shx}{\sqrt{chx}}$.
3	$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\sqrt{\dfrac{\arccos x}{2x^2}}$.	4	$y=\arccos\dfrac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}$.
5	$y=\dfrac{x+2}{x^2+4x+6}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}$.	6	$y=\dfrac{4+x^4}{x^3}\cdot arctg\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{x}$.
7	$y=\ln\left\lvert\cos\sqrt{x}\right\rvert+\sqrt{x}\,tg\sqrt{x}$.	8	$y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$.
9	$y=\dfrac{x^3}{3}\arccos x-\dfrac{x^2+2}{9}\cdot\sqrt{1-x^2}$.	10	$y=arctg\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.
11	$y=\ln\left(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}\right)+\arcsin e^{-5x}$.	12	$y=\arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+16}}$.
13	$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}arctg\dfrac{3x-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3x-1}{3(3x^2-2x+1)}$.	14	$y=\sqrt{2/3}\,arctg\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}$.
15	$y=(x-4)\dfrac{\sqrt{8x-x^2-7}}{2}-9\arccos\sqrt{\dfrac{x-1}{6}}$.	16	$y=\left(\sqrt{x-4}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot e^{2\sqrt{x-1}}$.
17	$y=\dfrac{1}{x}\sqrt{1-4x^2}+\ln\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}$.	18	$y=xarctgx-\ln\sqrt{1+x^2}$.
19	$y=\dfrac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2}+6\arcsin\dfrac{x}{2}$.	20	$y=x\arcsin\dfrac{1}{x}+\ln\sqrt{1-x^2}$.
21	$y=\dfrac{\sqrt{2+x^2}}{x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2}}{x}$.	22	$y=tg\left(\arccos\sqrt{1-2x^2}\right)$
23	$y=(2+3x)\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{2}arctg\sqrt{x-1}$.	24	$y=\ln\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}\right)$
25	$y=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}$.	26	$y=\dfrac{e^{x^3}}{1+x^3}$.
27	$y=arctg\sqrt{x^2-1}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.	28	$y=\ln tg\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\sin x}$.
29	$y=\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$.	30	$y=arctg\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$.

Задание 3. Найти производные y'_x и y''_{xx} параметрически заданной функции.

1	$x=\sqrt{t-3},\quad y=\ln(t-2).$	2	$x=sht,\quad y=th^2t.$
3	$x=\sqrt{t-1},\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}.$	4	$x=t^2+t,\quad y=\sqrt[3]{t-1}.$
5	$x=\dfrac{\cos t}{1+2\cos t},\quad y=\dfrac{\sin st}{1+2\sin t}.$	6	$x=\sqrt{t^3-1},\quad y=\ln t.$
7	$x=tgt,\quad y=1/\sin 2t.$	8	$x=\sqrt{t-1},\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{t-1}}.$
9	$x=\sqrt{1-t^2},\quad y=\dfrac{1}{t}.$	10	$x=e^t,\quad y=\arcsin t.$
11	$x=8-12\cos\dfrac{\pi t}{3},\quad y=14-16\sin^2\dfrac{\pi t}{6}.$	12	$x=\sin t,\quad y=\sec t.$
13	$x=\cos 2t,\quad y=2\sec^2 t.$	14	$x=\cos t+\sin t,\quad y=\sin 2t.$
15	$x=2(t-\sin t),\quad y=4(2+\cos t).$	16	$x=\cos t,\quad y=\sin^2\dfrac{t}{2}.$
17	$x=t+\sin t,\quad y=2+\cos t.$	18	$x=\cos^2 t,\quad y=tg^2 t.$
19	$x=\cos t,\quad y=\ln\sin t.$	20	$x=-4-\cos\dfrac{\pi t}{3},\quad y=-3\sin^2\dfrac{\pi t}{6}.$
21	$x=4-\sin\dfrac{\pi t}{6},\quad y=-4\cos^2\dfrac{\pi t}{6}.$	22	$x=\sqrt{t},\quad y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}.$
23	$x=8\sin\dfrac{\pi t}{6},\quad y=-6\cos\dfrac{\pi t}{3}.$	24	$x=arcgt,\quad y=\dfrac{t^2}{2}.$
25	$x=6-8\cos\dfrac{\pi t}{6},\quad y=8\sin\dfrac{\pi t}{6}-2.$	26	$x=2-3\cos\dfrac{\pi t}{6},\quad y=9\cos\dfrac{\pi t}{3}+5.$
27	$x=2-\cos\dfrac{\pi t}{6},\quad y=-4-6\cos\dfrac{\pi t}{3}.$	28	$x=4\cos\dfrac{\pi t}{6},\quad y=9\sin\dfrac{\pi t}{6}-4.$
29	$x=\cos t+t\sin t,\quad y=\sin t-t\cos t.$	30	$x=cht,\quad y=\sqrt[3]{sh^2t}.$

Задание 4. **Вычислить** $y'''(x_0)$ **для функции и** x_0.

1	$y = x \cdot \sin^2 x,\ x_0 = 0{,}5\pi.$	2	$y = arctgx,\ x_0 = 1.$
3	$y = \ln(2 + x^2),\ x_0 = 0.$	4	$y = e^x \cos x,\ x_0 = 1.$
5	$y = e^x \sin 2x,\ x_0 = 0.$	6	$y = e^{-x} \cos x,\ x_0 = 0.$
7	$y = (x^2 - 2x)\sin 2x,\ x_0 = \pi.$	8	$y = x^2 \sin 2x,\ x_0 = 0{,}25\pi.$
9	$y = x\ln(1 + x),\ x_0 = 2.$	10	$y = x^2 e^{3x+1},\ x_0 = 0.$
11	$y = \arccos x,\ x_0 = 0{,}5.$	12	$y = (3x + 1) \cdot arctg(x + 3),\ x_0 = 0.$
13	$y = (x^2 - 3x + 1) \cdot \sin x,\ x_0 = 0{,}5\pi.$	14	$y = x^2 \ln(2x + 1),\ x_0 = 1.$
15	$y = e^x \sin 2x,\ x_0 = 0.$	16	$y = x\cos 2x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{12}.$
17	$y = x^4 \ln x,\ x_0 = 1{,}5.$	18	$y = x + arctgx,\ x_0 = 1.$
19	$y = \sqrt{8 - 3x - x^2},\ x_0 = 1.$	20	$y = \ln(x^2 - 4),\ x_0 = 3.$
21	$y = x^2 \cos x,\ x_0 = 0{,}25\pi.$	22	$y = x\arcsin x,\ x_0 = 0{,}5\sqrt{3}.$
23	$y = (x + 1)\ln(1 + x),\ x_0 = -0{,}5.$	24	$y = x^3 \cos 5x,\ x_0 = 0{,}2\pi.$
25	$y = e^{4x} \cos 3x,\ x_0 = 0.$	26	$y = \dfrac{\ln(5 + 2x)}{5 + 2x},\ x_0 = 0.$
27	$y = x \cdot arctgx,\ x_0 = 2.$	28	$y = \ln(5x + x^2),\ x_0 = 2.$
29	$y = (x^2 - 3x + 4)e^{-3x},\ x_0 = 1.$	30	$y = x\sqrt{x^2 - 3},\ x_0 = 2.$

Задание 5. **Записать уравнения касательной и нормали к кривой** $y = y(x)$ **в точке с абсциссой** $x = x_0$.

1	$y = x^2 - 7x + 3,\ x_0 = 1.$	2	$y = x^2 - 16x + 7,\ x_0 = 1.$
3	$y = \sqrt{x - 4},\ x_0 = 8.$	4	$y = \sqrt{x + 4},\ x_0 = -3.$
5	$y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7,\ x_0 = 2.$	6	$y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2,\ x_0 = 1.$
7	$y = x^2 - 6x + 2,\ x_0 = 4.$	8	$y = 0{,}25x^2 - x + 5,\ x_0 = 3.$
9	$y = 0{,}25x^4 - 27x + 6,\ x_0 = 2.$	10	$y = -0{,}25x^2 + 7x - 8,\ x_0 = 3.$

11	$y = 3tg2x + 1,\ x_0 = 0{,}5\pi.$	**12**	$y = 4tg3x + 1,\ x_0 = \frac{\pi}{9}.$
13	$y = 4\sin 6x + 1,\ x_0 = \frac{\pi}{18}.$	**14**	$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + 4,\ x_0 = 1.$
15	$y = 2x^3 - 3x^2 + 7x - 8,\ x_0 = 2.$	**16**	$y = 3x^2 - 4x + 6,\ x_0 = -0{,}5.$
17	$y = \frac{x^3}{3} - \frac{9x^2}{2} + 20x - 7,\ x_0 = -1.$	**18**	$y = \frac{4 + 15x}{5x + 1},\ x_0 = -1.$
19	$y = \sqrt{8 - 3x - x^2},\ x_0 = 1.$	**20**	$y = \sqrt{x^2 + 4x - 1},\ x_0 = 1.$
21	$y = \frac{11 + 4x}{6x + 5},\ x_0 = -\frac{1}{2}.$	**22**	$y = x\sin x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}.$
23	$y = x^3 - 4x^2 + 3x - 1,\ x_0 = 1.$	**24**	$y = x^4 \ln x,\ x_0 = e.$
25	$y = (2x + 1)\ln(x + 2),\ x_0 = 1.$	**26**	$y = 6 - 8x + x^4,\ x_0 = 0{,}5.$
27	$y = \frac{x^2}{1 - x},\ x_0 = 3.$	**28**	$y = \frac{x^3 - x + 1}{x},\ x_0 = -2.$
29	$y = 3x^2 - 5x + 11,\ x_0 = 0{,}75.$	**30**	$y = -7x^2 + 6x + 5,\ x_0 = 0{,}5.$

Задание 6. Решить задачу на экстремум.

1. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна?
2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписать параллелограмм наибольшей площади так, чтобы одна из его сторон лежала на основании, а другая – на боковой стороне треугольника. Найти длины сторон параллелограмма.
3. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на сжатие пропорционально площади этого сечения. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на сжатие было наибольшим?
4. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

5. Требуется сделать коническую воронку с образующей l. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наименьшим?

6. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каково должно быть его основание, чтобы объем тела, полученного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

7. Проволокой, длина которой l метров, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

8. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объема V, причем стоимость $1\,м^2$ материала, из которого изготавливается дно бака, равно p_1 руб., а стоимость $1\,м^2$ материала, идущего на стенки, равна p_2 рублей. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут наименьшими?

9. Бревно длиной 20 *м* имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 *м* и 1 *м*. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которого совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки?

10. С корабля, который стоит на якоре в 9*км* от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15*км* от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком 5*км/час*, на лодке - 4*км/час*. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

11. Из полосы жести шириной 11*см* требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобедренной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 7*см*. Какова должна быть ширина желоба сверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

12. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения на изгиб пропорционально произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы ее сопротивление на изгиб было наибольшим?

13. Стоимость железнодорожной перевозки груза на 1*км* (AB) равна k_1 руб., а автомобильной (PC) - k_2 руб. ($k_2 > k_1$). В каком месте P надо начать строительство шоссе, чтобы доставка груза из пункта A в пункт C была наиболее дешевой? Известно, что $|AB| = a$, $|BC| = b$, $AB \perp BC$.

14. На прямоугольном отрезке AB, соединяющем два источника света: A (силой р) и B (силой q), найти точку M, наименее освещенную, если $|AB| = a$. Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.

15. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? Величина прогиба обратно пропорциональна произведению ширины поперечного сечения и куба высоты.

16. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса H, радиус основания R.

17. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим?

18. Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший.

19. Из полосы жести шириной *30 см* требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину $10 см$. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

20. От канала шириной $32 м$ отходит под прямым углом другой канал шириной $4 м$. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов.

21. Требуется изготовить открытый сверху цилиндрический сосуд максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры сосуда, если на его изготовление имеется $S = 84{,}82\, дм^2$ материала $(S \approx 27\pi)$?

22. Требуется вырыть яму конической формы (воронку) с образующей $a = 3м$. При какой глубине объем воронки будет наибольшим?

23. Канал шириной $a_м$ под прямым углом впадает в другой канал шириной $b_м$. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов.

24. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры бака, если на его изготовление имеется $S = 6\pi \approx 18{,}84 м^2$ материала?

25. Стрела прогиба балки прямоугольного поперечного сечения обратно пропорциональна произведению ширины этого сечения на куб его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, с наименьшей стрелой прогиба?

26. Найти отношение радиуса цилиндра к его высоте, при котором цилиндр имеет при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

27. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

28. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 15 *м*. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

29. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции ее площадь будет наибольшей, если боковые стороны равны b, а меньшее основание - a?

30. На странице книги печатный текст занимает площадь S; ширина верхнего и нижнего полей равна a, а правого и левого - b. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей?

Задание 7. Провести полное исследование функции и построить ее график.

1	$y = \dfrac{x+1}{(x-2)^2}$.	2	$y = x + \ln(x^2 - 4)$
3	$y = \dfrac{4x}{x^2+4}$.	4	$y = x\ln^2 x$.
5	$y = 4 - e^{-x^2}$.	6	$y = \dfrac{4x - x^2 - 4}{x}$.
7	$y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$.	8	$y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

9	$y=\frac{x^2}{x+2}$.	10	$y=x^3e^{-\frac{x^2}{2}}$.
11	$y=\frac{x^2}{x-1}$.	12	$y=\frac{x^2-5}{x-3}$.
13	$y=\frac{x^2-x-1}{x^2-4x}$.	14	$y=\frac{x+3}{(x-3)^2}$.
15	$y=x+\frac{\ln x}{x}$.	16	$y=\frac{(x-3)^2}{x+2}$.
17	$y=(x-1)e^{3x+1}$.	18	$y=\frac{x^3}{x^2+1}$.
19	$y=\frac{x^4}{x^3-1}$.	20	$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.
21	$y=\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.	22	$y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
23	$y=\frac{x}{e^{x^2}}$.	24	$y=e^{2x-x^2}$.
25	$y=\frac{4x^3}{x^2-1}$.	26	$y=\frac{2x^2+4x+2}{2-x}$.
27	$y=-x\ln^2 x$.	28	$y=(x-1)e^{4x+2}$.
29	$y=\frac{4-2x}{1-x^2}$.	30	$y=\frac{x+2}{(x+1)^2}$.

Решение типового варианта АР №2

Теория.

При нахождении производной заданной функции следует пользоваться таблицей производных основных элементарных функций, правилами дифференцирования и теоремой о дифференцировании сложной функции.

Приведем некоторые формулы:

1. $\left(u^n(x)\right)' = n\cdot u^{n-1}(x)\cdot u'(x);$

2. $\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)}\cdot \ln a\cdot u'(x);$

3. $\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)}\cdot u'(x);$

4. $\left(\ln u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)};$

5. $\left(\sin u(x)\right)' = \cos u(x)\cdot u'(x);$

6. $\left(\cos u(x)\right)' = -\sin u(x)\cdot u'(x);$

7. $\left(tg u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)};$

8. $\left(ctg\, u(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)};$

9. $\left(\arcsin u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};$

10. $\left(\arccos u(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}};$

11. $\left(arctg u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)};$

12. $\left(arcctg u(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)};$

13. $\left(ch\, u(x)\right)' = sh\, u(x)\cdot u'(x);$

14. $\left(sh\, u(x)\right)' = ch\, u(x)\cdot u'(x);$

15. $\left(th\, u(x)\right)' = \dfrac{u'(x)}{ch^2 u(x)};$

16. $\left(cth\, u(x)\right)' = -\dfrac{u'(x)}{sh^2 u(x)};$

Правила дифференцирования:

1. $\left(C\cdot u(x)\right)' = C\cdot u'(x);\ C - const;$

2. $\left(u(x)\pm v(x)\right)' = u'(x)\pm v'(x);$

3. $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x)+u(x)v'(x);$

4. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)+u(x)v'(x)}{v^2(x)},\quad v(x)\neq 0.$

Задание 1. Найти производные функций:

а) $y = x + \dfrac{8}{1+e^{x/4}}$;

б) $y = \sin\lg\dfrac{1}{7} + \dfrac{\cos^2 16x}{32\sin 32x}$;

в) $y = -\dfrac{12sh^2x+1}{3sh^3x}$;

г) $y = (3x^2-4x+2)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3} + (3x-2)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{3x-2}$, $3x-2>0$.

Решение:

$$а)\ y' = 1+8\left(\frac{1}{1+e^{x/4}}\right)' = 1+8\cdot\left(-\frac{1}{(1+e^{x/4})^2}\right)\cdot(1+e^{x/4})' = 1-\frac{8}{(1+e^{x/4})^2}\cdot e^{x/4}\cdot\frac{1}{4} =$$

$$= 1-\frac{2e^{x/4}}{1+2e^{x/4}+e^{x/2}} = \frac{1+2e^{x/4}+e^{x/2}-2e^{x/4}}{1+2e^{x/4}+e^{x/2}} = \frac{1+e^{x/2}}{1+2e^{x/4}+e^{x/2}};$$

$$б)\ y' = \left(\sin\lg\frac{1}{7}\right)' + \frac{1}{32}\left(\frac{\cos^2 16x}{2\sin 16x\cdot\cos 16x}\right)' = 0+\frac{1}{64}\left(\frac{\cos 16x}{\sin 16x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{64}(ctg16x)' = \frac{1}{64}\left(-\frac{1}{\sin^2 16x}\right)\cdot 16 = -\frac{1}{4\sin^2 16x};$$

1-й способ:

$$в)\ y' = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{12sh^2x+1}{sh^3x}\right)' = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(12sh^2x+1)'\cdot sh^3x-(12sh^2x+1)\cdot(sh^3x)'}{sh^6x} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{12\cdot 2shx\cdot chx\cdot sh^3x-3sh^2x\cdot chx(12sh^2x+1)}{sh^6x} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{24sh^4x\cdot chx-36sh^4x\cdot chx-3\cdot sh^2x\cdot chx}{sh^6x} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3sh^2x\cdot chx(8sh^2x-12sh^2x-1)}{sh^6x} = \frac{chx\cdot(4sh^2x+1)}{sh^4x}.$$

2-й способ:

$$\text{в) } y' = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{12sh^2x+1}{sh^3x}\right)' = -\frac{1}{3}\cdot\left(12\cdot(shx)^{-1}+(shx)^{-3}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(-12\cdot(shx)^{-2}\cdot chx - 3(shx)^{-4}\cdot chx\right) = \frac{3}{3}chx\left(\frac{4}{sh^2x}+\frac{1}{sh^4x}\right) = chx\cdot\frac{4\cdot sh^2x+1}{sh^4x}.$$

При необходимости следует использовать формулы:

$$ch^2x - sh^2x = 1; \qquad sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x-1); \qquad ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x+1);$$

$$2shx\cdot chx = sh2x; \qquad ch^2x + sh^2x = ch2x.$$

$$\text{г) } y = (3x^2-4x+2)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3} + (3x-2)^4\cdot\arcsin\frac{1}{3x-2}, \quad 3x-2>0.$$

1-й способ:

$$y' = (3x^2-4x+2)'\cdot\sqrt{9x^2-12x+3} + (3x^2-4x+2)\cdot\left(\sqrt{9x^2-12x+3}\right)' +$$

$$+((3x-2)^4)'\cdot\arcsin\frac{1}{3x-2} + (3x-2)^4\cdot\left(\arcsin\frac{1}{3x-2}\right)' =$$

$$= (6x-4)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3} + (3x^2-4x+2)\cdot\frac{1\cdot(18x-12)}{2\cdot\sqrt{9x^2-12x+3}} +$$

$$+4(3x-2)^3\cdot 3\arcsin\frac{1}{3x-2} + (3x-2)^4\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3x-2}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{3}{(3x-2)^2}\right) =$$

$$= (6x-4)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3} + \frac{(3x^2-4x+2)(9x-6)}{\sqrt{9x^2-12x+3}} + 12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2} -$$

$$-\frac{3(3x-2)^2(3x-2)}{\sqrt{(3x-2)^2-1}} = \frac{(6x-4)(9x^2-12x+3)+(3x^2-4x+2)(9x-6)-3(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}} +$$

$$+12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2} =$$

$$= \frac{54x^3-72x^2+18x-36x^2+48x-12+27x^3-18x^2-36x^2+24x+18x-12}{\sqrt{9x^2-12x+3}} -$$

$$-\frac{81x^3-162x^2+108x-24}{\sqrt{9x^2-12x+3}}+12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}=12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}.$$

2-й способ:

$$y=(3x^2-4x+2)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\cdot\arcsin\frac{1}{3x-2},\ 3x-2>0.$$

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x),$$

воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

$$y_1(x)=(3x^2-4x+2)\cdot\sqrt{9x^2-12x+3}=(t+2)\cdot\sqrt{3t+3},\ \textit{где}\ \ t=3x^2-4x.$$

$$y_1'=\left(\sqrt{3t+3}+(t+2)\cdot\frac{3}{2\sqrt{3t+3}}\right)\cdot t_x'=\frac{2(3t+3)+3(t+2)}{2\sqrt{3t+3}}(6x-4)=$$

$$=\frac{(9t+12)\cdot 2(3x-2)}{2\sqrt{3t+3}}=\frac{3(3t+4)\cdot(3x-2)}{\sqrt{3t+3}}=\frac{3(9x^2-12x+4)(3x-2)}{\sqrt{9x^2-12x+3}}=$$

$$=\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}};$$

$$y_2(x)=u^4\cdot\arcsin\frac{1}{u},\textit{где}\ \ u=3x-2>0.$$

$$y_2'(x)=\left(4u^3\cdot\arcsin\frac{1}{u}+u^4\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)\right)\cdot u'=3\left(4u^3\arcsin\frac{1}{u}-\frac{u^3}{\sqrt{u^2-1}}\right)=$$

$$=12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}-\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+4-1}}=2(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}-$$

$$-\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}};$$

Складываем полученные производные:

$$y'(x)=y_1'(x)+y_2'(x)=\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}}+12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2}-$$

$$-\frac{3\cdot(3x-2)^3}{\sqrt{9x^2-12x+3}}=12(3x-2)^3\arcsin\frac{1}{3x-2},\textit{где}\ \ 3x-2>0.$$

Задание 2. Найти дифференциал функции:

$$y=(2+3x)\sqrt{x-1}+\frac{3}{2}arctg\sqrt{x-1}.$$

Решение:

Если $y=f(x)$, то дифференциал этой функции $dy=f'(x)dx$.

$$dy=\left(3\sqrt{x-1}+(2+3x)\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x-1})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{6(x-1)+2+3x}{2\sqrt{x-1}}+\frac{3}{4\sqrt{x-1}\cdot x}\right)dx=\frac{2x(6x-6+2+3x)+3}{4\sqrt{x-1}\cdot x}=$$

$$=\frac{12x^2-8x+6x^2+3}{4x\sqrt{x-1}}dx=\frac{18x^2-8x+3}{4x\sqrt{x-1}}dx.$$

Можно найти дифференциал функции с помощью его свойств, включая свойство инвариантности формы дифференциала:

$$dy=d((2+3x)\sqrt{x-1})+\frac{3}{2}d(arctg\sqrt{x-1})=3dx\cdot\sqrt{x-1}+(2+3x)d\sqrt{x-1}+$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+x-1}\cdot d\sqrt{x-1}=3\sqrt{x-1}\ dx+\frac{2+3x}{2\sqrt{x-1}}\ dx+\frac{3}{2x\cdot 2\sqrt{x-1}}\ dx=$$

$$=\left(3\sqrt{x-1}+\frac{2+3x}{2\sqrt{x-1}}+\frac{3}{4x\sqrt{x-1}}\right)dx=\left(\frac{12x(x-1)+2x(2+3x)+3}{4x\sqrt{x-1}}\right)dx=$$

$$=\frac{18x^2-8x+3}{4x\sqrt{x-1}}dx.$$

Задание 3. Найти производные y'_x и y'_{xx} параметрически заданной функции $x=cht,\ y=\sqrt[3]{sh^2t}$.

Решение:

По определению первой производной для функции, заданной параметрически, получим

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Производная второго порядка определится по формуле

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \quad или \quad y''_{xx}=\frac{1}{x'(t)}\left(\frac{y'(t)}{x'(y)}\right)'=\frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

В нашем случае, имеем

$$\begin{cases} x=cht, \\ y=\sqrt[3]{sh^2t}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=cht, \\ y=(sht)^{2/3}. \end{cases}$$

$$y'_t=\frac{2}{3}(sht)^{-1/3}\cdot cht, \qquad x'_t=sht,$$

$$y'_x=\frac{2/3\,(sht)^{-1/3}\cdot cht}{sht}=\frac{2cht}{3sh^{4/3}t},$$

$$(y'_x)'_t=\frac{2}{3}\left(\frac{cht}{\sqrt[3]{sh^4t}}\right)'=\frac{2}{3}\left(\frac{sht\cdot\sqrt[3]{sh^4t}-cht\cdot\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{sht}\cdot cht}{\sqrt[3]{sh^8t}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{sht}\cdot(sh^2t-4/3\,ch^2t)}{\sqrt[3]{sh^8t}}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{3\sqrt[3]{sh^7t}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{\sqrt[3]{sh^7t}}.$$

$$y''_{xx}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{\sqrt[3]{sh^7t}}:sht=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{\sqrt[3]{sh^7t}\cdot sht}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4ch^2t}{sh^3t\cdot\sqrt[3]{sht}}=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{3sh^2t-4(1+sh^2t)}{sh^3t\cdot\sqrt[3]{sht}}=-\frac{2}{9}\cdot\frac{4+sh^2t}{sh^3t\cdot\sqrt[3]{sht}}.$$

Задание 4. Вычислить $y'''(x_0)$, *если* $y=\sqrt{x^2-3x}$, $x_0=-2;\ x_1=4.$

Решение:

Дифференцируем данную функцию последовательно 3 раза.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-3x}}(x^2-3x)'=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}},$$

$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{x^2-3x}-(2x-3)\cdot\frac{1\cdot(2x-3)}{2\sqrt{x^2-3x}}}{\left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4(x^2-3x)-(2x-3)^2}{(x^2-3x)\cdot 2\sqrt{x^2-3x}}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2-12x-4x^2+12x-9}{\sqrt{\left(x^2-3x\right)^3}}=\frac{9}{4}\cdot\frac{-1}{\sqrt{\left(x^2-3x\right)^3}}=-\frac{9}{4}\left(x^2-3x\right)^{-3/2},$$

$$y'''(x)=-\frac{9}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2-3x\right)^{-5/2}(2x-3)=\left(\frac{3}{2}\right)^3\frac{2x-3}{\sqrt{(x^2-3x)^5}}.$$

При $x=-2$

$$y'''(-2)=\left(\frac{3}{2}\right)^3\frac{2(-2)-3}{\sqrt{((-2)^2-3(-2))^5}}=\left(\frac{3}{2}\right)^3\frac{1}{\sqrt{10^5}}=\frac{27}{8\cdot 100\sqrt{10}}=\frac{27\sqrt{10}}{800\cdot 10}=\frac{27\sqrt{10}}{8000},$$

При $x_1=4,\ y'''(4)=\frac{27}{8}\cdot\frac{8-3}{\sqrt{(16-12)^5}}=\frac{27\cdot 5}{8\cdot 32}=\frac{135}{256}.$

Задание 5. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y=-7x^2+6x+5$ в точке с абсциссой $x=0{,}5$.

Решение:

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$:

$$y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad (f'(x_0)\neq 0).$$

При $f'(x_0)=0$ уравнение нормали имеет вид $x=x_0$. Для нашего случая

$$f'(x)=-14x+6,$$
$$f'(0{,}5)=-14\cdot 0{,}5+6=-1,$$
$$f(0{,}5)=-7(0{,}5)^2+6(0{,}5)+5=\frac{25}{4}.$$

Тогда уравнение касательной: $y-\frac{25}{4}=-1(x-0{,}5)$ или после преобразования $4x+4y-27=0$.

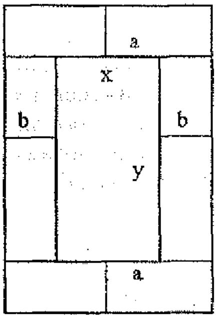
Уравнение нормали: $y-\frac{25}{4}=\frac{1}{-1}(x-0{,}5)$ или $4x-4y+23=0$.

Ответ: $4x+4y-27=0$ и $4x-4y+23=0$.

Задание 6. Текстовые задачи на экстремум.

1. На странице книги печатный текст занимает площадь S. Ширина верхнего и нижнего полей равна a, а правого и левого - b. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей?

Решение:



Обозначим ширину текста через x, а высоту через y; тогда площадь печатного текста

$$S = xy \qquad (*)$$

Площадь всей страницы обозначим через S_1; она равна:

$$S_1 = S + 2a(x+2b) + 2by = (x+2b)\cdot(y+2a).$$

Из (*) $\Rightarrow$, что $y = \frac{S}{x}$, *тогда*

$$S_1(x) = S + 2a(x+2b) + 2b\frac{S}{x}.$$

Исследуем полученную функцию на экстремум:

$$S_1'(x) = 2a - 2b\frac{S}{x^2}.$$

Если $S_1'(x) = 0$, то $2a - \frac{2bS}{x^2} = 0$. Отсюда $x_1 = \sqrt{\frac{bS}{a}}$ - критическая точка.

$$S_1''(x) = -2bS(-2)x^{-3} = \frac{4bS}{x^3},$$

$$S_1''\left(\sqrt{\frac{bS}{a}}\right) = \frac{4bS}{\sqrt{\left(\frac{bS}{a}\right)^3}} = \frac{4\sqrt{a^3}}{\sqrt{bS}} > 0.$$

Т. к. $S_1''(x_1) > 0$, то это означает, что при $x_1 = \sqrt{\frac{bS}{a}}$ функция $S_1(x)$ достигает минимального значения.

$$S_{1_{min}}\left(\sqrt{\frac{bS}{a}}\right) = S + 2a\left(\sqrt{\frac{bS}{a}} + 2b\right) + \frac{2bS}{\sqrt{\frac{bS}{a}}} = S + \sqrt{abS} + 4ab.$$

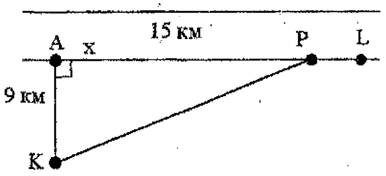
Отношение ширины к высоте текста $\frac{x}{y}$:

$$y=\frac{S}{x}=\frac{S}{\sqrt{\frac{bS}{a}}}=\frac{\sqrt{Sa}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{Sa}{b}};\quad \frac{x}{y}=\frac{\sqrt{\frac{bS}{a}}}{\sqrt{\frac{Sa}{b}}}=\frac{b}{a}.$$

Ответ: $\frac{b}{a}$.

2. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком – 5 км/ч, а на лодке – 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

Решение.



$|AK|=9км,\quad |AL|=15км.$

Пусть гонец пристал к берегу в точке P. Обозначим расстояние AP *через* x. Отрезок пути

$$KP=\sqrt{AK^2+AP^2}=\sqrt{81+x^2}$$

гонец преодолевает на лодке со скоростью 4 км/ч, а отрезок $PL=15-x$ - пешком со скоростью 5км/ч.

Таким образом, время, затраченное на дорогу от корабля до лагеря, будет равно

$$t=\frac{\sqrt{81-x^2}}{4}+\frac{15-x}{5}.$$

Исследуем функцию $t=t(x)$ на экстремум:

$$t'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{5}=\frac{x}{4\sqrt{81+x^2}}-\frac{1}{5}.$$

$$t'(x)=0\Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{81+x^2}}=\frac{1}{5}\Rightarrow 5x=4\sqrt{81+x^2}\Rightarrow 25x^2=16\cdot(81+x^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2=16\cdot 81\Rightarrow x=12.$$

Проверим, достигает ли функция $t(x)$ минимального значения при $x=12$.

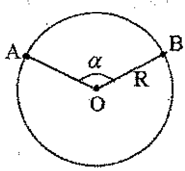
$$t''(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{81+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{81+x^2}}}{81+x^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{81+x^2-x^2}{\left(81+x^2\right)^{3/2}}=\frac{81}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(81+x^2\right)^3}}.$$

Тогда $t'(12)>0$.

Итак, чтобы в кратчайшее время прибыть в лагерь, гонец должен пристать к берегу на расстоянии 3 км от лагеря.

3. Проволокой, длина которой l м, необходимо отгородить клумбу, имеющую форму круглого сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

Решение.



Обозначим радиус круга через R.
Площадь сектора в α радиан

$$S=\frac{1}{2}R^2\alpha.$$

По условию задачи:

$$L_{\cup AB}+OB+OA=l\,м. \text{ Т.к. } L_{\cup AB}=R\alpha, то$$

$$R\alpha+2R=l,$$

тогда

$$\alpha=\frac{l-2R}{R}.$$

Зная α, получим функцию

$$S(R)=\frac{1}{2}\cdot R^2\,\frac{l-2R}{R}=\frac{1}{2}\cdot R(l-2R),$$

которую исследуем на экстремум.

$$S'(R)=\frac{1}{2}(l-2R)-R=\frac{1}{2}l-2R.$$

Если $S'(R)=0,$ то $\frac{1}{2}l-2R$ и $R=\frac{1}{4}l.$

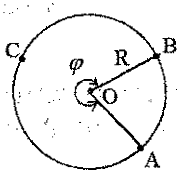
$$S''(R)=-2<0.$$

Т.к. $S''(R)<0$, то при $R=\frac{1}{4}l$ функция $S(R)$ достигает наибольшего значения.

Ответ: $R=\frac{1}{4}\,м.$

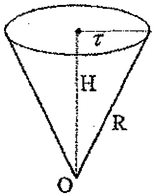
4. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим?

Решение.



Обозначим радиус круга через R. Тогда $L_{\cup ABC}=R\varphi$. Обозначим радиус воронки через r, а высота – через H. Тогда

$$V_{кон.в.}=\frac{1}{3}\pi r^2 H.,где\ H=\sqrt{R^2-r^2}.$$



$L_{\cup ABC}=R\varphi=2\pi r$ – длина окружности конуса. Из последнего равенства $r=\frac{R\varphi}{2\pi}$. Подставляем r и H в формулу объема конуса:

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}\sqrt{R^2-\frac{R^2\varphi^2}{4\pi^2}}=\frac{R^3\varphi^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}.$$

Вводя обе части в квадрат, получим:

$$V^2=\frac{R^6\varphi^4}{24^2\pi^4}(4\pi^2-\varphi^2)=W(\varphi).$$

Функцию $W(\varphi)$ исследуем на экстремум:

$$W'_\varphi=\frac{R^6}{24^2\pi^4}(4\varphi^3(4\pi^2-\varphi^2)+\varphi^4(-2\varphi))=\frac{R^6\varphi^3}{24\cdot 12\pi^4}(8\pi^2-3\varphi^2).$$

$$W'=0\Rightarrow 8\pi^2-3\varphi^2=0;\ \varphi^2=\frac{8}{3}\pi^2;\ \varphi=2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi.$$

$$W''_\varphi=\frac{R^6}{24\cdot 12\pi^4}(3\varphi^2(8\pi^2-3\varphi^2)+\varphi^3(-6\varphi))=\frac{R^6\varphi^2}{24\cdot 4\pi^4}(8\pi^2-5\varphi^2).$$

$$W''\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\right)=\frac{R^6\cdot 4\cdot \cancel{2/3}\pi^2}{24\cdot 4\pi^2}(8\pi^2-5\cdot\frac{4\cdot 2}{3}\pi^2)=\frac{R^6}{36}\left(-\frac{16}{3}\pi^2\right)<0.$$

Это означает, что, при полученном значении $\varphi=2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi$, объем воронки будет наибольшим. Значит, вырезан сектор с углом $2\pi-\varphi$.

Ответ: $2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Задание 7. Провести полное исследование функции и построить ее график $y=\dfrac{x+2}{(x+1)^2}$.

Решение.

1. Областью определения функции является множество

$$x\in(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty);$$

2. Функция не является четной и не является нечетной; т.е. это функция общего вида;

3. Найдем точки пересечения графика с осями координат:

$$x=0,\quad y=\frac{2}{1}=2,\qquad m.A(0;2);$$

$$y=0,\quad x+2=0,\ x=2,\ m.B(-2;0).$$

4. При $x=-1$ функция не существует.

$$\lim_{x\to-1-0}y=\lim_{x\to-1-0}\frac{x+2}{(x+1)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-1+0}y=\lim_{x\to-1+0}\frac{x+2}{(x+1)^2}=+\infty;$$

Значит, $x=-1$ - вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{(x+1)^2x}=0,$$

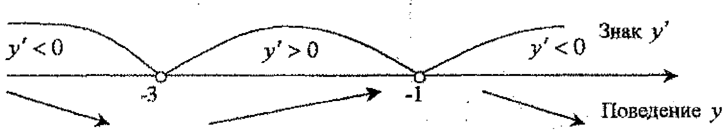
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+2}{(x+1)^2x}=0;$$

$y=0$ – *горизонтальная асимптота.*

5. Исследуем функцию на экстремум:

$$y'=\frac{(x+1)^2-(x+2)\cdot2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{x+1-2x-4}{(x+1)^3}=\frac{-x-3}{(x+1)^3}=-\frac{x+3}{(x+1)^3};$$

из $y'=0$ *следует, что* $x=-3$ – *критическая точка* 1 *рода.*



На интервалах $(-\infty;-3)$ *и* $(-1;+\infty)$ функция убывает; на интервале $(-3;-1))$ возрастает.

На интервалах $(-\infty;-3)$ *и* $(-1;+\infty)$ функция убывает; на интервале $(-3;-1))$ возрастает.

В точке $x=-3$ функция достигает локального минимума:

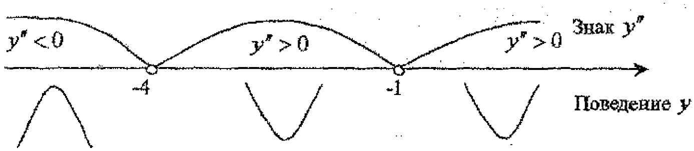
$$y_{\min}(-3)=\frac{-3+2}{(-3+1)^2}=-\frac{1}{4}.$$

6. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и найдем точки перегиба:

$$y''=\frac{(x+1)^3-(x+3)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6}=\frac{(x+1)-3\cdot(x+3)}{(x+1)^4}=\frac{x+1-3x-9}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{-2x-8}{(x+1)^4}=\frac{2(x+4)}{(x+1)^4}.$$

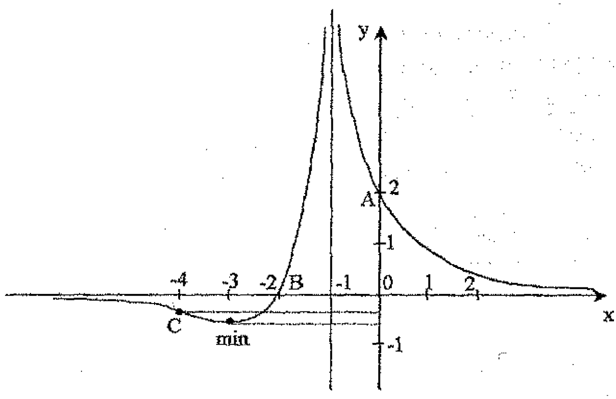
$y''=0 \Rightarrow x=-4$ - критическая точка 2-го рода



На интервалах $(-4;-1)$ *и* $(-1;+\infty)$ - функция вогнутая. На интервале $(-\infty;-4)$ - функция выпуклая.

$$y(-4)=\frac{-4+2}{(-4+1)^2}=\frac{-2}{9}.$$

Точка $C\left(-4;-\frac{2}{9}\right)$ - точка перегиба.



Литература.

1. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. -М., Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. –М., Наука, 1980.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. –М., Наука, 1980.
4. Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. - Мн., Выш. шк., 1982.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. В пяти частях. Часть1.- Мн., Выш. шк., 1992.
6. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. - М., Высш. шк., 1986.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. –М., Наука, 1985.
8. Русак В.М., Шлома Л.І. і інш. Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцый адной зменнай. - Мн., Выш. шк., 1994.
9. Тузік А.І., Тузік Т.А. Асновы лінейнай алгебры і аналітычнай геаметрыі.- Брэст, БрПІ, 1994.
10. Тузік А.І., Тузік Т.А. Уводзіны у матэматычны аналіз. Дыферэнцыяльное злічэнне функцый адной пераменнай. .- Брэст, БрПІ, 1996.
11. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Часть 1. – Мн., Выш. шк., 1988.
12. Гурский Е.И. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. Часть 1. – Мн., Выш. шк., 1989.
13. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. - М., Высш. шк., 1997.
14. Индивидуальные задания по высшей математике. В трех частях. Часть 1/ Под редакцией Рябушко А.П. – Мн., Выш. шк., 2000.
15. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике. В двух частях. Часть 1. – Мн., Выш. шк., 1993.
16. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн., Тетра Системс, 1999-2000.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. –М., Наука, 1968.

Содержание

Учебное издание

Составители:

Тузик Татьяна Александровна
Журавель Мария Григорьевна

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические рекомендации и варианты заданий по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей.

Редактор	Строкач Т.В.
Ответственный за выпуск	Тузик Т.А.
Компьютерный набор	Хвисевич Л.И.
Компьютерная графика	Гладкий И.И.
Технический редактор	Никитчик А.Д.
Корректор	Никитчик Е.В.

Подписано к печати 6.07.02. Формат 60×84/16.
Бумага писч. Усл. печ. л. 3,1. Уч. изд.л. 3,25 Тираж 200 экз. Заказ № 644.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования « Брестский государственный технический университет». 224017, Брест, ул. Московская, 267.