МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

По курсу «*Высшая математика*»

для студентов
электронно-информационных специальностей

I семестр

Брест 2008

УДК 517.9
ББК 22.11

В соответствии с действующей программой для студентов первого курса электронно-информационных специальностей (I семестр) подобраны задачи и упражнения по темам: элементы линейной алгебры; основы аналитической геометрии; пределам числовых последовательностей и функций; дифференциальному исчислению функции одной переменной; векторным функциям скалярного аргумента и комплексным числам. Содержатся краткие теоретические сведения по темам и наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ.

Составители: Копайцёва Т. В., ассистент
Журавель М. Г., ассистент
Швычкина Е. Н., ассистент
Тузик Т. А., доцент.

Рецензент: Шило Т. И., доцент кафедры МА и ДУ БрГУ им. А.С. Пушкина, к. ф.-м. н.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I.	**Элементы линейной алгебры**	**4**
1.1	Определители 2, 3 и 4 порядков	4
1.2	Решение систем линейных уравнений методом определителей. Формулы Крамера	6
1.3	Матрицы. Операции над матрицами. Решение систем матричным способом	8
1.4	Собственные векторы и собственные значения матрицы	11
1.5	Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли. Метод Гаусса решения произвольных систем	13
II	**Основы аналитической геометрии**	**16**
2.1	Векторы в $R_2 (R_3)$. Линейная зависимость и независимость векторов. Скалярное произведение двух векторов	16
2.2	Векторное произведение двух векторов	19
2.3	Смешанное произведение трех векторов	22
2.4	Прямая линия на плоскости	23
2.5	Кривые второго порядка	25
2.6	Плоскость	29
2.7	Прямая линия в пространстве. Прямая и плоскость	31
III	**Введение в математический анализ**	**35**
3.1	Полярная система координат. Построение графиков функций в полярной системе координат	35
3.2	Предел числовой последовательности. Предел функции	37
3.3	Первый и второй замечательные пределы	40
3.4	Другие замечательные пределы	43
3.5	Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функции	44
IV	**Дифференциальное исчисление функции одной переменной**	**49**
4.1	Производная. Основные правила дифференцирования. Таблица производных	49
4.2	Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производная функций, заданных параметрическими уравнениями. Производная неявных функций	53
4.3	Дифференциал функции, его свойства и геометрический смысл. Приближенные вычисления с помощью дифференциала	55
4.4	Производные и дифференциалы высших порядков	57
4.5	Правило Лопиталя раскрытия неопределенных выражений	61
4.6	Формула Тейлора и ее приложения	63
4.7	Полное исследование функции. Построение графика функции	65
4.8	Решение практических задач с применением теории экстремумов	69
V	**Векторные и комплексные функции действительной переменной**	**71**
5.1	Векторная функция скалярного аргумента и ее производная. Кривизна кривой. Уравнения касательной и нормальной плоскости	71
5.2	Комплексные числа. Различные формы их записи. Действия над комплексными числами	74
	Литература	**77**

Элементы линейной алгебры

1.1 Определители 2, 3 и 4 порядков

Определителем второго порядка называется число

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Определителем третьего порядка называется число

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-$$

$$-a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$

Этот способ вычисления определителя называется правилом треугольника.

Отметим некоторые **свойства определителей**:

1. Общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.
2. Если в определителе строка (столбец) нулей, то он равен нулю.
3. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) добавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.
4. Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, *где* M_{ij} – минор элемента a_{ij}.

В определителе третьего порядка минор элемента a_{ij} - это определитель второго порядка, получаемый при вычеркивании i-ой строки и j-ого столбца в основном определителе.

Определители *четвертого и выше порядков* обладают всеми перечисленными свойствами. Для их вычисления применяем свойство 4 о разложении определителя по элементам строки или столбца.

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Вычислим данный определитель двумя способами.

а) Разложим определитель по элементам второй строки:

$$\Delta=2\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}-1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=-2(-12+16-16-10)-3(4-4-24-3)-1(-8+5+36+30+8+6)=44+81-77=48.$$

б) Выполним следующие операции. Элементы четвертой строки умножим на (-3) и сложим с соответствующими элементами первой строки; затем элементы четвертой строки умножим на (-2) и сложим с элементами третьей строки. Получим определитель, равный данному, у которого во втором столбце все элементы, кроме четвертого, будут равны нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 0 & -11 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -7 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель раскладываем по элементам второго столбца.

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} -11 & -11 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 18+30=48.$$

Чтобы получить нули во второй строке, надо сначала элементы третьего столбца умножить на 2 и сложить с элементами первого столбца, а затем умножаем на 3 элементы третьего столбца и складываем с элементами второго столбца.

Задания для аудиторной работы

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$, 2. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$, 3. $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$, 4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, 5. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}$, 7. $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23737 & 23735 & 17417 \\ 23735 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$, 8. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения:

9. $\begin{vmatrix} \sin 8x & \sin 5x \\ \cos 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$; 10. $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; 11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0$.

Решить неравенства:

12. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; 13. $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

Задания для индивидуальной работы

1. Вычислить определитель третьего порядка а) разложив его по элементам i-ой строки; б) получив предварительно нули в i-ом столбце.
2. Вычислить определитель четвертого порядка, предварительно упростив его.

Вариант № 1. 1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -5 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ $i=2$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Вариант № 2. 1. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ $i=3$; 2. $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & -6 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 0 & -4 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Вариант № 3. 1. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ -8 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ $i=1$; 2. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Вариант № 4. 1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 7 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ $i=2$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

1.2 Решение систем линейных уравнений методом определителей. Формулы Крамера

Рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Введем следующие определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}.$$

а) Случай **неоднородной системы** (1) (не все h_i, $i=1,2,3$ равны нулю):

– если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

– если $\Delta=0$, а хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ не равен нулю, то система (1) решений не имеет;

– если все четыре определителя равны нулю, то система имеет бесчисленное множество решений.

б) Случай **однородной системы** (все h_i, $i=1,2,3$ равны нулю):

– если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное (тривиальное) решение $x=0,\ y=0,\ z=0$;

– если $\Delta=0$, то решений у однородной системы бесчисленное множество.

Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то она **совместна**. В противном случае система уравнений **несовместна**.

Задания для аудиторной работы

Решить системы линейных алгебраических уравнений:

1. $\begin{cases} x-2y+4z=-12, \\ 2x+2z=-2, \\ 4x-2y-z=9. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x-y+z=3, \\ -x+3y-2z=2, \\ 4x-7y+5z=-1. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x-y+z=7, \\ -x+3y-2z=-5, \\ x+2y-z=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+2y-4z=0, \\ 3x-y+2z=0, \\ 3x-7y+3z=0. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} -2x+3y-4z=0, \\ 3x-y+3z=0, \\ x+2y-z=0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x+5y-3z+2t=12, \\ 4x-2y+5z+3t=27, \\ 7x+8y-z+5t=40, \\ 6x+4y+5z+3t=41. \end{cases}$

Задания для индивидуальной работы

Решить системы линейных алгебраических уравнений методом определителей.

Вариант № 1.

1. $\begin{cases} x+5y-z=10, \\ 2x-y+2z=4, \\ x-2y+3z=1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x+4y+7z+1=0, \\ -2x+5y-3z-1=0, \\ 5x-6y+11z+3=0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y-z=1, \\ 2x-3y+2z=3, \\ x-5y+3z=2. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x+5y-z=0, \\ 2x+3y-4z=0, \\ x-2y-3z=0. \end{cases}$

Вариант № 2.

1. $\begin{cases} x+2y-4z=-3, \\ x+3y+2z=11, \\ 6x-2y+3z=8. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x-y+z-5=0, \\ x+2y-3z-8=0, \\ 2x-3y+4z-6=0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x+y-2z=2, \\ 2x-2y+2z=4, \\ x+3y-4z=-2. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x-3y-z=0, \\ 5x+2y+4z=0, \\ 7x-y+3z=0. \end{cases}$

Вариант № 3.

1. $\begin{cases} 3x-2y-z=0, \\ 2x+2y-3z=1, \\ x+y-4z=-2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x-y+z+2=0, \\ x+2y+3z+1=0, \\ x-3y-2z-3=0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -2x+y-2z=-5, \\ 2x-4y+z=0, \\ 2x-7y=-5. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 2x-2y+6z=0, \\ -x+4y-3z=0. \end{cases}$

Вариант № 4.

1. $\begin{cases} 3x-2y+2z=6, \\ x+3y-5z=-3, \\ -2x+y+2z=4. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x-y+2z-5=0, \\ 2x-y-z-2=0, \\ 4x-2y-2z+3=0. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y-3z=-4, \\ 2x-y+2z=5, \\ x-2y+5z=9. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x+5y-z=0, \\ 2x+3y-4z=0, \\ x-2y-3z=0. \end{cases}$

1.3 Матрицы. Операции над ними. Обратная матрица. Решение линейных систем матричным способом

Матрицей *порядка m на n* называется прямоугольная таблица чисел или функций, состоящая из m строк и n столбцов.

$$A_{m\times n}=\|a_{ij}\|,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

Матрицы, у которых число строк равно числу столбцов, называются **квадратными.** Если $i=1$, то получаем матрицу – строку, если $j=1$, то имеем матрицу – столбец.

Две матрицы $A=\|a_{ij}\|$ и $B=\|b_{ij}\|$ равны, если у них одинаковые размеры и равные элементы $a_{ij}=b_{ij}$.

Действия над матрицами:

1. Складываются (вычитаются) матрицы одинаковых размеров, причем

$$A\pm B=\|a_{ij}\pm b_{ij}\|\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

2. При умножении матрицы на число все ее элементы умножаются на это число.

$$\lambda\cdot A=\|\lambda\cdot a_{ij}\|\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n},\quad \lambda=const.$$

3. Умножаются матрицы согласованных размеров $A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}=C_{m\times n}$, где

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\dots+a_{ik}\cdot b_{kj}.$$

Произведение матриц (как правило) не перестановочно: $A\cdot B\neq B\cdot A$.
Всегда верно равенство $(AB)C=A(BC)$.

Пример 1. Найти произведения матриц AB и BA, если

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&3\\1&5&8\end{pmatrix}\quad и\quad B=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\\5&0\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}4&-2&3\\1&5&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\\5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8-6+15&16+2+0\\-2+15+40&4-5+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&18\\53&-1\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\\5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-2&3\\1&5&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8+4&4+20&-6+32\\12-1&-6-5&9-8\\20&-10&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&24&26\\11&-11&1\\20&-10&15\end{pmatrix}.$$

В данном случае $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Квадратная матрица называется **невырожденной,** если ее определитель не равен нулю. Для нее существует обратная матрица A^{-1}.

Справедливо равенство $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, E – единичная матрица (это квадратная матрица, у которой по главной диагонали стоят 1, а остальные элементы равны 0).

Если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

где $\det A \neq 0$, A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Пример 2. Записать систему уравнений одним матричным уравнением, решить его, получить решение данной системы.

$$\begin{cases} x+2y-z=-3, \\ 2x-3z=-4, \\ -x+4y+z=-3. \end{cases}$$

Решение. Введем следующие матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений можно записать одним матричным уравнением

$$A \cdot X = B.$$

Считаем определитель матрицы A:

$\Delta(A)=0+6-8-0+12-4=6\neq 0$, $\Rightarrow \exists\ A^{-1}$. Выписываем матричное решение $X=A^{-1}\cdot B$. Чтобы составить обратную матрицу, находим все алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$$A_{11}=(-)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=12, \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-6, \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-6,$$

$$A_{12}=(-)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=(-)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=8, \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=-6, \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4.$$

Запишем обратную матрицу, подставим ее в матричное решение.

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \quad X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & -6 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -36+24+18 \\ -3+0-3 \\ -24+24+12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

отсюда следует, что $x=1$; $y=-1$; $z=2$; получили единственное решение исходной системы *(1; -1; 2)*.

Задания для аудиторной работы

1. Проверить, справедливо ли равенство $(A+B)^2=A^2+2A\cdot B+B^2$ для заданных матриц

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \quad и \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти А+3В, если $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

3. Найти произведения матриц АВ и ВА:

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 7\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 5\\ 2 & 4 & 7\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 6\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$ $A^2=?$

4. Найти $f(A)$, если $f(x)=2x^2-x+5$,

a) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, b) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

5. Для заданных матриц А найти обратные и проверить выполнимость равенств $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, если

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, b) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -8\\ 41 & -36\end{pmatrix}.$$

7. Решить системы линейных уравнений матричным способом:

a) $\begin{cases}x+y-z=0,\\ 2x-5y+2z=-2,\\ 3x-y+2z=7;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+y-z=2,\\ 2x-3y+4z=3,\\ x-5y+2z=-2.\end{cases}$

Задания для индивидуальной работы

1. Найти $A\cdot B-B\cdot A$.
2. Решить систему линейных уравнений матричным методом.
3. Решить матричное уравнение.

Вариант № 1.

1. $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}x+2y-z=1,\\ 2x-3y+2z=3,\\ x-y+2z=2.\end{cases}$

3. $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

Вариант № 2.

1. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 4\\ -4 & 1 & -3\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}3x+y-2z=2,\\ 2x-2y+2z=4,\\ x-4y+2z=1.\end{cases}$

3. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

Вариант № 3.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -3 & 0 & 3\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}-2x+y-2z=-5,\\ 2x-4y+z=0,\\ x-3y+2z=2.\end{cases}$

3. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Вариант № 4.

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ -4 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$. 2. $\begin{cases}x+y-3z=-4,\\ 2x-y+2z=5,\\ x-2y+z=0.\end{cases}$

3. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.

1.4 Собственные векторы и собственные значения матрицы

Дана квадратная матрица $A_{3\times3}$ и матрица – столбец X.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad x^2+y^2+z^2\neq 0.$$

Ненулевой вектор X называется **собственным вектором** матрицы A, если справедливо равенство $A\cdot X=\lambda\cdot X$, λ – собственное значение, соответствующее данному собственному вектору.

Для нахождения собственных значений составляем характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Для каждого действительного корня λ характеристического уравнения решаем однородную систему линейных уравнений относительно x,y,z:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y+a_{13}z=0,\\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y+a_{23}z=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-\lambda)z=0.\end{cases}$$

В результате получим собственные векторы данной матрицы.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение матрицы и его решаем.

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 1 & 0\\ -3 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad (-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}4-\lambda & 0\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

$$(-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)+3(2-\lambda)=0;\qquad \lambda_1=2,\ -4\lambda+\lambda^2+3=0,\ \lambda^2-4\lambda+3=0,$$

$$\lambda_2=1,\quad \lambda_3=3.$$

Составляем однородную систему для координат собственных векторов.

$$\begin{cases}-\lambda x+y=0,\\ -3x+(4-\lambda)y=0,\\ -2x+y+(2-\lambda)z=0.\end{cases}\qquad \lambda_1=2\begin{cases}-2x+y=0,\\ -3x+2y=0,\\ -2x+y=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=0,\\ z\in R,\end{cases}\quad X_1=\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2=1\begin{cases}-x+y=0,\\ -3x+3y=0,\\ -2x+y+z=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x,\\ z=x,\ X_2=\\ x\in R,\end{cases}\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix};\quad \lambda_3=3\begin{cases}-3x+y=0,\\ -3x+y=0,\\ -2x+y-z=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x,\\ z=x,\ X_3=\\ x\in R,\end{cases}\begin{pmatrix}\ \\ 3\\ \ \end{pmatrix}$$

Задания для аудиторной работы

1. Среди векторов X_1, X_2, X_3 найти собственный вектор матрицы A.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\qquad X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\qquad X_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix},\quad b)\ A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix},\quad c)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 5\end{pmatrix},$$

$$d)\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\qquad e)\ B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Задания для индивидуальной работы

Найти собственные векторы и собственные значения данных матриц.

Вариант № 1. 1. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, 2. $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$.

Вариант № 2. 1. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, 2. $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}$.

Вариант № 3. 1. $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, 2. $B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$.

Вариант № 4. 1. $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 6 & 1\end{pmatrix}$, 2. $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

1.5 Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения произвольных линейных систем. Теорема Кронекера – Капелли

Рассмотрим систему из m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Введем матрицы: матрица A системы, матрица X неизвестных и $\overline{A}$ – расширенная матрица.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_m\end{pmatrix},\quad \overline{A}=(A\,|\,B).$$

Систему (1) можно записать одним матричным уравнением $A\cdot X=B$. Если $m\neq n$, то не существует обратная матрица A^{-1} и уравнение нельзя решить матричным способом.

Тогда систему (1) решают методом Гаусса в матричной форме. Выписываем расширенную матрицу системы, с помощью элементарных преобразований приводим ее к треугольной или трапециевидной форме.

Элементарные преобразования матрицы:

1) перестановка строк;

2) умножение элементов строки на число;

3) прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на некоторое число.

Рангом матрицы называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы.

При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Теорема Кронекера – Капелли:

Для того, чтобы система (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы был равен рангу расширенной матрицы.

Пример. Выяснить, совместна ли система уравнений, и, если она совместна, решить ее.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы. С помощью элементарных преобразований получим матрицу, у которой под главной диагональю все элементы равны нулю:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -4 \\ 0 & -10 & 6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Первую строку умножим на -2 и прибавим ко второй, затем первую строку умножим на -3 и прибавим к третьей и первую строку умножим на -4 и прибавим к четвертой. В полученной матрице вторую строку умножим на -2 и сложим с четвертой, а элементы третьей строки поделим на 4.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В третьей матрице элементы третьей строки умножим на -2 и сложим со второй строкой. Вторую строку умножим на -2 и сложим с третьей.

Следовательно, $rang\, A = rang\, \overline{A} = 3$. Система совместна, она равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ -x_2 + x_3 = 1, \\ x_3 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 4 + 3 = 1, \\ x_2 = 3 - 1 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Задания для аудиторной работы

Вычислить ранг матриц:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 2 & 8 & 10 & 0 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Выяснить, совместна ли система уравнений, если она совместна, то найти ее решения.

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -7; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

Задания для индивидуальной работы

1. Найти ранг матрицы.
2. Совместна ли данная система уравнений; если да, найти ее решения.

Вариант № 1. 1. $\begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

Вариант № 2. 1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$

Вариант № 3. 1. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

Вариант № 4. 1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

II. Основы аналитической геометрии

2.1 Векторы в R^2 и R^3. Линейная зависимость и независимость векторов. Скалярное произведение векторов

Вектором называется направленный отрезок или упорядоченная пара (тройка) чисел. Векторы, параллельные одной прямой или лежащие на прямой, называются **коллинеарными**. Векторы, лежащие в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, называются **компланарными**.

Проекцией вектора $\vec{AB}$ на ось Ox называется длина отрезка CD этой оси, заключенного между основаниями перпендикуляров, проведенных из начальной и конечной точек вектора $\vec{AB}$, взятая со знаком плюс, если направление отрезка CD совпадает с направлением оси проекции, и со знаком минус, если эти направления противоположны.

Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью

$$np_{Ox}\vec{AB} = |\vec{AB}|\cdot\cos\alpha.$$

Проекции вектора на координатные оси называются **координатами** вектора: $\vec{a} = (x;y;z)$; $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Линейные операции над векторами: сложение и вычитание векторов, умножение вектора на постоянное число.

Если векторы заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1;y_1;z_1), \vec{b} = (x_2;y_2;z_2)$, то $\vec{a}\pm\vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3, \cdots$, $\vec{a}_m$ называется **линейно зависимой**, если существуют такие постоянные c_1, c_2, c_3, $\cdots$, c_m, одновременно не равные нулю, что имеет место равенство $c_1\cdot\vec{a}_1 + c_2\cdot\vec{a}_2 + \cdots + c_m\cdot\vec{a}_m = 0$. В противном случае система векторов называется **линейно независимой**.

На плоскости любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и наоборот, любые два неколлинеарных вектора линейно независимы.

В пространстве линейно зависимыми являются любые три компланарных вектора. Три вектора, не принадлежащие одной плоскости, будут линейно независимыми.

Базисом в R^2 (R^3) называют два неколлинеарных (три некомпланарных) вектора, взятых в определенном порядке. В качестве базиса будем рассматривать два (три) взаимно перпендикулярных вектора единичной длины: $\vec{i}$, $\vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Тогда $\vec{a} \in R^2$, $\vec{a} = (x;y)$ можно представить разложением по ортогональному базису в виде $\vec{a} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$.

Аналогично $\vec{a} \in R^3$, $\vec{a} = (x; y; z) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

Косинусы углов, которые вектор $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ образует с координатными осями, называются направляющими косинусами этого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин векторов – сомножителей на косинус угла между ними: $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\, \vec{a}$.

Свойства скалярного произведения:

1) коммутативность $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) ассоциативность $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны или хотя бы один из них равен нулю;

4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;

5) дистрибутивность $\quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Если векторы заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то их скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат: $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Механический смысл скалярного произведения. Если материальная точка, на которую действует сила $\vec{F}$, совершает перемещение вдоль вектора $\vec{s}$, то работа A силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения: $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Задания для аудиторной работы

1. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, длины оснований AD и BC которой соответственно равны 4 и 2, а угол $D = 45°$. Найти проекции векторов $\vec{AD}$, $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$ на ось, определяемую вектором $\vec{CD}$.

2. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Вычислить координаты вектора, если его длина равна 2.

3. Даны векторы $\vec{a} = (3; -2; 6)$ и $\vec{b} = (-2; 1; 0)$. Найти координаты векторов: $\quad 2 \cdot \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}; \quad \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}; \quad 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

4. Даны: $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$, $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Вычислить $|\vec{a}-\vec{b}|$.

5. Дано разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{c}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$. Определить разложение по этому же базису вектора $\vec{d}$, параллельного вектору $\vec{c}$ и противоположного с ним направления, при условии, что $|\vec{d}|=75$.

6. Даны три вектора $\vec{p}=(4;\,5;\,1)$, $\vec{q}=(3;\,4;\,1)$, $\vec{r}=(2;\,3;\,2)$. Найти разложение вектора $\vec{a}=(6;\,3;\,4)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\pi/3$; зная, что $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=5$; $|\vec{c}|=8$, вычислить:

$a)$ $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$; $\quad b)$ $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

8.Даны векторы: $\vec{a}=(4;-2;-4)$; $\vec{b}=(6;-3;2)$. Вычислить:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\quad$ 2) $\sqrt{\vec{a}^2}$; $\quad$ 3) $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{b}+3\vec{c})$; $\quad$ 4) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

9. Даны три силы: $\vec{f}_1=(3;-4;\,2)$; $\vec{f}_2=(2;\,3;-5)$; $\vec{f}_3=(-3;-2;\,4)$, приложенные к одной точке. Вычислить работу равнодействующей этих сил, совершаемую при перемещении вдоль отрезка $[M_1M_2]$, $M_1(5;3;-7)$, $M_2(4;-1;-4)$.

10. Даны точки $A(-2;3;-4)$, $B(3;2;5)$, $C(1;-1;2)$, $D(3;2;-4)$. Вычислить проекцию вектора $\vec{AB}$ на направление вектора $\vec{CD}$.

Задания для индивидуальной работы

1. Даны три вектора $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Найти разложение вектора $\vec{a}$ по базису векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

2. Даны три силы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, приложенные к одной точке. Вычислить работу равнодействующей этих сил, совершаемую при перемещении вдоль отрезка $[M_1M_2]$.

3. Даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Найти проекцию вектора $3\vec{a}-2\vec{b}$ на направление вектора $\vec{c}$.

4. Даны вершины треугольника A, B, C. Определить угол при вершине B (α – внутренний угол; β – внешний угол.)

Вариант № 1.

1. $\vec{p}=(-1;\,4;3)$; $\vec{q}=(3;\,2;-4)$; $\vec{r}=(-2;-7;1)$; $\vec{a}=(6;\,20;-3)$.

2. $\vec{f}_1=(2;\,-1;-3)$; $\vec{f}_2=(3;\,2;1)$; $\vec{f}_3=(-4;\,1;3)$; $M_1(-1;4;-2)$, $M_2(2;3;-1)$.

3. $\vec{a}=5\vec{i}-6\vec{j}-4\vec{k}$; $\vec{b}=4\vec{i}+8\vec{j}-7\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{j}-4\vec{k}$.

4. $A(-2;-5;-1)$, $B(-6;-7;9)$, $C(4;-5;1)$. $\alpha=?$

5. Определить, при каком значении параметра m векторы $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ взаимно перпендикулярны?

Вариант № 2.

1. $\vec{p}=(5;7;-2)$; $\vec{q}=(-3;1;3)$; $\vec{r}=(1;-4;6)$; $\vec{a}=(14;9;-1)$.

2. $\vec{f_1}=(3;-2;4)$; $\vec{f_2}=(-4;4;-3)$; $\vec{f_3}=(3;4;2)$; $M_1(1;-4;3)$, $M_2(4;0;-2)$.

3. $\vec{a}=-9\vec{i}+4\vec{k}$; $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k}$.

4. $A(5;2;7)$, $B(7;-6;-9)$, $C(-7;-6;3)$. $\beta=?$

5. Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a}=(2;1;-1)$, при условии, что их скалярное произведение равно 3.

Вариант № 3.

1. $\vec{p}=(1;-3;1)$; $\vec{q}=(-2;-4;3)$; $\vec{r}=(0;-2;3)$; $\vec{a}=(-8;-10;13)$.

2. $\vec{f_1}=(7;3;-4)$; $\vec{f_2}=(3;-2;2)$; $\vec{f_3}=(-5;4;3)$; $M_1(-5;0;4)$, $M_2(4;-3;5)$.

3. $\vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}-4\vec{k}$; $\vec{b}=5\vec{i}-\vec{j}$; $\vec{c}=2\vec{j}+4\vec{k}-3\vec{k}$.

4. $A(7;-1;-2)$, $B(1;7;8)$, $C(3;7;9)$. $\alpha=?$

5. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2;3;-1)$ и $\vec{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=-6$.

Вариант № 4.

1. $\vec{p}=(4;5;1)$; $\vec{q}=(1;3;1)$; $\vec{r}=(-3;-6;7)$; $\vec{a}=(19;33;0)$.

2. $\vec{f_1}=(4;-2;3)$; $\vec{f_2}=(-2;5;6)$; $\vec{f_3}=(7;3;-1)$; $M_1(-3;-2;5)$, $M_2(9;-5;4)$.

3. $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$; $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$; $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$.

4. $A(-7;-6;-5)$, $B(5;1;-3)$, $C(8;-4;0)$. $\beta=?$

5. Даны три вектора $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $\vec{x}\cdot\vec{a}=-5$; $\vec{x}\cdot\vec{b}=-11$; $\vec{x}\cdot\vec{c}=20$.

2.2 Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов с общим началом называется **правой**, если при наблюдении из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден в направлении, противоположном направлении движению часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется левой.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$; перпендикулярный плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; направленный так, чтобы тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ была правой.

Свойства векторного произведения:

1) антикоммутативность $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

2) ассоциативность: $\lambda a\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times\lambda\vec{b}$;

3) дистрибутивность $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Если векторы заданы своими координатами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то их векторное произведение равно

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Механическое приложение векторного произведения. Пусть некоторое твердое тело неподвижно закреплено в точке A, а в точке B этого тела приложена сила $\vec{f}$. В этом случае возникает вращающий момент, численно равный произведению $|\vec{AB}|\cdot|\vec{f}|\cdot\sin\alpha$. В механике его принято называть моментом силы: $\vec{M}=\vec{AB}\times\vec{f}$.

Задания для аудиторной работы

1. Даны длины двух векторов и их скалярное произведение: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$. Найти длину их векторного произведения $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4$, вычислить: *a*) $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$; *b*) $|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|$.

3.Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$, вычислить: *a*) $(\vec{a}\times\vec{b})^2$; *b*) $((2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b}))^2$; *c*) $((3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b}))^2$.

4. Даны векторы $\vec{a}=(3;-1;-2)$ и $\vec{b}=(1;2;-1)$. Найти координаты векторных произведений: *a*) $\vec{a}\times\vec{b}$; *b*) $(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})$; *c*) $(2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$.

5. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины В на сторону АС.

6. Сила $\vec{p}=(2;-4;5)$ приложена к точке $M_1(4;-2;3)$. Определить момент этой силы относительно точки $A(3;2;-1)$.

Задания для индивидуальной работы

1. Даны вершины треугольника. Вычислить его площадь.

2.Сила $\vec{f}$ приложена к точке A .Вычислить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки B.

3. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти координаты векторных произведений:

$a)$ $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b})$; $b)$ $(\vec{a}-\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})$.

Вариант № 1.

1. $A(1;2;0)$, $B(3;0;3)$, $C(5;2;6)$. 2. $\vec{f}=(2;2;9)$, $A(4;2;-3)$, $B(2;4;0)$.

3. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{j}+4\vec{k}$.

4. Даны длины векторов: $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=26$; $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Вариант № 2.

1. $A(3;-1;4)$, $B(2;4;5)$, $C(4;4;5)$. 2. $\vec{f}=(4;2;1)$, $A(3;2;4)$, $B(5;-1;6)$.

3. $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}$.

4. Докажите, что точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ служат вершинами трапеции.

Вариант № 3.

1. $A(1;2;0)$, $B(3;0;-5)$, $C(5;2;6)$. 2. $\vec{f}=(4;2;-3)$, $A(2;-3;1)$, $B(0;-1;2)$.

3. $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$ и $\vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$.

4. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $c(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину.

Вариант № 4.

1. $A(7;-1;-2)$, $B(1;7;8)$, $C(3;7;9)$. 2. $\vec{f}=(1;2;-1)$, $A(-1;4;-2)$, $B(2;3;-1)$.

3. $\vec{a}=-7\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$.

4. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=5$, вычислить длину их векторного произведения.

2.3 Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов называется число, которое получится, если первые два вектора перемножить векторно и результат скалярно умножить на третий вектор: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ по модулю численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях. Оно положительно, если тройка векторов правая, и отрицательно, если она левая.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

2. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

3. Круговая перестановка трех сомножителей смешанного произведения не меняет его значения. Перестановка же двух соседних сомножителей меняет знак произведения на противоположный.

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}=-(\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a})=-(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b})=-(\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c})$.

Выражение смешанного произведения через координаты векторов-сомножителей. Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то смешанное произведение равно определителю

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Задания для аудиторной работы

1. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}|=6$; $|\vec{b}|=3$; $|\vec{c}|=3$, вычислить смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

2. Доказать тождество $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}+\vec{a})=2(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})$.

3. Доказать, что четыре точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежат в одной плоскости.

4. Даны вершины пирамиды: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Задания для индивидуальной работы

1. Установить, компланарны ли векторы?

2. Вычислить объем и высоту пирамиды, вершины которой находятся в точках A, B, C, D.

3. Выяснить, правой или левой будет тройка заданных векторов.

Вариант № 1.

1. $\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(1;9;-11)$.
2. $A(1;3;2)$, $B(5;2;-1)$, $C(5;5;6)$, $D(2;2;4)$.
3. $\vec{a}=(3;4;0)$, $\vec{b}=(0;-4;1)$, $\vec{c}=(0;2;5)$.

Вариант № 2.

1. $\vec{a}=(3;-2;1)$, $\vec{b}=(2;1;2)$, $\vec{c}=(3;-1;2)$.
2. $A(-5;-4;8)$, $B(2;3;1)$, $C(4;1;-2)$, $D(6;3;7)$.
3. $\vec{a}=(1;1;0)$, $\vec{b}=(1;-1;0)$, $\vec{c}=(0;2;0)$.

Вариант № 3.

1. $\vec{a}=(2;-1;2)$, $\vec{b}=(1;2;-3)$, $\vec{c}=(3;-4;7)$.
2. $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.
3. $\vec{a}=(1;1;0)$, $\vec{b}=(0;-3;1)$, $\vec{c}=(3;2;5)$.

Вариант № 4.

1. $\vec{a}=(-1;-2;6)$, $\vec{b}=(-2;-1;2)$, $\vec{c}=(1;-1;4)$.
2. $A(2;0;4)$, $B(0;3;7)$, $C(0;0;6)$, $D(4;3;5)$.
3. $\vec{a}=(1;1;0)$, $\vec{b}=(0;-4;-1)$, $\vec{c}=(0;-2;-3)$.

2.4 Прямая линия на плоскости

Выпишем различные виды уравнений прямой линии на плоскости:

1. l: $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой, вектор $\vec{n}=(A;B)$ перпендикулярен прямой и называется ее нормальным вектором.

2. l: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – уравнение прямой с нормальным вектором $(A;\ B)$, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$.

3. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ –уравнение прямой «в отрезках».

4. $y=k\cdot x+b$ –уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=tg\varphi$, $\varphi=(Ox,l)$.

5. $y-y_0=k(x-x_0)$:(k –угловой коэффициент, $M_0(x_0;y_0)\in l$).

6. $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \end{cases}$ - параметрические уравнения прямой, где $\vec{s}=(m;n)$– направляющий вектор прямой, параметр $t\in R$.

7. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Углом между двумя прямыми, если они заданы общими уравнениями, называется угол между их нормальными векторами:

$$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0; \qquad l_2: A_2x+B_2y+C_2=0; \qquad \cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|},$$

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности этих прямых: $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Условие параллельности: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.

Для прямых, заданных уравнениями $l_1: y=k_1x+b_1; l_1: y=k_2x+b_2$, угол определяется по формуле $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Условие параллельности: $k_2=k_1$; условие перпендикулярности: $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$ определяется по формуле $d=\dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Задания для аудиторной работы

1. По данным уравнениям построить в системе координат прямые, найти их угловые коэффициенты: $a)$ $5x-3y+15=0$; $b)$ $2x-y+3=0$; $c)$ $3x-y=0$.

2. Луч света направлен по прямой $2x-3y-12=0$; дойдя до оси абсцисс, он от нее отражается. Определить точку встречи луча и оси абсцисс, составить уравнение отраженного луча.

3. Через точку $M(2;-1)$ провести прямую а) параллельно; б) перпендикулярно прямой $2x+3y=0$.

4. Найти точку, симметричную точке $P(-8;12)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(2;-3)$ и $B(-5;1)$.

5. Даны вершины треугольника $A(2;-2)$, $B(3;-5)$, $C(5;1)$. Составить уравнение а) медианы (BD); б) перпендикуляра, опущенного из вершины С на биссектрису внутреннего угла при вершине В.

6. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y-1=0$ и $4x-3y+5=0$.

7. Две стороны квадрата лежат на прямых $4x-3y+15=0$ и $8x-6y+25=0$. Вычислить площадь квадрата.

8. Точка M(-4; 5) является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x-y+8=0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

9. На прямой $x+y-8=0$ найти точки, равноудаленные от точки (2; 8) и от прямой $x-3y+2=0$.

10. Даны прямая $2x+y-3=0$ и точка A(-2; 3). Через точку A провести прямую под углом в $45°$ к данной прямой.

Задания для индивидуальной работы

Даны вершины треугольника A, B и C. Найти: 1) уравнение стороны (AB); 2) уравнение высоты (CH); 3) уравнение медианы (AM); 4) точку пересечения медианы (AM) и высоты (CH); 5) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне (AB); 6) расстояние от точки C до прямой (AB); 7) уравнение биссектрисы внутреннего угла B; 8) центр масс данного треугольника; 9) его площадь.

Вариант № 1. A(2; 5), B(-3; 1), C(0; 4).

Вариант № 2. A(-5; 1), B(8; -2), C(1; 4).

Вариант № 3. A(1; -3), B(0; 7), C(-2; 4).

Вариант № 4. A(7; 0), B(1; 4), C(-8;- 4).

2.5 Кривые второго порядка

Уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ определяет **окружность радиуса** R с центром в точке $C(x_0;y_0)$.

Эллипс с полуосями a и b $(a>b)$ с центром в начале координат, с фокусами $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, $b^2=a^2-c^2$ $(a>c)$, определяется каноническим уравнением вида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}$ характеризует его вытянутость вдоль оси фокусов. Уравнения директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, это прямые, перпендикулярные оси фокусов. Для эллипса эксцентриситет – число дробное $0<\varepsilon<1$. Если $\varepsilon=1$, $a=b$, то получаем частный случай эллипса – окружность: $x^2+y^2=a^2$.

Уравнение эллипса с осями симметрии, параллельными координатным осям, с центром в точке $C(x_0;y_0)$ имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Задания для аудиторной работы

1. Составить уравнение окружности с центром в точке С(-1; 2), проходящей через точку А(2; 6).

2. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис эллипса: $a)\ 16x^2+25y^2=400;$ $b)\ 16x^2+y^2=16.$

3. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

а) его малая ось равна 24, расстояние между фокусами равно 10;

б) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 0,6;

в) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5.

4. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

$a)\ 4x^2+3y^2-8x+12y-32=0;$ $\quad b)\ y=1-\dfrac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2};$

$c)\ x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}.$

Построить кривые в системе координат.

Каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью a, мнимой полуосью b, с центром в начале координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b^2=c^2-a^2\quad (c>a),\quad F_1(-c;0),\quad F_2(c;0).$$

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}>1$, характеризует вытянутость основного прямоугольника гиперболы. Директрисы гиперболы – прямые, перпендикулярные оси фокусов: $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, уравнения асимптот: $y=\pm\dfrac{b}{a}x.$

Сопряженная гипербола с действительной полуосью b определяется уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Уравнение гиперболы с осями симметрии, параллельными координатным осям, с центром в точке $C(x_0;y_0)$ имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox, имеет каноническое уравнение $y^2=2px$, где параметр параболы $p>0$ равен расстоянию от фокуса параболы $F(0{,}5p;0)$ до директрисы $(x=-0{,}5p$, эксцентриситет параболы равен 1.

Если осью симметрии параболы служит ось Oy, то уравнение параболы имеет вид $x^2=2p\cdot y$ $(p>0)$, $F(0;\ 0{,}5p)$, уравнение директрисы $y=-0{,}5p$.

Уравнение параболы с осью симметрии, параллельной одной из координатных осей, определяется по формулам:
$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ *или* $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$, $C(x_0;y_0)$ – координаты вершины параболы.

Отметим **замечательное свойство всех кривых второго порядка:** Отношение расстояния от любой точки М кривой до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей выбранному фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету кривой, т. е.

$$\frac{r}{d} = \varepsilon.$$

При $\varepsilon = 0$ получаем окружность, при $\varepsilon \in (0;1)$ – эллипс, при $\varepsilon = 1$ – параболу, при $\varepsilon > 1$ – гиперболу.

Задания для аудиторной работы

1. По каноническому уравнению гиперболы найти ее полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис:

a) $16x^2 - 9y^2 = 144$; *b*) $16x^2 - 9y^2 = -144$. Сделать рисунок.

2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что: а) действительная полуось $a = 4$, эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}25$;

б) ее фокусы лежат на оси Oy, расстояние между ними равно 20, а действительная ось равна 16;

в) ее асимптоты заданы уравнениями $y = \pm 0{,}5x$ и расстояние между фокусами равно 10.

3. Составьте уравнение параболы, если известно, что:

а) она симметрична относительно оси Ox, проходит через точку A(6; -2), а вершина лежит в начале координат;

б) она симметрична относительно оси Oy и проходит через точки O(0; 0) и B(4; -8).

4. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

a) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$; *b*) $2y^2 - 12y - x + 14 = 0$;

c) $x = -4 + 3\sqrt{y+5}$; *d*) $y = 7 - 1{,}5\sqrt{x^2 - 6x + 13}$;

e) $x = 5 - 0{,}75\sqrt{y^2 + 4y - 12}$; *f*) $y = -5 + \sqrt{-3x - 21}$.

Изобразите эти линии в системе координат.

Задания для индивидуальной работы

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы. A, B – точки, лежащие на кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, ε – эксцентриситет кривой, $y = \pm k \cdot x$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, 2c – фокусное расстояние.

2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке А.

3. Составить уравнение линии, каждая точка которой удовлетворяет заданным условиям.

4. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями. Изобразить их на чертеже.

Вариант № 1.

1. *а*) $b=7$, $F(13;0)$; *б*) $b=4$, $F(-11;0)$; *в*) $D: x=13$.

2. Правый фокус гиперболы $57x^2-64y^2=3648$; $A(2;8)$.

3.Отстоит от прямой $x=-7$ на расстоянии в три раза меньшем, чем от точки А(3; 1).

4. *а*) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$; *b*) $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$; *c*) $y=3-4\sqrt{x-1}$.

Вариант № 2.

1. *а*) $A(-3;0)$, $B(1;\frac{\sqrt{40}}{3})$; *б*) $k=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{15}}{3}$; *в*) $D: y=4$.

2. Левый фокус эллипса $13x^2+49y^2=837$; $A(1;8)$.

3.Отстоит от прямой $x=2$ на расстоянии в пять раз большем, чем от точки А(4; -3).

4. *а*) $2x^2+5y^2+8x-10y-17=0$; *b*) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$; *c*) $x=2-\sqrt{6-2y}$.

Вариант № 3.

1. *а*) $\varepsilon=\frac{5}{6}$, $A(0;-\sqrt{11})$; *б*) $A(\sqrt{\frac{32}{3}};1)$, $B(\sqrt{8};0)$; *в*) $D: y=-3$.

2. В(3; 4); А – вершина параболы $y^2=0{,}25(x+7)$.

3.Отстоит от прямой $x=-1$ на расстоянии в четыре раза большем, чем от точки А(1; 5).

4. *а*) $x^2-6y^2-12x+36y-48=0$; *b*) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{-x^2+6x+16}$; *c*) $x=-5\sqrt{-y}$.

Вариант № 4.

1. *а*) $2a=30$; $\varepsilon=\frac{17}{15}$; *б*) $k=\frac{\sqrt{17}}{8}$; $2c=18$; *в*) *ось симм.* Oy, $A(4;-10)$.

2.Фокусы гиперболы $4x^2-5y^2=20$, $A(0;-6)$.

3. Отношение расстояний от точки М до точек А(3; -5) и В(4; 1) равно 0,25.

4. *а*) $x^2-8x+2y+18=0$; *b*) $x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$; *c*) $y=\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$.

2.6 Плоскость

Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz+D=0$, где $\vec{n}=(A;B;C)$ – нормальный вектор плоскости, причем выполняется условие $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Существуют различные способы задания плоскости, выпишем соответствующие им уравнения:

1. уравнение плоскости с известным нормальным вектором $\vec{n}=(A;B;C)$ и точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)\in$ плоскости: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;

2. уравнение плоскости в «отрезках»: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$;

3. уравнение плоскости по трем заданным точкам $M_i(x_i;y_i;z_i)$, $(i=1,2,3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Углом между двумя плоскостями α: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и β: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ называется угол между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности данных плоскостей: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$ *или* $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Условие параллельности плоскостей: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$.

Расстояние от точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Задания для аудиторной работы

1. Построить плоскости, заданные уравнениями:

a) $5x+2y+3z-15=0$; *b*) $3x+2y-6=0$; *c*) $3z-9=0$; *d*) $3x-z=0$.

2. Даны точки $M_1(3;0;4)$ *и* $M_2(5;6;9)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $M_1(3;-1;4)$, $M_2(5;2;6)$, $M_3(2;3;-3)$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1;2;3)$ и перпендикулярной к плоскостям $x-y+z-7=0$, $3x+2y-12z+5=0$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $P(2;-3;-2)$.

6. Составить уравнение плоскости, походящей через точку $N(2;-1;1)$ перпендикулярно к линии пересечения двух плоскостей: $3x-y-z+1=0$ и $x=y+2z+1=0$.

7. Вычислить объем куба, две грани которого лежат на плоскостях $4x+3y-12z-10=0$ и $4x+3y-12z+3=0$.

8. Составить уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы, образованные двумя пересекающимися плоскостями $5x-2y+5z-3=0$ и $2x+y-7z+2=0$.

9. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

a) $3x+y-5z-12=0$ и $2x+6z-3=0$;

b) $2x-3y+z+8=0$ и $4x-6y-3z-7=0$;

c) $5x+2y-3z-5=0$ и $10x+4y-6z+5=0$;

d) $3x+7y+z+4=0$ и $9x+21y+3z+12=0$.

Задания для индивидуальной работы

Вариант № 1.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(-3;1;-2)$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $C(3;4;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=(3;1;-1)$ и $\vec{b}=(1;-2;1)$.

3. При каком значении параметра С плоскости $3x-5y+Cz-3=0$ и $x-3y+2z+5=0$ будут перпендикулярны ?

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку А(3; -4; 1) параллельно координатной плоскости xOz.

Вариант № 2.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $A(-3;1;-2)$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ 1;\ 1)$ и $M_2(2;\ 3;\ 4)$ перпендикулярно к плоскости $2x-7y+5z+9=0$.

3. Вычислить угол между плоскостями $x-2y+2z-3=0$ и $3x-4y+5=0$.

4. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку М(2; -3; -4) и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой длины.

Вариант № 3.

1.Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(7;-3;5)$ параллельно координатной плоскости xOz.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точки $M(2;1;2)$ и $N(1;-2;3)$.

3. Найти расстояние между плоскостями $3x-6y+2z+35=0$ и $3x-6y+2z-7=0$.

4. При каком значении параметра B плоскости $x-4y+z-1=0$ и $2x+By+10z-3=0$ будут перпендикулярны?

Вариант № 4.

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $M(4;0;-2)$ и $N(5;1;7)$ параллельно оси Ox.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-3;5)$ параллельно плоскости $3x+y-4z+1=0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;-1;2)$ и $B(2;1;4)$ параллельно вектору $\vec{a}=(5;-2;-1)$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;3;-1)$ и $B(1;1;4)$ перпендикулярно плоскости $x-4y+3z+2=0$.

2.7 Прямая линия в пространстве. Прямая и плоскость

1. Общие уравнения прямой. Прямая в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

2. Канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где (x_0,y_0,z_0) – координаты точки, лежащей на прямой; $\vec{s}=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой.

3. Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \quad t\in R \text{ – параметр.} \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$

4. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

5. Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Тогда величина угла между ними определяется как величина угла между их направляющими векторами

$$\cos\varphi=\cos(\vec{s}_1,\vec{s}_2)=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_1^2}}.$$

Условие параллельности прямых: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

6. Необходимое и достаточное условие компланарности двух прямых записывают в виде

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

7. Расстояние от точки M_1 до прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, заданной каноническими уравнениями, находят по формуле $d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$.

8. Расстояние между скрещивающимися прямыми

$$d=|(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2)|/|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|.$$

9. Угол между прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости: $Am+Bn+Cp=0$.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$.

10. При выполнении условий $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$ прямая лежит в плоскости.

Задания для аудиторной работы

1. Построить прямую в системе координат $\begin{cases} x+3y+3z-6=0, \\ 3x+3y+4z-10=0. \end{cases}$

2. Привести к каноническому виду общие уравнения кривой
$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

3. Найти уравнение проекции прямой $\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-7}$ на плоскость $2x-y-3z+6=0$.

4. Проверить, лежат ли прямые в одной плоскости:

$a)\ \begin{cases} 2x-3z+2=0, \\ 2y-z-6=0; \end{cases}$ u $\begin{cases} x-12z+49=0, \\ 4y-37z+148=0; \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x=3z-1, \\ y=-5z+7 \end{cases}$ u $\begin{cases} y=2x-5, \\ z=7x+2. \end{cases}$

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(2;-3;4)$ перпендикулярно прямым $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$ u $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{3}$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(4;-3;1)$ параллельно прямым $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-3}$ u $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-4}{2}$.

7. Найти проекцию точки $A(1;-3;2)$ на плоскость $6x+3y-z-41=0$.

8. Установить взаимное расположение данной прямой и данной плоскости:

$a)\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{1},\qquad 3x-y+2z+5=0;$

$b)\ \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-1}{2},\qquad 4x+2y+z+24=0;$

$c)\ \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z+5}{2},\qquad 4x+y-z=0.$

9. Найти расстояние от точки $A(1;3;5)$ до прямой $\dfrac{x+30}{6}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2{,}5}{-1}$.

10. Вычислить кратчайшее расстояние между прямыми
$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+1}{-2}$ u $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Задания для индивидуальной работы

1. Даны четыре точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$; $A_2(x_2;y_2;z_2)$; $A_3(x_3;y_3;z_3)$; $A_4(x_4;y_4;z_4)$.
Составить уравнения: а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;
в) прямой A_4M, перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$;
г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;
д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить: е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
ж) косинус угла между плоскостью Оху и плоскостью $A_1A_2A_3$.

Вариант № 1.

1. $A_1(0;4;5)$, $A_2(3;-2;-1)$, $A_3(4;5;6)$, $A_4(3;3;2)$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку А(3; 4; 0) и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

Вариант № 2.

1. $A_1(2;-1;7)$, $A_2(6;3;1)$, $A_3(3;2;8)$, $A_4(2;-3;7)$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

Вариант № 3.

1. $A_1(2;1;7)$, $A_2(3;3;6)$, $A_3(2;-3;9)$, $A_4(1;2;5)$.

2. Доказать параллельность прямых

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1} \quad и \quad \begin{cases} x-2y+2z-8=0, \\ x+6z-6=0. \end{cases}$$

Вариант № 4.

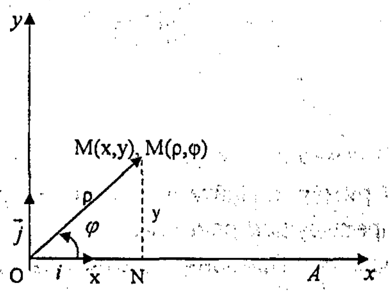
1. $A_1(2;1;6)$, $A_2(1;4;9)$, $A_3(2;-5;8)$, $A_4(5;4;2)$.

2. Доказать перпендикулярность прямых

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{6} \quad и \quad \begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$$

III Введение в математический анализ

3.1 Полярная система координат. Построение графиков функций в полярной системе координат



Положение некоторой точки *M* на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат *Oxy* определяется числами *x* и *y*, т.е. $M(x;y)$. Эту точку можно задать и другим способом, например, с помощью расстояния $\rho=|\overline{OM}|$ и угла φ, отсчитываемого против хода часовой стрелки от оси *Ox*, называемой **полярной осью**, до радиус-вектора $\overline{OM}$. В этом случае используется запись $M(\rho;\varphi)$. Расстояние ρ называется **полярным радиусом**, φ **– полярным углом** точки *M*, а точка *O* – **полюсом.** Для полюса считают $\rho=0$. Полярный угол имеет бесконечное множество значений, главным значением его называют значение, удовлетворяющее условию $0\le\varphi\le 2\pi$.

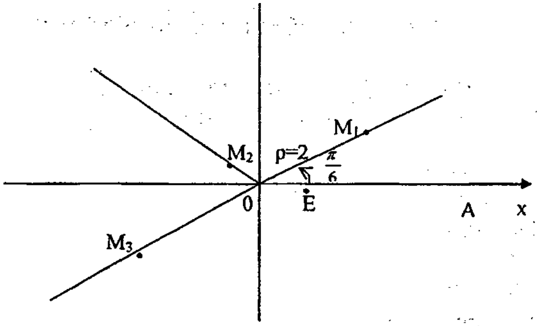
При соответствующем выборе прямоугольной декартовой и полярной систем координат связь между *x*, *y* и полярными ρ, φ координатами точки M при указанном расположении осей Ox и Oy, вектора $\overline{OM}$ и угла φ выражается формулами:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}, \quad \rho\ge 0,\ 0\le\varphi\le 2\pi;$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

с помощью которых по декартовым координатам точки *M* легко найти её полярные координаты. Вышеприведённые формулы дают также возможность переходить от уравнений линий, заданных в декартовых координатах, к их уравнениям в полярных координатах, и наоборот.

Пример 1. Построить точки, заданные полярными координатами $M_1(2;\frac{\pi}{6})$, $M_2(1;\frac{3\pi}{4})$, $M_3(3;\frac{5\pi}{4})$.



Решение. Сначала проведём луч под углом φ к полярной оси Ox, затем на построенном луче отложим от полюса O отрезок длины ρ. В итоге найдём точки M_1, M_2, M_3 (отрезок OE определяет единицу длины).

Пример 2. Найти декартовы координаты точек M_1, M_2, M_3, заданных в предыдущем примере.

Решение. Применяя соответствующие формулы, получим: $M_1(\sqrt{3};1)$, $M_2(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$, $M_3(-\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2})$.

Пример 3. Записать уравнение линии $\rho^2 = 8\sin^2 2\varphi$ в декартовых координатах.

Решение. Так как $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, данное уравнение можно переписать в виде: $\rho^2 = 32\sin^2\varphi\cos^2\varphi$ и заменить ρ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ их выражениями из соответствующих формул. Отсюда получим:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 32\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2, \quad \text{или} \quad \left(x^2+y^2\right)^2 = 32x^2y^2.$$

Задания для аудиторной работы

Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах. Записать их в декартовых координатах:

1. $\rho = 5$; 2. $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 3. $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда);

4. $\rho = 4\cos\varphi$; 5. $\rho = 6\sin\varphi$; 6. $\rho\cos\varphi = 2$;

7. $\rho\sin\varphi = 1$; 8. $\rho = \frac{4}{1-\cos\varphi}$ (парабола);

9. $\rho = a(1-\cos\varphi)$ (кардиоида);

10. $\rho = 2^{\varphi}$, $\rho = (1/2)^{\varphi}$ (логарифмические спирали);

11. $\rho = a\sin 3\varphi$ (трёхлепестковая роза);

12. $\rho = a\sin 2\varphi$ (четырёхлепестковая роза);

13. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

Составить в полярных координатах уравнения следующих линий:
14. прямой, перпендикулярной к полярной оси и отсекающей на ней отрезок, равный 4;
15. прямых, параллельных полярной оси и отстоящих от неё на расстоянии 6;
16. окружности радиуса $R=5$ с центром на полярной оси, проходящей через полюс;
17. окружности радиуса $R=3$, касающейся полярной оси в полюсе.

Задания для индивидуальной работы

Решаете свой вариант аттестационной работы № 1.

3.2 Предел числовой последовательности. Предел функции

Пусть даны два числовых множества D и E. Если каждому значению переменной $x \in D$ по определенному правилу ставится в соответствие одно значение переменной $y \in E$, то говорят, что на множестве D задана функция $y=f(x)$. Где $D(f)$ – область определения функции, $E(f)$ – область значений функции. Степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции называются основными элементарными функциями.

Функция, областью определения которой является множество N натуральных чисел, называется функцией целочисленного аргумента или последовательностью и обозначается $x_n = f(n)$

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, $n \in \mathrm{N}$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует порядковый номер $N=N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n \geq N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда пишут $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется **сходящейся**, в противном случае-**расходящейся**.

Число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x \to a$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Число b называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to \infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M = M(\varepsilon)$, что из неравенства $|x| > M$ следует неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то функция $y=f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то функция $y=f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$. Число $x \to a$ может быть конечным или бесконечным.

Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$, а также произведение бесконечно малой функции при $x \to a$ на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$.

Основные теоремы о пределах

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = B$, то

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)\pm v(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = A \pm B$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)\cdot v(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} v(x) = A\cdot B$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)} = \dfrac{A}{B},\ \ B\neq 0.$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = (\lim\limits_{x\to x_0} u(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)} = A^B$;

Если условия этих теорем не выполняются, то возникают так называемые неопределенные выражения вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^∞, ∞^0. В этих случаях, прежде чем переходить к пределу, выражение надо преобразовать.

Будем пользоваться тем, что для всех основных элементарных функций в любой точке x_0 из области определения справедливо равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x) = f(x_0)$.

Справедливы следующие формулы: $\lim\limits_{x\to\infty} cx = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x} = \infty$ (где c – постоянная)

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4+3x^2+1}$.

Решение. Очевидно, в данном случае возникает неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, для ее раскрытия делим числитель и знаменатель на старшую степень x, т. е. x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4+3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Несложно доказать следующий результат

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0} = \begin{cases} 0, & \text{если } n<m;\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{если } n=m;\\ \infty, & \text{если } n>m.\end{cases}$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ надо сократить на множитель, дающий 0, т.е. на x. Избавимся от иррациональности, умножим числитель и знаменатель на $(2+\sqrt{x+4})$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(2+\sqrt{x+4})}{(2-\sqrt{x+4})\cdot(2+\sqrt{x+4})}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(2+\sqrt{x+4})}{4-x-4}=-\lim_{x\to 0}(2+\sqrt{x+4})=-4.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

Решение. Неопределенность $\infty-\infty$ сводим к одной из следующих неопределенностей $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$. Приведем дроби к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-3.$$

Задания для аудиторной работы

Записать последовательности и найти их пределы при $n\to\infty$

1. $x_n=\frac{(-1)^n n}{n+1}$; 2. $x_n=\frac{8\cos n(\pi/2)}{n+4}$; 3. $\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n^2)}{n+1}$.

4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

Найти пределы функций

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+6x-5x^2}{x^3+x^2+1}$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(5+x)^2-(1+2x^2)^2}{(x^2-2x^3)x}$; 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$; 9. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; 10. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$; 12. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-3x}$; 13. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x}-9}$;

14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; 15. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$; 16. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$;

17. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$; 18. $\lim\limits_{x\to -0.5}\left(\frac{x^3}{4x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$; 19. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$

Задания для индивидуальной работы

1-5. Найти пределы следующих функций.

Вариант № 1.

$1.\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^3-1}{x-3x-x^3};$ $\quad 2.\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1};$ $\quad 3.\ \lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{\sqrt{x}-3};$

$4.\ \lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-10x+24}{x^2-7x+6};$ $\quad 5.\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^3-1}\right).$

Вариант № 2.

$1.\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x-4x^2}{3x^2+x-1};$ $\quad 2.\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^4-4x}{3x^2+11x-1};$ $\quad 3.\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3};$

$4.\ \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+4x+3};$ $\quad 5.\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

Вариант № 3.

$1.\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n^2+4n-6}{2n^2+2};$ $\quad 2.\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1000x+3x^2}{x^2-16};$ $\quad 3.\ \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5};$

$4.\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2+5x+6};$ $\quad 5.\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$

Вариант № 4.

$1.\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$ $\quad 2.\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+6x-5x^2}{x^3+x^2-1};$ $\quad 3.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}};$

$4.\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x-12};$ $\quad 5.\ \lim\limits_{x\to 6}\left(\dfrac{3}{(3x-18)x}-\dfrac{1}{x^2-5x-6}\right).$

3.3. Первый и второй замечательные пределы

При вычислениях пределов используются следующие два предела:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел (x есть радианная мера угла).

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ – второй замечательный предел

Пример 1. Найти пределы а) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg2x}$.

Решение.

а) Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ воспользуемся формулами приведения $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{x-\pi}=-\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=-1.$

б) Выражение $\frac{\sin x}{x}$ представляет собой произведение ограниченной функции $y=\sin(x)$ и бесконечно малой $y=\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$. Таким образом по утверждению из пункта 3.1 выражение $\frac{\sin x}{x}$ есть бесконечно малая функция при $x\to\infty$. Значит $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

в) Преобразуем выражение под пределом

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x\cdot\cos 2x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cos 2x}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\cos 2x=\frac{3}{2}.$$

При нахождении пределов степенно-показательных функций воспользуемся следующими положениями:

1. если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=B$, то $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=(\lim\limits_{x\to x_0}u(x))^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}=A^B$

2. Если $A\neq 1$, $B=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)^{v(x)}=\begin{cases}+\infty, & если\ A>1,\\ 0, & если\ 0<A<1.\end{cases}$

3. Если $A\neq 1$, $B=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)^{v(x)}=\begin{cases}0, & если\ A>1,\\ \infty, & если\ 0<A<1.\end{cases}$

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, тогда возникает неопределенность вида 1^∞, которую раскрывают с помощью второго замечательного предела. При этом полагают функцию $u(x)=1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\cdot v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot v(x)}$.

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+6}\right)^x$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x+6}\right)^x=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-2x+6)+6x-3}{x^2-2x+6}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{6x-3}{x^2-2x+6}\right)^{\frac{x^2-2x+6}{6x-3}}\right\}^{\frac{6x-3}{x^2-2x+6}\cdot x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(6x-3)x}{x^2-2x+6}}=e^6.$$

Задания для аудиторной работы

Найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; 4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

5. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}$; 6. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{tg\pi x}{x+2}$; 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^x$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2-x}$; 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8+6x}{3+x}\right)^{5-7x}$; 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x-1}$; 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-1}\right)^{3x^2-5}$;

13. $\lim\limits_{x\to2}(5-2x)^{\frac{1}{4-x^2}}$; 14. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(tgx)^{tg2x}$; 15. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)^{x+2}$; 16. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;

17. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$; 18. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$.

Задания для индивидуальной работы

1-5. Найти пределы.

Вариант № 1.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$; 2. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sin(x-3)}{x^3-27}$; 3. $\lim\limits_{x\to\pi}(3+\sin x)^{tg\frac{x}{2}}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$; 5. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tgx}$;

Вариант № 2.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(2x-2)}{x^2-7x+6}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{6x}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{16x^2}$; 5. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

Вариант № 3.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{4\sin x}{\pi-x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\pi}(3+\cos x)^{ctgx}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$; 5. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tg^2x}$;

Вариант № 4.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{1-3x}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$; 5. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

3.4 Другие замечательные пределы

При нахождении пределов полезно знать следующие равенства

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e;\qquad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\qquad \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Задания для аудиторной работы

Найти пределы

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin x}$; 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x)}{5x}$; 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-1}{x}$; 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{8x}$;

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$; 8. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x\sqrt{x})}{e^{x^2}-1}$;

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; 11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{arctg\,x-x^2}$; 12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{2x}$;

13. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\log_4(x-2)}{2^x-8}$; 14. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$.

Задания для индивидуальной работы

1-5. Найти пределы.

Вариант № 1.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x^3)}{x^3}$; 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+\sin 5x}{\arcsin 3x}$; 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$;

Вариант № 2.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{tg(x-1)}{x\sqrt{x}-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx+tg3x}{arctgx}$; 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{3x}-5^x}{\ln(1-2x)}$;

Вариант № 3.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x-\ln(x+1)}{x+1}$; 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{arctg 2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$;

Вариант № 4.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\cos\left(\dfrac{\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}\right)$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$; 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x\arcsin x}$; 4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{\log_3(1+2x)}$;

3.5 Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функции

Чтобы сравнить две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$, находят предел их отношения

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C.$$

1. Если $C\neq0,\neq\infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного и того же порядка, пишут $\beta(x)=O(\alpha(x))$ при $x\to a$.

2. Если $C=0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$, пишут $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to a$.

3. Если $C=\infty$, то $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to a$.

4. Если $C=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$ называются эквивалентными (равносильными) величинами: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C$ $(0<|C|<\infty)$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка *k* по сравнению с $\beta(x)$ при $x\to a$.

Примеры эквивалентных бесконечно малых функций

1. $\sin ax \sim ax, \quad x \to 0$	6. $\ln(1+ax) \sim ax, \quad x \to 0$
2. $tgax \sim ax, \quad x \to 0$	7. $x^a - 1 \sim a(x-1), \quad x \to 1$
3. $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \to 0$	8. $(1+x)^a - 1 \sim ax, \quad x \to 0$
4. $a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \to 0$	9. $\arcsin \alpha x \sim \alpha x, \quad x \to 0$
5. $e^{ax} - 1 \sim ax, \quad x \to 0$	10. $arctg\, \alpha x \sim \alpha x, \quad x \to 0$

Если отношение двух бесконечно малых функций имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых функций ей эквивалентной.

Аналогичным образом можно сравнивать и бесконечно большие функции.

Пример 1. Вычислить пределы а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\, x}{\sin \frac{x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x^2}$.

а) Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$, т. е. отношения двух бесконечно малых функций, воспользуемся таблицей эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{arctg\, x}{\sin \frac{x}{2}} = \begin{bmatrix} arctg\, x \sim x & \\ \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} & x \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{x}{2}} = 2.$$

$$б) \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + (\cos x - 1))}{x^2} = \begin{bmatrix} \ln(1+t) \sim t, \quad t \to 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1) = 0 \end{bmatrix} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}, \\ x \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если:

1) она определена в точке a и ее окрестности;
2) существует предел функции $f(x)$ в точке x_0;
3) этот предел равен значению функции в точке x, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x = x_0$, если она определена в этой точке и ее окрестности и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

Если функция $y=f(x)$ на разных интервалах области своего определения задана различными аналитическими выражениями, то при нахождении пределов в граничных точках, надо искать односторонние пределы. Если $x<x_0$ и $x\to x_0$, то пишут $x\to x_0-0$, аналогично если $x>x_0$ и $x\to x_0$, то $x\to x_0+0$. Число $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ ($f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$) называется **пределом слева (справа)** функции $f(x)$ в точке x_0. Если эти пределы существуют, то они называются **односторонними**. Можно определить, что значение функции в точке непрерывности есть

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x).$$

Все основные элементарные функции непрерывны в области своего определения.

Точка $x=x_0$ называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если нарушено хотя бы одно из условий непрерывности. Различают следующие виды разрыва.

Точка $x=x_0$ называется **точкой устранимого разрыва**, если $f(x_0)$ не существует, а $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$ (т. е. $f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0)$). Точка $x=x_0$ называется **точкой разрыва первого рода** (неустранимый разрыв), если $f(x_0)$ не существует, а $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ конечны, но не равны между собой. При этом $h=f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется **скачком функции** в точке x_0. Если $f(x_0)$ не существует, хотя бы один из односторонних пределов равен $+\infty$ или $-\infty$ или вообще не существует, то точка $x=x_0$ – **точкой разрыва второго рода**.

Пример 2. Исследовать функцию на непрерывность.

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & \textit{если} \quad x<-2; \\ \dfrac{x^2-4}{2}, & \textit{если} \quad -2\le x<0; \\ \sin x, & \textit{если} \quad x\ge 0. \end{cases}$$

Решение. Функция определена на всей числовой оси $D(y)=R$. На интервалах: $(-\infty,-2)$ $y=x+2$ – непрерывна как линейная;

$(-2,0)$ $y=\dfrac{x^2-4}{2}$ – степенная;

$(0,+\infty)$ $y=\sin x$ – синусоида.

Функции непрерывны, т. к. они элементарные. Остается исследовать только точки $x=-2$ и $x=0$, при переходе через которые меняется аналитическое задание функции.

$x=-2,\quad f(-2)=0,\quad \lim\limits_{x\to -2}f(x)=?$

Найдем односторонние пределы

$\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-2-0}(x+2)=-2+2=0;\ \lim\limits_{x\to-2+0} f(x)=\dfrac{(-2)^2-4}{2}=0.$

Они равны, т. о. $x=-2$ точка непрерывности.

Аналогично и для точки $x=0$, $f(0)=0$ и $\lim\limits_{x\to0-0} f(x)=\dfrac{0-4}{2}=-2$, $\lim\limits_{x\to0+0} f(x)=\sin 0=0$.

Функция $f(x)$ в точке $x=0$ непрерывна справа и односторонние пределы не равны, следовательно, точка нуль – это точка разрыва первого рода со скачком, равным $h=f(0+0)-f(0-0)=0-(-2)=2$.

Задания для аудиторной работы

1. Сравнить бесконечно малые функции

а) $\alpha(x)=\dfrac{3x^4-4}{x+1}$, $\beta(x)=x^3$, $x\to0$. б) $\alpha(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $\beta(x)=1-\sqrt[3]{x}$, $x\to1$.

в) $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^4+2x^3}$, $\beta(x)=\ln(1+x)$, $x\to0$.

Найти пределы, используя таблицу эквивалентных бесконечно малых функций

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\sin\pi(x+4)}$; 3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos\frac{3x}{2}}-1}$; 4. $\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{(x-2\pi)^2}{tg(\cos x-1)}$; 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$.

Исследовать функции на непрерывность в области ее определения

6. $y=\begin{cases} x+4, & \text{если}\quad x<-1; \\ x^2+2, & \text{если}\quad -1\le x<1; \\ 2x, & \text{если}\quad x\ge1. \end{cases}$ 7. $y=\dfrac{x^3+x}{|x|}$;

Найти односторонние пределы при $x\to0$.

8. $y=ctgx$; 9. $y=arcctg\,\dfrac{1}{x}$; 10. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

Задания для индивидуальной работы

1-2. Сравнить бесконечно малые функции.

3-4. Найти пределы.

5. Найти односторонние пределы для функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$.

6. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график.

Вариант № 1.

1. $\alpha(x)=1-\cos^3 x$, $\beta(x)=\sin^2 x$, $x\to0$; 2. $\alpha(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\to\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 6x}{\pi-x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\ln x}$;

5. $y=arctg\dfrac{1}{x}$, $x=0$; 6. $y=\begin{cases}-x, & \text{если} \quad x\le 0;\\ \sin x, & \text{если} \quad 0<x\le\pi;\\ x-2, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$

Вариант № 2.

1. $\alpha(x)=\sqrt{1+x^3}-1$, $\beta(x)=x$, $x\to 0$. 2. $\alpha(x)=\dfrac{arctgx}{x^2+1}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x\to\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$; 4. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\ln tgx}{\cos 2x}$;

5. $y=5^{\frac{1}{x}}$, $x=0$; 6. $y=\begin{cases}-x^2, & \text{если} \quad x\le 0;\\ tgx, & \text{если} \quad 0<x\le\pi/4;\\ 4x-3, & \text{если} \quad x>\pi/4.\end{cases}$

Вариант № 3.

1. $\alpha(x)=1+\sin^3 x$, $\beta(x)=\cos^2 x$, $x\to\dfrac{\pi}{2}$. 2. $\alpha(x)=\dfrac{x^3+1}{x^4}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\to\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-3}{\ln x}$;

5. $y=tg\,x$, $x=\dfrac{\pi}{2}$; 6. $y=\begin{cases}-2x, & \text{если} \quad x\le 0;\\ \sqrt{x}, & \text{если} \quad 0<x<4;\\ e^{x/4}, & \text{если} \quad x\ge 4.\end{cases}$

Вариант № 4.

1. $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+x^2}-1$, $\beta(x)=x^2$, $x\to 0$. 2. $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{x^4}$, $x\to\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctg(x^2-2x)}{\sin\pi x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x^3})}{e^{x^2}-1}$;

5. $y=2^{\frac{3}{x}}$, $x=0$; 6. $y=\begin{cases}\cos x, & \text{если} \quad x\le 0;\\ x^2+1, & \text{если} \quad 0<x<1;\\ x, & \text{если} \quad x\ge 1.\end{cases}$

IV. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

4.1 Производная. Основные правила дифференцирования. Таблица производных

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, значения x_1 и x_2 принадлежат этому промежутку, $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$ – соответствующие значения функции. Тогда разность $\Delta x=x_2-x_1$ называется приращением аргумента, а разность $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$ – приращением функции на отрезке $[x_1; x_2]$.

Производной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее произвольным образом стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y' \quad \text{или} \quad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрически производная представляет собой **угловой коэффициент касательной** к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x,f(x))$:

$y'(x)=k=tg\alpha$, α – угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox в точке $M(x,f(x))$.

Производная есть **скорость изменения функции** $y=f(x)$ в точке x.

Процесс отыскания производной функции называется ее **дифференцированием.**

Основные правила дифференцирования

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – функции, имеющие производные, C=const, тогда

1. $C'=0$; 2. $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$; 3. $(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

4. $(Cu(x))'=Cu'(x)$; 5. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$; 5_a. $\left(\frac{u(x)}{C}\right)'=\left(\frac{1}{C}u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{C}$;

6. Правило дифференцирования сложной функции: если $f(u)$ и $u=u(x)$ дифференцируемые функции,

$y=f(u(x))$, т.е. $y=f(u)$, $u=u(x)$, то $y'(x)=f'(u)\cdot u'(x)$.

Здесь x – основной аргумент, u – промежуточный или вспомогательный аргумент.

Таблица производных основных элементарных функций

1. $\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}, \alpha\in R$; 2. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3. $\left(\sqrt[4]{x}\right)'=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$;

4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; 5. $(\sin x)' = \cos x$; 6. $(\cos x)' = -\sin x$;

7. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 8. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; 9. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

10. $(e^x)' = e^x$; 11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$; 12. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 15. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;

16. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$; 17. $(shx)' = chx$; 18. $(chx)' = shx$;

19. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$; 20. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.

Задание 1. Найти производные следующих функций:

1. $y = x^5 + 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{5}{2}} + x^{-3} - 4$; 2. $y = x^2 \ln x$; 3. $y = (1+3x)(x-x^3)$;

4. $y = 5e^x \sin x - 3e^x \cos x$; 5. $y = \frac{\arcsin x}{x}$; 6. $y = \frac{1+x-x^2}{1-x-x^2}$;

7. $y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x} + 4\ln e$.

Рассмотрим **правило 6** дифференцирования сложных функций.

Если в заданой сложной функции выделить последовательность основных элементарных функций, ее составляющих, то нетрудно найти производную любой сложной функции, причем промежуточных аргументов может быть несколько.

Пример 1. Найти производные функций *а)* $y = 10^{3x-5}$; *б)* $y = arctg\sqrt{x}$; *в)* $y = \cos^3(8-5x^2)$.

а) Представим данную функцию в виде $y = 10^u$, $u = 3x-5$.

Тогда производная функции по аргументу x будет равна

$y' = (10^u)'_u \cdot (3x-5)' = 10^u \ln 10 \cdot 3 = 3\ln 10 \cdot 10^{3x-5}$.

б) $y = arctgu$, $u = \sqrt{x}$; $y' = (arctgu)'_u \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$.

в) $y = u^3$, $u = \cos v$, $v = 8-5x^2$;

$y' = 3u^2 \cdot (-\sin v) \cdot (-10x) = 30x \cdot \cos^2(8-5x^2) \cdot \sin(8-5x^2)$.

Пример 2. Найти угол между двумя кривыми $y = 3x^2$ *и* $y = x^3 + 3x^2 - 8$ в точке их пересечения.

Решение. Угол между кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ в их общей точке $M_0(x_0,y_0)$ определяется как угол между двумя касательными к этим кривым в точке M_0 и вычисляется по формуле:

$$tg\varphi=\frac{f_2'(x_0)-f_1'(x_0)}{1+f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}.$$

Находим точку пересечения данных кривых, для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y=3x^2, \\ y=x^3+3x^2-8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x^2, \\ x^3-8=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+2x+4)=0, \\ y=3x^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=12. \end{cases} \Rightarrow M_0(2;12).$$

Находим угловые коэффициенты касательных к кривым при $x=2$.

$y_1'=6x,\quad y_1'(2)=12=k_1;\quad y_2'=3x^2+6x,\quad y_2'(2)=24=k_2.$

По формуле $tg\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ находим

$$tg\varphi=\frac{24-12}{1+12\cdot 24}=\frac{12}{289}=0{,}042,\quad \varphi\approx 2{,}38^\circ.$$

Задание для аудиторной работы

Найти производные сложных функций

8. $y=tg^2 3x$, 9. $y=(e^{2x}+\cos x)^3$, 10. $y=\sqrt[3]{x^2+6x-1}$, 11. $y=\sqrt[4]{1-x^5}$,

12. $y=\arccos^2 x$, 13. $y=(arctg\frac{2}{x})^6$, 14. $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, 15. $y=\ln\sin x$

16. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})$, 17. $y=\dfrac{5x-1}{\ln^2 x}$, 18. $y=3^{\ln x}$, 19. $y=e^{-x}(\sin 2x-4\cos 2x)$,

20. $y=\sin(e^{x^3})$, 21. $y=e^{arctg\sqrt{4x-1}}$, 22. $y=arcctg(3x^4)\cdot\ln^3\dfrac{1}{x}$,

23. $y=tg\ln e^{2\sqrt{x}}$, 24. $y=x^2\cdot\sin x\cdot\sqrt{1+e^x}$, 25. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$, 26. $y=\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\cos 2x}$.

Запишем таблицу дифференцирования сложных элементарных функций. Пусть функция $u=u(x)$ имеет производную.

1. $(u^\alpha(x))'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}(x)\cdot u'(x);$ 2. $\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}};$

3. $\left(\sqrt[4]{u(x)}\right)'=\dfrac{1}{4\cdot\sqrt[4]{u^3(x)}}\cdot u'(x);$ 4. $\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)'=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)};$

5. $(\sin u(x))' = \cos u(x)\cdot u'(x)$; 6. $(\cos u(x))' = -\sin u(x)\cdot u'(x)$;

7. $(tgu(x))' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$; 8. $(ctgu(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$; 9. $(a^{u(x)})' = a^{u(x)}\cdot\ln a\cdot u'(x)$;

10. $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}\cdot u'(x)$; 11. $(\log_a u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}\log_a u(x)$; 12. $(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$;

13. $(\arcsin u(x))' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$; 14. $(\arccos u(x))' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$;

15. $(arctgu(x))' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$; 16. $(arcctgu(x))' = -\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$;

17. $(sh\, u(x))' = ch\, u(x)\cdot u'(x)$; 18. $(chu(x))' = sh\; u(x)\cdot u'(x)$;

19. $(thu(x))' = \dfrac{u'(x)}{ch^2 u(x)}$; 20. $(cthu(x))' = -\dfrac{u'(x)}{sh^2 u(x)}$.

Задания для индивидуальной работы

1.-5. Найти производные следующих функций.

6. Найти угол между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения.

7. Найти угловой коэффициент касательной к линии $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

Вариант № 1.

1. $y = \sin\sqrt[5]{x^3} + \cos\dfrac{3}{x^2}$, 2. $y = \dfrac{\sqrt{\cos 3x^2}}{x^3+4x+1}$, 3. $y = arctg^3(4-x^4)$,

4. $y = \ln^5(ctg6x + \sin^3 x)$, 5. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\dfrac{x}{2}$;

6. $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_2(x) = x^2$; 7. $f(x) = \sqrt{3x^3 - x^2 - 5}$, $x_0 = 2$.

Вариант № 2.

1. $y = arctg\sqrt{2+x^3} - \ln\dfrac{4}{x}$, 2. $y = e^{\arccos\frac{1}{x}}$, 3. $y = \ln^2(x + \sqrt[4]{x-3})$,

4. $y = \dfrac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}}$, 5. $y = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$.

6. $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_2(x) = x^3$; 7. $f(x) = \sqrt[5]{(2x^2-4x^3)^4}$, $x_0 = 1$.

Вариант № 3.

1. $y=\dfrac{10^{\sqrt{x}}}{\arcsin 2x}$, 2. $y=(1-x-x^2)e^{\frac{x-1}{2}}$, 3. $y=(tg^3\dfrac{1}{x})\cdot 5^{-arctgx}$,

4. $y=e^{2x}+e^{-x^2}$, 5. $y=\ln\dfrac{\sqrt{4tgx+1}-2\sqrt{tgx}}{\sqrt{4tgx+1}+2\sqrt{tgx}}$.

6. $f_1(x)=3x^2$, $f_2(x)=1-x^2$; 7. $f(x)=1-e^{\sin^2 3x}\cdot\cos^2 3x$, $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

Вариант № 4.

1. $y=ctg\sqrt{\dfrac{x}{1+x^3}}$, 2. $y=(\cos^4\dfrac{1}{x})\cdot 6^{-\sqrt{x}}$, 3. $y=\ln\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^4}$,

4. $y=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 5. $y=\ln\cos arctg\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

6. $f_1(x)=\dfrac{2}{x}$, $f_2(x)=1+x^2$; 7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{5+x}$, $x_0=1$.

4.2 Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производная функций, заданных параметрическими уравнениями. Производная неявных функций

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$$(\ln f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Предварительное логарифмирование упрощает дифференцирование функций, содержащих операции умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня.

Пример 1. Найти производную степенно-показательной функции

$$y=(tgx)^{\cos x}.$$

Логарифмируем, получим $\ln y=\ln(tgx)^{\cos x}$, $\ln y=\cos x\cdot\ln tgx$. Дифференцируем обе части равенства по x:

$$\frac{y'}{y}=(\cos x)'\cdot\ln tgx+\cos x\cdot(\ln tgx)'; \qquad \frac{y'}{y}=(-\sin x)\cdot\ln tgx+\cos x\cdot\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$y'=y(-\sin x\cdot\ln tgx+\frac{1}{\sin x})=(tgx)^{\cos x}(-\sin x\cdot\ln tgx+\frac{1}{\sin x}).$$

Если функция $y(x)$ задана **параметрическими уравнениями**

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases} \quad \text{то} \quad y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{dy}{dx}.$$

Пример 2. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$, если $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 4. \end{cases}$

Находим $x'(t) = 3t^2 + 3 = 3(t^2 + 1)$, $\quad y'(t) = 15t^4 + 15t^2 = 15t^2(t^2 + 1)$,

значит, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{15t^2(t^2+1)}{3(t^2+1)} = 5t^2$, $\quad \begin{cases} y'_x = 5t^2, \\ x = t^3 + 3t + 1. \end{cases}$

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет одну или несколько так называемых **неявных функций** $y = y(x)$. Считаем, что эти функции дифференцируемы. Дифференцируем обе части уравнения по x, получаем относительно y' уравнение первой степени, из него выражаем производную.

Пример 3. Найти y'_x из уравнения $x^3 + \ln y - x^2 \cdot e^y = 0$.

Берем производную по x от обеих частей уравнения, получим

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - 2xe^y - x^2 e^y \cdot y' = 0, \qquad y'(\frac{1}{y} - x^2 e^y) = 2xe^y - 3x^2.$$

Отсюда следует, что производная равна $y' = \dfrac{(2xe^y - 3x^2) \cdot y}{1 - x^2 y e^y}$.

Задания для аудиторной работы

Найти производную функций, применив правило логарифмического дифференцирования.

1. $y = \dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$; 2. $y = \dfrac{4x-1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 2}}$; 3. $y = \dfrac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$;

4. $y = (\sin x)^{x^3}$; 5. $y = (ctgx)^{\sqrt{1-x}}$.

Найти производную y'_x функций, заданных параметрически.

6. $\begin{cases} x = t^3 - t, \\ y = t^2 + t; \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = t^{-2}; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

Найти производную $y' = \dfrac{dy}{dx}$ от неявных функций.

9. $\ln y + \dfrac{x}{y} = x + y$; 10. $(x+y)^3 = 27(x-y)$ *в точке* $M(2;1)$; 11. $y\cos\dfrac{y}{x} = e^{xy}$.

Задания для индивидуальной работы

1. – 4. Найти производные следующих функций.

Вариант № 1.

1. $y = \dfrac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$; 2. $y = x^{\cos^2 x}$; 3. $\begin{cases} x = e^{t^2+2t}, \\ y = \ln(t^2 - 2t); \end{cases}$ 4. $y^2 = x + \ln\dfrac{y}{x}$.

Вариант № 2.

1. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(1-x)^6\sqrt[3]{4x+1}}$; 2. $y=(tgx)^{\ln x}$; 3. $\begin{cases} x=t^2e^t, \\ y=arctg^2 3t; \end{cases}$ 4. $e^y-e^{-x}+xy=0$.

Вариант № 3.

1. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{(x+2)^2\sqrt[3]{3x+2}}$; 2. $y=(\ln(x+1))^{2x}$; 3. $\begin{cases} x=tgt, \\ y=(\sin 2t)^{-1}; \end{cases}$ 4. $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

Вариант № 4.

1. $y=\dfrac{(2x+4)^2\sqrt{x+3}}{(x+4)^3}$; 2. $y=(\cos x)^{\frac{x}{x+2}}$; 3. $\begin{cases} x=\ln\cos t, \\ y=\ln^2\sin t; \end{cases}$ 4. $xy=arctg\dfrac{x}{y}$.

4.3 Дифференциал функции, его свойства и геометрический смысл. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Дифференциалом функции $y=f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента. Дифференциалом аргумента называется приращение этого аргумента: $dx=\Delta x$.

Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента: $dy=f'(x)dx=y'dx$.

Геометрически дифференциал функции представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M(x,y)$.

Основные свойства дифференциала:

1. $dC=0$, $C-const$; 2. $d(Cu(x))=Cdu(x)$; 3. $d(u(x)\pm v(x))=du(x)\pm dv(x)$;

4. $d(u(x)\cdot v(x))=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$; 5. $d(\dfrac{u}{v})=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$, $v=v(x)\neq 0$;

6. $d(f(u))=f'(u)du$, где $u=u(x)$.

Если приращение аргумента Δx мало по абсолютной величине, то $\Delta y\approx dy$ и получаем **формулу для приближенных вычислений** с помощью дифференциала $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Пример 1. Сравнить приращение и дифференциал функции $y=2x^3+5x^2-3x+1$ в точке $M_0(1;5)$.

Решение. Составляем приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=2(x+\Delta x)^3+5(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+1-(2x^3+5x^2-3x+1)$.

По условию $x=1$.

$$\Delta y(1)=f(1+\Delta x)-f(x)=2(1+\Delta x)^3+5(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+1-(2+5-3+1)=2(1+3\Delta x+$$
$$+3\Delta x^2+\Delta x^3)+5(1+2\Delta x+\Delta x^2)-3-3\Delta x-4=(2+5-3-4)+\Delta x(6+10-3)+\Delta x^2(6+5)+$$
$$+2\Delta x^3=13\Delta x+11\Delta x^2+2\Delta x^3.$$

$dy=y'(1)dx,\quad y'=6x^2+10x-3,\quad y'(1)=6+10-3=13,\quad dy(1)=13\Delta x.$
Если $\Delta x=1,\quad \Delta y=13+11+2=26,\quad dy=13.$ Если $\Delta x=0{,}1$, то $\Delta y=1{,}3+0{,}11+0{,}002=1{,}412,\quad dy=1{,}3.$ При малых Δx $\Delta y\approx dy$.

Пример 2. Найти дифференциал функции $y=\frac{x}{2}\sqrt{49-x^2}+\frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}$ при произвольных значениях аргумента и его приращения.
Решение. Находим производную заданной функции.

$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{49-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{49-x^2}}+\frac{49}{2}\cdot\frac{1}{7\sqrt{1-\frac{x^2}{49}}}=\frac{\sqrt{49-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{49-x^2}}+\frac{49}{2\sqrt{49-x^2}}=\sqrt{49-x^2};$$

$dy=\sqrt{49-x^2}\,dx.$

Пример 3. Вычислить приближенное значение $\arcsin 0{,}51$.
Решение. Рассмотрим функцию $y=\arcsin x$. Полагаем $x_0=0{,}5$; $\Delta x=0{,}01$. Находим производную $y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Воспользуемся формулой

$$\arcsin(x_0+\Delta x)\approx\arcsin x_0+(\arcsin x)'_{x_0}\cdot\Delta x.$$

Получим

$$\arcsin 0{,}51\approx\arcsin 0{,}5+\frac{1}{\sqrt{1-0{,}25}}\cdot 0{,}01=\frac{\pi}{6}+\frac{0{,}01}{0{,}5\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}+\frac{0{,}02}{\sqrt{3}}=0{,}524+0{,}012=0{,}536.$$

Пример 4. Вычислить приближенное значение площади круга, радиус которого равен 3,03 м.

Решение. Известно, что площадь круга $S=\pi R^2$. Пусть $R=3$, $\Delta R=0{,}03$. Тогда $\Delta S\approx dS=2\pi R\cdot\Delta R=2\pi\cdot 3\cdot 0{,}03=0{,}18\pi$. Следовательно, площадь круга радиуса 3,03 м равна $\pi\cdot 3{,}03^2\approx\pi\cdot 3^2+0{,}18\pi=9{,}18\pi\approx 28{,}84(м^2)$.

Задания для аудиторной работы

Найти дифференциал функций:

1. $y=x\,arctg x-\ln\sqrt{1+x^2}$; 2. $y=\cos^3\frac{x+1}{x^2}$; 3. $y=ctg(3x^2+\ln 6x)$;

4. $y=10^{tg\sqrt{x}}$; 5. $y=\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\frac{4+\sqrt{8}\,th\frac{x}{2}}{4-\sqrt{8}\,th\frac{x}{2}}$.

Найти дифференциал dy функций, заданных неявно.

6. $\ln y - \frac{x}{y} = C$;   7. $x = y - arctgy$.

Вычислить с помощью дифференциала приближенные значения величин.

8. $\ln 0{,}995$;   9. $arctg1{,}04$;   10. $tg43^0$;   11. $\sqrt[3]{9}$.

Задания для индивидуальной работы

1. -2. Найти дифференциал следующих функций.

3. -4. Вычислить приближенные значения выражений с помощью дифференциала.

Вариант № 1.

1. $y = sh^3 4x \cdot \arccos\sqrt{x}$;   2. $y = \frac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$;   3. $\sqrt[5]{34}$;   4. $\ln(e^2 + 0{,}2)$.

Вариант № 2.

1. $y = th^2\sqrt{x} \cdot arcctg3x^2$;   2. $y = \frac{4\arccos 3x}{(x+2)^5}$;   3. $\sqrt[3]{26{,}19}$;   4. $\frac{2{,}9}{\sqrt{2{,}9^2+16}}$.

Вариант № 3.

1. $y = ch^3(3x+2)\cdot arctg3x$;   2. $y = \frac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$;   3. $\sqrt[4]{16{,}64}$;   4. $(3{,}02)^3 + (3{,}02)^2$.

Вариант № 4.

1. $y = cth^4 2x \cdot \arcsin 7x^2$;   2. $y = \frac{7\,arctg(4x+1)}{(x-4)^2}$;   3. $\sqrt[3]{70}$;   4. $\ln tg\,47°15'$.

4.4 Производные и дифференциалы высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т. е. $y'' = (f'(x))' = f''(x)$.

Если $s = f(t)$ – закон прямолинейного движения материальной точки, то $s'' = f''(t)$ есть ускорение этого движения в момент времени t.

Производные высших порядков (третья, четвертая и т. д.) находятся при последовательном дифференцировании:

$$y''' = (f''(x))', \quad y^{(4)} = (f'''(x))', \quad \cdots, \quad y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Если функция $y=y(x)$ задана параметрически системой уравнений

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

то производные y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx}, $\cdots$ находятся по формулам:

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)},\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'(t)},\quad y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'(t)},\quad \ldots .$$

Дифференциал второго порядка определяется как дифференциал от дифференциала первого порядка, т. е. $d^2y=d(dy)$. Аналогично определяются дифференциалы высших порядков: $d^3y=d(d^2y),\cdots,d^ny=d(d^{n-1}y)$.

Если $y=f(x)$, x–независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам: $d^2y=y''(dx)^2$; $d^3y=y'''(dx)^3;\cdots;$ $d^ny=y^{(n)}(dx)^n$.

Пример 1. Найти производные всех порядков от функции $y=x^5-4x^3+7x^2-8$.

Решение.

$y'=5x^4-12x^2+14x,\qquad y''=20x^3-24x+14,\qquad y'''=60x^2-24,$

$y^{(4)}=120x,\qquad y^{(5)}=120;\qquad y^{(6)}=y^{(7)}=\cdots=0.$

Пример 2. Найти $y^{(n)}(x)$ от функции $y=\ln x$.

Решение. Находим последовательно производные данной функции.

$$y'=\frac{1}{x}=x^{-1},\quad y''=(-1)x^{-2},\quad y'''=(-1)(-2)x^{-3},\quad y^{(4)}=(-1)(-2)(-3)x^{-4},\ \cdots,$$

$$y^{(n)}=(-1)(-2)(-3)\cdots(-n+1)x^{-n}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Пример 3. Найти первую и вторую производные функции, заданной параметрически $x=\ln t$, $y=\dfrac{1}{t}$.

Решение. Первая производная находится по формуле $y'_x=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

$$y'(t)=-\frac{1}{t^2},\quad x'(t)=\frac{1}{t},\quad y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{t^2}:\frac{1}{t}=-\frac{1}{t}.$$

Вторая производная $y''_{xx}=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{1}{t^2}:\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{t}.$

Пример 4. Показать, что функция $y=e^x+3e^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

Решение. Находим первую, вторую и третью производные данной функции и подставляем их в уравнение.

$y' = e^x + 6e^{2x}$, $\quad y'' = e^x + 12e^{2x}$, $\quad y''' = e^x + 24e^{2x}$,

$(e^x + 24e^{2x}) - 6(e^x + 12e^{2x}) + 11(e^x + 6e^{2x}) - 6(e^x + 3e^{2x}) = e^x(1 - 6 + 11 - 6) +$

$+ e^{2x}(24 - 72 + 66 - 18) = 0.$

Пример 5. При прямолинейном движении материальной точки зависимость пути от времени определяется уравнением $s = \sqrt{t}$. Найти ускорение движущейся точки в конце четвертой секунды.

Решение.

Первая производная от пути по времени определяет скорость движения, а вторая производная – ускорение.

$$s(t) = \sqrt{t},\ v(t) = s'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}},\ a(t) = v'(t) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t^3}},\ a(4) = -\frac{1}{4\cdot\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{32}(м/с^2).$$

Задания для аудиторной работы

Найти производные второго порядка от функций:

1. $y = 0{,}25x^2(2\ln x - 3)$; $\qquad$ 2. $y = \frac{1}{9}x\sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$;

3. $y = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$;

4. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 4t - t^4; \end{cases}$ $\qquad$ 5. $\begin{cases} x = \cos(t^2+1), \\ y = \sin^2 t; \end{cases}$ $\qquad$ 6. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$

Найти производные n – ого порядка от функций:

7. $y = e^{6x}$; $\qquad$ 8. $y = x^n \cdot \sqrt{x}$; $\qquad$ 9. $y = (2x+1)^{-1}$.

10. Показать, что функция $y = e^{2x}\sin 5x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 29y = 0$.

11. Найти $y'(1;1)$, $y''(1;1)$ функции, заданной неявно уравнением $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$.

12. Найти дифференциалы первого и второго порядков функций:
$a)$ $y = ctgx + \sin^{-1} x$; $\quad b)$ $x = y - arctgy$; $\quad c)$ $y = \ln(1 - x^2) - \ln(1 + x^2)$.

Задания для индивидуальной работы

1. – 2. Найти первую и вторую производные функций, заданных явно.

3. Записать формулу для производной n – ого порядка указанной функции.

4. Найти первые две производные функции, заданной параметрически.

5. Найти $\frac{d^3y}{dx^3}$ функции, заданной неявно.

Вариант № 1.

1. $y=\ln\sqrt{1+x^2}$; 2. $y=\arcsin^2 x$; 3. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; 4. $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t); \end{cases}$

5. $y=1+xe^y$.

Вариант № 2.

1. $y=ctg\sqrt[3]{1+x^3}$; 2. $y=\ln^2 x$; 3. $y=\dfrac{1}{4x+3}$; 4. $\begin{cases} x=2tgt, \\ y=2\sin^2 t+\sin 2t; \end{cases}$

5. $xy=e^{x+y}$.

Вариант № 3.

1. $y=e^{\sqrt{\ln x}}$; 2. $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$; 3. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$; 4. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-arctgt); \end{cases}$

5. $y=\cos(x+y)$.

Вариант № 4.

1. $y=\dfrac{1}{2}th\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{6}th^3\dfrac{x}{2}$; 2. $y=\sqrt{4-x^2}-2\arccos\dfrac{x}{2}$; 3. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

4. $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t); \end{cases}$ 5. $y=\ln(x+y)$.

4.5 Правило Лопиталя раскрытия неопределенных выражений

Пусть функции $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $\varphi'(x)\neq 0$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty\right)$, т. е. частное $f(x)/\varphi(x)$ в точке x_0 представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при условии, что существует предел отношения производных.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x=x_0$ также имеет неопределенность вида $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$, то приходим к формуле

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

В случае неопределенностей вида $0\cdot\infty$ *или* $\infty-\infty$ надо данное выражение преобразовать алгебраически так, чтобы получить неопределенности основных видов, т. е. $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$ и далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞ следует прологарифмировать данную функцию и найти сначала предел ее логарифма.

Примеры. Найти пределы данных выражений.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{2x}}{x+e^{4x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+2xe^{2x}}{1+4e^{4x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}}{16e^{4x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x}{4e^{2x}}=$

$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{-2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{-2}=0.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}=\left(\infty^0\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\exp(\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(1+x)=\exp\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$=\exp\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{x}{1}=\exp 1=e.$

При решении этого примера было использовано основное логарифмическое тождество: $a^b=e^{\ln a^b}=e^{b\ln a}=\exp(b\ln a)$.

Задания для аудиторной работы

Найти пределы, применяя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+4}{x^3-5x+4}$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$; 4. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\ln(x-4)}{\ln(e^x-e^4)}$;

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$; 6. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-ctgx\right)$; 7. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; 8. $\lim\limits_{x\to0}x\cdot ctg\pi x$;

9. $\lim\limits_{x\to0,5}\sin(2x-1)\cdot tg\pi x$; 10. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$; 11. $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; 12. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$

13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$; 14. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$.

Задания для индивидуальной работы

1. – 5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя.

Вариант № 1.

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-7x^2+4x+4}{4x^3-11x^2-4x+20}$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{tgx}-e^x}{tgx-x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln e^x}{1-xe^x}$;

4. $\lim\limits_{x\to2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{tg\frac{\pi x}{4}}$; 5. $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

Вариант № 2.

1. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+2x^2-15x-36}{3x^3+17x^2+21x-9}$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\cdot\sin 7x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}$;

4. $\lim\limits_{x\to0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$; 5. $\lim\limits_{x\to1}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

Вариант № 3.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3-12x-16}{x^3-10x^2+33x-36}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2arctgx)\cdot\ln x$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; 5. $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$.

Вариант № 4.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-8x^2+21x-18}{2x^3-13x^2+24x-9}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{\ln(1+1/x)}$;

4. $\lim\limits_{x\to 4}\left(2-\frac{x}{4}\right)^{tg\frac{\pi x}{8}}$; 5. $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3})$.

4.6 Формула Тейлора и ее приложения

Если функция $y=f(x)$ имеет производные до $(n+1)$ – го порядка включительно в некотором интервале, содержащем точку $x=a$, то она может быть представлена в виде суммы многочлена n – ой степени и остаточного члена $R_n(x)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $c\in(a;\, x)$.

Эта формула называется **формулой Тейлора** с остаточным членом в форме Лагранжа.

Если в этой формуле положить $a=0$, то получим **формулу Маклорена**.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad c\in(0;\, x).$$

Приведем разложения некоторых функций по формуле Маклорена:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},\quad c\in(0;\, x).$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{\sin(cx+(2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!},\qquad c\in(0;\, x).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\frac{\cos(cx+(2n+2)\frac{\pi}{2})}{(2n+2)!},\qquad c\in(0;\, x).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\left(\frac{x}{1+cx}\right)^{n+1}, \quad c\in(0;\ x).$$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}x^m+$$

$$+\dots+x^n, \quad n\in N, \quad (\textit{формула бинома Ньютона})$$

С помощью формул Тейлора или Маклорена функцию $f(x)$, имеющую достаточное число производных в точке $x=a$ или $x=0$, можно представить приближенно многочленом некоторой степени:

$$e^x\approx 1+x; \qquad e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}; \qquad \sin x\approx x; \qquad \sin x\approx x-\frac{x^3}{6};$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}; \qquad \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}; \qquad \ln(1+x)\approx x; \qquad \ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2};$$

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}, \ |x|<1.$$

Эти формулы используют для приближенного вычисления значений функции, для нахождения пределов.

Пример. Найти предел отношения $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-ctgx\right)\left(\frac{1}{x}+ctgx\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}\cdot\frac{\sin x+x\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left((x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-R_5)-x(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-R_4)\right)\times$$

$$\times\left((x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-R_5)+x(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-R_4)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(x^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})+x^4(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!})+R_5\right)\times$$

$$\times\left(2x-x^3(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!})+x^5(\frac{1}{5!}+\frac{1}{4!})-R_5\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{6}-x^2\frac{4}{120}+R_2\right)\left(2-\frac{4}{6}x^2+R_2\right)=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}.$$

Задания для аудиторной работы

1.Разложить многочлен $f(x)=2x^3-3x^2+5x+1$ по степеням бинома $x+1$.

2. Дан многочлен $f(x)=x^4+4x^2-x+3$. Записать формулу Тейлора второго порядка, если $a=1$. Выписать остаточный член $R_2(x)$ в форме Лагранжа. Найти промежуточное значение c, соответствующее значениям $x=0,\ x=-1,\ x=2$. Вычислить $f(1{,}3)$ и оценить погрешность.

3. Для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ выписать четыре ненулевых члена формулы Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.

5. Записать формулы бинома Ньютона для функций $(1+x)^4$, $(1+x)^5$.

6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{e^x - 1 - x - 0{,}5x^2}$.

Задания для индивидуальной работы

1. Разложить многочлен по степеням бинома $x-a$.
2. Записать формулу Тейлора 3-его порядка для функции $f(x)$ при $x=a$.
3. Найти первые три члена разложения заданной функции по степеням $x-2$. Найти приближенные значения функции в заданных точках.
4. Найти предел с помощью формулы Маклорена.

Вариант № 1.

1. $f(x)=x^3-4x^2+7x-11,\ \ a=2.$
2. $f(x)=\dfrac{1}{x},\ \ a=-1.$
3. $f(x)=x^5-5x^3+x,\ f(2{,}1)=?\ \ f(1{,}98)=?$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x+0{,}5x^2}{x(1-\cos 2x)}.$

Вариант № 2.

1. $f(x)=3x^4-2x^3+x^2-11x+4,\ \ a=-1.$
2. $f(x)=\dfrac{x}{x-1},\ \ a=2.$
3. $f(x)=x^6-5x^5+3x^3+x^2,\ f(2{,}2)=?\ \ f(1{,}99)=?$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-0{,}5x^2}{\ln(x+1)-x+0{,}5x^2}.$

Вариант № 3.

1. $f(x)=5x^4-2x^3-3x^2+6x-9,\ \ a=1.$
2. $f(x)=tgx,\ \ a=0.$
3. $f(x)=2x^5-4x^3+3x^2+x,\ f(2{,}1)=?\ \ f(1{,}96)=?$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1+0{,}5x^2)x^2}{e^{x^2}-1-x^2-0{,}5x^4}.$

Вариант № 4.

1. $f(x)=7x^3-4x^2+6x+5,\ \ a=-1.$
2. $f(x)=\arcsin x,\ \ a=0.$
3. $f(x)=3x^6-4x^5+x^2+1,\ f(2{,}2)=?\ f(1{,}97)=?$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\ln(1+x)-x)}{\sin 2x-2x}.$

4.7 Полное исследование функции. Построение графика функции

1. Возрастание и убывание функции

Функция $y=f(x)$ называется монотонно возрастающей (убывающей) на множестве D, если для любых $x_1<x_2$, $x_1, x_2\in D$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ $\big(f(x_1>f(x_2)\big)$. Если для любых $x_1<x_2$, $x_1, x_2\in D$ выполняется неравенство $f(x_1)\le f(x_2)$ $\big(f(x_1)\ge f(x_2)\big)$, то функция называется неубывающей (невозрастающей) на множестве D.

Постоянная функция является одновременно и неубывающей и невозрастающей.

Для того, чтобы функция $y=f(x)$ была возрастающей (убывающей) для $x\in D$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ была положительной (отрицательной) на этом множестве.

2. Экстремум функции

Функция $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет локальный максимум (минимум),если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$.

Необходимое условие экстремума

Если функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то ее производная $f'(x_0)$ или равна 0, или не существует, или равна бесконечности.

Экстремум может достигаться только в критических точках, но не всякая критическая точка функции является точкой экстремума.

Достаточные условия экстремума

Теорема 1.Критическая точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ при переходе x через x_0 меняет знак. При перемене знака с « + » на « - » $f(x_0)=f_{\max}$, при перемене с « - » на « +» $f(x_0)=f_{\min}$.

Теорема 2. Если $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$,то функция в точке x_0 имеет экстремум: максимум, если $f''(x_0)<0$, и минимум, если $f''(x_0)>0$.

Пример 1. Найти интервалы возрастания и убывания , точки экстремума и экстремальные значения функции $y=x^3-3x^2$.

Решение. Находим производную функции $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$.

Производная положительна $y'>0$, $x(x-2)>0$, если $x<0$ u $x>2$.

Производная отрицательна $y'<0$, $x(x-2)<0$, если $0<x<2$.

Значит, при $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ функция возрастает, а при $x\in(0,2)$- убывает. Следовательно, $x=0$- точка максимума, $x=2-$ точка минимума. Находим максимальное и минимальное значения функции:

$y_{\max}(0)=0;$ $y_{\min}(2)=2^3-3\cdot 2^2=8-12=-4.$

Выпуклость, вогнутость. Точки перегиба

График функции $y=f(x)$ называется **выпуклым (вогнутым)** на интервале $(a;b)$,если он расположен ниже (выше) касательной, проведенной к кривой в любой точке этого интервала.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции:

Если $f''(x)<0$, $x\in(a;b)$, то график функции выпуклый на этом интервале; если же $f''(x)>0$, $x\in(a;b)$,то график функции вогнутый.

Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графика функции, отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется **точкой перегиба**. Если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y=f(x)$, то вторая производная функции в этой точке или равна нулю, или бесконечности, или не существует:

$f''(x_0)=0;\quad f''(x_0)=\infty;\quad f''(x_0)=\nexists.$

Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ графика функции является точкой перегиба, если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе переменной x через значение x_0.

Пример 2. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба кривой $y=x^4-2x^3-12x^2-6x+5$.

Решение. Находим первую и вторую производные данной функции:

$y'=4x^3-6x^2-24x-6,\qquad y''=12x^2-12x-24=12(x^2-x-2)=12(x-2)(x+1).$

Кривая выпукла, если $y''<0$, $(x+1)(x-2)<0$, *если* $x\in(-1;2)$.

Кривая вогнута, если $y''>0$, $(x+1)(x-2)>0$, $x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Значит, точки с координатами

$x=-1,\ y=1+2-12+6+5=2;\ x=2,\ y=16-16-48-12+5=-55$

являются точками перегиба графика данной функции.

Асимптоты кривой.

Прямая называется асимптотой кривой $y=f(x)$, если расстояние точки $M(x,y)$ кривой от прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки $M(x,y)$ по кривой, т. е. при стремлении хотя бы одной из координат к бесконечности.

Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой кривой $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$.

Прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$.

Прямая $y=k\cdot x+b$ является наклонной асимптотой, если существуют пределы: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x},\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

Пример 3. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{3x^2-x+4}{x+2}$.

Решение. При $x\to-2$ $y\to\infty$, значит, прямая $x=-2$ - вертикальная асимптота. Находим наклонную асимптоту: $y=kx+b$,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+4}{x(x+2)}=3;\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+4}{x+2}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+4-3x^2-6x}{x+2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-7x+4}{x+2}\right)=-7.\qquad y=3x-7.$$

Задания для аудиторной работы

1. Найти интервалы монотонности функций: *a*) $y=(2-x)(x+1)^2$;

b) $y=xe^{-x}$; *c*) $y=x-arctgx$.

2. Найти локальные экстремумы функций: *a*) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

b) $y=x\cdot\ln^2 x$; *c*) $y=e^{-x^2}$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=5-12x+3x^2+2x^3$ на отрезке [–3; 2].

4. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции $y=\ln(x^2+2x+5)$.

5. Найти асимптоты кривых *a*) $y=\sqrt{1+x^2}$; *b*) $y=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$; *c*) $y=\dfrac{2\ln x}{x}$.

6. Провести полное исследование функции $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$ и построить ее график.

Примерная схема исследования:

1) указать область определения функции;
2) найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика с осями координат и вертикальные асимптоты;
3) установить наличие или отсутствие четности, нечетности, периодичности функции;
4) исследовать функцию на монотонность и экстремум;
5) определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба;
6) найти асимптоты графика функции;
7) построить график функции.

Задания для индивидуальной работы

Провести полное исследование данных функций и построить их графики.

Вариант № 1. 1. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; 2. $y=x\cdot e^{-x}$; 3. $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$.

Вариант № 2. 1. $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; 2. $y=x^2\cdot e^{-x}$; 3. $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$.

Вариант № 3 1. $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$; 2. $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; 3. $y=\sqrt[3]{4x^3-12x}$.

Вариант № 4. 1. $y=\dfrac{8x}{(x-2)^2}$; 2. $y=\ln(x^2+2x+2)$; 3. $y=\sqrt[3]{4x^3-12x}$.

4.8 Решение практических задач с применением теории экстремумов

Пример 1.

Из квадратного листа жести, сторона которого равна $2a$, требуется сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем загибая жесть, чтобы образовались бока ящика. Какова должна быть длина стороны у вырезаемых квадратов?

Пусть сторона вырезаемого квадрата равна x. Объем ящика $V = V(x)$.

$V(x) = (2a-2x)^2 \cdot x = 4x(a-x)^2$; $\quad V'(x) = 4(a-x)^2 - 8x(a-x) = 4(a-x)(a-x-2x)$.

Решаем уравнение. $V'(x) = 0$; $\quad 4(a-x)(a-3x) = 0$; $\quad x \neq a$, $\quad x = \dfrac{a}{3}$.

Находим вторую производную в точке $x = \dfrac{a}{3}$. $\quad V'(x) = 4(a^2 - 4ax + 3x^2)$.

$V''(x) = 4(-4a+6x)$; $\quad V''(\dfrac{a}{3}) = 4(-4a+2a) = -8a < 0 \Rightarrow (V(a/3) = \dfrac{16}{27}a^3 = \max.)$

Пример 2.

Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине b и квадрату высоты h. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна радиусом $R = 2\sqrt{3}$ дм.

Решение.

Прочность бруса $N = kh^2b$, где k – коэффициент пропорциональности, $k > 0$. Из рис. 2 видно, что $h^2 + b^2 = 4R^2$, $\quad h^2 = 4R^2 - b^2$. Тогда получим

$N = N(b) = k(4R^2 - b^2)b$; $N'(b) = k(4R^2 - 3b^2)$; $(N'(b) = 0) \Rightarrow (b = 2R/\sqrt{3} = 4)$,

при этом $h = 4\sqrt{2}$ дм. Так как $N''(b) = -6kb < 0$, то при найденных значениях высоты и ширины бруса его прочность будет максимальной.

Задания для аудиторной работы

1. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света ?

2. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

4. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

5. Измерения, проведенные в различных местах реки, покрытой льдом, показали, что скорость воды для разной глубины x меняется по закону $v = b \cdot m \cdot \ln x + a + k \cdot m \cdot \ln(t - x)$, b, m, k, t, a – некоторые параметры. На какой глубине реки скорость течения наибольшая?

Задания для индивидуальной работы

Решить задачи на экстремум.

Вариант № 1.

1. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

2. Полоса жести шириной a, имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол φ, опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

Вариант № 2.

1. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? (Величина прогиба обратно пропорциональна произведению ширины b поперечного сечения и куба высоты h.)

2. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса H, радиус основания R.

Вариант № 3.

1. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком – 5 км/ ч., а на лодке – 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

2. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

Вариант № 4.

1. На странице книги печатный текст занимает площадь S; ширина верхнего и нижнего полей равна a, а правого и левого - b. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей?

2. Из фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$, вырезать прямоугольник наибольшей площади.

V. ВЕКТОРНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1 Векторная функция скалярного аргумента и ее производная. Кривизна кривой. Уравнения касательной и нормальной плоскости

Если каждому значению действительной переменной $t \in D \subset R$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r}(t) \in R^3$, то говорят, что на множестве D задана вектор – функция действительной переменной $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Задание вектор – функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координат вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}.$$

Годографом вектор – функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется множество точек, являющихся концами всех векторов $\vec{r} = \vec{r}(t)$, которые приложены к началу координат. Параметрические уравнения годографа имеют вид $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

$$(\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0) \Leftrightarrow (\lim_{t \to t_0}(x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}) = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k}).$$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{r}'(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то он называется производной векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ по скалярному аргументу t.

Производная $\vec{r}'(t)$ есть вектор, направленный по касательной к годографу вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t. Если t – время, то $\vec{r}'(t)$- вектор скорости конца вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а вектор $\vec{r}''(t)$ – вектор ускорения.

Перечислим **основные правила дифференцирования** вектор-функций скалярного аргумента:

1. $\vec{r}'(t) = x'(t) \cdot \vec{i} + y'(t) \cdot \vec{j} + z'(t) \cdot \vec{k}$; $\quad \vec{r}''(t) = x''(t) \cdot \vec{i} + y''(t) \cdot \vec{j} + z''(t) \cdot \vec{k}$;

2. $(\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \pm \vec{r}_2'(t)$; 3. $(\vec{a})' = 0$; 4. $(f(t)\vec{r}(t))' = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}'(t)$;

5. $(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2'(t)$; 6. $(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2'(t)$.

Уравнение касательной к пространственной линии

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

в точке $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = M_0(x_0; y_0, z_0)$ определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$x'(t_0)\cdot(x-x_0) + y'(t_0)\cdot(y-y_0) + z'(t_0)\cdot(z-z_0) = 0.$$

Кривизной линии в данной ее точке M называется предел отношения угла между положительными направлениями касательных в точках M и N линий (угла смежности) к длине дуги $MN = \Delta s$, когда $N \to M$, т.е.

$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\varphi|}{\Delta s},$$

где φ – угол между положительными направлениями касательной в точке M и оси Ox. Кривизна кривой вычисляется по формулам:

если линия задана уравнением $y = f(x)$, то $K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$;

если линия задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$K = \frac{|x'\cdot y'' - x''\cdot y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}};$$

если пространственная кривая задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$,

то кривизна определяется формулой: $K = \dfrac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}$.

Задания для аудиторной работы

1. Найти годографы векторных функций:

$a)$ $\vec{r} = (2t-1)\cdot\vec{i} + (-3t+2)\cdot\vec{j} + 4t\cdot\vec{k}$, $t\in R$; $b)$ $\vec{r} = \sqrt{1-t^2}\cdot\vec{i} + \sqrt{1+t^2}\cdot\vec{j}$, $t\in[0;1]$;

$c)$ $\vec{r} = 5\cos t\cdot\vec{i} + 4\sin t\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{k}$, $t\in[0;2\pi]$.

2. Дано уравнение движения материальной точки $\vec{r} = 2(t-\sin t)\cdot\vec{i} + 2(1-\cos t)\cdot\vec{j}$. Определить траекторию, скорость и ускорение движения. Построить векторы скорости и ускорения при $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$.

3. Найти единичный касательный вектор годографа вектор – функций:

$a)$ $\vec{r} = e^{2t}\cdot\vec{i} - (t+8)\cdot t^3\cdot\vec{j}$ при $t = 0$; $b)$ $\vec{r} = (t^3+t)\cdot\vec{i} - t^2\cdot\vec{j}$ при $t = -1$.

4. Найти производную от скалярного и векторного произведений векторов $\vec{a}(t) = (t;\ t^2;\ t^3)$ и $\vec{b}(t) = (t;\ 1;\ t^2)$.

5. Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к годографу векторных функций:

a) $\vec{r}=4\sin^2 t\cdot\vec{i}+4\sin t\cos t\cdot\vec{j}+2\cos^2 t\cdot\vec{k}$ при $t=\frac{\pi}{4}$;

b) $\vec{r}=\frac{t^2}{2}\cdot\vec{i}+\frac{t^3}{3}\cdot\vec{i}+\frac{t^4}{4}\cdot\vec{i}$ при $t=2$.

6. Найти кривизну следующих линий в заданных точках:

a) $y=x^4-4x^3-18x^2$, $O(0;0)$, $A(1;-21)$; b) $x^2+xy+y^2=3$, $M(1;1)$;

c) $x=t^2$, $y=t^3$, $M(1;1)$; d) $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$, $t=1$.

Задания для индивидуальной работы

1. Найти производную от векторного произведения векторных функций $\vec{r}(t)\times\vec{r}'(t)$.

2. Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой при заданном значении параметра $t=t_0$.

3. Вычислить кривизну линий в любой точке или в точке с заданным значением параметра.

Вариант № 1.

1. $\vec{r}=(1-t^2)\cdot\vec{i}+(1+t^2)\cdot\vec{j}+t^3\cdot\vec{k}$; 2. $\vec{r}=(1+2t^2)\cdot\vec{i}+(2t-5t^2)\cdot\vec{j}+(1-t^2)\cdot\vec{k}$, $t_0=2$.

3. a) $\vec{r}=t\cdot\vec{i}+t^2\cdot\vec{j}+t^3\cdot\vec{k}$; b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $A(\pm a,0)$, $B(0,\pm b)$.

Вариант № 2.

1. $\vec{r}=(1+t^2)\cdot\vec{i}+(1-t^2)\cdot\vec{j}+(2-2t)\cdot\vec{k}$; 2. $\vec{r}=t^2\cdot\vec{i}+(1-t)\cdot\vec{j}+(2+2t^2)\cdot\vec{k}$; $t_0=-2$.

3. a) $\vec{r}=(2\cos t-\cos 2t)\cdot\vec{i}+(2\sin t-\sin 2t)\cdot\vec{j}+t\cdot\vec{k}$, $t=\frac{\pi}{4}$; b) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Вариант № 3.

1. $\vec{r}=\cos 2t\cdot\vec{i}+\sin 2t\cdot\vec{j}+\cos t\cdot\vec{k}$; 2. $\vec{r}=(t-\sin t)\cdot\vec{i}+(1-\cos t)\cdot\vec{j}+4\sin\frac{t}{2}\cdot\vec{k}$, $t=\frac{\pi}{2}$.

3. a) $\vec{r}=a\cos t\cdot\vec{i}+a\sin t\cdot\vec{j}+2t\cdot\vec{k}$; b) $\vec{r}=a\cos^3 t\cdot\vec{i}+a\sin^3 t\cdot\vec{j}$, $t=\frac{\pi}{4}$.

Вариант № 4.

1. $\vec{r}=R\cos^2 t\cdot\vec{i}+R\sin t\cos t\cdot\vec{j}+R\sin t\cdot\vec{k}$; 2. $\vec{r}=((t-\sin t);(1-\cos t);4\sin\frac{t}{2})$, $t=\frac{3\pi}{2}$.

3. a) $\vec{r}=a\,ch\,t\cdot\vec{i}-a\,sh\,t\cdot\vec{j}$; b) $\vec{r}=3(\cos t+t\sin t)\cdot\vec{i}+3(\sin t-t\cos t)\cdot\vec{j}$, $t=\frac{\pi}{2}$.

5.2 Комплексные числа. Различные формы их записи. Действия над комплексными числами

Комплексным числом называется упорядоченная пара (a, b) действительных чисел.

Алгебраическая форма записи комплексного числа имеет вид $z = a + i \cdot b$ $(z = a + b \cdot i)$, где a, b – действительные числа, i – мнимая единица, для которой $i \cdot i = i^2 = -1$. Число a называется действительной частью комплексного числа и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть числа.

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, выполняются по правилам сложения, вычитания и умножения двучленов вида $a + bi$ с заменой каждый раз i^2 на -1.

Деление выполняется по формуле: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$ $(z_2 \neq 0)$, $\bar{z}_2 = a_2 - ib_2$ – комплексное число, сопряженное числу $z_2 = a_2 + ib_2$.

Геометрически комплексное число $z = a + i \cdot b$ изображается точкой $M(a, b)$ на координатной плоскости.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = a + i \cdot b$ имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль числа z; φ – его аргумент $(\varphi = \arg z)$ – величина угла между положительным направлением оси Ox и радиусом- вектором $\overrightarrow{OM}$, причем величина угла считается положительной, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, - если почасовой стрелке. Величина угла определяется из системы $\cos\varphi = a/r$, $\sin\varphi = b/r$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ $(-\pi \leq \varphi < \pi)$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме определяются по формулам: если
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2));$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad n \in N; \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \ k = \overline{0, n-1}.$$

Показательная форма записи комплексного числа имеет вид $z = re^{i\varphi}$, где $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – формула Эйлера.

Если

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z^n = r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp\left(i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \ k = \overline{0, n-1}.$$

Задания для аудиторной работы

1. Выполнить действия, представив результат в алгебраической форме:

$a)\ (1-2i)(2+i)^2+5i;\quad b)\ (2i-i^2)+(1+3i)^3;\quad c)\ i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56};$

$d)\ \dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i};\quad e)\ \left(\dfrac{i^5+2}{i^{11}+1}\right)^2;\quad f)\ \dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}-\dfrac{1}{i}.$

2. Найти действительные решения уравнения
$12((2x+i)(1+i)+(x+y)(3-2i))=17+6i.$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{cases}$$

4. Записать в тригонометрической и показательной формах комплексные числа: $-i;\ 4;\ 1-i\sqrt{3};\ 3+3i;\ \dfrac{1-i}{1+i};\quad \dfrac{1}{\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ}.$

5. Выполнить действия:
$a)\ (1+i)^8(1+i\sqrt{3})^{-6};\quad b)\ \sqrt[4]{-1};\ c)\ \sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i};\quad d)\ \sqrt[3]{8+i}.$

6. Решить уравнения:
$a)\ z^2+2z+5=0;\quad b)\ (z+1)^4-16=0;\quad c)\ z^2-(3-2i)z+5-i=0.$

7. Вычислить суммы:
$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\cdots+\sin n\varphi;\quad \cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi.$

Задания для индивидуальной работы

1. Найти значение выражения.
2. Представить комплексные числа в тригонометрической и показательной формах.
3. Найти все корни уравнений.
4. Вычислить выражение, если $z+z^{-1}=1$.

Вариант № 1.

1. $\dfrac{z_1+2z_2}{z_3},\quad z_1=2+3i,\quad z_2=3+2i,\quad z_3=5-2i.$
2. $z_1=2-2i,\quad z_2=-\sqrt{3}+i,\quad z_3=-5i,\quad z_4=4.$
3. $z^4+1=0;\quad z^2-(1-2i)z+(1+5i)=0.$
4. $z^{158}+z^{152}+2z^{-122}.$

Вариант № 2.

1. $\dfrac{(z_1+z_3)z_2}{z_3}$, $z_1=3+5i$, $z_2=3-4i$, $z_3=1-2i$.
2. $z_1=2+2\sqrt{3}i$, $z_2=3-3i$, $z_3=4i$, $z_4=-1-i$.
3. $z^6-1=0$; $z^2-(5+3i)z+(10+5i)=0$.
4. $z^{158}+z^{140}+2z^{-98}$.

Вариант № 3.

1. $\dfrac{(z_1+2z_3)}{\overline{z_2}}$, $z_1=2+3i$, $z_2=5+2i$, $z_3=3-2i$.
2. $z_1=\sqrt{3}+i$; $z_2=-4+4\sqrt{3}i$; $z_3=2-2i$; $z_4=-3i$.
3. $z^4-16=0$; $z^2-(3+2i)z+(5+i)=0$.
4. $z^{152}+z^{146}+2z^{-122}$.

Вариант № 4.

1. $\dfrac{z_1(z_2+z_3)}{\overline{z_2}}$, $z_1=4+5i$, $z_2=3-4i$, $z_3=2+3i$.
2. $z_1=3\sqrt{3}+3i$; $z_2=2-2\sqrt{3}i$; $z_3=-1+i$; $z_4=3i$.
3. $z^6+64=0$; $z^2-(5-3i)z+(10-5i)=0$.
4. $z^{164}+z^{158}+2z^{-122}$.

Литература

1. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: НАУКА, 1980.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980.
4. Гурский Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Мн.: Выш. шк., 1982.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. В пяти частях. Часть 1. – Мн.: Выш. шк., 1992.
6. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. – М.: Высш. шк., 1986.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1. – М.: Наука, 1985.
8. Русак В.М., Шлома Л.І. І інш. Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя. Аналіз функцый адной зменнай. – Мн.: Выш. шк., 1994.
9. Тузік А.І., Тузік Т.А. Лінейнай алгебры і аналітычнай геаметрыі.- Брэст: БрПІ, 1994.
10. Тузік А.І., Тузік Т.А. Уводзіны у матэматычны аналіз. Дыферэнцыяльнае злічэнне функцый адной пераменнай. – Брэст: БрПІ, 1996.
11. Тузик Т.А. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания для студентов технических специальностей. – Брест: БИСИ, 1988.
12. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Часть 1. – Мн.: Выш. шк., 1988.
13. Гурский Е.И. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. Часть 1. – Мн.: Выш. шк., 1989.
14. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Часть 1. – М.: Высш. шк., 1997.
15. Индивидуальные задания по высшей математике. В трех частях. Часть 1/ Под редакцией Рябушко А.П. – Мн.: Выш. шк., 2000.
16. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике. В двух частях. Часть 1. – Мн.: Выш. шк., 1993.
17. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике. – Мн.: Тетра Системс, 1999-2000.
18. Корн Г., Корн Т. Справочник по высшей математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968.

Учебное издание

Составители:
Копайцева Татьяна Владимировна
Журавель Мария Григорьевна
Швычкина Елена Николаевна
Тузик Татьяна Александровна

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

По курсу «*Высшая математика*»
для студентов
электронно-информационных специальностей
I семестр

Ответственный за выпуск: Т. А. Тузик
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 24.04.2008 г. Формат 80x64 $^{1}/_{16}$.
Бумага "Снегурочка". Гарнитура Arial Narrow. Усл. п.л. 4,65.
Уч.-изд. л. 5,0. Заказ № 499. Тираж 200 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
"Брестский государственный технический университет".
224017. Брест, ул. Московская, 267.