ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 1998
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.968.2

А. И. ТУЗИК

ОБ ИНДЕКСЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ КОММУТАТИВНОЙ ГРУППОЙ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ СДВИГОВ КАРЛЕМАНА

Пусть Γ — простой гладкий замкнутый ориентированный контур в комплексной плоскости. В одном из пространств $H_\mu(\Gamma)$ или $L_p(\Gamma)$ рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с конечной коммутативной [1] группой $G = \{\alpha_0^+, \alpha_1^+, \alpha_2^-, \alpha_3^- = \alpha_1^+(\alpha_2^-)\}$ прямых и обратных сдвигов Карлемана:

$$(K\varphi)(t) \equiv \sum_{k=0}^{3} \left\{ a_k(t)\varphi[\alpha_k(t)] + \frac{b_k(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi[\alpha_k(\tau)]}{\tau - t} d\tau \right\} + (T\varphi)(t) = f(t), \tag{1}$$

где $\alpha_0^+(t) = t$, $\alpha_k^{+(-)}(t)$ сохраняет (изменяет) обход контура Γ, $\alpha_k^\pm(\alpha_k^\pm(t)) \equiv t$, $k = \overline{0,3}$; T — вполне непрерывный оператор в соответствующем пространстве. Рассуждая аналогично [1 – 3], последовательно заменим в уравнении (1) t на $\alpha_i^{+(-)}(t)$, $i = \overline{1,3}$. Учитывая, что операторы с ядрами

$$k_i(t,\tau) = \alpha_i'(\tau)/[\alpha_i(\tau) - \alpha_i(t)] - (\tau - t)^{-1}, \quad i = \overline{1,3},$$

вполне непрерывны [3, с. 35] в пространстве $H_\mu(\Gamma)$ или $L_p(\Gamma)$, и присоединяя полученные таким образом уравнения к уравнению (1), придем к соответствующей системе четырех сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши относительно неизвестной вектор-функции $\Phi(t) = \{\varphi(t), \varphi(\alpha_1^+(t)), \varphi(\alpha_2^-(t)), \varphi(\alpha_3^-(t))\}$, матричная запись которой имеет вид

$$(M\Phi)(t) \equiv A(t)\Phi(t) + \frac{B(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t} d\tau + (T_1\Phi)(t) = F(t), \tag{2}$$

где

$$A(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) \\ a_1(\alpha_1^+(t)) & a_0(\alpha_1^+(t)) & a_3(\alpha_1^+(t)) & a_2(\alpha_1^+(t)) \\ --- & --- & --- & --- \\ a_2(\alpha_2^-(t)) & a_3(\alpha_2^-(t)) & a_0(\alpha_2^-(t)) & a_1(\alpha_2^-(t)) \\ a_3(\alpha_3^-(t)) & a_2(\alpha_3^-(t)) & a_1(\alpha_3^-(t)) & a_0(\alpha_3^-(t)) \end{array}\right),$$

$$B(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} b_0(t) & b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) \\ b_1(\alpha_1^+(t)) & b_0(\alpha_1^+(t)) & b_3(\alpha_1^+(t)) & b_2(\alpha_1^+(t)) \\ --- & --- & --- & --- \\ -b_2(\alpha_2^-(t)) & -b_3(\alpha_2^-(t)) & -b_0(\alpha_2^-(t)) & -b_1(\alpha_2^-(t)) \\ -b_3(\alpha_3^-(t)) & -b_2(\alpha_3^-(t)) & -b_1(\alpha_3^-(t)) & -b_0(\alpha_3^-(t)) \end{array}\right),$$

$$F(t) = \{f(t), f(\alpha_1^+(t)), f(\alpha_2^-(t)), f(\alpha_3^-(t))\},$$

Явный вид вполне непрерывного оператора T_1 выписывается по аналогии с [4]. Обозначим $r_k(t) = a_k(t) - b_k(t)$, $s_k(t) = a_k(t) + b_k(t)$, $k = \overline{0,3}$, тогда

$$R(t) = A(t) - B(t) = \begin{pmatrix} r_0(t) & r_1(t) & | & r_2(t) & r_3(t) \\ r_1(\alpha_1^+(t)) & r_0(\alpha_1^+(t)) & | & r_3(\alpha_1^+(t)) & r_2(\alpha_1^+(t)) \\ --- & --- & | & --- & --- \\ s_2(\alpha_2^-(t)) & s_3(\alpha_2^-(t)) & | & s_0(\alpha_2^-(t)) & s_1(\alpha_2^-(t)) \\ s_3(\alpha_3^-(t)) & s_2(\alpha_3^-(t)) & | & s_1(\alpha_3^-(t)) & s_0(\alpha_3^-(t)) \end{pmatrix},$$

$$S(t) = A(t) + B(t) = \begin{pmatrix} s_0(t) & s_1(t) & | & s_2(t) & s_3(t) \\ s_1(\alpha_1^+(t)) & s_0(\alpha_1^+(t)) & | & s_3(\alpha_1^+(t)) & s_2(\alpha_1^+(t)) \\ --- & --- & | & --- & --- \\ r_2(\alpha_2^-(t)) & r_3(\alpha_2^-(t)) & | & r_0(\alpha_2^-(t)) & r_1(\alpha_2^-(t)) \\ r_3(\alpha_3^-(t)) & r_2(\alpha_3^-(t)) & | & r_1(\alpha_3^-(t)) & r_0(\alpha_3^-(t)) \end{pmatrix}.$$

Используя известные свойства определителей, нетрудно убедиться в справедливости следующих основополагающих здесь тождеств:

$$\begin{gathered} \det R(t) \equiv \det R(\alpha_1^+(t)) \equiv \det S(\alpha_2^-(t)) \equiv \det S(\alpha_3^-(t)), \\ \det S(t) \equiv \det S(\alpha_1^+(t)) \equiv \det R(\alpha_2^-(t)) \equiv \det R(\alpha_3^-(t)). \end{gathered} \tag{3}$$

Из результатов [1, 2, 5] следует

Теорема 1. *Для того чтобы сингулярное интегральное уравнение (1) с конечной коммутативной группой сдвигов Карлемана было нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det R(t) \neq 0, \quad \det S(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \tag{4}$$

при этом

$$\mathrm{Ind} K = \frac{1}{4}\mathrm{Ind} M = \frac{1}{8\pi}\left\{ \arg \frac{\det R(t)}{\det S(t)} \right\}_\Gamma. \tag{5}$$

С помощью соотношений (3) формула (5) может быть упрощена.

Справедлива

Теорема 2. *При выполнении условий нетеровости (4) индекс сингулярного интегрального уравнения (1) с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана вычисляется по формуле*

$$\begin{gathered} \mathrm{Ind} K = \frac{1}{4}\mathrm{Ind} M = \frac{1}{8\pi}\left\{ \arg \frac{\det R(t)}{\det S(t)} \right\}_\Gamma = \frac{1}{8\pi}\left\{ \arg \frac{\det R(t)}{\det R(\alpha_2^-(t))} \right\}_\Gamma = \\ = \frac{1}{8\pi}\left\{ \arg \frac{\det S(\alpha_2^-(t))}{\det S(t)} \right\}_\Gamma = \frac{1}{4\pi}\{\arg \det R(t)\}_\Gamma = -\frac{1}{4\pi}\{\arg \det S(t)\}_\Gamma. \end{gathered} \tag{6}$$

Замечание 1. Отметим, что полученная формула (6) для вычисления индекса уравнения (1) является наиболее простой из известных ранее, так как предполагает лишь вычисление приращения аргумента одного определителя четвертого порядка вместо двух таких определителей в [1, 2, 5].

Замечание 2. Так как матрицы $R(t), S(t)$ блочные, то при условии, что определитель одного из блоков размера 2×2 отличен от нуля для $t \in \Gamma$, при вычислении $\det R(t)$ или $\det S(t)$ можно воспользоваться формулами Щура [6, с. 59], сводящими вычисление определителя четвертого порядка к вычислению определителя второго порядка.

Замечание 3. Формула (6) может быть применена для более простого вычисления индекса сингулярных интегральных уравнений с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана $G = \{t, -t, t^{-1}, -t^{-1}\}$, $|t| = 1$, к которым сводятся [4, 7] дискретные уравнения типа свертки с почти стабилизирующимися множителями специального вида.

Summary

A simple relation for calculating the index of a singular integral equation with a finite commutative group of Carleman's direct and reverse shifts is obtained.

Литература

1. Башкарев П.Г., Карлович Ю.И., Нечаев А.П. // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 2. С. 272 – 274.

2. Сосунов А.С. // Матер. Всесоюз. конф. по краевым задачам. Казань, 1970. С. 249 – 253.

3. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М., 1977.

4. Тузик А.И. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1829 – 1831.

5. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. Ростов-на-Дону, 1988.

6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.

7. Тузик А.И. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1994. № 4. С. 107 – 109.

Брестский политехнический институт

Поступила в редакцию 30.09.96