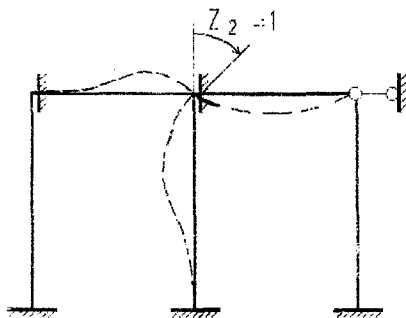


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
БЕЛАРУСЬ

Брестский политехнический институт
Кафедра строительной механики

МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМАХ

Методические указания
по курсу "Строительная механика"
для студентов строительных специальностей



Брест 1997

УДК 624.04

М54

Метод перемещений при определении внутренних усилий в плоских статически неопределимых рамах: Методические указания по курсу "Строительная механика" для студентов строительных специальностей / Сост. В.И. Игнатюк; Брестский политехнический институт. – Брест, 1997. – 32 с., 20 ил., 1 табл.

В методических указаниях рассматривается расчет плоских статически неопределимых рам методом перемещений. Достаточно подробно изложены и анализируются все этапы расчета. Представлены достаточно полные таблицы балочных эпюр метода перемещений. Приведены примеры расчетов.

Методические указания предназначены для студентов строительных специальностей дневной и заочной форм обучения.

Составитель : В.И. Игнатюк , доцент , к.т.н.

Рецензенты: А.А. Борисевич, зав. кафедрой строительной механики Белорусской Государственной Политехнической Академии, д.т.н., доцент;
Л.В. Кулаго, старший преподаватель кафедры строительной механики БГПА .

ВВЕДЕНИЕ

Метод перемещений имеет широкое распространение, особенно при расчете сложных статических неопределимых систем с большим количеством лишних связей, обладающих малой подвижностью узлов – сложных каркасных рам, ферм с жесткими узлами и т.д. Метод перемещений явился основой для разработки ряда ценных приближенных методов расчета рам – методов Кани, Кресса и др.

Существует две формы решения задач по методу перемещений: каноническая и развернутая. Более удобной является каноническая форма метода перемещений, которая аналогична по форме записи уравнений методу сил. Своё развитие она получила в трудах Н.М. Рабиновича, А.А. Гвоздева, А.Ф. Смирнова. Ниже рассматривается именно эта форма метода перемещений.

1. ПОДХОДЫ И ДОПУЩЕНИЯ, ПОЛОЖЕННЫЕ В ОСНОВУ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

При расчете статически неопределимых систем методом сил за неизвестные принимаются усилия в лишних связях, после определения которых легко находятся внутренние усилия (M , Q , N) в любом сечении системы, а также может быть найдено перемещение любой точки системы.

Но задача может быть решена и в обратном направлении. Если сначала выявить деформированный вид системы, или определяющие этот вид перемещения системы, то затем можно установить соответствующее им распределение внутренних усилий, что иллюстрирует и широко известная зависимость

$$M = E J \cdot y''.$$

Именно такой подход и используется в методе перемещений. При этом анализ показывает, что деформированный вид системы будет полностью определен, если будут известны угловые и линейные перемещения ее узлов. Это объясняется тем, что перемещения узлов равны перемещениям концов стержней, соединяющихся в этих узлах, а деформации стержней полностью и однозначно определяются перемещениями концов стержней. Последнее относится и к нагруженным стержням, для которых, правда, деформированный вид будет зависеть дополнительно еще и от действующей нагрузки.

Рассмотрим, например, раму, изображенную на рис. 1. Деформированное состояние этой рамы определяется линейными и угловым перемещениями узлов 1 и 2; при этом число этих перемещений зависит от допущений, используемых в методе. Так, в общем случае число перемещений, определяющих деформации рамы, здесь равно пяти (рис. 1б); в случае же неучета поперечных и продольных деформаций и неучета изменения длин стержней при их изгибе (влиянием этих величин для изгибаемых рамно-стержневых систем ввиду

их малости обычно пренебрегают – классическая постановка задачи) число этих неизвестных перемещений равно двум (рис. 1в) – Δ и φ .

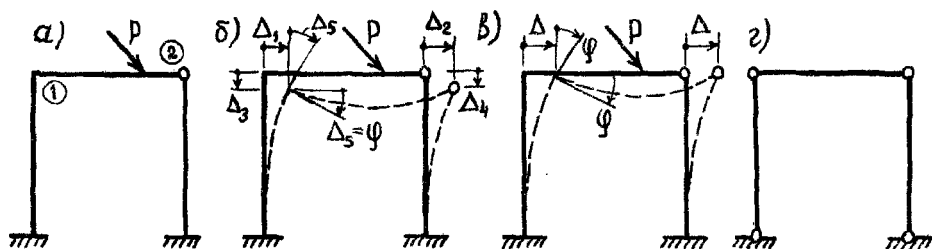


Рис. 1

① Число независимых угловых и линейных смещений узлов, полностью и однозначно определяющих деформированный вид системы, называется *степенью ее кинематической неопределенности*.

И все эти неизвестные независимые перемещения узлов и принимаются за неизвестные в методе перемещений, откуда пошло и название этого метода – метод перемещений (деформаций).

Отметим, что в классической форме метода перемещений, как впрочем и в методе сил, для рамно-стержневых систем, как уже указывалось, используются следующие допущения:

а) пренебрегается поперечными и продольными деформациями элементов системы при ее деформировании;

б) принимается, что проекция изогнутого (деформированного) стержня на его первоначальное направление равна первоначальной длине стержня (рис. 2);

в) считается, что величина углов в жестких узлах в процессе деформирования системы не изменяется;

г) углы поворота узлов и сечений стержней при деформировании систем в виду их малости принимаются равными тангенсам этих углов.

Следует отметить, что для многих статически неопределимых систем степень кинематической неопределенности ниже, чем степень статической неопределенности, а также, что метод перемещений при равном числе неизвестных несколько проще в расчете, чем метод сил.

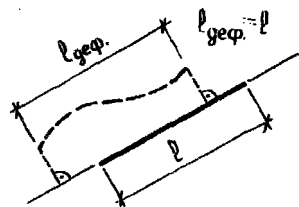


Рис. 2.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ РАМ

Степень кинематической неопределимости системы, то есть число неизвестных независимых угловых и линейных смещений узлов, величины которых надо определить для представления о деформированной схеме системы и соответственно для определения внутренних усилий, определяется по формуле:

$$n = n_y + n_l. \quad (1)$$

Здесь: n_y – число неизвестных независимых угловых смещений узлов, определяемое по числу жестких узлов метода перемещений в системе; при этом под жесткими узлами метода перемещений (далее их будем называть просто жесткими узлами) здесь понимают такие, в которых соблюдается два условия:

- в которых жестко соединяются под любым углом два и более стержня;
- в которых происходит изменение внутренних усилий (изгибающих моментов), неопределяемое исходя из обычных уравнений равновесия (статики).

Например, в раме, изображенной на рис. 3а, жесткими узлами, удовлетворяющими указанным условиям, будут узлы 1, 2, 3 ($n_y = 3$); для узлов же А, В, С не выполняется второе условие, так как они относятся, по существу, к статически определимым частям системы, в которых все усилия можно определить с помощью обычных методов расчета статически определимых систем.

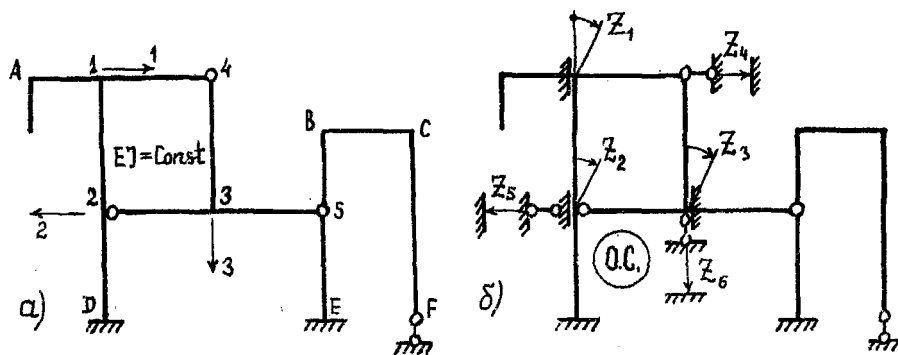


Рис. 3

n_l – число независимых неизвестных линейных смещений узлов системы, которое можно определять двумя способами:

1. По числу возможных независимых линейных смещений жестких (см. определение n_y) и шарнирных узлов системы на основе анализа ее возможности упругого деформирования с учетом принятых допущений (см. раздел 1).

Например, в раме на рис. 3а необходимо проанализировать возможность и независимость линейных смещений жестких узлов 1, 2, 3 и шарнирных узлов 4, 5 при произвольном возможном упругом деформировании этой системы:

- узел 1 по вертикали смещаться не может, так как он закреплен от вертикального смещения с помощью стержня 1-Д, который на основе допущений а и б (см. раздел 1) не позволяет разойтись (сойтись) точкам 1 и Д, и защемления Д;

- по горизонтали узел 1 может смещаться, так как стержни 1-2 и 4-3 могут изгибаться (горизонтальное перемещение узла 1 показано стрелкой с цифрой 1);

- узел 2 по вертикали не может смещаться на основе тех же рассуждений, что и для узла 1;

- по горизонтали же узел 2 может смещаться, учитывая, что стержни 1-2, 2-Д, 4-3 и 5-Е могут изгибаться (горизонтальное смещение узла 2 обозначено стрелкой и соответственно цифрой 2);

- узел 3 по горизонтали может смещаться (по аналогии с узлом 2), но это его смещение будет таким же, как и горизонтальное смещение узла 2 (так как стержень 2-3, соединяющий узлы 2 и 3, на основе допущений а и б (раздел 1) не позволяет измениться расстоянию между этими узлами);

- по вертикали узел 3, учитывая возможность упругого деформирования стержней 1-4, 2-3 и 3-5, может смещаться (показано стрелкой с цифрой 3);

- шарнирный узел 4 в данном случае может смещаться как по горизонтали (но одинаково с узлом 1, так как стержень 1-4 на основе допущений а и б не дает возможности точкам 1 и 4 разойтись), так и по вертикали (но вместе с узлом 3 вследствие наличия стержня 3-4);

- шарнирный узел 5 по аналогии вертикально вообще смещаться не может, а по горизонтали он может смещаться только на такую же величину, как узлы 2 и 3.

Таким образом, для рамы на рисунке 3 имеем три независимых линейных смещений узлов ($n_l = 3$), а всего в итоге получаем шесть неизвестных при расчете ее методом перемещений:

$$n = n_y + n_l = 3 + 3 = 6.$$

2. В ряде учебников для определения n_l предлагается формула

$$n_l = W_{\text{шарнирной схемы системы}} = 3Д - 2Ш - C_0, \quad (2)$$

согласно которой n_l равно степени свободы шарнирной схемы рамы, получаемой путем введения (врезания) шарниров во все жесткие узлы, включая опорные (в жесткие заделки), анализируемой рамы.

Например, для рамы на рис. 1а шарнирная схема имеет вид, представленный на рис. 1г, в соответствии которому получим

$$n_l = W_{\text{ш.сх.р.}} = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1.$$

Для рамы же на рис. 4а, шарнирная схема которой представлена на рис. 4б, будем иметь:

$$n_{\lambda} = W_{ш.сх.р.} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Однако анализ возможного деформирования рамы по первому способу показывает, что узлы 1 и 2 могут горизонтально смещаться. Таким образом, применение формулы (2) приводит здесь к неверному результату, причиной которого является мгновенная изменяемость шарнирной схемы (рис. 4б) рамы. То есть формула (2) будет всегда давать неверные результаты в случаях, когда в шарнирной схеме рамы есть мгновенная изменяемость. Поэтому при использовании формулы (2) всегда необходимо шарнирные

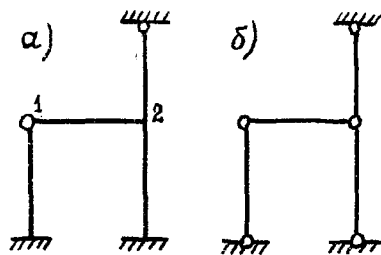


Рис. 4.

схемы систем проверять на мгновенную изменяемость и в случае ее наличия вносить корректировку в получаемые значения Π_{λ} . Учитывая, что этот вариант вычисления Π_{λ} достаточно сложен, им пользоваться не рекомендуется, а предлагается во всех случаях применять первый вариант определения Π_{λ} , который и прост, и надежен.

3. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Основная система метода перемещений получается не отбрасыванием лишних связей, как это делается в методе сил, а наоборот, введением **дополнительных (фиктивных)** связей, закрепляющих узлы от их возможных угловых или линейных смещений, которые были выявлены ранее (при определении степени кинематической неопределимости Π); то есть во все жесткие узлы, которые могут поворачиваться, устанавливаются дополнительные (фиктивные) жесткие заделки, закрепляющие их от поворота, а все узлы (жесткие и шарнирные), которые могут линейно смещаться (Π_{λ}), закрепляются от этих смещений с помощью постановки дополнительных (фиктивных) линейных связей. В качестве неизвестных при этом принимаются перемещения этих дополнительных связей (вместе, конечно, с узлами) и обозначаются они - Z_i ($i = 1 \dots \Pi$). Следует отметить, что дополнительная (фиктивная) заделка в отличие от действительной заделки имеет только одну связь - от поворота, то есть она не закрепляет от линейных смещений.

Для рамы, представленной на рис. 1а, основная система (О.С.) метода перемещений имеет вид, изображенный на рис. 5. Анализ этой О.С. показывает, что узел 1 с учетом установленных дополнительных связей и используемых

допущений (раздел 1) будет вести себя так, будто в нем стоит полная действительная заделка, через которую никакие перемещения не передаются; аналогично узел 2 в О.С. имеет, по существу, шарнирно-неподвижную опору и через него никакие перемещения тоже передаваться не будут.

⊙ Таким образом, анализ показывает, что О.С. метода перемещений является статически неопределимой и, по существу, представляет собой совокупность отдельных независимых друг от друга однопролетных балочек с одним либо двумя защемленными концами вида:

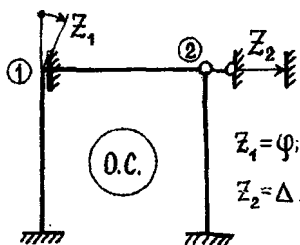


Рис. 5



Рис. 6

При этом изгибающие моменты в О.С. метода перемещений возникают только в тех балочках (только на тех участках), которые непосредственно подвержены какому-либо воздействию. На остальных же участках изгибающие моменты возникать не будут.

Для рамы на рис. 3а основная система (О.С.) метода перемещений представлена рис. 3б.

4. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Таким образом, расчет статически неопределимой системы методом перемещений выполняется с использованием основной системы этого метода, которая должна работать также как исходная система. Для достижения этого на основную систему метода перемещений накладываются соответствующие условия, в качестве которых принимается равенство нулю реакций в дополнительных связях от совместного действия всех неизвестных перемещений и внешних нагрузок, так как в заданной системе этих дополнительных связей нет и, следовательно, реакций в них тем более быть не может. Таким образом, ставится задача подобрать такие значения неизвестных перемещений, при которых от заданных нагрузок реактивные усилия в дополнительных связях должны быть равны нулю, так как этих дополнительных связей в исходной (рассчитываемой) системе нет.

Указанные условия записывают в виде, так называемых, канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{aligned}
 r_{11} z_1 + r_{12} z_2 + r_{13} z_3 + \dots + r_{1k} z_k + \dots + r_{1n} z_n + R_{1p} &= 0; \\
 r_{21} z_1 + r_{22} z_2 + r_{23} z_3 + \dots + r_{2k} z_k + \dots + r_{2n} z_n + R_{2p} &= 0; \\
 \text{-----} & \\
 r_{i1} z_1 + r_{i2} z_2 + r_{i3} z_3 + \dots + r_{ik} z_k + \dots + r_{in} z_n + R_{ip} &= 0; \\
 \text{-----} & \\
 r_{n1} z_1 + r_{n2} z_2 + r_{n3} z_3 + \dots + r_{nk} z_k + \dots + r_{nn} z_n + R_{np} &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Здесь: Z_k ($k = 1..n$) – неизвестные (угловые и линейные) смещения узлов; r_{ik} – реактивное усилие (момент, сила) в i -той дополнительной связи (заделке, линейной связи) от перемещения (углового, линейного) k -той дополнительной связи (заделки, линейной связи) на единичную величину ($z_k = 1$);

R_{ip} – реактивное усилие (момент, сила) в i -той дополнительной связи (заделке, линейной связи) от действия внешней нагрузки.

Физический смысл уравнений (для i -того уравнения): реактивное усилие (момент, сила) в i -той дополнительной связи (заделке, линейной связи) от перемещений всех дополнительных связей (угловых и линейных) z_1, z_2, \dots, z_n и внешней нагрузки равняется нулю, так как этой i -той связи в исходной рассчитываемой системе нет, она фиктивна.

Приведем примеры физического смысла коэффициентов канонических уравнений и уравнений в целом, например, для основной системы метода перемещений, представленной на рис. 3:

r_{11} – реактивный момент в 1-ой дополнительной заделке от ее же поворота на единичный угол;

r_{53} – реактивная сила в 5-ой фиктивной линейной связи от поворота 3-ей фиктивной заделки на угол равный единице;

r_{26} – реактивный момент во 2-ой дополнительной заделке от единичного линейного смещения 6-ой дополнительной линейной связи;

\bar{R}_{4p} – реактивная сила в 4-ой фиктивной линейной связи от действия внешней нагрузки;

3-е уравнение вида: $r_{31} z_1 + r_{32} z_2 + r_{33} z_3 + \dots + r_{3k} z_k + \dots + r_{3n} z_n + R_{3p} = 0$ – реактивный момент в 3-ей дополнительной (фиктивной) заделке от перемещений всех дополнительных связей на величины z_1, z_2, \dots, z_6 и от действия внешней нагрузки равняется нулю, так как в заданной системе (рис. 3а) этой 3-ей заделки нет.

Отметим, что коэффициенты при неизвестных Γ_{ik} , имеющие одинаковые индексы, (r_{11}, r_{22}, \dots) называют **главными**, а остальные – **побочными**; что главные коэффициенты не могут быть отрицательными; что побочные коэффициенты должны удовлетворять теореме о взаимности единичных реакций -- $r_{ik} = r_{ki}$.

5. ТАБЛИЧНЫЕ ЭПЮРЫ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для определения реактивных усилий Γ_{ik} и R_{ip} необходимо уметь определять (строить эпюры) внутренние усилия в основной системе метода перемещений от единичных перемещений дополнительных связей (вместе, конечно, с соответствующими узлами) и от действия внешних нагрузок, после чего величины Γ_{ik} и R_{ip} можно определить из условий статики. Построение же указанных эпюр внутренних усилий, в связи с тем, что О.С. метода перемещений представляет собой совокупность отдельных балочек (участков), совершенно независящих друг от друга, связано с умением рассчитывать эти балочки, которые могут быть двух видов (см. рис. 6).

В качестве внешних воздействий на эти балочки могут выступать:

- повороты заделок;
- линейные: смещения заделок и шарнирных опор;
- силовые факторы (сосредоточенные силы, сосредоточенные моменты, распределенные нагрузки).

Рассмотрим определение внутренних усилий в таких балочках от указанных воздействий на нескольких примерах. Расчет балочек при этом будем выполнять методом сил.

А. Балка, защемленная с одной стороны, шарнирно опертая с другой и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

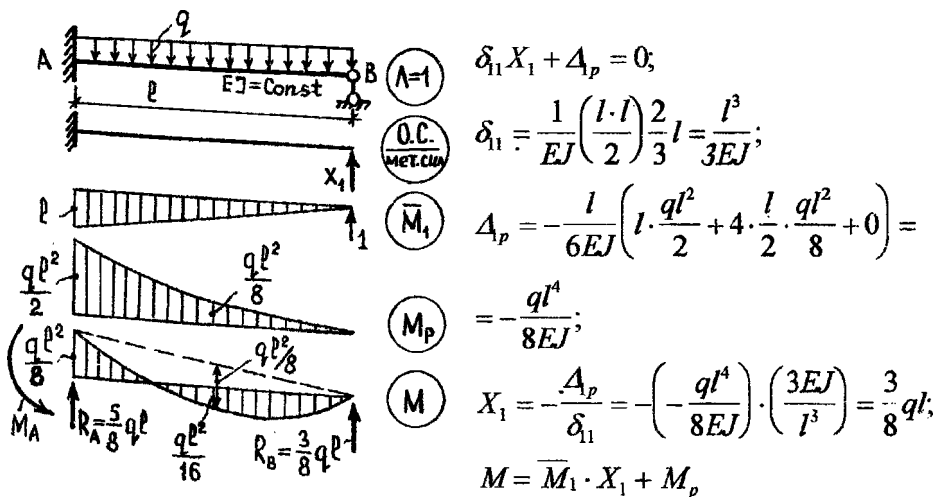
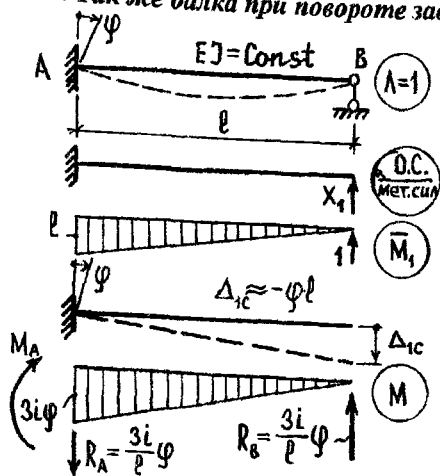


Рис. 7

В. Так же балка при повороте заделки



$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1c} = 0$$

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}; \quad \Delta_{1c} \approx -\varphi \cdot l;$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} = -(-\varphi \cdot l) \cdot \frac{3EJ}{l^3} = \frac{3EJ}{l^2} \varphi;$$

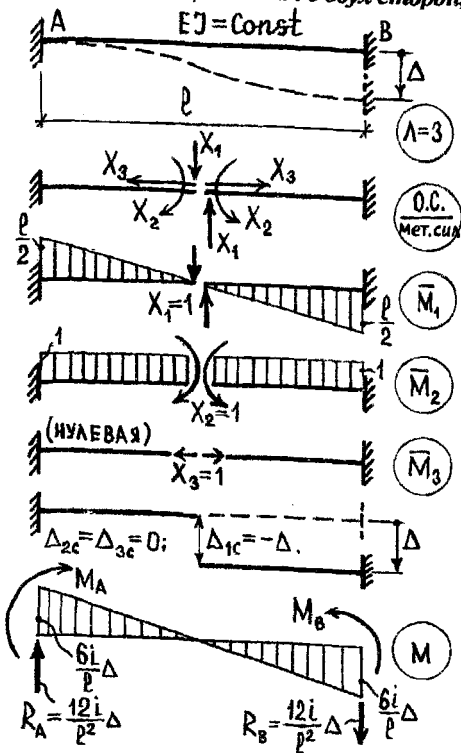
$$M = \overline{M}_1 X_1;$$

$$M_A = l \cdot \frac{3EJ}{l^2} \varphi = \frac{3EJ}{l} \varphi = 3i\varphi,$$

где $i = \frac{EJ}{l}$ — погонная жесткость.

Рис. 8.

С. Балка, защемленная с двух сторон, при линейном смещении одной из опор



X_1 — кососимметричное неизв.;
 X_2, X_3 — симметр. неизв.;
 внешнее воздействие — кососимметричное, поэтому — $X_2 = X_3 = 0$.

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1c} = 0; \quad \Delta_{1c} = -\Delta;$$

$$\delta_{11} = 2 \frac{1}{EJ} \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{2l}{3 \cdot 2} = \frac{l^3}{12EJ};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1c}}{\delta_{11}} = -(-\Delta) \frac{12EJ}{l^3} = \frac{12EJ}{l^3} \Delta;$$

$$M = \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2 + \overline{M}_3 \cdot X_3 = \overline{M}_1 \cdot X_1;$$

$$M_A = -M_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{12EJ}{l^3} \Delta = \frac{6EJ}{l^2} \Delta = \frac{6i}{l} \Delta.$$

Рис. 9

<p>$EJ = \text{Const}$</p>	$M_A = 3i;$ $\bullet \quad \underline{\text{где}} \quad i = \frac{EJ}{l}.$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l};$
	$M_A = \frac{3i}{l};$ $\underline{\text{где}} \quad l = \frac{EJ}{l}.$	$R_A = R_B = \frac{3i}{l^2};$
	$M_A = \frac{ql^2}{8};$ $M^* = \frac{ql^2}{8}; \quad M_{\text{ср}} = \frac{ql^2}{16};$	$R_A = \frac{5}{8} ql;$ $R_B = \frac{3}{8} ql.$
	$M_A = qc \left(a + \frac{c}{2} - l \alpha \right);$ $M_c = qc \left[\frac{c}{2} - (b+c)\alpha \right];$ $M_D = qc b \alpha;$ $\underline{\text{где:}}$ $\alpha = \frac{1}{2l^3} \left[c^2 \left(b + \frac{3}{4}c \right) + la^2 + a(2l-a) \left(l + \frac{c}{2} - b \right) \right].$	$R_A = qc \alpha;$ $R_B = qc(1-\alpha).$
	$M_A = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{2l^2}; \quad M^* = \frac{Pab}{l};$ $M_c = \frac{Pb}{2} \left[\frac{2a}{l} - \frac{b}{l^3} (l^2 - b^2) \right];$ $\text{При } a=b = \frac{l}{2};$ $M_A = \frac{3}{16} Pl; \quad M^* = \frac{Pl}{4}; \quad M_c = \frac{5}{32} Pl; \quad R_A = \frac{11}{16} P; \quad R_B = \frac{5}{16} P.$	$R_A = \frac{Pb(3l^2 - b^2)}{2l^3};$ $R_B = \frac{P\alpha^2(3l - a)}{2l^3}$

	$M_A = \frac{3}{2} Pa \left(1 - \frac{a}{l}\right);$ $M^* = Pa;$ $M_C = Pa \left[\frac{3}{2} \frac{a}{l} \left(2 - \frac{a}{l}\right) - \frac{1}{2} \right];$ $M_B = Pa \left[1 - \frac{3}{2} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \right].$	$R_A = P \left[1 + \frac{3}{2} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \right];$ $R_B = P \left[1 - \frac{3}{2} \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \right].$
	$M_A = \frac{m(l^2 - 3b^2)}{2l^2};$ $M_C^{ab} = \frac{ma}{l} - \frac{b}{l} M_A;$ $M_C^{ba} = \frac{mb}{l} + \frac{b}{l} M_A;$ <p>при $a=b=\frac{l}{2} \Rightarrow M_A = \frac{m}{8}; R_A = R_B = \frac{9}{8} \frac{m}{l}.$</p>	$R_A = R_B = \frac{3m(l^2 - b^2)}{2l^3};$
	$M_A = 4i;$ $M_B = 2i;$	$R_A = R_B = \frac{6i}{l};$ <p><u>где</u> $l = \frac{EJ}{l}$.</p>
	$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$	$R_A = R_B = \frac{12i}{l^2};$ <p><u>где</u> $l = \frac{EJ}{l}$.</p>
	$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12};$ $M^* = \frac{ql^2}{8};$ $M_{cp} = \frac{ql^2}{24};$	$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$

	$M_A = 2qc\ell \left[\frac{1}{2\ell} \left(a + \frac{c}{2} \right) + (\beta - \alpha) \right];$ $M_B = 2qc\ell (\alpha - 2\beta); \quad R_B = 2qc(2\alpha - 3\beta);$ $M_C = 2qc \left[(\ell - 2a)\alpha + (3a - \ell)\beta - \frac{c}{4} \right];$ $M_D = 2qc \left[(2b - \ell)\alpha + (2\ell - 3b)\beta \right];$ $R_A = qc - R_B = qc \left[1 - 2(2\alpha - 3\beta) \right];$ <p><u>где:</u></p> $\beta = \frac{1}{2\ell^2} \left[\frac{c^2}{3} + a(\ell - b) \right];$ $\alpha = \frac{1}{2\ell^3} \left[c^2 \left(b + \frac{3}{4}c \right) + \ell a^2 + a(2\ell - a) \left(\ell + \frac{c}{2} - b \right) \right].$
	$M_A = \frac{Pa\ell^2}{\ell^2}; \quad M_B = \frac{Pb\ell^2}{\ell^2}; \quad R_A = \frac{Pb^2}{\ell^2} \left(1 + \frac{2a}{\ell} \right);$ $M^* = \frac{Pa\ell b}{\ell};$ $M_C = \frac{Pa\ell b}{\ell} \left[1 - \frac{a}{\ell} - \frac{(b-a)b}{\ell^2} \right];$ <p>при $a=b=\frac{\ell}{2}$:</p> $M_A = M_B = M_C = \frac{P\ell}{8}; \quad M^* = \frac{P\ell}{4}; \quad R_A = R_B = \frac{P}{2}.$
	$M_A = M_B = Pa \left(1 - \frac{a}{\ell} \right);$ $M^* = Pa;$ $M_C = M_D = \frac{Pa^2}{\ell}.$ $R_A = R_B = P.$
	$M_A = \frac{mb}{\ell^2} (3a - \ell); \quad M_C^{ab} = \frac{mb}{\ell^3} (\ell^2 - 3a\ell + 6a^2);$ $M_B = \frac{ma}{\ell^2} (3b - \ell); \quad M_C^{ba} = \frac{ma}{\ell^3} (6b^2 + \ell^2 - 3b\ell);$ <p>при $a=b=\frac{\ell}{2}$:</p> $M_A = M_B = \frac{m}{4}; \quad M_C^{ab} = M_C^{ba} = \frac{m}{2}; \quad R_A = R_B = \frac{6ab}{\ell^3} m;$ $R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{m}{\ell}.$

Аналогично можно получить усилия для балочек (рис.6.), из которых может состоять О.С. метода перемещений, и от других воздействий.

Эпюры изгибающих моментов и величины опорных реакции для рассматриваемых балочек от наиболее часто встречающихся воздействий приведены в таблице 1 (см. стр.12-14).

6. ПОСТРОЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ И ГРУЗОВЫХ ЭПЮР В ОСНОВНОЙ СИСТЕМЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Построение единичных и грузовых эпюр внутренних усилий (изгибающих моментов) в основной системе метода перемещений выполняется с использованием готовых (табличных) эпюр усилий для отдельных участков основной системы (см. табл. 1), каждый из которых работает независимо от других, на действующее непосредственно на него воздействие, в соответствии которому табличная эпюра с учетом конкретных параметров данного участка переносится на этот участок. При этом при построении единичных эпюр усилий вначале целесообразно представить схему деформирования основной системы от соответствующего перемещения узла, которая позволяет четко выявить, какие элементы (участки) основной системы работают, как они работают и где волокна элементов растягиваются, а где сжимаются (эпюры изгибающих моментов должны строиться со стороны растянутых волокон). Ординаты единичных эпюр, как видно из табличных эпюр, выражаются через погонные жесткости участков, представляющих собой отношения действительных жесткостей участков к их длинам - $i_{yч} = EJ_{yч} / l_{yч}$, что в случае задания жесткостей участков в общем виде может вызывать некоторые трудности со сравнением ординат единичных эпюр на разных участках. Чтобы избежать этих трудностей, можно поступать по разному:

- можно одну из погонных жесткостей участков выбрать в качестве некоторой общей погонной жесткости i , после чего погонные жесткости остальных участков выразить через эту величину i ; так, для рамы на рис. 10а погонные жесткости участков записываются следующим образом:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{EJ}{h} \quad i_{12} = \frac{EJ_{12}}{l} = \frac{kEJ}{\alpha \cdot h} = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{EJ}{h};$$

и если обозначить

$$EJ/h = i \text{ или } EJ = i \cdot h, \text{ то получим: } i_{01} = i_{23} = i; \quad i_{12} = \frac{k}{\alpha} i$$

(далее в этих методических указаниях используется именно такой подход выражения погонных жесткостей);

- можно записывать погонные жесткости просто через некоторую величину EJ , через которую выражаются жесткости участков $EJ_{yч} = \beta_{yч} EJ$; этом

случае погонные жесткости участков будут выражаться через указанный параметр EJ , и для рамы на рис. 10а будут равны:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{l}{h} EJ; \quad i_{12} = \frac{k}{\alpha h} EJ;$$

– можно для величин i , EJ задаться (произвольно) и некоторыми численными значениями, удобными, с нашей точки зрения, для дальнейших расчетов; это можно сделать в связи с тем, что впоследствии при построении окончательных эпюр внутренних усилий величины i , EJ , общие для всех участков, всё равно сокращаются, поэтому их численные значения не влияют на результаты расчета; для рамы на рис. 10а удобно, например, принять $i = \alpha \cdot h$.

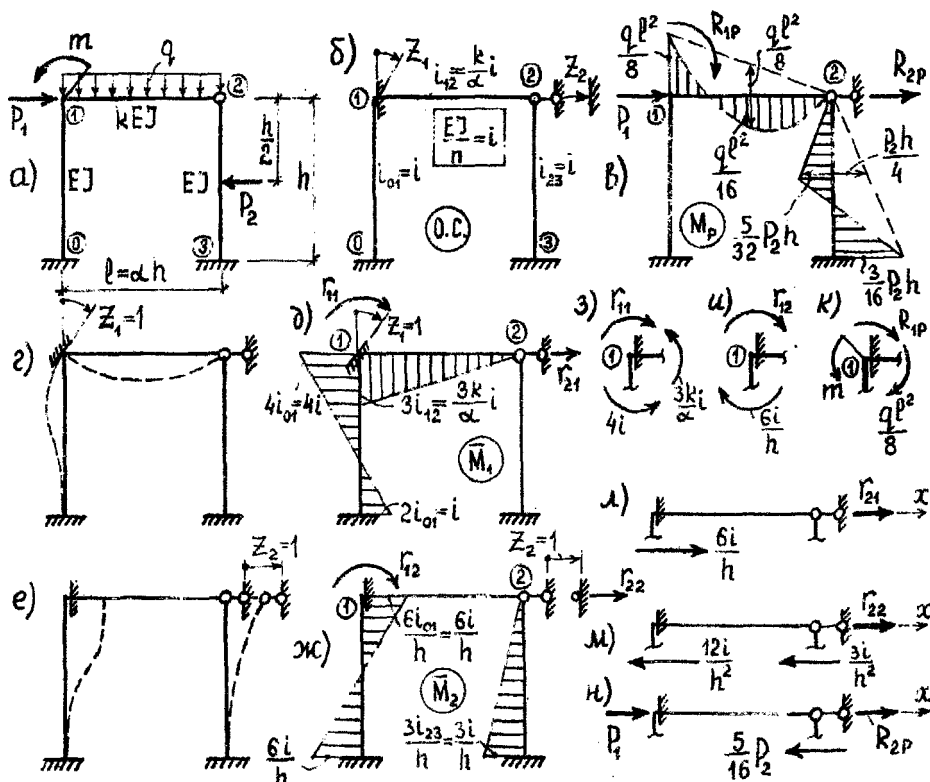


Рис. 10.

Рама, представленная на рис. 10, как определено ранее (рис.1), имеет в методе перемещений два неизвестных (степень ее кинематической неопределимости равна двум) и основная система метода перемещений для нее имеет

вид, показанный на рис. 10б, а единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов (а также соответствующие единичным перемещениям и эпюрам схемы деформаций) представлены на рис. 10в - 10ж.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений метода перемещений r_{ik} и R_{ip} по физическому смыслу, как уже отмечалось, могут быть двух видов - реактивные моменты в дополнительных заделках и реактивные силы в дополнительных линейных связях. Их определение, как и определение любых реакций, может быть выполнено на основе уравнений равновесия либо всей системы, либо какой-то ее части (статический способ). Как показывает опыт, удобнее рассматривать равновесие отдельных частей основной системы метода перемещений, находящейся под тем воздействием, от которого определяется искомое реактивное усилие. При этом для реактивных усилий в дополнительных связях в методе перемещений применяется следующее правило знаков - реактивное усилие считается положительным, если его направление совпадает с направлением перемещения соответствующей дополнительной связи. При определении неизвестных реактивных усилий следует всегда направлять в положительных направлениях, используя их в дальнейшем с полученными знаками.

В соответствии с изложенным, определение величин r_{ik} и R_{ip} , представляющих по смыслу реактивные моменты в заделках, удобнее всего выполнять на основе рассмотрения равновесия узлов, в которых установлены соответствующие дополнительные заделки, предварительно вырезав эти узлы; в качестве уравнений равновесия при этом составляются суммы всех моментов, действующих на узлы, включая внешние сосредоточенные моменты и внутренние изгибающие моменты в сечениях, с помощью которых узлы вырезаются; из этих уравнений и определяются искомые реактивные моменты в заделках.

Так, для рамы на рис. 10 при определении коэффициента r_{11} , представляющего собой реактивный момент в 1-ой дополнительной заделке от ее же поворота на единичный угол, необходимо вырезать узел 1 из эпюры \overline{M}_1 (построенной от поворота 1-ой заделки на единичный угол) (см. рис. 10з), из равновесия которого получим:

$$\sum M_1 = 0; \quad r_{11} - 4i - \frac{3k}{\alpha}i = 0; \quad r_{11} = 4i + \frac{3k}{\alpha}i;$$

коэффициент r_{12} найдем из вырезания узла 1 на эпюре \overline{M}_2 (рис. 10и):

$$\sum M_1 = 0; \quad r_{12} + \frac{6i}{h} = 0; \quad r_{12} = -\frac{6i}{h};$$

для определений свободного члена R_{1p} необходимо вырезать 1-ый узел на эпюре M_p (рис. 10к):

$$\sum M_1 = 0; \quad R_{1p} + \frac{ql^2}{8} - m = 0; \quad R_{1p} = m - \frac{ql^2}{8}.$$

Таким образом, первый индекс искомого коэффициента или свободного члена здесь, по существу, показывает номер узла, который надо вырезать для определения этого коэффициента или свободного члена, а второй индекс указывает на эпюру, из которой этот узел надо вырезать.

Казалось бы, что и коэффициенты (свободные члены) канонических уравнений, представляющие по смыслу реактивные силы в дополнительных линейных связях, также будет удобно определять из вырезания узлов, в которых эти связи установлены. Но оказывается это не совсем так. Например, для определения коэффициента r_{22} , являющегося реактивной силой во 2-ой дополнительной линейной связи от ее же единичного смещения, можно, конечно, вырезать узел 2 на эпюре \bar{M}_2 (рис. 11); в результате чего получим:

$$\sum X = 0; \quad r_{22} - Q_{23} - N_{12} = 0; \quad r_{22} = Q_{23} + N_{12}.$$

Величину Q_{23} легко определить по эпюре \bar{M}_2 , используя, например, формулу

$$Q = Q_0 \pm \left| \frac{M_{np} - M_{лев}}{l} \right|, \quad (4)$$

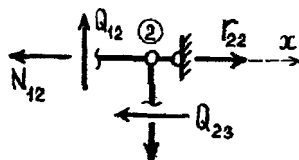


Рис. 11

где: Q_0 учитывает действие распределенной нагрузки q на участке, т.е. это эпюра (закоп изменения) поперечных сил на участке, как в простой двухопорной балке (если q нет, то $Q_0 = 0$); M_{np} , $M_{лев}$ - ординаты изгибающих моментов справа и слева по концам участка; l - длина участка; знак перед абсолютной величиной принимается по следующему правилу: если стержень, на котором построена рассматриваемая эпюра M , для совмещения его с прямой, соединяющей ординаты M_{np} и $M_{лев}$, по кратчайшему пути необходимо поворачивать по часовой стрелке, то принимается знак "+", если против часовой стрелки, то знак "-". В результате получим:

$$Q_{23} = 0 + \left| \frac{3i/h - 0}{h} \right| = \frac{3i}{h^2}.$$

Следует заметить, что величину Q_{23} можно получить и через опорную реакцию в стержне 2-3 от действия заданного смещения $Z_2 = 1$, учитывая, что поперечная сила в приопорном сечении равна по величине реакции соответ-

вующей опоры, которая представлена в табличных эпюрах; знак же поперечной силы при этом определяется по обычному правилу знаков для Q или по эпюре M . Для определения же величины продольной силы N_{12} в стержне 1-2 необходимо вначале по эпюре \overline{M}_2 , используя формулу (4), построить эпюру поперечных сил \overline{Q}_2 , после чего можно будет найти из вырезания узлов величину N_{1-2} ; этот процесс, как видим, достаточно трудоемок.

Проще будет процедура определения коэффициентов r_{ik} , R_{ip} , представляющих собой реакции в линейных связях, если вырезать не узлы, а части основной системы метода перемещений таким образом, чтобы в уравнения равновесия этих частей, используемые для определения r_{ik} , R_{ip} , входили только поперечные силы; при этом в качестве уравнений равновесия удобнее всего использовать сумму проекций сил на ось, параллельную искомой реактивной силе.

Так, для определения коэффициента r_{21} удобно вырезать из эпюры \overline{M}_1 верхнюю часть, показанную на рис. 10л, из рассмотрения равновесия которой получим

$$\sum X = 0; \quad r_{21} + \frac{6i}{h} = 0; \quad r_{21} = -\frac{6i}{h}.$$

Аналогично найдем также коэффициент r_{22} (рис. 10м) и свободный член R_{2p} (рис. 10н), вырезав соответствующие части основной системы из эпюр \overline{M}_2 и M_p :

$$\sum X = 0; \quad r_{22} - \frac{12i}{h^2} = \frac{3i}{h^2} = 0; \quad r_{22} = \frac{15i}{h^2};$$

$$\sum X = 0; \quad R_{2p} + P_1 - \frac{5}{16} P_2 = 0; \quad R_{2p} = \frac{5}{16} P_2 - P_1.$$

Следует отметить, что значения r_{ik} и R_{ip} можно определить и с помощью формулы Мора [1]. При этом величины коэффициентов r_{ik} вычисляются по формулам:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_k}{EJ} \cdot ds; \quad r_{ii} = \sum \int \frac{\overline{M}_i^2}{EJ} \cdot ds; \quad (5)$$

а величины свободных членов R_{ip} по формуле

$$R_{ip} = -\sum \int \frac{\overline{M}_i \cdot M'_p}{EJ} \cdot ds, \quad (6)$$

где M'_p – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или основной системы метода перемещений удалением лишних связей и в том числе обязательной той связи, реакция которой определяется.

Вычислим таким способом для рассматриваемого примера (рис. 10), например, коэффициенты r_{12} , r_{22} и свободный член R_{1p} . Единичные эпюры в О.С. метода перемещений показаны на рис.10, а один из возможных вариантов эпюры M'_p - на рис.12. Учитывая, что

$$\frac{h}{EJ} = \frac{l}{i} \text{ а } \frac{l}{kJ} = \frac{\alpha h}{kJ} = \frac{\alpha}{ki}, \text{ получим:}$$

$$r_{12} = r_{21} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left(-\frac{6i}{h} \cdot 2i - 4i \cdot \frac{6i}{h} \right) = -\frac{6i}{h};$$

$$r_{22} = \sum \int \frac{\overline{M}_2^2 ds}{EJ} = \frac{h}{6EJ} \left[\left(\frac{6i}{h} \right)^2 + \left(\frac{6i}{h} \right)^2 \right] + \frac{h}{6EJ} \left[\left(\frac{3i}{h} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1,5i}{h} \right)^2 \right] = \frac{15i}{h^2};$$

$$R_{1p} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M'_p ds}{EJ} = -\frac{l}{6kJ} \left(4 \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{15ki}{\alpha} \right) = -\frac{\alpha}{6ki} \left(\frac{ql^2}{2} \cdot 1,5 \frac{ki}{\alpha} \right) = -\frac{ql^2}{8};$$

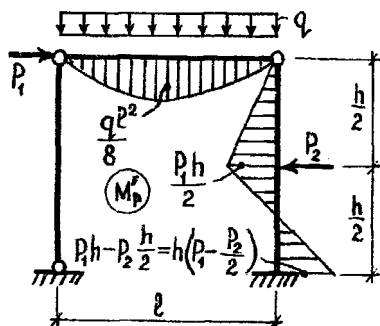


Рис. 12

вычисленные здесь значения совпадают с найденными ранее статическим способом.

8. ПРОВЕРКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Проверка правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода перемещений выполняется аналогично проверке коэффициентов уравнений в методе сил. При этом для выполнения проверок должна быть построена единичная суммарная эпюра \overline{M}_s , т.е. эпюра, представляющая сумму всех единичных эпюр \overline{M}_i в основной системе метода перемещений:

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 + \dots + \overline{M}_n. \quad (7)$$

После этого в методе перемещений могут быть выполнены следующие проверки:

а) универсальная проверка

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^2 ds}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n r_{ik}, \quad (8)$$

где $\sum \sum r_{ik}$ – сумма всех единичных коэффициентов метода перемещений, т.е. сумма коэффициентов по всем уравнениям метода перемещений

$$\sum \sum r_{ik} = (r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}) + (r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n}) + \dots + (r_{n1} + r_{n2} + \dots + r_{nm}).$$

Если универсальная проверка выполняется, то это подтверждает правильность вычислений единичных коэффициентов; если же универсальная проверка не выполняется, то для выяснения, в какой группе единичных коэффициентов находится ошибка, можно сделать так называемые построчные проверки.

б) построчные проверки, т.е. проверки коэффициентов, входящих соответственно в 1-ое, 2-ое, ... n-ое уравнения метода перемещений

$$\sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_s ds}{EJ} = \sum_{k=1}^n r_{ik}, \quad (i = 1 \dots n). \quad (9)$$

Здесь: $\sum r_{ik}$ – сумма коэффициентов, входящих в i-тое уравнение метода перемещений.

Таких проверок, как видно, может быть n; какие-то из них будут выполняться (значит соответствующие коэффициенты вычислены верно), а какие-то – нет; анализ этих результатов позволяет выявить те коэффициенты, при вычислениях которых допущены ошибки.

Заметим, что если универсальная проверка выполняется, то необходимости в построчных проверках нет.

в) столбцовая проверка – служит для проверки грузовых коэффициентов и выполняется по формуле:

$$- \sum \int \frac{\overline{M}_s M'_p ds}{EJ} = \sum_{i=1}^n R_{ip}, \quad (10)$$

где: $R_{ip} = R_{1p} + R_{2p} + \dots + R_{np}$ – сумма всех грузовых коэффициентов;

M'_p – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или основной системы метода перемещений путем отбрасывания лишних связей, в том числе обязательно дополнительных (фиктивных) связей, в которых определяются реакции R_{ip} (см., например, рис. 12).

9. ПОСТРОЕНИЕ ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ И ИХ ПРОВЕРКИ

Найденные значения единичных и грузовых коэффициентов подставляются в систему канонических уравнений метода перемещений (3), решая которую определим неизвестные метода перемещений Z_i ($i = 1 \dots n$). После этого

окончательная эпюра изгибающих моментов может быть построена на основе принципа независимости перемещений по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_p. \quad (11)$$

Окончательная эпюра поперечных сил строится по эпюре M (11) с использованием формулы (4). Окончательная эпюра продольных сил строится по эпюре Q способом вырезания узлов. Для подтверждения правильности расчета и построения окончательных эпюр M , Q и N выполняются следующие проверки:

а) проверка равновесия узлов на эпюре M ; эта проверка при расчете рамы методом перемещений имеет важное значение, так как на единичных (\overline{M}_i) и грузовых (M_p) эпюрах в О.С. метода перемещений без учета дополнительных заделок (которых в заданной системе действительно нет) равновесие узлов не выполняется; в окончательной же эпюре M равновесие узлов должно выполняться.

б) деформационная (кинематическая) проверка эпюры M ; эта проверка здесь производится также, как и методе сил; но здесь для ее выполнения вначале необходимо для заданной системы выбрать основную систему метода сил (предварительно определив число лишних связей), в которой необходимо построить суммарную единичную эпюру $\overline{M}_s^{м.сил}$ от единичных значений всех неизвестных метода сил (или хотя бы одну из единичных эпюр $\overline{M}_i^{м.сил}$, которая охватывала бы максимальное число участков системы); после этого деформационная проверка выполняется по формуле

$$\sum \int \frac{\overline{M}_s^{м.сил} \cdot M \cdot ds}{EJ} = 0 \quad \left(\text{или} \sum \int \frac{\overline{M}_i^{м.сил} \cdot M \cdot ds}{EJ} = 0 \right). \quad (12)$$

Физический смысл этой проверки здесь такой же, как и в методе сил.

в) проверка равновесия узлов при построении эпюры N по эпюре Q ; эпюра N строится, как уже отмечалось, по эпюре Q способом вырезания узлов, т.е. продольные силы находятся из уравнений равновесия (уравнений проекций на две любые оси) сил в узлах; соблюдение равновесия всех узлов при этом свидетельствует о правильности расчета; если же хотя бы в одном из узлов хотя бы одно из уравнений равновесия не будет выполняться, то это значит, что в расчете допущена ошибка; чаще всего эта ошибка бывает связана с неверным определением коэффициентов или свободных членов, представляющих собой реактивные силы в линейных дополнительных связях.

г) статическая проверка; выполняется также, как и в методе сил, то есть вычисляются суммы проекций всех внешних нагрузок и опорных реакций на две любые оси и сумма моментов этих же сил и опорных реакций относительно любой точки, которые должны быть равны нулю.

10. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассмотрим раму, изображенную на рис. 13а; степень кинематической неопределимости ее равна трем ($n = n_y + n_n = 2 + 1 = 3$); основная система метода перемещений представлена на рис. 13б; погонные жесткости участков

$$i_{01} = \frac{EJ}{2}; \quad i_{12} = i_{24} = i_{35} = \frac{EJ}{4}; \quad i_{23} = \frac{EJ}{6}$$

удобно выразить через общую для всех участков величину $i = \frac{EJ}{12}$ ($EJ = 12i$),

с учетом которой получим: $i_{01} = 6i$; $i_{12} = i_{24} = i_{35} = 3i$; $i_{23} = 2i$; (для наглядности эти погонные жесткости участков удобно показать на основной системе метода перемещений (рис. 13б); единичные эпюры изгибающих моментов в основной системе метода перемещений $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ построены на основе схем деформаций О.С. от перемещений узлов Z_1, Z_2, Z_3 единичной величины (рис. 13в, 13е, 13и) с использованием табличных эпюр (табл.1) и показаны соответственно на рис. 13г, 13ж, 13к; единичные коэффициенты канонических уравнений определяются статическим способом: реактивные моменты r_{1K}, r_{2K} — из вырезания узлов 1 и 2 на эпюрах \overline{M}_K , а реактивные силы r_{3K} — из вырезания верхней части рамы на эпюрах \overline{M}_K — см. рис. 13д, 13з, 13л:

- рис. 13д:	$\Sigma M_1 = 0;$	$r_{11} - 12i - 18i = 0;$	$r_{11} = 30i;$
	$\Sigma M_2 = 0;$	$r_{21} - 6i = 0;$	$r_{21} = 6i;$
	$\Sigma X = 0;$	$r_{31} + 9i = 0;$	$r_{31} = -9i;$
- рис. 13з:	$\Sigma M_1 = 0;$	$r_{12} - 6i = 0;$	$r_{12} = 6i;$
	$\Sigma M_2 = 0;$	$r_{22} - 6i - 12i - 12i = 0;$	$r_{22} = 30i;$
	$\Sigma X = 0;$	$r_{32} + 4,5i = 0;$	$r_{32} = -4,5i;$
- рис. 13л:	$\Sigma M_1 = 0;$	$r_{13} + 9i = 0;$	$r_{13} = -9i;$
	$\Sigma M_2 = 0;$	$r_{23} + 4,5i = 0;$	$r_{23} = -4,5i;$
	$\Sigma X = 0;$	$r_{33} - 4,5i - 2,25i - 0,5625i = 0;$	$r_{33} = 7,3125i.$

Грузовая эпюра M_p в основной системе метода перемещений представлена на рис. 14а. Грузовые коэффициенты (свободные члены уравнений) определяются по аналогии с единичными (см. рис 14б):

$\Sigma M_1 = 0;$	$R_{1p} + 8 - 3 = 0;$	$R_{1p} = -5;$
$\Sigma M_2 = 0;$	$R_{2p} - 8 - 3 = 0;$	$R_{2p} = 11;$
$\Sigma X = 0;$	$R_{3p} + 2,5 - 6 = 0;$	$R_{3p} = 3,5.$

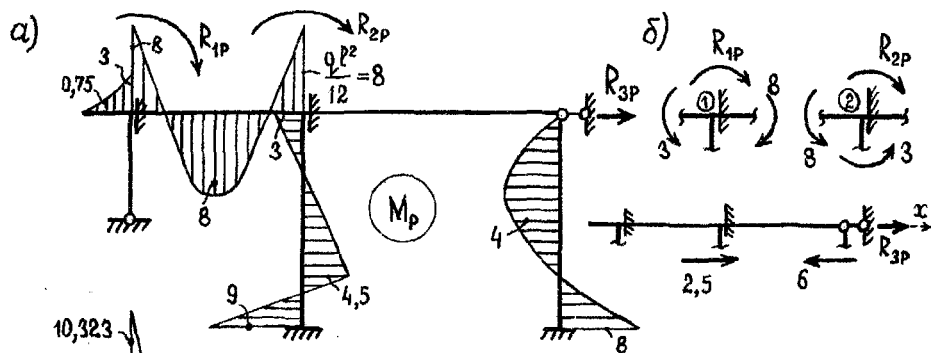


Рис. 14

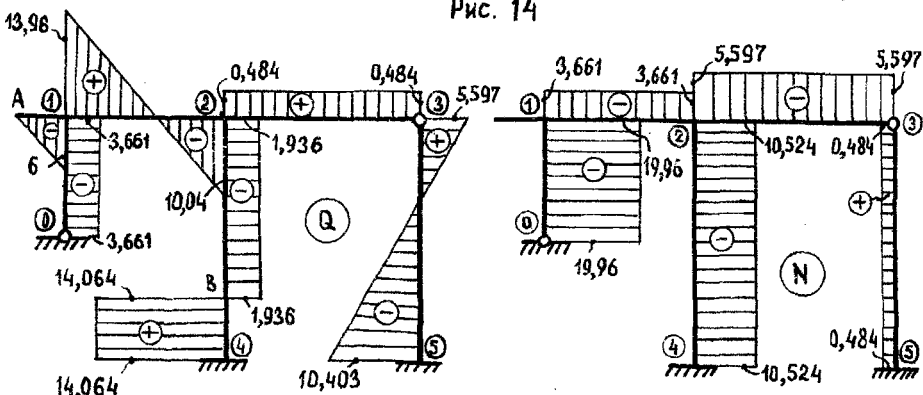
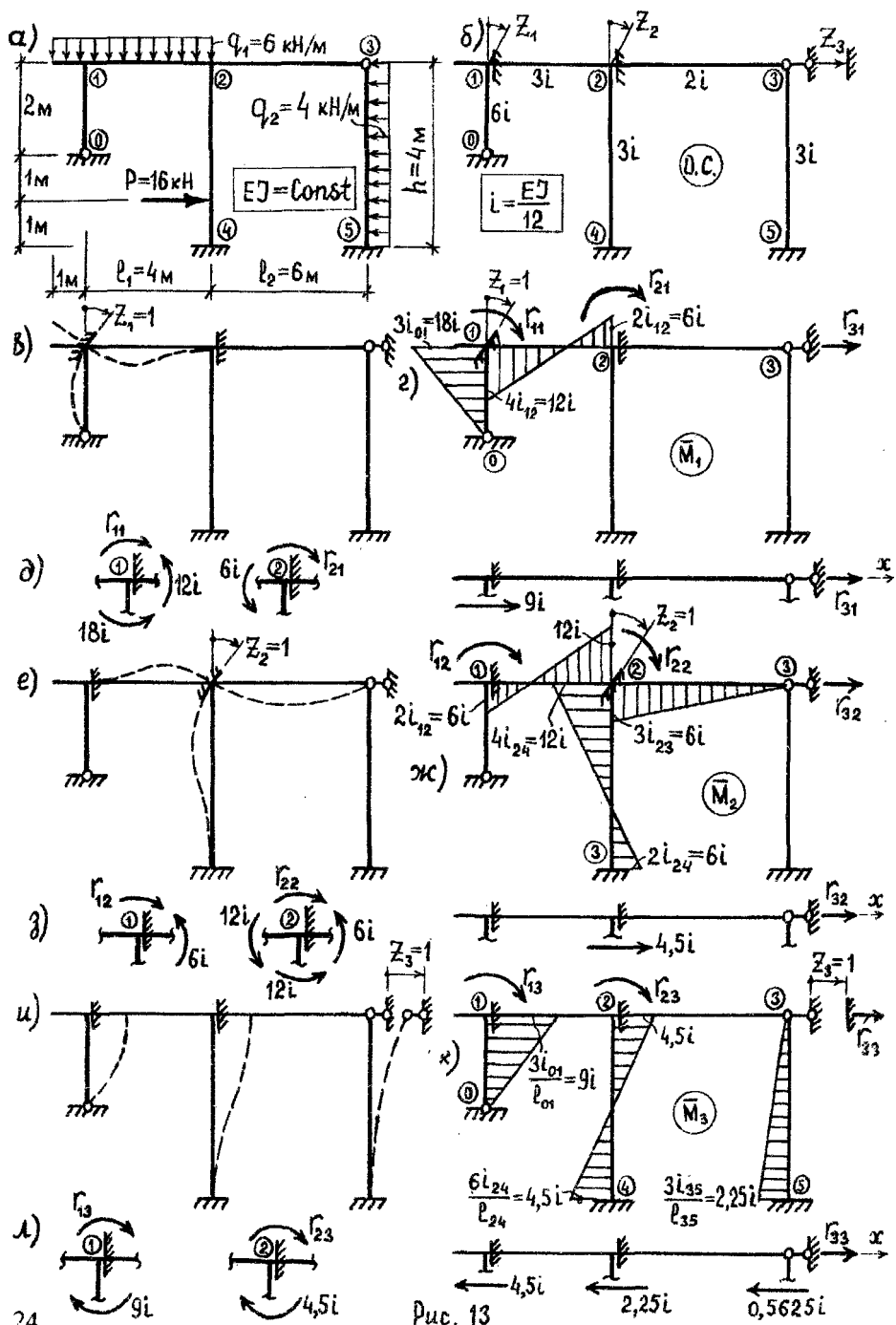


Рис. 15

Рис. 16



После подстановки найденных значений единичных коэффициентов и свободных членов в систему уравнений (3) получим ее в виде:

$$\begin{cases} 30i \cdot Z_1 + 6i \cdot Z_2 - 9i \cdot Z_3 - 5 = 0; \\ 6i \cdot Z_1 + 30i \cdot Z_2 - 4,5i \cdot Z_3 + 11 = 0; \\ -9i \cdot Z_1 - 4,5i \cdot Z_2 + 7,3125i \cdot Z_3 + 3,5 = 0; \end{cases}$$

решив эту систему уравнений, найдем неизвестные перемещения узлов системы

$$z_1 = \frac{0,0484}{i}; \quad z_2 = -\frac{0,4839}{i}; \quad z_3 = \frac{0,7169}{i},$$

после чего окончательная эпюра изгибающих моментов строится по формуле

$$M = \overline{M}_1 \cdot Z_1 + \overline{M}_2 \cdot Z_2 + \overline{M}_3 \cdot Z_3 + M_p$$

и будет иметь вид, представленный на рис. 14в; на рис. 14г показано равновесие узлов 1 и 2 на окончательной эпюре M .

Для выполнения деформационной проверки эпюры M выберем для заданной рамы, имеющей четыре лишние связи ($\Pi=4$), основную систему метода сил в виде, показанном на рис. 14д; суммарная единичная эпюра $\overline{M}_s^{м.сил}$, построенная сразу от всех неизвестных $X_1 \dots X_4$ единичной величины, показана на рис. 14е; тогда деформационная проверка запишется в виде:

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\overline{M}_s^{м.сил} \cdot M ds}{EJ} &= 0; \quad \frac{1}{EJ} \left[\frac{7,323 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} (10,323 \cdot 2 + 4 \cdot 5,597 \cdot 0 - 2 \cdot 2,484) + \right. \\ &+ \left. \frac{2,903 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6} (4 \cdot 2 \cdot 3,194 - 9,613 \cdot 4) - (8 \cdot 3) \cdot \frac{5,387 - 0,419}{2} + (8 \cdot 1) \cdot \frac{8,677 - 5,387}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{EJ} (9,764 + 13,764 - 3,312 + 34,838 + 17,032 - 25,634 - 59,612 + 13,161) = \\ &= \frac{1}{EJ} (88,559 - 88,558) \approx 0. \end{aligned}$$

Эпюру поперечных сил Q построим, вычислив на участках непрерывно-го изменения эпюры M значения Q по формуле (4):

$$Q_{01} = -\left| \frac{7,323 - 0}{2} \right| = -3,661 \text{ (кН)}; \quad Q_{A_j}^{лев} = +\frac{6 \cdot 1}{2} - \left| \frac{3 - 0}{1} \right| = 0;$$

$$Q_{A_1}^{прав} = -\frac{6 \cdot 1}{2} - \left| \frac{3 - 0}{1} \right| = -6 \text{ (кН)};$$

$$Q_{12}^{лев} = \frac{6 \cdot 4}{2} + \left| \frac{10,323 - 2,484}{4} \right| = 12 + 1,96 = 13,96 \text{ (кН)};$$

$$Q_{12}^{прав.} = -\frac{6 \cdot 4}{2} + \left| \frac{10,323 - 2,484}{4} \right| = -10,04 \text{ (кН)};$$

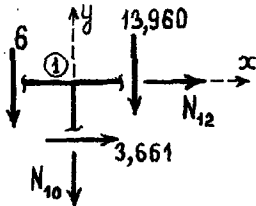
$$Q_{23} = +\left| \frac{2,903 - 0}{6} \right| = 0,484 \text{ (кН)}; \quad Q_{4B} = +\left| \frac{8,677 - (-5,387)}{1} \right| = 14,064 \text{ (кН)};$$

$$Q_{B2} = \left| \frac{5,387 - (-0,419)}{3} \right| = -1,936 \text{ (кН)}; \quad Q_{35}^{лев.} = +\frac{4 \cdot 4}{2} - \left| \frac{9,613 - 0}{4} \right| = 8 - 2,403 = 5,597 \text{ (кН)};$$

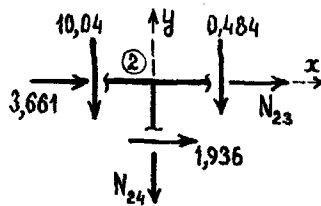
$$Q_{35}^{прав.} = -\frac{4 \cdot 4}{2} - \left| \frac{9,613 - 0}{4} \right| = -10,403 \text{ (кН)}.$$

Эпюру продольных сил N построим способом вырезания узлов (из эпюры поперечных сил Q):

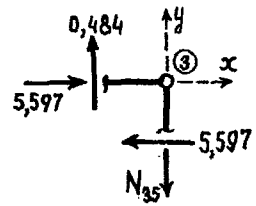
Узел 1



Узел 2



Узел 3

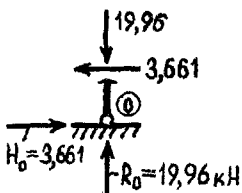


$$\Sigma X=0; N_{12} = -3,661 \text{ (кН)}; \quad \Sigma X=0; N_{23} = -5,597 \text{ (кН)}; \quad \Sigma X=0; 5,597 - 5,597 = 0;$$

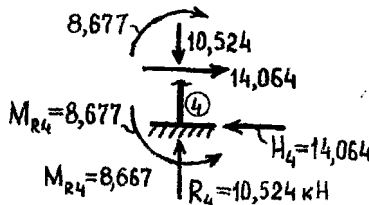
$$\Sigma Y=0; N_{10} = -19,96 \text{ (кН)}; \quad \Sigma Y=0; N_{24} = -10,524 \text{ (кН)}; \quad \Sigma Y=0; N_{35} = +0,484 \text{ (кН)}.$$

Вырезав опорные узлы, определим опорные реакции:

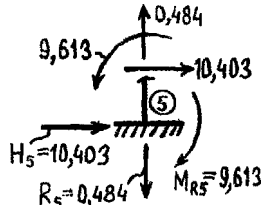
Узел 0



Узел 4



Узел 5



Статическая проверка:

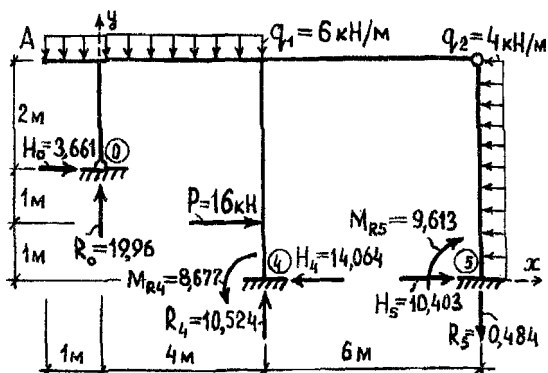


Рис.17

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0; 3,661 - 14,064 + 10,403 - \\ & - 4 \cdot 4 + 16 = 0; 30,064 - \\ & - 30,064 = 0; \\ \Sigma Y &= 0; 19,96 + 10,524 - 0,484 - \\ & - 6 \cdot 5 = 0; 30,484 - \\ & - 30,484 = 0; \\ \Sigma M_A &= 0; 6 \cdot 5 \cdot 2,5 - 16 \cdot 3 + \\ & + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 3,661 \cdot 2 + \\ & + 14,064 \cdot 4 - 10,403 \cdot 4 - \\ & - 19,96 \cdot 1 - 10,524 \cdot 5 + \\ & + 0,484 \cdot 11 - 8,667 + \\ & + 9,613 = 0 \\ & 178,193 - 178,191 \approx 0 \end{aligned}$$

Все проверки выполняются. Рама рассчитана верно.

11. УПРОЩЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТАХ СИММЕТРИЧНЫХ РАМ

Симметричными называют рамы, которые обладают симметрией относительно некоторой оси (оси симметрии) в конфигурации стержней, в расположении опорных связей и в жесткостях стержней.

При расчете симметричных рам методом перемещений следует применять и использовать все те же подходы, приводящие к упрощениям, что и в методе сил.

Основная система метода перемещений при расчете симметричных рам должна удовлетворять всем условиям симметрии, включая разделение всех неизвестных перемещений на симметричные и кососимметричные (обратносимметричные); при этом неизвестные, не удовлетворяющие условиям симметрии, необходимо сгруппировать. В результате система канонических уравнений метода перемещений распадется на две независимые системы, в одну из которых будут входить только симметричные, а во вторую – только кососимметричные неизвестные.

Если на раму при этом будет действовать симметричная (кососимметричная) внешняя нагрузка, то все кососимметричные (симметричные) неизвестные, как и в методе сил, обратятся в нуль.

Рассмотрим, например, симметричную раму, изображенную на рис. 18а, степень кинематической неопределимости которой равна пяти ($n = n_y + n_x = 2 + 3 = 5$). Основная система для этой рамы в общем случае представлена на рис. 18б, а с учетом группировки неизвестных

$$\begin{cases} z'_1 = z_1 + z_2; \\ z'_2 = z_1 - z_2; \end{cases} \quad \begin{cases} z'_4 = z_4 + z_5; \\ z'_5 = z_4 - z_5; \end{cases} \quad z'_3 = z_3$$

на рис. 18в. В результате будем иметь два симметричных (z_2, z_4) и три кососимметричных (z_1, z_3, z_5) неизвестных.

Общая система уравнений при этом распадается на две независимые системы вида

$$\begin{cases} r_{22} \cdot z_2 + r_{24} \cdot z_4 + R_{2P} = 0; \\ r_{42} \cdot z_2 + r_{44} \cdot z_4 + R_{4P} = 0; \end{cases} \quad (13) \quad \begin{cases} r_{11} \cdot z_1 + r_{13} \cdot z_3 + r_{15} \cdot z_5 + R_{1P} = 0; \\ r_{31} \cdot z_1 + r_{33} \cdot z_3 + r_{35} \cdot z_5 + R_{3P} = 0; \\ r_{51} \cdot z_1 + r_{33} \cdot z_3 + r_{55} \cdot z_5 + R_{5P} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

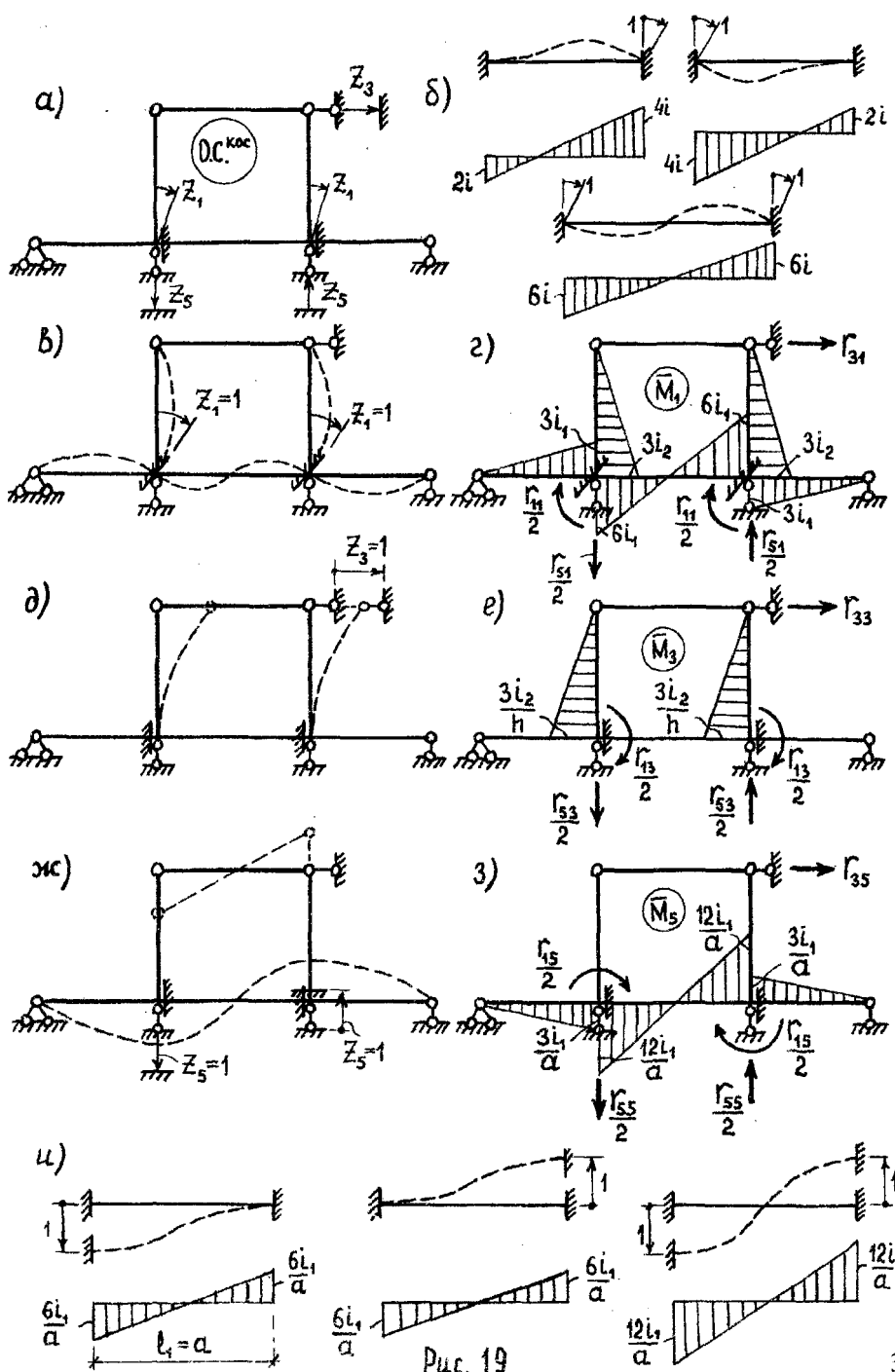
При симметричном нагружении рамы все кососимметричные неизвестные будут равны нулю, т.е. $z_1 = z_3 = z_5 = 0$, останутся только симметричные неизвестные z_2, z_4 и основная система метода перемещений примет вид, показанный на рис. 18 г. Единичные эпюры изгибающих моментов при этом и соответствующие им схемы деформаций показаны на рис. 18д - 18з (построение эпюры \overline{M}_2 на среднем участке нижнего стержня сразу от двух поворотов заделок навстречу друг другу показано на рис. 18и). Значения единичных коэффициентов в этом случае будут:

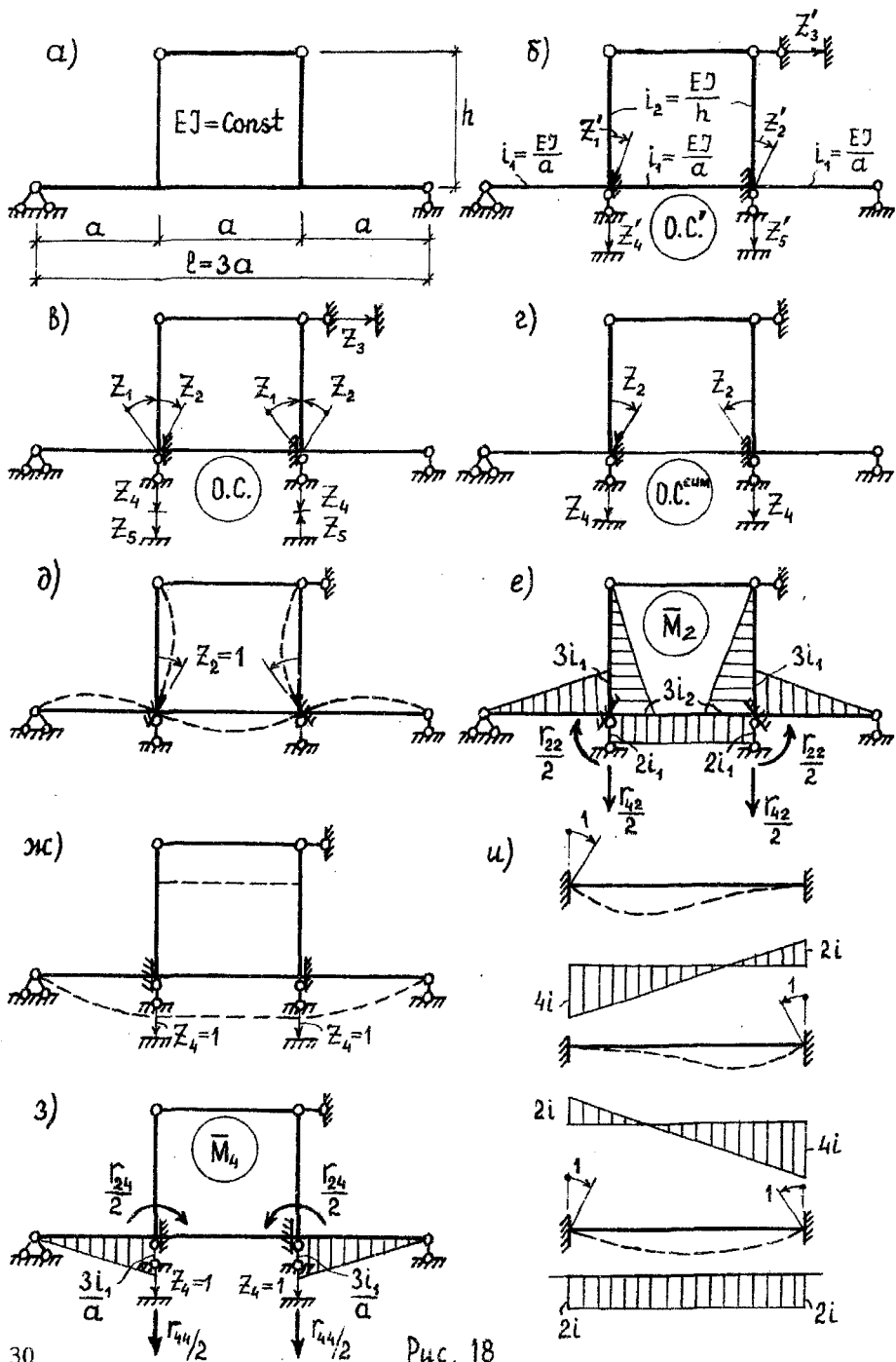
$$r_{22} = 10i_1 + 6i_2; \quad r_{24} = r_{42} = -\frac{6i_1}{a}; \quad r_{44} = \frac{6i_1}{a^2}.$$

При кососимметричной внешней нагрузке на раму на рис. 18а все симметричные неизвестные станут равны нулю ($z_2 = z_4 = 0$), останутся неизвестными перемещения z_1, z_3, z_5 и основная система метода перемещений примет вид, показанный на рис. 19а. Единичные эпюры изгибающих моментов и соответствующие им схемы деформаций показаны на рис. 19в - 19з (при этом построение эпюр \overline{M}_1 и \overline{M}_5 на среднем нижнем стержне от одновременного поворота двух заделок по часовой стрелке и их смещения в противоположные стороны представлены на рис. 19б, 19и). Значения единичных коэффициентов здесь будут равны:

$$r_{11} = 18i_1 + 6i_2; \quad r_{13} = r_{31} = -\frac{6i_2}{h}; \quad r_{15} = r_{51} = -\frac{18i_1}{a};$$

$$r_{33} = -\frac{6i_2}{h^2}; \quad r_{35} = r_{53} = 0; \quad r_{55} = \frac{54i_1}{a^2}.$$





12. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА РАМ С НАКЛОННЫМИ СТЕРЖНЯМИ

При наличии в рамах наклонных стержней, как, например, в раме на рис. 20а, их расчет методом перемещений будет иметь некоторые особенности в сравнении с расчетом рам только с вертикальными и горизонтальными стержнями. Эти особенности связаны с построением единичных эпюр изгибающих моментов от линейных смещений дополнительных линейных связей и с определением реакций в этих линейных связях.

В рамах с наклонными стержнями при действии единичных линейных смещений дополнительных линейных связей деформирование основной системы метода перемещений может быть несколько сложнее, чем в рамах только с вертикальными и горизонтальными стержнями, причем некоторые узлы здесь могут смещаться на величину, отличную от единичной. Величины смещения узлов определяются на основе геометрических расчетов, выполняемых для возможной схемы деформирования системы с учетом принятых допущений (см. разд. 1) и с учетом того, что вектор перемещений точек при повороте стержней направлен перпендикулярно стержням.

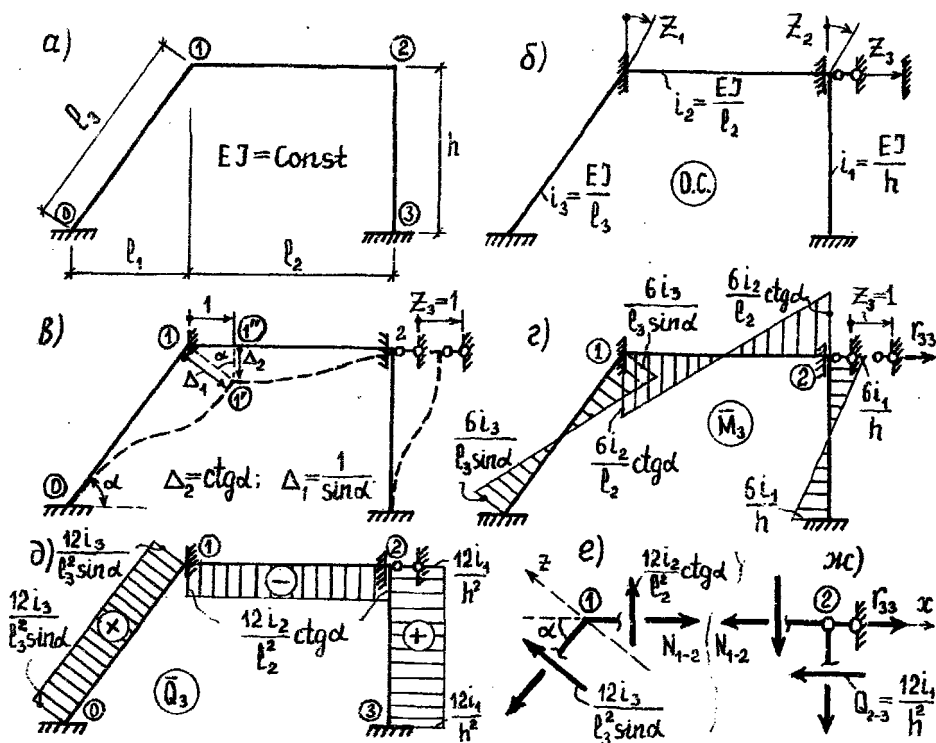


Рис. 20

Например, для рамы на рис. 20а, имеющей в методе перемещений три неизвестных ($n = n_y + n_n = 2 + 1 = 3$), деформации основной системы, представленной на рис. 20б, от линейного смещения $z_3 = l$ будут иметь вид, показанный на рис. 20в. При этом смещение узла 1 перпендикулярно стержню 0-1, от действия которого строится эюра $\overline{M_3}$ в этом стержне, из рассмотрения треугольника 1-1'-1'' равно

$$\frac{l}{\Delta_1} = \sin \alpha; \quad \Delta_1 = \frac{l}{\sin \alpha};$$

смещение же узла 1 по вертикали, от которого строится эюра $\overline{M_3}$ на участке 1-2, равно

$$\frac{l}{\Delta_2} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \Delta_2 = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

В итоге эюра M_3 будет иметь вид, представленный на рис. 20г.

Анализ возможных вариантов определения коэффициента r_{33} , представляющего собой реактивную силу в дополнительной линейной связи 3, статическим способом показывает, что здесь нельзя вырезать часть основной системы метода перемещений так, чтобы в уравнение равновесия для определения r_{33} входили только поперечные силы. Это вторая особенность расчета методом перемещений рам с наклонными стержнями. Поэтому здесь при определении статическим способом коэффициентов, представляющих собой реактивные силы в линейных связях, придется находить и продольные силы в некоторых стержнях, для чего вначале по эюре изгибающих моментов нужно будет строить соответствующую эюру поперечных сил. Поэтому и для рамы на рис. 20 вначале по эюре $\overline{M_3}$ построим с использованием формулы (4) эюру Q_3 (см. рис. 20д), после чего, вырезав узел 1 (рис. 20е), найдем продольную силу в стержне 1-2:

$$\sum Z = 0; \quad \frac{12i_3}{l_3^2 \sin \alpha} + \frac{12i_2}{l_2^2} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha - N_{1-2} \cdot \sin \alpha;$$

$$N_{1-2} = \frac{12i_2}{l_2^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{12i_3}{l_3^2 \sin^2 \alpha}.$$

После этого можно найти коэффициент r_{33} , рассматривая равновесие узла 2 (рис. 20ж)

$$\sum X = 0; \quad r_{33} - Q_{2-3} - N_{1-2} = 0;$$

$$r_{33} = Q_{2-3} + N_{1-2} = \frac{12i_1}{h^2} + \frac{12i_2}{l_2^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{12i_3}{l_3^2 \sin^2 \alpha}.$$

Коэффициенты, представляющие собой реактивные силы в линейных связях, для рам с наклонными стержнями можно, конечно, определить и с использованием формулы Мора (5), в соответствии которой для коэффициента r_{33} будем иметь:

$$\begin{aligned} r_{33} &= \sum \int \frac{\overline{M}_3^2 dx}{EJ} = \frac{l_3}{6EJ} \left(\frac{36i_3^2}{l_3^2 \sin^2 \alpha} \cdot 2 \right) + \frac{l_2}{6EJ} \left(\frac{36i_2^2}{l_2^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot 2 \right) + \frac{h}{6EJ} \left(\frac{36i_1^2}{h^2} \cdot 2 \right) = \\ &= \frac{12i_3}{l_3^2 \sin^2 \alpha} + \frac{12i_2}{l_2^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{12i_1}{h^2}. \end{aligned}$$

Результаты совпадают.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Строительная механика / Под ред. А.В.Даркова. - М., 1976.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М., 1986.
3. Довнар Е.П., Коршун Л.И. Строительная механика. - Минск, 1986.
4. Снитко Н.К. Строительная механика. - М., 1980.
5. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс. - М., 1986.
6. Семюков В.М. Расчетно - проектировочные работы по строительной механике. - Минск, 1989.
7. Руководство по практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем) / Под общ. ред. Г.К.Клейна. - М., 1980.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Подходы и допущения, положенные в основу метода перемещений.....	3
2. Определение степени кинематической неопределимости рам.....	5
3. Основная система метода перемещений.....	7
4. Канонические уравнения метода перемещений.....	8
5. Табличные эпюры метода перемещений.....	10
6. Построение единичных и грузовых эпюр в основной системе метода перемещений.....	15
7. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.....	17
8. Проверки коэффициентов и свободных членов канонических уравнений.....	20
9. Построение окончательных эпюр внутренних усилий и их проверки.....	21
10. Пример расчета.....	23
11. Упрощения при расчетах симметричных рам.....	28
12. Особенности расчета рам с наклонными стержнями.....	32
Рекомендуемая литература.....	34

Учебное издание

Составитель: Игнатюк Валерий Иванович

МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМАХ

Методические указания по курсу "Строительная механика"
для студентов строительных специальностей

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.
Редактор Строчак Т.В.

Подписано к печати 24. 01. 97 г. Формат 60×84/16. Бумага писчая № 1. Усл. п. л. 2,1. Уч. изд. л. 2,25. Заказ № 150. Тираж 300 экз. Бесплатно. Отпечатано на ризографе Брестского политехнического института. 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.