

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

**Методические указания
к выполнению контрольных работ
по дисциплине "Строительная механика"**

для студентов специальности Т.19.01
"Промышленное и гражданское строительство"
заочной формы обучения

Брест 1999

Методические указания к выполнению контрольных работ по дисциплине "Строительная механика" для студентов специальности Т.19.01 "Промышленное и гражданское строительство" заочной формы обучения / Сост. В.И.Игнатюк, И.С.Сыроквашко; Брестский политехнический институт. – Брест, 1999. – 42 с., 14 ил.

В методических указаниях изложены теоретические основы расчета статически определимых и статически неопределимых плоских систем (балок, различных рам, арок) на статические нагрузки, расчет рам на устойчивость методом перемещений и основы динамического расчета рам; во всех разделах приведены примеры расчетов.

Методические указания предназначены для студентов строительных специальностей заочной формы обучения, могут использоваться в самостоятельной работе и студентами дневной формы обучения.

Составители: В.И.Игнатюк, доцент, к.т.н.,
И.С.Сыроквашко, доцент, к.т.н.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания составлены с целью помочь студентам заочной формы обучения специальности Т.19.01 "Промышленное и гражданское строительство" в самостоятельном изучении и освоении курса "Строительная механика", а также в выполнении контрольных работ по этому курсу в соответствии с "Методическими указаниями и контрольными заданиями по курсу "Строительная механика" для студентов-заочников строительных специальностей" / Сост. В.И. Игнатюк, И.С. Сыроквашко; Брестский политехнический институт. – Брест, 1995.

1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ, ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ЭПЮРЫ УСИЛИЙ

Рассматриваются плоские стержневые сооружения типа простых и многопролетных балок, простых, трехшарнирных и составных рам, арок. При действии на такие системы внешних нагрузок в их поперечных сечениях возникает три вида внутренних усилий – изгибающие моменты M , поперечные силы Q и продольные силы N (рис. 1.1). Определение этих усилий для статически определимых систем выполняется методом сечений, на основе которого можно сформулировать следующие правила определения внутренних усилий в сечениях систем:

➡ Изгибающий момент в сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил (включая опорные реакции), приложенных к части сооружения с одной стороны от сечения, относительно центра тяжести данного сечения.

➡ Поперечная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных к части сооружения с одной стороны от сечения, на ось, перпендикулярную к оси стержня.

➡ Продольная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных к части сооружения с одной стороны от сечения, на ось, касательную к оси стержня (для прямолинейных стержней – на ось самого стержня).

Напомним, что момент силы относительно некоторой точки равен произведению величины этой силы на ее плечо относительно этой точки (например, на рис. 1.2а – $M_A(P) = P \cdot h_p$), где плечо силы относительно некоторой точки (h_p) определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию действия силы. Проекция силы на некоторую ось равна произведению величины силы на косинус угла между линией действия силы и указанной осью (рис. 1.2б). По указанным правилам легко определяются изгибающий момент относительно произвольной точки и проекция на любую ось нагрузки q , распределенной на участке и, подобно закону, если ее привести к равнодействующей-

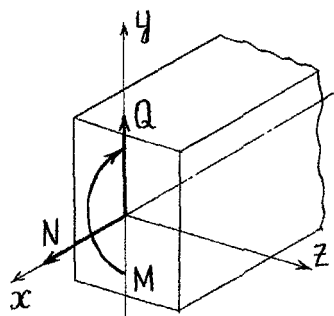


Рис. 1.1

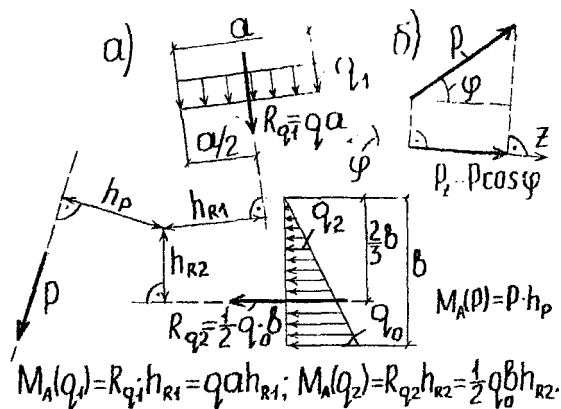


Рис. 1.2

щей силе R_{q1} , приложенной в центре тяжести нагрузки на рассматриваемом участке. Вычисление изгибающих моментов относительно точки А для равномерно распределенной нагрузки q_1 (равнодействующая R_{q1} приложена посередине участка, на который действует равномерно распределенная нагрузка) и нагрузки q_2 , изменяющейся на участке по треугольному закону, показано на рис. 1.2а. Заметим, что от действия сосредоточенного момента изгибающий момент относительно любой точки равен величине самого сосредоточенного момента, а его проекция на любую ось равна нулю.

Для наглядного представления изменения внутренних усилий в сечениях рам строят эпюры внутренних усилий. Эпюрой усилия (M , Q , N и др.) называется график (диаграмма), изображающий закон изменения этого усилия по длинам всех элементов системы (стержней рамы) от действия постоянной нагрузки. Отметим некоторые правила, применяемые при построении эпюр:

1. Ось (базу), на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна или просто совпадала с осью стержня.

2. Ординаты эпюры откладывают от базовой перпендикулярно к ней.

3. Штриховать эпюры принято линиями, перпендикулярными к базовой оси, имея ввиду, что каждая линия штриховки представляет собой ординату эпюры.

4. Ординаты усилий откладывают в определенном выбранном масштабе, одинаковом в пределах одной эпюры. Кроме того, на эпюрах проставляют значения ординат усилий в характерных точках, а в них в кружочках ставят знаки ординат эпюр. Таким образом, каждая из ординат эпюры усилий представляет собой в определенном масштабе величину усилия для которого построена эпюра, в том сечении рамы, в котором ордината отложена.

При определении внутренних усилий и построении их эпюр в строительной механике обычно применяют следующие правила знаков:

– Поперечная сила в сечении положительна, если она стремится повернуть отсеченную часть системы из равновесия, которой она определена, относи-

тельно точек близких к сечению по часовой стрелке, и отрицательна, если стремится повернуть эту часть системы против часовой стрелки – см. рис. 1.3;

-- Продольная сила в сечении положительна, если она вызывает растяжение в элементе системы (направлена от сечения), и отрицательна, если вызывает сжатие (направлена к сечению) – см. рис. 1.4.

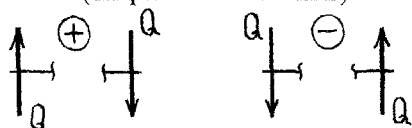


Рис. 1.3

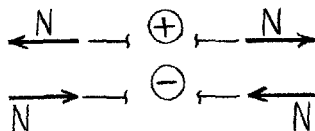


Рис. 1.4

Отметим, что при построении эпюр Q и N ординаты поперечных и продольных сил могут откладываться с любой стороны от базовых осей (стержневой рамы). При этом следует руководствоваться наибольшей наглядностью эпюр (чтобы эпюры по возможности не накладывались друг на друга) и, желательно, для участков, являющихся продолжением друг друга по прямой, ординаты одного знака откладывать все-таки с одной стороны.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливают, а откладывают их ординаты на растянутых волокнах (со стороны растянутых волокон). При определении величин изгибающих моментов знаки их принимают по собственному усмотрению. Удобно принять, например, как это сделано в данных методических указаниях, изгибающий момент в сечении положительным, если он действует относительно сечения по часовой стрелке. Растянутые волокна в сечении при этом определяются следующим образом. В той части рамы, из равновесия которой в расчетном сечении определен изгибающий момент, выделяем бесконечно малый элемент стержня, прилегающий к рассматриваемому сечению (на схемах этот бесконечно малый элемент стержня для наглядности изображается в виде элемента конечной длины). Считаем затем, что в расчетном сечении указанный элемент имеет защемление, и прикладываем к нему вычисленный для расчетного сечения изгибающий момент. Анализируя теперь изгиб рассматриваемого элемента системы (рамы), несложно определить, с какой стороны стержня волокна будут растянуты, а с какой – сжаты. Например, для ломаного стержня, изображенного на рис. 1.5а, изгибающий момент в сечении 1-1, вычисленный из рассмотрения равновесия правой части системы, будет отрицательным (все внешние силы вращают относительно сечения 1-1 против часовой стрелки). Схема изгиба элемента системы, выделенного возле сечения 1-1 из правой ее части, показана на рис. 1.5б. Из анализа этой схемы видно, что растянутыми в сечении 1-1 будут нижние волокна (здесь и далее на схемах изгиба элементов со стороны растянутых волокон будем проводить штриховые линии).

Для системы, изображенной на рис. 1.5, которую будем считать равновесной, приведем несколько примеров вычисления (в общем виде) внутренних усилий в сечении 1-1:

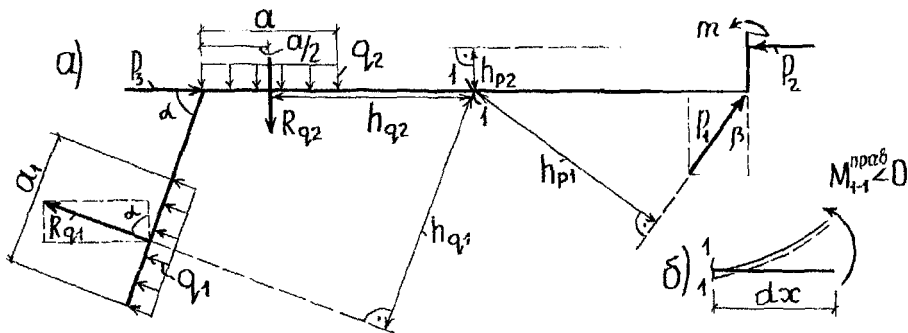


Рис. 1.5.

$$M_{1-1}^{(\text{лев})} = R_{q1} \cdot h_{q1} - R_{q2} \cdot h_{q2} + P_3 \cdot 0 = q_1 \cdot a_1 \cdot h_{q1} - q_2 \cdot a_2 \cdot h_{q2};$$

$$M_{1-1}^{(\text{прав})} = -P_1 \cdot h_{p1} - P_2 \cdot h_{p2} - m;$$

$$Q_{1-1}^{(\text{лев})} = R_{q1} \cdot \cos \alpha + P_3 \cdot \cos 90^\circ - R_{q2} \cdot \cos 0^\circ - q_1 \cdot a_1 \cdot \cos \alpha - q_2 \cdot a_2;$$

$$Q_{1-1}^{(\text{прав})} = -P_1 \cdot \cos \beta + P_2 \cdot \cos 90^\circ - P_1 \cdot \cos \beta;$$

$$N_{1-1}^{(\text{лев})} = R_{q1} \cdot \sin \alpha - P_3 \cdot \cos 0^\circ - R_{q2} \cdot \cos 90^\circ = q_1 \cdot a_1 \cdot \sin \alpha - P_3;$$

$$N_{1-1}^{(\text{прав})} = -P_2 + P_1 \cdot \sin \beta.$$

Здесь $M_{1-1}^{(\text{лев})}$, $Q_{1-1}^{(\text{лев})}$, $N_{1-1}^{(\text{лев})}$ – внутренние усилия в сечении 1-1, полученные из рассмотрения левой части системы; $M_{1-1}^{(\text{прав})}$, $Q_{1-1}^{(\text{прав})}$, $N_{1-1}^{(\text{прав})}$ – те же усилия, полученные из рассмотрения правой части системы. Заметим, что для системы, находящейся в равновесии, внутренние усилия в одном сечении, полученные из рассмотрения левой и правой частей, будут, естественно, равны друг другу (изгибающие моменты при этом будут получаться с противоположными знаками; растянутые же волокна, определенные по ним, будут расположены с одной стороны). Для рассмотренной системы (рис. 1.5), таким образом, будем иметь: $M_{1-1}^{(\text{лев})} = -M_{1-1}^{(\text{прав})}$, $Q_{1-1}^{(\text{лев})} = Q_{1-1}^{(\text{прав})}$, $N_{1-1}^{(\text{лев})} = N_{1-1}^{(\text{прав})}$. Это обстоятельство следует использовать для проверки правильности вычисления внутренних усилий в сечениях рам.

➔ Анализ эпюр внутренних усилий позволяет установить ряд общих закономерностей в изменении эпюр M , Q и N , которые будут всегда соблюдаться:

1) на прямолинейном ненагруженном участке эпюра изгибающих моментов всегда линейна и может быть построена по двум ординатам (обычно для крайних сечений участка), а эпюры Q и N – постоянны;

2) на участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра M всегда изменяется по криволинейному, параболическому закону и должна строиться минимум по трем ординатам (обычно для крайних и среднего сечений на участке); выпуклость эпюры M при этом направлена в сторону действия равномерно распределенной нагрузки; эпюры Q и N на таком участке будут изменяться по

линейным законам и должны строиться по двум ординатам (для крайних сечений); если равномерно распределенная нагрузка перпендикулярна стержню, то эпюра N – постоянна;

3) в точке приложения сосредоточенной силы эпюра M всегда имеет излом, направленный в сторону действия силы, а эпюра Q – скачок на величину произведения этой силы на косинус угла между силой и осью, нормальной к оси стержня; если внешняя сила перпендикулярна оси стержня, то скачок на эпюре Q будет равен величине самой силы; эпюра N в точке приложения сосредоточенной силы будет иметь скачок на величину произведения этой силы на косинус угла между силой и осью стержня;

4) в точке приложения сосредоточенного момента эпюра M всегда имеет скачок на величину этого момента;

5) в шарнире изгибающий момент всегда равен нулю (не следует путать сечение в шарнире и сечение, бесконечно близкое к шарниру; так, если в сечении, бесконечно близком к шарниру, приложен сосредоточенный момент, то на эпюре M в этом сечении, согласно предыдущему положению, будем иметь скачок с нуля в шарнире до значения сосредоточенного момента в точке его приложения);

6) на участке действия распределенной нагрузки в сечении, в котором поперечная сила равна нулю, изгибающий момент всегда имеет экстремум (максимум, минимум);

7) при принятых правилах знаков знак эпюры Q можно определить (проверить) по эпюре M по следующему правилу: эпюра Q на участке положительна, если для совмещения по кратчайшему пути оси стержня на участке с касательной к эпюре M на том же участке ось стержня необходимо поворачивать по часовой стрелке; если для указанного совмещения ось стержня нужно поворачивать против часовой стрелки, то эпюра Q на участке будет иметь отрицательный знак.

Используя изложенные общие закономерности изменения эпюр M , Q , N эти эпюры можно строить, не составляя зависимостей для изгибающих моментов, поперечных и продольных сил по участкам, а ограничиваясь вычислением значений указанных усилий в характерных сечениях рамы.

2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК

Статически определимые многопролетные балки представляют собой систему простых однопролетных балок, соединенных между собой шарнирами. При расчете таких балок полезно использовать схему взаимодействия отдельных простых балок между собой ("поэтажную схему"). Это дает возможность свести весь расчет к расчету ряда простых балочно-консольных и консольных балок. Для составления "поэтажной схемы" необходимо выделить в первую

очередь основные (главные) балки, связанные с основанием тремя опорными связями, и опирающееся на них второстепенные балки. Расчет начинается с самой второстепенной (самой верхней) балки. Каждая последующая балка рассчитывается на внешнюю нагрузку, действующую на нее, и давление вышележащих балок. При этом давление на нижнюю балку равно по величине и противоположно по направлению реакции вышележащей второстепенной балки.

Для построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил необходимо вычислить эти внутренние усилия во всех характерных сечениях балки.

Расчет сооружений на подвижную нагрузку производится с помощью линий влияния. Следует иметь в виду, что линии влияния строятся от единичной сосредоточенной силы, движущейся по сооружению. Изменение какого-либо усилия в определенном сечении сооружения в зависимости от положения этой единичной силы представляется в виде графика, называемого линией влияния. Каждая линия влияния дает представление об изменении только того усилия в определенном сечении сооружения, для которого она построена. Статический способ построения линии влияния заключается в том, что груз $P = 1$ устанавливается в произвольное положение на сооружении, и абсцисса его точки приложения в произвольно выбранной системе координат обозначается переменной величиной (x). Считая груз неподвижным, определяют искомое усилие, для которого получим зависимость, содержащую величину x . Для того, чтобы полученная зависимость превратилась в уравнение линии влияния, необходимо считать в ней величину x переменной.

Построение линий влияния опорных реакций и внутренних усилий в поперечных сечениях многопролетных балок выполняется в следующей последовательности:

- 1) составляется схема взаимодействия простых однопролетных балок (поэтажная схема);
- 2) строится линия влияния искомого усилия для той однопролетной балки, к которой принадлежит данная опора или данное поперечное сечение, по принципам, изложенным выше;
- 3) затем линия влияния строится для движения груза $P = 1$ по всем остальным простым балкам; при этом вначале рассматриваются рядом расположенные балки по отношению к той, к которой относится искомое усилие, а затем постепенно мы удаляемся от нее в обе стороны, рассматривая последовательно движение груза по всем балкам; построение линий влияния усилий здесь основывается на следующих положениях и принципах:

а) действие груза на поэтажной схеме передается только вниз (на вышележащие балки), и не передается вверх; поэтому при движении груза по главным балкам по отношению к той, к которой относится рассматриваемое усилие, это усилие будет равно нулю — нулевая линия влияния;

б) при переходе груза $P = 1$ через шарнир, соединяющий две рядом расположенные простые балки, линии влияния усилий изменяются непре-

ривно, то есть ординаты их слева и справа от шарнира будут одинаковы (равны друг другу);

в) при расположении груза $P = 1$ над одной из опор, связанных с основанием, все усилия, кроме реакции этой опоры, равны нулю (груз полностью воспринимается опорой);

г) при движении груза $P = 1$ в пределах одной из простых балок (кроме той, к которой относится рассматриваемое усилие) линии влияния усилий на протяжении всей длины каждой из этих балок изменяются по линейным законам (прямолинейны); таким образом для построения линии влияния в пределах простой балки достаточно знаний ординат линии влияния в двух точках (а они будут известны из положений пунктов б и в), которые необходимо просто соединить прямой линией;

4) вычисляются ординаты линии влияния усилия во всех характерных точках и точках, необходимых для дальнейших расчетов (например, определения усилий от нагрузок), из геометрических соображений (подобия фигур).

Размерность ординат линий влияния моментов – единицы длины; ординаты линий влияния опорных реакций, продольных и поперечных сил – величины безразмерные.

Внутренние усилия в сечениях балки от постоянной нагрузки в виде сосредоточенных сил P , равномерно распределенных нагрузок q и сосредоточенных моментов M определяется с помощью линий влияния по формуле:

$$Z = \sum P_i \cdot y_i + \sum q_j \cdot \omega_j + \sum M_k \cdot \operatorname{tg} \alpha_k$$

где y_i – ордината линии влияния соответствующего усилия под силой P_i ; ω_j – площадь участка линии влияния под распределенной нагрузкой; α_k – угол наклона линии влияния под точкой приложения сосредоточенного момента.

Пример 1. Для балки, расчетная схема которой изображена на рис. 2.1а, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от постоянной нагрузки. Построить линию влияния реакции опоры С, изгиб. момента и поперечной силы в сечении 1 и определить по ним усилия от постоянной нагрузки.

Решение. Изображаем поэтажную схему многопролетной балки (рис. 2.1б). Расчет начинаем с определения опорных реакций второстепенных балок АВ и ЕФ. Из уравнения $\sum M_B = 0$ для балки АВ находим

$$\sum M_B = R_A \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad R_A = 18 \text{ кН.}$$

Из уравнения $\sum M_A = 4 \cdot 6 \cdot 1 - R_B \cdot 4 = 0$, находим $R_B = 6 \text{ кН.}$

Из уравнений $\sum M_E = 0$; $\sum M_F = 0$ для балки ЕФ находим

$$\sum M_E = -8 - R_F \cdot 4 = 0; \quad R_F = -2 \text{ кН}; \quad \sum M_F = -8 + R_E \cdot 4 = 0; \quad R_E = 2 \text{ кН.}$$

Полученные реакции R_B и R_E с обратным направлением передаем на нижнюю балку ВСДЕ, опорные реакции для которой определяем из уравнений:

$$\sum M_C = -R_B \cdot 2 + 20 \cdot 4 - R_D \cdot 8 + R_E \cdot 10 = -6 \cdot 2 + 20 \cdot 4 - R_D \cdot 8 + 2 \cdot 10 = 0;$$

$$R_D = 11 \text{ кН.}$$

$$\sum M_D = -6 \cdot 10 + R_C \cdot 8 - 20 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0; \quad R_C = 17 \text{ кН.}$$

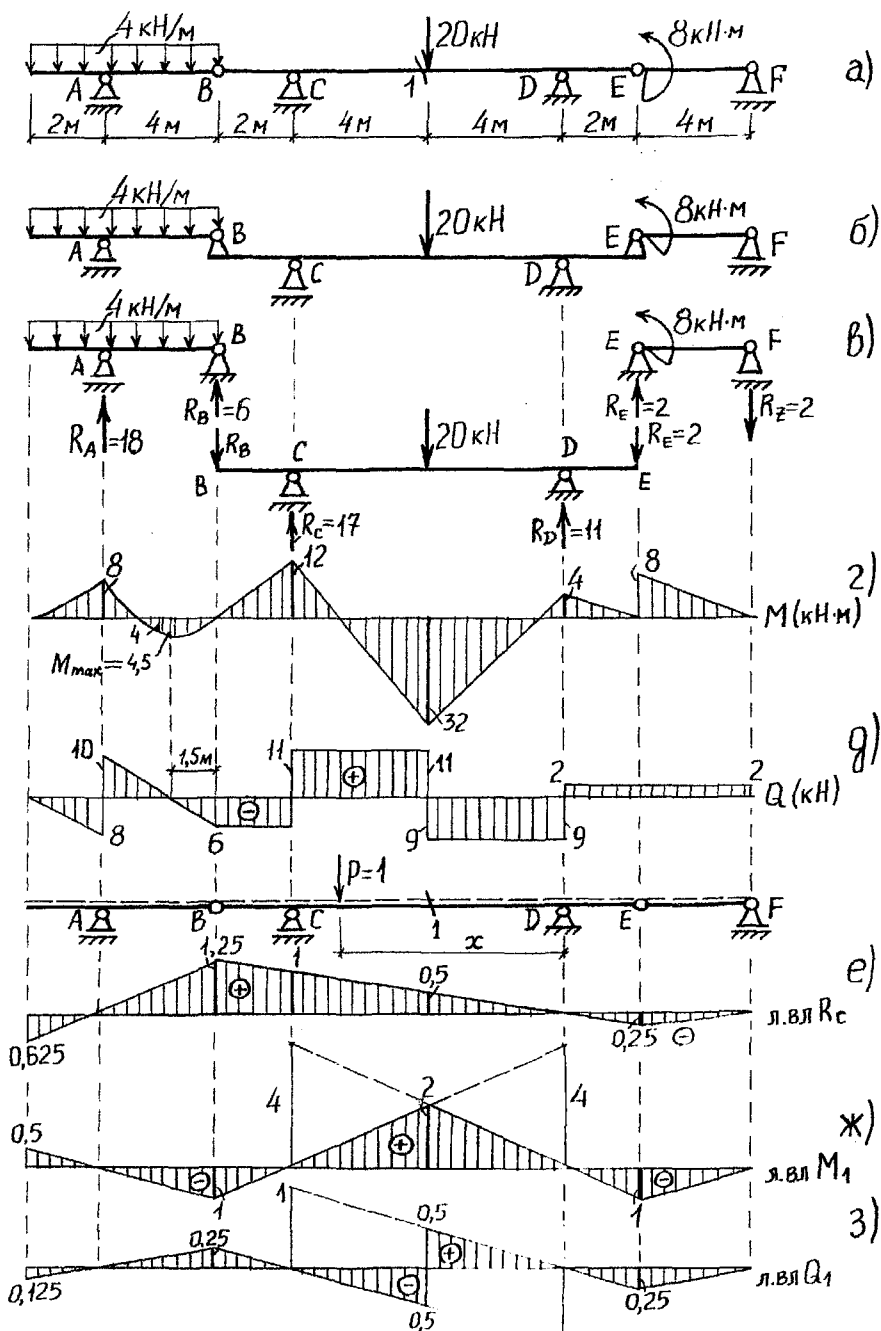


Рис. 2.1

После этого определяем изгибающие моменты и поперечные силы в каждом характерном сечении простых однопролетных балок и строим в них по правилам, изложенным в разделе 1, эпюры M и Q , которые будут являться отдельными участками эпюр M и Q многопролетной балки (рис. 2.1г,д).

Для построения линии влияния опорной реакции R_C рассмотрим балку BE с движущимся по ней сосредоточенным грузом $P=1$. Для определения опорной реакции R_C нужно составить уравнение моментов всех сил, приложенных к балке BE , относительно опоры D . Обозначим расстояние до движущейся силы от опоры D через x . Тогда

$$\sum M_D = R_C \cdot 8 - P \cdot x = 0, \text{ откуда } R_C = \frac{P \cdot x}{8} = \frac{x}{8}.$$

Так как переменная x стоит в числителе в первой степени, то график, описываемый данным уравнением – прямая линия. При $x = 0$, когда груз стоит над опорой D , $R_C = 0$; при $x = 8$ (груз на опоре C) $R_C = 1$. Откладывая полученные ординаты, соединяя их прямой линией и продолжая ее до точек B и E , получим линию влияния реакции R_C при движении груза по балке BE . Ординаты линии влияния в точках B и E находим из подобия фигур. При постановке груза на опоры A и F он будет уравниваться реакциями этих опор, а реакция R_C в это время будет равна нулю. Соединив ординаты линии влияния в точках B и E с полученными нулевыми точками, получим окончательную линию влияния опорной реакции R_C . Значения ординат во всех характерных сечениях вычисляются из подобия треугольников.

Для построения линии влияния изгибающего момента в сечении 1 также рассмотрим балку BE . При движении груза слева от сечения 1 изгибающий момент найдем из равновесия правой части балки $M_1 = R_D \cdot 4$; и значит построить линию влияния M_1 слева от сечения можно с помощью линии влияния R_D , если умножить все ее ординаты на 4. При движении груза справа от сечения 1 удобно рассмотреть равновесие левой части балки, получим $M_1 = R_C \cdot 4$, следовательно, правая часть линии влияния M_1 может быть получена из линии влияния R_C путем умножения всех ее ординат на 4. Левая и правая части линии влияния должны пересечься под сечением 1. Соединяя найденные ординаты в точках B и E с нулевыми точками на опорах A и F , получаем искомую линию влияния M_1 (рис. 2.1ж).

Линию влияния поперечной силы Q строим аналогично предыдущей линии влияния. При движении груза слева от сечения 1 из равновесия правой части балки находим – $Q_1 = -R_D$ (реакция вращает вокруг сечения против часовой стрелки). Следовательно, левая часть линии влияния Q_1 есть линия влияния R_D , взятая с обратным знаком. При движении груза справа от сечения 1 – $Q_1 = R_C$. Соединив крайние ординаты линии влияния в точках B и E с нулевыми точками на опорах A и F , получаем искомую линию влияния попереч-

ной силы (рис. 2.13). Промежуточные ординаты в характерных точках вычисляются из подобия треугольников.

Для определения усилий R_C , M_1 и Q_1 от постоянной нагрузки воспользуемся формулой –

$$Z = \sum P_i \cdot y_i + \sum q_j \cdot \omega_j + \sum M_k \cdot \operatorname{tg} \alpha_k :$$

$$R_C = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,625 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 4 \right) + 20 \cdot 0,5 + 8 \cdot \left(-\frac{0,25}{4} \right) = 17 \text{ (кН)};$$

$$M_1 = 4 \cdot \left(+\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \right) + 20 \cdot 2 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = 32 \text{ (кН·м)};$$

$$Q = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,125 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 4 \right) + 20 \cdot 0,5 + 8 \cdot \left(-\frac{0,25}{4} \right) = 11 \text{ (кН)}.$$

Полученные значения совпадают со значениями усилий в этих сечениях, вычисленными аналитически при построении эпюр усилий.

3. РАСЧЕТ ПРОСТЫХ И ТРЕХШАРНИРНЫХ РАМ

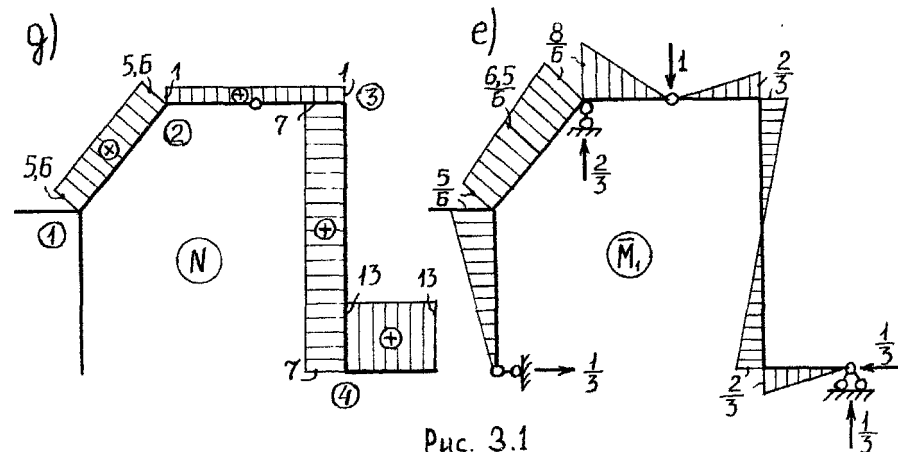
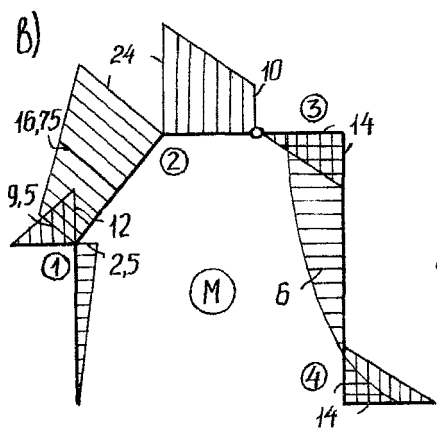
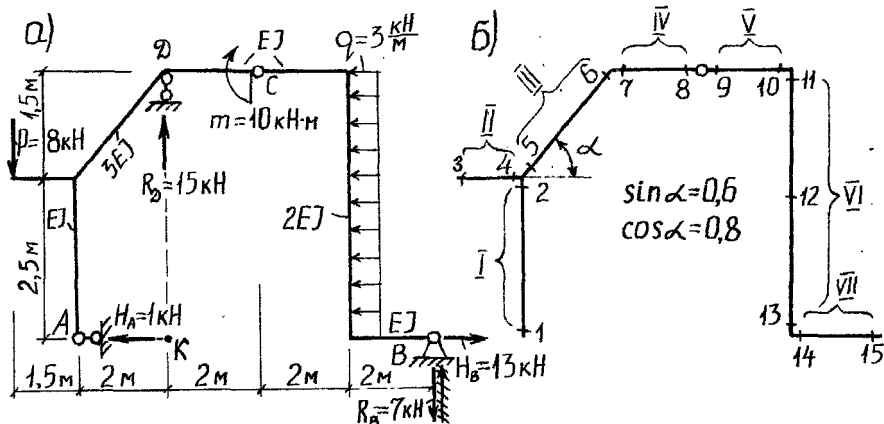
Простые рамы представляют собой один диск (ломаный или ломано-разветвленный стержень), соединенный неподвижно с основанием. Так как диск имеет на плоскости три степени свободы, то для соединения простой рамы с основанием необходимо три связи, которые реализуются с помощью опор – заделки (защемления), либо шарнирно неподвижной и шарнирно подвижной опор, либо трех шарнирно подвижных опор, в которых соответственно будут возникать три опорные реакции. Для их определения составляют три уравнения равновесия рамы по одному из вариантов:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_T = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \\ \sum Z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \\ \sum M_C = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Трехшарнирная рама представляет собой два диска (ломаных, разветвленных стержня), шарнирно соединенных между собой и с основанием. В опорах трехшарнирных рам возникает четыре реакции (так как в шарнирных опорах направления реакций неизвестны, то они ищутся обычно в виде двух составляющих на вертикальную и горизонтальную оси). Для определения четырех опорных реакций в трехшарнирных рамах кроме трех уравнений равновесия всей системы (3.1) составляются уравнения равновесия отдельных дисков – например, уравнение моментов для одной из частей рамы относительно шарнира, соединяющего диски.

Не забываем, что после вычисления опорных реакций обязательно необходимо выполнить проверку правильности их определения, для чего составляется одно-два уравнения равновесия, которые не использовались при определении реакций.

После определения опорных реакций процедура построения эпюр внут-



ренных усилий M , Q и N ничем не отличается для простых и трехшарнирных рам и основывается на положениях, изложенных в разделе 1.

Пример 2. Для трехшарнирной рамы, представленной на рис. 3.1а необходимо определить опорные реакции и построить эпюры усилий M , Q и N .

Решение. Опорные реакции определяем с помощью следующих уравнений равновесия:

$$\sum M_K = 0; \quad -8 \cdot 3,5 + 10 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 6 = 0; \quad R_B = -7 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -8 \cdot 9,5 + 10 + R_D \cdot 6 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad R_D = 15 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad -8 \cdot 5,5 + 10 + 15 \cdot 2 + H_A \cdot 4 = 0; \quad H_A = 1 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0; \quad 3 \cdot 4 \cdot 2 + 7 \cdot 4 - H_B \cdot 4 = 0; \quad H_B = 13 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum X = 0; \quad -H_A + H_B - 3 \cdot 4 = 0; \quad \sum Y = 0; \quad R_D - R_B - 8 = 0.$$

Для построения эпюр M , Q и N разобьем раму на семь участков (рис.3.1б). На участках I - V и VII эпюра M будет линейной, и может быть построена по двум точкам – по концам участков, а эпюры Q и N постоянны и для их построения достаточно определить значения Q и N в любом из сечений участков. На участке VI, на котором действует равномерно распределенная нагрузка, эпюра M будет криволинейной и должна строиться минимум по трем точкам – по краям и в середине участка, а эпюры Q и N будут линейными и их необходимо строить по двум точкам. Все сечения (точки), в которых необходимо вычислять значения M для построения эпюры M показаны на рис. 3б. Ниже показаны вычисления внутренних усилий в некоторых (наиболее сложных) сечениях:

$$M_5^{\text{лев}} = 1 \cdot 2,5 - 8 \cdot 1,5 = -9,5 \text{ (кН}\cdot\text{м)}; \quad M_7^{\text{лев}} = 1 \cdot 4 - 8 \cdot 3,5 = -24 \text{ (кН}\cdot\text{м)};$$

$$M_8^{\text{лев}} = 1 \cdot 4 - 8 \cdot 5,5 + 15 \cdot 2 = -10 \text{ (кН}\cdot\text{м)};$$

$$M_{10}^{\text{прав}} = 3 \cdot 4 \cdot 2 - 13 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = -14 \text{ (кН}\cdot\text{м)};$$

$$M_{12}^{\text{прав}} = 3 \cdot 2 \cdot 1 - 13 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = -6 \text{ (кН}\cdot\text{м)};$$

$$Q_5^{\text{лев}} = -8 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,6 = -5,8 \text{ (кН)}; \quad Q_7 = -8 \cdot 15 = +7 \text{ (кН)};$$

$$Q_9^{\text{прав}} = +7 \text{ (кН)}; \quad Q_{11}^{\text{нижн}} = 3 \cdot 4 - 13 = -1 \text{ (кН)}; \quad Q_{13} = -13 \text{ (кН)};$$

$$N_5^{\text{лев}} = +8 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,8 = 5,6 \text{ (кН)}; \quad N_7^{\text{прав}} = N_8 = N_9 = N_{10} = -3 \cdot 4 + 13 = +1 \text{ (кН)};$$

$$N_{11}^{\text{нижн}} = N_{12} = N_{13} = +7 \text{ (кН)}; \quad N_{14}^{\text{прав}} = +13 \text{ (кН)}.$$

После построения эпюр усилий M, Q и N необходимо выполнить проверку ку равновесия узлов на эпюре M и отдельно по эпюрам Q и N :

а) на эпюре M

$$\sum M_1 = 0; \quad \sum M_2 = 0; \quad \sum M_3 = 0; \quad \sum M_4 = 0;$$

б) по эпюрам Q и N

$\sum X = 0; -1 - 5,8 \cdot 0,6 + 5,6 \cdot 0,8 = 0; \quad \sum X = 0; 1 + 5,8 \cdot 0,6 - 5,6 = 0;$
 $\sum Y = 0; -8 + 5,8 \cdot 0,8 + 5,6 \cdot 0,6 = 0; \quad \sum Y = 0; -7 - 5,8 \cdot 0,8 - 5,6 \cdot 0,6 + 15 = 0.$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ И РАМАХ

В изгибаемых системах, к которым относятся балки и рамы, перемещения обычно определяются с учетом только изгибающих моментов (влиянием на перемещения поперечных и продольных сил пренебрегают) по формуле Мора

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_i M_p ds}{EJ} \quad (4.1)$$

где: M_p – функция изменения изгибающих моментов, вызванных внешней нагрузкой, от действия которой определяется перемещение;

M_i – функция изменения изгибающих моментов, возникающих в системе от действия единичной "силы", приложенной в точке (сечении), в которой ищется перемещение, в направлении искомого перемещения; заметим, что в качестве указанной единичной "силы" могут выступать:

- сосредоточенная сила, если определяется линейное смещение;
- две сосредоточенные силы, приложенные к двум точкам по прямой, их соединяющей, навстречу друг другу (друг от друга), если определяется взаимное сближение (расхождение) этих точек;
- сосредоточенный момент, приложенный в некотором сечении, если определяется угол поворота этого сечения;
- два сосредоточенных момента, приложенные к двум сечениям навстречу друг другу, если определяется взаимный угол поворота этих сечений;

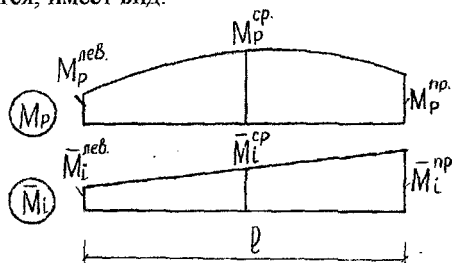
EJ – жесткость сечений при изгибе.

Вычисление интегралов Мора может производиться как непосредственным интегрированием, так и по правилу Верещагина, по формулам Симпсона, трапеций и другими способами.

Способ Верещагина заключается в "перемножении" двух эшпор на участке, на котором жесткость постоянна, одна из эшпор обязательно должна быть прямолинейной и обе эшпоры должны быть непрерывными (не должны иметь скачков, изломов, изменений знаков), по правилу: площадь одной из эшпор (если одна из эшпор криволинейна, то обязательно криволинейной) умножается на ординату под ее центром тяжести, взятую из другой эшпоры (линейной). При этом, если эшпора, площадь которой вычисляется, и ордината из другой эшпоры расположены с одной стороны от оси стержня, то их произведение принимает-

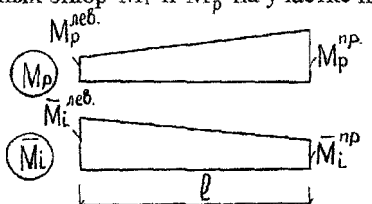
ся положительным, если же указанные площадь и ордината расположены с разных сторон стержня, то их произведение принимается отрицательным.

Формула Симпсона для вычисления интеграла Мора на участке, на котором жесткость постоянна и функции изменения для каждой из эпюр не меняются, имеет вид:



$$\sum \int \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EJ} = -\frac{1}{6EJ} \left(\bar{M}_i^{\text{лев}} \cdot M_p^{\text{лев}} + 4M_i^{\text{cp}} \cdot M_p^{\text{cp}} + M_i^{\text{np}} \cdot M_p^{\text{np}} \right) \quad (4.2)$$

Формула трапеций применяется для перемножения только прямолинейных эпюр M_i и M_p на участке постоянной жесткости:



$$\sum \int \frac{M_i M_p ds}{EJ} = \frac{1}{6EJ} \left(2\bar{M}_i^{\text{лев}} \cdot M_p^{\text{лев}} + \bar{M}_i^{\text{лев}} \cdot M_p^{\text{np}} + \bar{M}_i^{\text{np}} \cdot M_p^{\text{лев}} + 2\bar{M}_i^{\text{np}} \cdot M_p^{\text{np}} \right) \quad (4.3)$$

При перемножении по формулам Симпсона и трапеций произведения ординат принимаются положительными, если они расположены с одной стороны от оси стержня, и отрицательными, если соответствующие им растянутые волокна расположены с разных сторон стержня.

Таким образом, для определения перемещения некоторой точки (сечения) изгибаемой конструкции от внешней нагрузки необходимо:

- 1) построить эпюру изгибающих моментов от этой нагрузки (M_p);
- 2) построить эпюру изгибающих моментов M_i от действия единичной "силы", приложенной согласно вышеизложенному;
- 3) вычислить искомое перемещение по формуле Мора (4.1) с использованием правила Верещагина, формулы Симпсона (4.2), трапеций (4.3) и т. д.

Пример 3. Для рамы изображенной на рис. 3.1а, от действующей на нее нагрузки определить вертикальное перемещение точки (парнира) С.

Решение. Эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки получена в предыдущем разделе и имеет вид, представленный на рис. 3.1в. Для определения перемещения точки С необходимо в этой точке приложить вертикальную сосредоточенную силу единичной величины, и от ее действия (без учета внешних нагрузок) построить единичную эпюру изгибающих моментов M_i (см. рис. 3.1е). В результате искомое перемещение будет:

$$\Delta_C^{\text{верт}} - \Delta_{\text{ГР}} = \sum \int \frac{M_1 M_2 ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{2,5 \cdot 2,5}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} +$$

$$+ \frac{2,5}{6 \cdot 3EJ} \left(9,5 \cdot \frac{5}{6} + 4 \cdot \frac{6,5}{6} \cdot 16,75 + 24 \cdot \frac{8}{6} \right) + \frac{2}{6EJ} \left(2 \cdot 24 \cdot \frac{8}{6} + \frac{8}{6} \cdot 10 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 10 \cdot 0 \right) -$$

$$- 2 \cdot \frac{1}{EJ} \left(\frac{14 \cdot 2}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{6 \cdot 2EJ} \left(-14 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot 0 \cdot 6 - 14 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{10,333}{EJ}.$$

5. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК НА ВЕРТИКАЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ

Трехшарнирная система, в которой два диска, шарнирно соединенных друг с другом, представляют собой криволинейные стержни, называется трехшарнирной аркой. В ней, как и в трехшарнирных рамах, возникает четыре составляющие опорных реакций, которые определяются из четырех уравнений равновесия арки в целом и отдельных ее частей.

Внутренние усилия в сечениях арок определяются на основе тех же прищипов, которые применяются и в рамах, и которые изложены в разделе 1. Можно усилия в сечениях трехшарнирных арок определять и по формулам:

$$M_k = M_k^0 - H \cdot y_k;$$

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k;$$

$$N_k = -(Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k),$$

где M_k^0 , Q_k^0 – изгибающий момент и поперечная сила в сечении k простой двухшарнирной балки (см. рис. 5.1б), имеющей тот же пролет и загруженной той же нагрузкой, что и арка; H – величина горизонтальных реакций арки (распор); φ_k – угол наклона касательной к оси арки в сечении k по отношению к горизонтальной оси; y_k – ордината центра сечения k относительно центральной оси x , проходящей через опоры (см. рис. 5.1а).

Заметим, что при заданной системе координат с началом в левой опоре арки (рис. 5.1а) $\sin \varphi_k$ для левой полуарки положительны, а для правой – отрицательны; $\cos \varphi_k$ для обеих полуарок положительны.

Пример 4. Для арки параболического очертания, представленной на рис. 5.1, от действующих нагрузок вычислить внутренние усилия в сечениях K_1 и K_2 .

Решение. 1) Определяем опорные реакции от заданной нагрузки:

$$\sum M_A = 0; \quad 12 \cdot 2 + (3 \cdot 8) \cdot 6 - 10 \cdot 12 + 8 \cdot 17 + (4 \cdot 3) \cdot 18,5 - R_B \cdot 20 = 0;$$

$$R_B = 32,3 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -12 \cdot 18 - (3 \cdot 8) \cdot 14 - 10 \cdot 8 - 8 \cdot 3 - (4 \cdot 3) \cdot 1,5 + R_A \cdot 20 = 0;$$

$$R_A = 33,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad 33,7 \cdot 10 - 12 \cdot 8 - (3 \cdot 8) \cdot 4 + H \cdot 4 = 0; \quad H = 36,25 \text{ кН}.$$

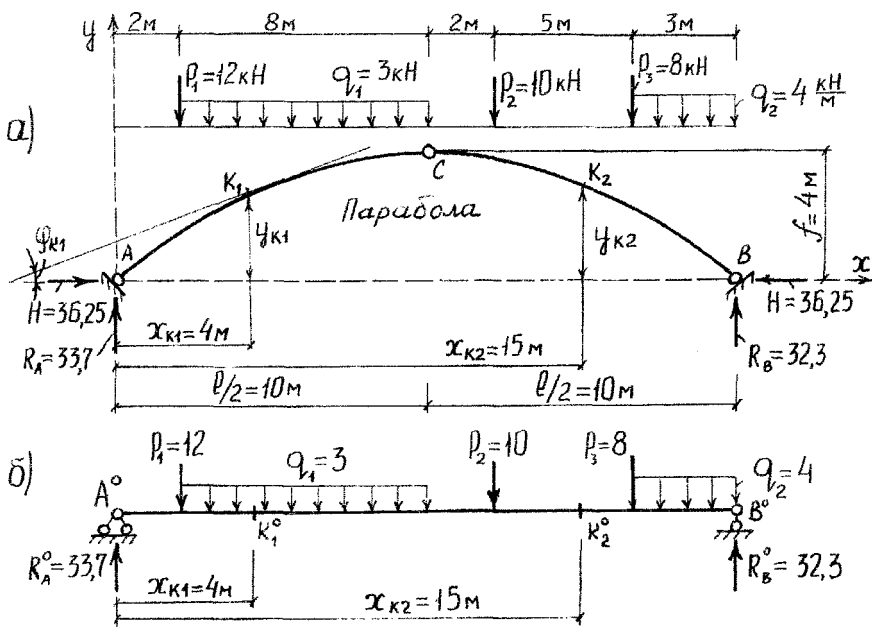


Рис. 5.1.

Проверяем правильность вычисления опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \quad 33,7 + 32,3 - 12 - 3 \cdot 8 - 10 - 8 - 3 \cdot 4 = 0; \quad 66 - 66 = 0;$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0; \quad 10 \cdot 2 + 8 \cdot 7 + (4 \cdot 3) \cdot 8,5 + 36,25 \cdot 4 - 32,3 \cdot 10 = 0; \quad 323 - 323 = 0.$$

2) Определяем ординаты и параметры углов наклона касательных к горизонтали для сечений:

Сечение k_1 : $x_{k1} = 4 \text{ м}; \quad y_{k1} = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x_{k1} \cdot (l - x_{k1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 4 \cdot (20 - 4) = 2,56 \text{ м};$

$$\operatorname{tg} \varphi_{k1} = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l - 2 \cdot x_{k1}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot (20 - 2 \cdot 4) = 0,48;$$

$$\sin \varphi_{k1} = 0,4327; \quad \cos \varphi_{k1} = 0,9015;$$

Сечение k_2 : $x_{k2} = 15 \text{ м}; \quad y_{k2} = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot x_{k2} \cdot (l - x_{k2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot 15 \cdot (20 - 15) = 3 \text{ м};$

$$\operatorname{tg} \varphi_{k2} = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l - 2 \cdot x_{k2}) = \frac{4 \cdot 4}{20^2} \cdot (20 - 2 \cdot 15) = -0,4;$$

$$\sin \varphi_{k2} = -0,3714; \quad \cos \varphi_{k2} = 0,9285.$$

3) Определяем внутренние усилия в сечениях:

$$M_{k1} = (33,7 - 12 - 3 \cdot 2) \cdot 0,9015 - 36,25 \cdot 2,56 = 12 \text{ (кН} \cdot \text{м)}; \quad - \text{раст. волокна - снизу};$$

$$Q_{k1} = (33,7 - 12 - 3 \cdot 2) \cdot 0,4327 - 36,25 \cdot 0,4327 = -1,532 \text{ (кН)};$$

$$N_{k1} = -[(33,7 - 12 - 3 \cdot 2) \cdot 0,4327 + 36,25 \cdot 0,9015] = -39,473 \text{ (кН)};$$

$$M_{k2} = (32,3 \cdot 5 - 8 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 3,5) - 36,25 \cdot 3 = -5,25 \text{ (кН}\cdot\text{м)}; \text{-- раст. волокна - снизу;}$$

$$Q_{k2} = (-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot 0,9285 - 36,25 \cdot (-0,3714) = 2,043 \text{ (кН)};$$

$$N_{k2} = -[(-32,3 + 8 + 4 \cdot 3) \cdot (-0,3714) + 36,25 \cdot 0,9285] = -38,226 \text{ (кН)}.$$

6. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

Ферма представляет собой стержневую систему, сохраняющую геометрическую неизменяемость при условной установке во все узлы шарниров. При такой условной замене жестких узлов шарнирными и узловом приложении внешней нагрузки все стержни работают практически только на центральное растяжение или сжатие.

Перед определением усилий в стержнях фермы необходимо определить опорные реакции, составляя три уравнения равновесия для всей фермы в целом. Для определения внутренних усилий в стержнях аналитическим способом используется обычно метод сечений, согласно которому ферма разрезается сечением на две части или из нее вырезается некоторая часть, после чего рассматривается равновесие одной из этих частей. Количество независимых уравнений равновесия для любой плоской уравновешенной системы сил не может быть больше трех. Поэтому сечение обычно проводится таким образом, чтобы число рассеченных стержней с неизвестными усилиями было не больше трех. При этом в зависимости от применяемых уравнений равновесия для рассматриваемой части фермы различают способы моментной точки и проекций.

Способ моментной точки применяют в том случае, если из трех стержней с неизвестными усилиями, попавших в сечение, два пересекаются в какой-то точке. Эта точка принимается за моментную и относительно нее составляется сумма моментов всех сил для рассматриваемой части фермы, после чего из этого уравнения равновесия находится усилие в третьем стержне.

Способ проекций применяется, если из трех стержней с неизвестными усилиями, попавших в сечение, два параллельны друг другу. В этом случае составляется уравнение в виде суммы проекций всех сил для рассматриваемой части фермы на ось, перпендикулярную к параллельным стержням, из которого находится усилие в третьем стержне.

Частным случаем метода сечений является способ вырезания узлов, при применении которого последовательно вырезаются узлы, в которых сходится не более двух стержней с неизвестными усилиями. Это связано с тем, что узел фермы -- это система сходящихся в одной точке сил, для которой можно составить только два уравнения равновесия в виде сумм проекций сил на две любые оси (не обязательно взаимноперпендикулярные).

При составлении уравнений равновесия всегда следует стремиться делать это так, чтобы в каждое из уравнений входило только одно неизвестное (чтобы не нужно было решать систему уравнений).

Шпренгельные фермы характеризуются тем, что в состав каждой панели простой фермы вводятся дополнительные двухпорные фермочки – шпренгели, работающие на местную нагрузку и передающие ее на узлы основной решетки. Следует заметить, что шпренгели бывают двух видов – одноярусные и двухъярусные. Одноярусные шпренгели передают нагрузку на тот же пояс, на котором они ее воспринимают. Шпренгельными фермами с одноярусными шпренгелями являются, например, фермы на схемах 1-5,8,0 в "Методических указаниях и контрольных заданиях по курсу "Строительная механика" для студентов-заочников строительных специальностей / В.И. Игнатюк, И.С. Сырковашко; Брест. политехн. ин-т, Брест, 1995" (см. стр. 18). Двухъярусные шпренгели воспринимают нагрузку на одном поясе, а передают ее на другой пояс фермы. Шпренгельная ферма с двухъярусными шпренгелями представлена, например, на схеме 9 указанных выше методических указаний, а также в рассматриваемом ниже примере расчета. В шпренгельных фермах различают 4 основные группы стержней:

- 1) стержни, принадлежащие только основной решетке – усилия в этих стержнях определяются из рассмотрения основной фермы;
- 2) стержни, относящиеся только к шпренгелям – усилия в этих стержнях определяются из рассмотрения отдельных шпренгелей как самостоятельных ферм;
- 3) стержни, принадлежащие одновременно и основной решетке и шпренгелю: усилия в этих стержнях определяются как сумма усилий в соответствующем стержне основной фермы и слившемся с ним стержне шпренгеля; часто усилие в таком стержне может быть определено сразу из рассмотрения равновесия отсеченной части шпренгельной фермы (без ее разложения);
- 4) для ферм с двухъярусными шпренгелями следует отдельно выделить еще стойки, на которые передают нагрузки двухъярусные шпренгели; при определении усилий в таких стойках при рассмотрении основной решетки фермы необходимо учитывать передачу нагрузки с одного пояса на другой.

Построение линий влияния усилий в стержнях ферм обычно выполняется статическим методом. При этом, проводя в ферме сечения, следует различать:

- **панель фермы** – область между двумя соседними узлами на одном из поясов фермы;
- **рассеченная панель фермы (р.п.)** – панель фермы, через которую проведено сечение;
- **расчетная рассеченная панель фермы (р.р.п.)** – рассеченная панель того пояса (верхнего, нижнего), по которому движется груз;

При использовании для определения усилия способов моментной точки или проекций ферма рассекается сечением на две части и при построении д.в. нужно рассматривать три случая – груз слева от р.р.п.; груз справа от р.р.п.; груз на участке р.р.п. Сначала груз $P = 1$ располагается с одной стороны от р.р.п. и из рассмотрения равновесия одной из частей фермы (любой; более удобной с точки зрения расчета) определяется искомое усилие (функция его

изменения при движении груза) и строится соответствующая ветвь линии влияния; затем груз $P = 1$ располагается с другой стороны от р.р.п. и аналогично находится функция изменения л.в. искомого усилия и строится другая ветвь линии влияния. На участках же р.р.п. проводится переходная прямая. При использовании способа вырезания узлов следует рассматривать следующие три случая – груз в узле; груз вне узла и вне р.р.п.; и груз на участках р.р.п. (соседних с вырезанным узлом).

При построении линий влияния усилий в стойках ферм с двухъярусными шпренгелями необходимо, рассматривая основную решетку, построить два варианта линии влияния усилия – при движении груза по верхнему и по нижнему поясам; затем, последовательно передвигая груз по всем узлам грузового пояса фермы, необходимо определить, на какой из поясов груз передается и соответственно какая из линий влияния реализуется.

С помощью линий влияния могут быть определены усилия в стержнях фермы от произвольной постоянной нагрузки точно так же, как и в балках. При этом усилия в одних и тех же стержнях, найденные из аналитического расчета ферм и по линиям влияния, должны, естественно, совпадать.

Пример 5. Для шпренгельной фермы (рис. 6.1) от заданной постоянной нагрузки требуется аналитически определить усилия в шести указанных стержнях, построить линии влияния этих усилий, определить их величины по линиям влияния и сравнить их с определенными из аналитического расчета фермы.

Решение. 1. Аналитическое определение усилий от заданной нагрузки.

Опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad -4 \cdot 1,5 + 12 \cdot 0,75 + (4 \cdot 3) \cdot 3 + 26 \cdot 5,25 + (4 \cdot 1,5) \cdot 6,75 - R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = 36 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad -4 \cdot 7,5 - 12 \cdot 5,25 - (4 \cdot 3) \cdot 3 - 26 \cdot 0,75 + (4 \cdot 1,5) \cdot 0,75 + R_A \cdot 6 = 0;$$

$$\sum X = 0; \quad H_A = 0. \quad R_A = 24 \text{ кН};$$

Проверка опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \quad 36 + 24 - 4 - 12 - 26 - 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1,5 = 0; \quad 60 - 60 = 0.$$

Усилия в стержнях 2-3, 1-5, 1-6 можно найти из рассмотрения полной схемы шпренгельной фермы, проведя сечение I - I и рассматривая равновесие, например, левой отсеченной части фермы. При этом равномерно распределенную нагрузку, действующую на рассеченную панель, с учетом узловой передачи нагрузок необходимо распределить на соседние узлы; узловые нагрузки на узлы 2 и 3 при этом определяются через опорные реакции передаточной балочки пролетом $0,5d = 0,75$ м ($P_q = 0,5 \cdot q \cdot 0,5d = 0,5 \cdot 4 \cdot 0,75 = 1,5$ кН). В результате левая отсеченная относительно сечения I - I часть фермы будет иметь вид, показанный на рис. 6.2 б.

Определяем усилия в стержнях, попавших в сечение I - I:

$S_{2-3} = ?$ (способ моментной точки; моментная точка – в узле I):

$$\sum M_1^{лсв} = 0; \quad 24 \cdot 1,5 - 4 \cdot 3 - 12 \cdot 0,75 + S_{2-3} \cdot 0,949 \cdot 1,5 = 0; \quad S_{2-3} = -10,54 \text{ (кН)};$$

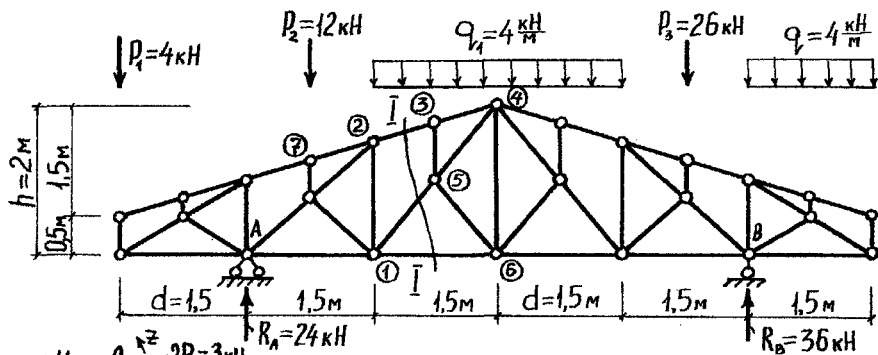
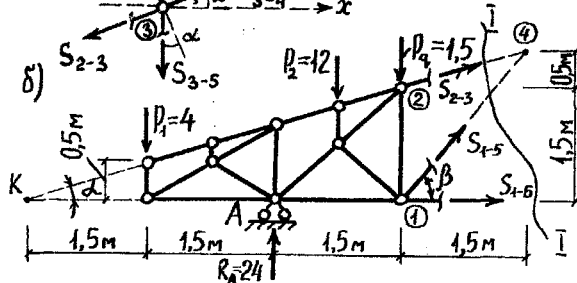
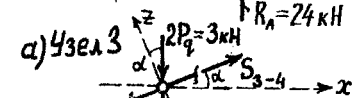


Рис. 6.1



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{0,5}{1,5} = 0,333; \\ \sin \alpha &= 0,316; \cos \alpha = 0,949; \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{2}{1,5} = 1,333; \\ \sin \beta &= 0,8; \cos \beta = 0,6. \end{aligned}$$

Рис. 6.2.

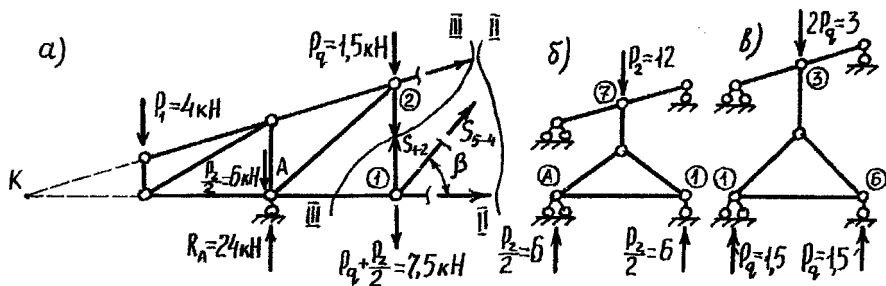


Рис. 6.3.

S_{1-5} —? (способ моментной точки; моментная точка — К):

$$\sum M_K^{\text{лев}} = 0; -24 \cdot 3 + 4 \cdot 1,5 + 12 \cdot 3,75 + 1,5 \cdot 4,5 - S_{1-5} \cdot 0,8 \cdot 4,5 = 0; S_{1-5} = -3,96 \text{ кН};$$

S_{1-6} —? (способ моментной точки; моментная точка — в узле 4):

$$\sum M_4^{\text{лев}} = 0; 24 \cdot 3 - 4 \cdot 4,5 - 12 \cdot 2,25 - 1,5 \cdot 1,5 - S_{1-6} \cdot 2 = 0; S_{1-6} = 12,375 \text{ (кН)}.$$

Усилие в стержне 3-5, относящемся к шпренгелю, легко найти из вырезания узла 3 всей фермы (рис. 6.2 а):

$$\begin{aligned} \sum Z = 0; \quad 3 \cos \alpha - S_{3-5} \cdot \cos \alpha = 0; \quad S_{3-5} = -3 \text{ (кН)}; \\ \sum X = 0; \quad -S_{2-3} \cos \alpha - S_{3-4} \cdot \cos \alpha = 0; \quad S_{3-4} = S_{2-3} = -23,18 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Стержень 5-4 относится к основной ферме (1-ая группа) и усилие в нем можно найти из рассмотрения основной фермы (без шпренгелей) – см. рис. 6.3, проведя в ней сечение II - II и рассматривая левую отсеченную часть. При этом следует учесть, что нагрузки, воспринимаемые шпренгелями (см. рис. 6.3б), необходимо передать на основную ферму в узлах их передачи от шпренгелей (см. рис. 6.3а). В результате получим:

$S_{5-4} = ?$ (способ моментной точки, моментная точка – К):

$$\begin{aligned} \sum M_K^{\text{лев}} = 0; \quad -24 \cdot 3 + 4 \cdot 1,5 + 6 \cdot 3 + 1,5 \cdot 4,5 + 7,5 \cdot 4,5 - S_{5-4} \cdot 0,8 \cdot 4,5 = 0; \\ S_{5-4} = -2,08 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Усилие в стойке 1-2 также можно найти из рассмотрения основной фермы с учетом распределения нагрузок от шпренгелей на узлы основной решетки. Проведем сечение III - III (см. рис. 6.3а) и рассмотрим левую отсеченную часть, используя способ моментной точки – точка К:

$$\sum M_K^{\text{лев}} = 0; \quad (-24 + 6) \cdot 3 + 4 \cdot 1,5 + 1,5 \cdot 4,5 + S_{1-2} \cdot 4,5 = 0; \quad S_{1-2} = -2,08 \text{ (кН)}.$$

2. Строим линии влияния (л.в.) усилий в тех же стержнях фермы (груз движется по верхнему поясу) – см. рис. 6.4.

Вначале строятся линии влияния опорных реакций; делается это также, как и для любой балочной системы (рис. 6.4).

Линию влияния усилия в стержне 2-3 строим, проведя сечение I - I (расчетная рассеченная панель 2-3), способом моментной точки – точка 1:

а) груз $P = 1$ слева от расчетной рассеченной панели (р.р.п.) – рассматриваем правую часть:

$$\begin{aligned} \sum M_1^{\text{прав}} = 0; \quad -R_B \cdot 4,5 - S_{2-3} \cdot \cos \alpha \cdot 1,75 + S_{2-3} \cdot \sin \alpha \cdot 0,75 = 0; \\ S_{2-3} = -3,16 \cdot R_B; \quad \text{л.в. } S_{2-3} = (\text{л.в. } R_B) \cdot (-3,16); \end{aligned}$$

т.е. левую часть л.в. S_{2-3} получим умножением всех ординат соответствующей части л.в. R_B на 3,16 и изменив знак на противоположный;

б) груз $P=1$ справа от р.р.п. – рассматриваем левую часть фермы:

$$\begin{aligned} \sum M_1^{\text{лев}} = 0; \quad R_A \cdot 1,5 + S_{2-3} \cdot 0,949 \cdot 1,5 = 0; \\ S_{2-3} = -1,054 \cdot R_A; \quad \text{л.в. } S_{2-3} = (\text{л.в. } R_A) \cdot (-1,054); \end{aligned}$$

аналогично правую часть л.в. S_{2-3} получим умножением всех ординат соответствующей части л.в. R_A на 1,054 и изменив знак на противоположный;

в) на участке р.р.п. проводим соединительную прямую.

Л.в. $S_{1-5} = ?$ (сечение I - I, способ моментной точки – точка К):

а) груз $P = 1$ слева от р.р.п. – рассматриваем правую часть:

$$\sum M_K^{\text{прав}} = 0; \quad -R_B \cdot 9 + S_{1-5} \cdot 0,8 \cdot 5,25 - S_{1-5} \cdot 0,6 \cdot 1 = 0;$$

$$S_{1-5} = 2,5 \cdot R_B; \quad \text{л.в.} S_{1-5} = (\text{л.в.} R_B) \cdot 2,5;$$

б) груз $P = 1$ справа от р.р.п. – рассматриваем левую часть фермы:

$$\sum M_k^{\text{лев}} = 0; \quad -R_A \cdot 3 - S_{1-5} \cdot 0,8 \cdot 4,5 = 0;$$

$$S_{1-5} = -0,8333 \cdot R_A; \quad \text{л.в.} S_{1-5} = (\text{л.в.} R_A) \cdot (-0,8333);$$

в) на участке р.р.п. проводим соединительную (переходную) прямую.

Л.в. S_{5-4} – ? (сечение II - II для основной фермы, способ момент. точки –

точка К):

Несложно увидеть, что процедура построения л.в. S_{5-4} точно такая же, как и для л.в. S_{1-5} ; разница связана с тем, что для S_{5-4} р.р.п. будет длиннее – между узлами 2 и 4, поэтому и переходная прямая проходит на этом участке.

Л.в. S_{5-4} и S_{1-5} на рис. 6.4 совмещены.

Л.в. S_{1-6} – ? (сечение I - I, способ моментной точки – точка 4):

а) груз $P = 1$ слева от р.р.п. – рассматриваем правую часть:

$$\sum M_4^{\text{прав}} = 0; \quad S_{1-6} \cdot 2 - R_B \cdot 3 = 0;$$

$$S_{1-6} = 1,5 \cdot R_B; \quad \text{л.в.} S_{1-6} = (\text{л.в.} R_B) \cdot 1,5;$$

б) груз $P = 1$ справа от р.р.п. – рассматриваем левую часть фермы:

$$\sum M_4^{\text{лев}} = 0; \quad -S_{1-6} \cdot 2 + R_A \cdot 3 = 0;$$

$$S_{1-6} = 1,5 \cdot R_A; \quad \text{л.в.} S_{1-6} = (\text{л.в.} R_A) \cdot 1,5;$$

в) на участке р.р.п. проводим соединительную (переходную) прямую.

Л.в. S_{1-2} – ? (сечение III - III, способ моментной точки – точка К):

Для построения л.в. усилия в этой стойке шпренгельной фермы с двухъярусными шпренгелями необходимо построить л.в. усилия в стойке основной фермы при движении груза поверху и понизу; способ построения обоих вариантов л.в. одинаков, разница будет связана только с разным положением р.р.п., поэтому оба варианта л.в. будут различаться только на участках р.р.п.:

а) груз $P=1$ слева от р.р.п. – рассматриваем правую часть:

$$\sum M_k^{\text{прав}} = 0; \quad -R_B \cdot 9 - S_{1-2} \cdot 4,5 = 0; \quad S_{1-2} = -2 \cdot R_B; \quad \text{л.в.} S_{1-2} = (\text{л.в.} R_B) \cdot (-2);$$

б) груз $P=1$ справа от р.р.п. – рассматриваем левую часть фермы:

$$\sum M_k^{\text{лев}} = 0; \quad -R_A \cdot 3 + S_{1-2} \cdot 4,5 = 0; \quad S_{1-2} = 0,667 \cdot R_A; \quad \text{л.в.} S_{1-2} = (\text{л.в.} R_A) \cdot \frac{2}{3};$$

в) на участках р.р.п. для обоих вариантов проводим свои соединительные прямые;

г) выполняем анализ передачи груза при различных его положениях на участке раздвоения л.в.:

– при положении груза в узлах 7 и 3 он воспринимается шпренгелями, которые передают его на нижний пояс, поэтому действительной будет ветвь линии влияния для движения груза понизу;

– при положении груза в узле 2 шпренгели не работают и груз остается на верхнем поясе – ветвь л.в. для движения груза поверху.

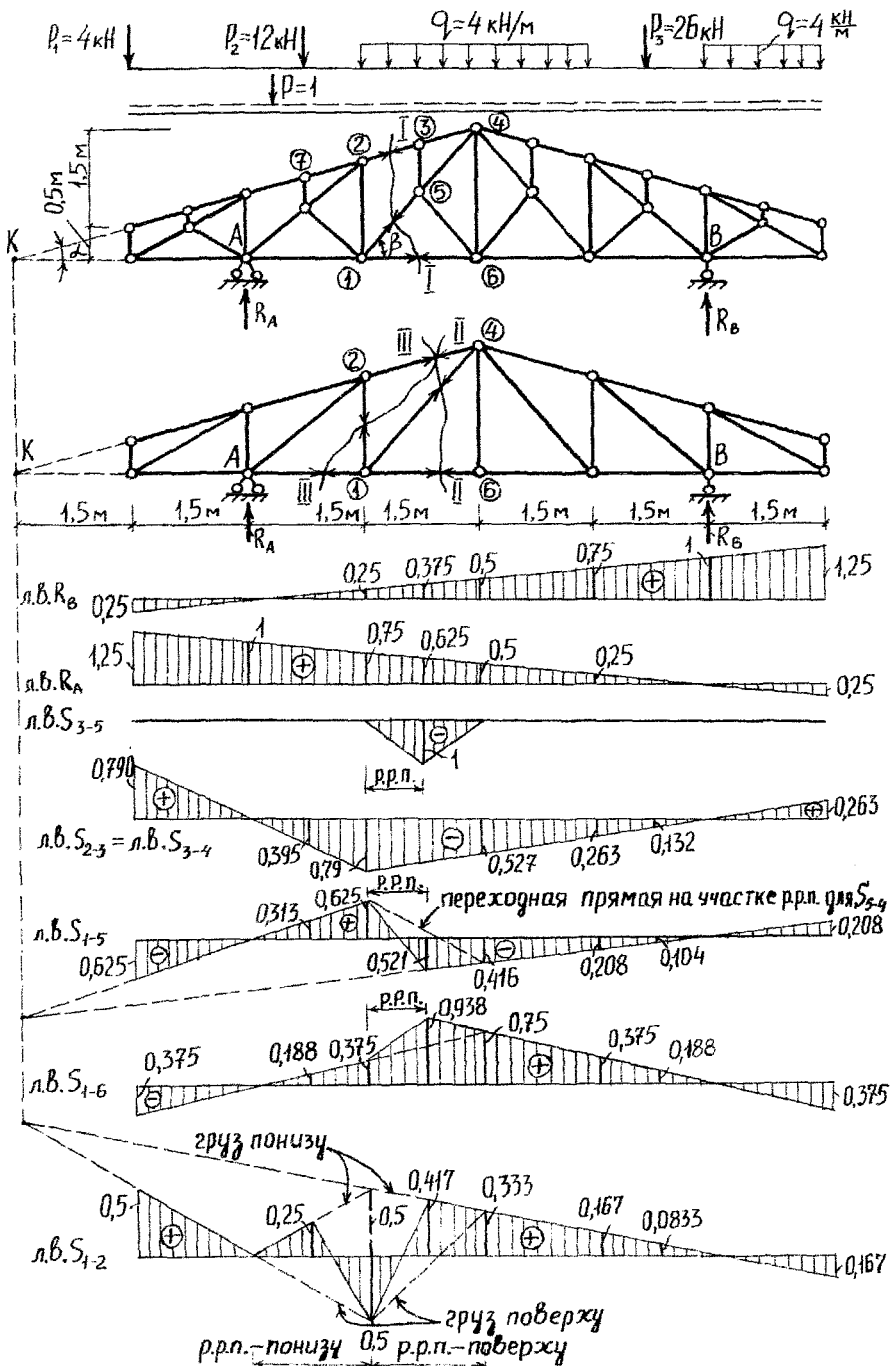


Рис. 6.4

Л.в. $S_{3,5} = ?$ (способ вырезания узла - узла 3):

а) груз $P=1$ в узле 3 - $\sum Z = 0$; (аналогично как при расчете усилия);

$$S_{3,5} = -1;$$

б) груз $P=1$ вне узла и вне рассеченных панелей - $\sum Z = 0$; $S_{3,5} = 0$;

в) на участках рассеч. панелей 2-3 и 3-4 проводим переходные прямые.

3. Усилия от заданной внешней нагрузки по линиям влияния этих усилий определяем по известной формуле (см. раздел 1): $Z = \sum P_i \cdot y_i + \sum q_j \cdot \omega_j$;

$$S_{2,3} = S_{3,4} = 4 \cdot 0,79 + 12 \cdot (-0,395) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-0,79 - 0,263) \cdot 3 + 26 \cdot (-0,132) + 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,263 \cdot 1,5\right) = -10,54(\text{кН});$$

$$S_{1,5} = 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (0,625 - 0,521) \cdot 0,75 - \frac{1}{2} \cdot (0,521 + 0,208) \cdot 2,25\right] + 4 \cdot (-0,625) + 12 \cdot 0,313 + 26 \cdot (-0,104) + 4 \cdot (0,5 \cdot 0,208 \cdot 1,5) = -3,95(\text{кН});$$

$$S_{1,6} = 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (0,375 + 0,938) \cdot 0,75 + \frac{1}{2} \cdot (0,938 + 0,375) \cdot 2,25\right] + 4 \cdot (-0,375) + 12 \cdot 0,188 + 26 \cdot 0,188 + 4 \cdot (-0,5 \cdot 0,378 \cdot 1,5) = 12,38(\text{кН});$$

$$S_{1,2} = 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (0,417 - 0,5) \cdot 0,75 + \frac{1}{2} \cdot (0,417 + 0,167) \cdot 2,25\right] + 4 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,25 + 26 \cdot 0,0833 + 4 \cdot (-0,5 \cdot 0,167 \cdot 1,5) = 9,167(\text{кН});$$

$$S_{3,5} = 4 \cdot (-0,5 \cdot 1 \cdot 1,5) = -3(\text{кН});$$

$$S_{5,4} = 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (0,625 - 0,416) \cdot 1,5 - \frac{1}{2} \cdot (0,416 + 0,208) \cdot 1,5\right] + 4 \cdot (-0,625) + 12 \cdot 0,313 + 26 \cdot (-0,104) + 4 \cdot (0,5 \cdot 0,208 \cdot 1,5) = -2,08(\text{кН}).$$

Все усилия, вычисленные по линиям влияния, совпадают с полученными из аналитического расчета фермы.

7. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

Расчет статически неопределимых систем начинается с установления степени статической неопределимости, которая вычисляется по формулам:

$$L = (3D - \text{Ш} - C_0) \quad \text{или} \quad L = 3K - C,$$

где L - число "лишних" связей; D - число дисков; Ш - число простых шарниров, соединяющих диски D ; C_0 - число опорных стержней; K - число замкнутых контуров рамы; C - число связей, недостающих до полной замкнутости контуров (его можно определить и как число всех одиночных шарниров в сис-

теме, включая опорные). Вторая формула обычно используется для рам, имеющих замкнутые контуры.

За основные неизвестные в методе сил принимаются усилия в лишних связях. Удаляя лишние связи и заменяя их реактивными усилиями, получают так называемую основную систему метода сил. Реактивные усилия X_i в отброшенных связях определяются из системы дополнительных уравнений, каждое из которых выражает собой равенство нулю перемещений по направлению одной из отброшенных связей.

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Здесь δ_{ik} — перемещение по направлению i -ой отброшенной связи от действия силы $X_k = 1$; Δ_{ip} — перемещение по направлению i -ой связи от внешней нагрузки. Для определения этих перемещений необходимо в основной системе построить единичные M_i (от $X_1 = 1, X_2 = 1$ и т.д.) и грузовую M_p эпюры изгибающих моментов. Вычисления перемещений производят по формуле Мора путем перемножения соответствующих эпюр, пренебрегая влиянием поперечных и продольных сил:

$$\delta_{ik} = \sum_0^l \frac{M_i M_k ds}{EJ}; \quad \Delta_{ip} = \sum_0^l \frac{M_i M_p ds}{EJ}. \quad (7.2)$$

Для проверки правильности вычисления единичных и грузовых перемещений необходимо построить суммарную эпюру изгибающих моментов от одновременного действия всех единичных усилий.

$$M_s = M_1 + M_2 + \dots + M_n.$$

Перемножая эту эпюру саму на себя, мы должны получить число, равное сумме всех коэффициентов канонических уравнений:

$$\sum_0^l \frac{M_s M_s ds}{EJ} = \sum \sum \delta_{ik}. \quad (7.3)$$

Результат перемножения суммарной эпюры на грузовую должен быть равен сумме всех свободных членов уравнений.

$$\sum_0^l \frac{M_s M_p ds}{EJ} = \sum \Delta_{ip}. \quad (7.4)$$

Вычислив и проверив все перемещения, решаем систему канонических уравнений и находим усилия в лишних связях. Для построения окончательной эпюры изгибающих моментов необходимо ординаты каждой из единичных эпюр умножить на соответствующие значения X_i и полученные "исправленные" эпюры сложить с грузовой эпюрой:

$$M = M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n \cdot X_n + M_p. \quad (7.5)$$

Построенную эпюру изгибающих моментов необходимо проверить путем умножения ее на суммарную или любую из единичных эпюр. Результат перемножения должен быть равен нулю:

$$\sum_0^l \int \frac{M \cdot M_s}{EJ} \cdot ds = 0. \quad (7.6)$$

Это и есть так называемая деформационная (кинематическая) проверка, выражающая равенство нулю всех перемещений по направлению отброшенных связей в заданной статически неопределимой системе.

Эпора поперечных сил может быть построена непосредственно по эпюре изгибающих моментов. На участках стержней, где эпора M прямолинейна, поперечная сила определяется по зависимости:

$$Q = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg} \alpha_m = \pm \frac{M_{\text{пр}} - M_{\text{лев}}}{l}, \quad (7.7)$$

На участках, где эпора M криволинейна, значения поперечных сил определяются согласно выражению:

$$Q_x = Q_x^0 \pm \frac{M_{\text{пр}} - M_{\text{лев}}}{l}, \quad (7.8)$$

где Q_x^0 — значение поперечной силы в сечении x двухопорной балки, нагруженной такой же равномерно распределенной нагрузкой; $M_{\text{пр}}$ и $M_{\text{лев}}$ — соответственно значения изгибающих моментов на правом и левом концах участка длиной l ; знак перед абсолютной величиной принимается по правилу: если для совмещения оси стержня с прямой, соединяющей ординаты $M_{\text{пр}}$ и $M_{\text{лев}}$, необходимо поворачивать ось стержня по часовой стрелке, то принимается знак "+", если против часовой стрелки, то знак — "-".

Продольные силы в стержнях рамы находятся по найденным значениям поперечных сил путем вырезания и уравнивания узлов рамы. При этом при наличии в узле сосредоточенных нагрузок они также должны учитываться.

Пример 6. Для заданной рамы (рис. 7.1а) требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

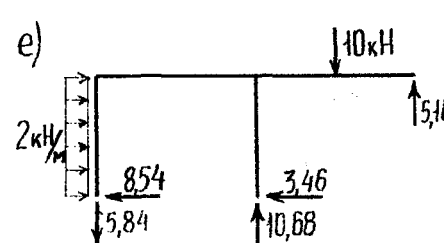
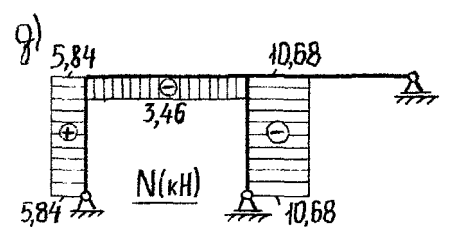
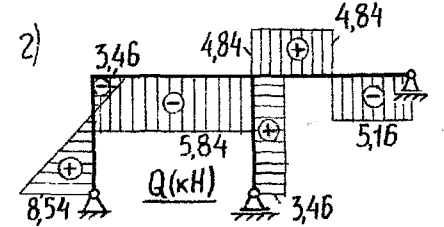
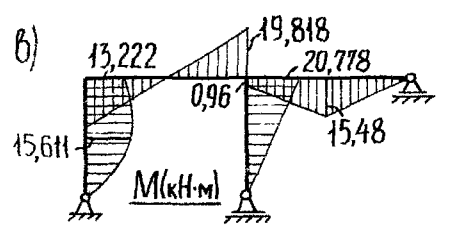
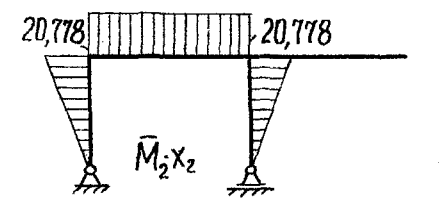
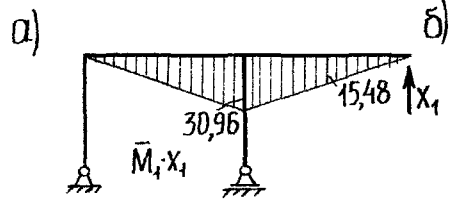
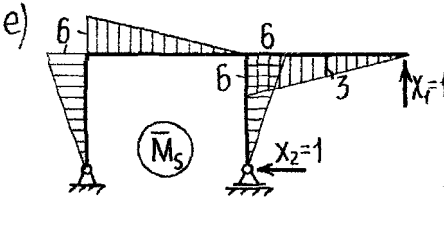
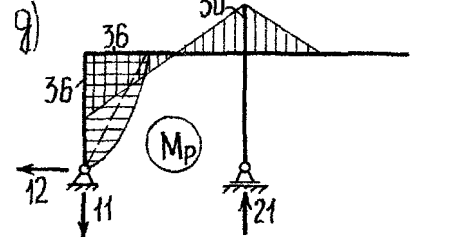
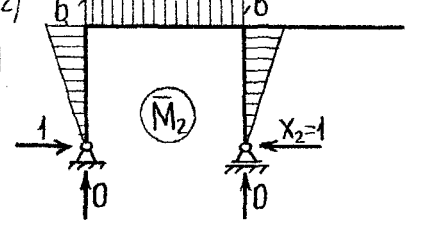
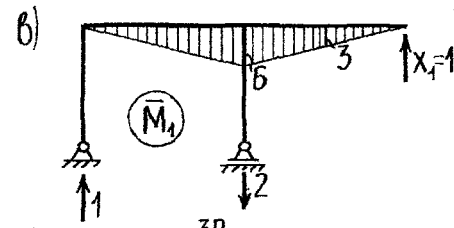
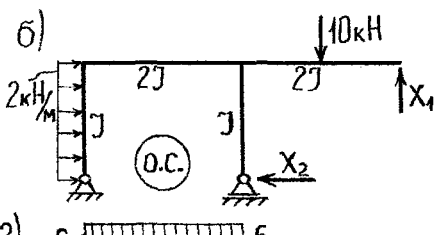
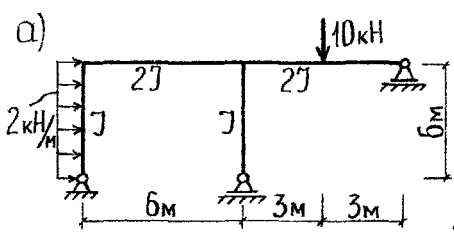
Решение. Определяем число лишних связей: $D = 3K - C = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

Выбираем основную систему путем удаления двух лишних связей (рис. 7.1б). В основной системе строим эпюры M_1, M_2, M_p и M_s (рис. 7.1в-7.1е). Составляем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

Находим коэффициенты и свободные члены уравнений и проверяем их

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 = \frac{72}{EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = -\frac{54}{EJ};$$



$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{252}{EJ};$$

$$\delta_{ss} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 = \frac{216}{EJ} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22};$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{2EJ} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(30 - \frac{1}{3} \cdot 66 \right) + \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3 \cdot \left(3 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) \right] = -\frac{184,5}{EJ};$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2 \cdot 6^3}{12} \cdot 3 \right) - \frac{1}{2EJ} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{36 - 30}{2} = -\frac{594}{EJ};$$

$$\Delta_{sp} = -\frac{1}{EJ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2 \cdot 6^3}{12} \cdot 3 \right) - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(36 - \frac{1}{3} \cdot 66 \right) - \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 3 \cdot \left(3 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = -\frac{778,5}{EJ} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p}.$$

Подставляем найденные коэффициенты и свободные члены в уравнения и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 72X_1 - 54X_2 - 184,5 = 0; \\ -54X_1 + 252X_2 - 594 = 0; \end{cases} \quad X_1 = 5,16 \text{ кН}; \quad X_2 = 3,463 \text{ кН}.$$

Строим "исправленные" эпюры $\bar{M}_1 \cdot X_1$ и $\bar{M}_2 \cdot X_2$ (рис. 7.2а,б)

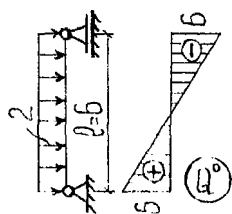
Окончат. эпюру M (рис. 7.2в) строим по формуле: $M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_p$.

Производим деформационную проверку правильности построения эпюры M :

$$\begin{aligned} \sum_0^l \frac{1}{EJ} \cdot \bar{M}_s \cdot ds &= \frac{1}{EJ} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 15,222 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2 \cdot 6^3}{12} \cdot 3 \right] - \\ &- \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left(15,222 - \frac{1}{3} \cdot 35,04 \right) + \frac{1}{2EJ} \cdot \left[0,96 \cdot 3 \cdot \frac{6+3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 14,52 \cdot 3 \cdot 4 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \cdot 15,48 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 20,778 = -290,664 - 31,878 + 73,26 + \\ &+ 249,336 = 322,596 - 322,542 = 0,054 \approx 0. \text{ Эпюра } M \text{ построена правильно.} \end{aligned}$$

Строим эпюру поперечных сил. На левой стойке эпюра M криволинейна.

Рассматриваем стержень как балку, нагруженную равномерной нагрузкой:



$$Q_1 = Q_1^0 + \left| \frac{M_{\text{уп}}}{l} \cdot \frac{M_{\text{лев}}}{6} \right| = -6 + \left| \frac{15,222 \cdot 0}{6} \right| = 8,54 \text{ кН};$$

$$Q_2 = -6 + \left| \frac{15,222 \cdot 0}{6} \right| = -3,46 \text{ кН}.$$

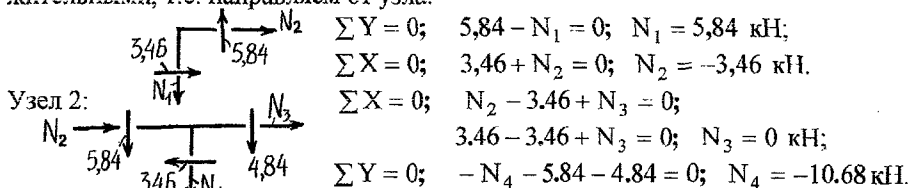
$$\text{На левом ригеле: } Q = -\left| \frac{19,818 + 15,222}{6} \right| = -5,84 \text{ кН}.$$

На правом ригеле для 2-х участков и на правой стойке:

$$Q_1^p = \frac{15,48}{3} = 5,16 \text{ кН}; \quad Q_2^p = -\frac{15,48}{6} = -2,58 \text{ кН}; \quad Q^{\text{ср}} = \frac{20,778}{6} = 3,46 \text{ кН}.$$

Эшора Q показана на рис. 7.2г.

Строим эшору продольных сил. Вырезаем левый узел, прикладываем в сечениях известные поперечные силы и неизвестные продольные силы. Положительные поперечные силы показываем вращающими вокруг центра узла по ходу часовой стрелки. Определяемые продольные силы вначале считаем положительными, т.е. направляем от узла:



Эшора N изображена на рис. 7.2д.

Производим статическую проверку равновесия рамы, для чего показываем все действующие в ней опорные реакции и заданную внешнюю нагрузку (рис.7.2е), которые должны уравновешивать друг друга:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad & 2 \cdot 6 - 8,54 - 3,46 = 0; \\ \sum Y = 0; \quad & 10,68 + 5,16 - 5,84 - 10 = 0. \end{aligned}$$

8. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

За основные неизвестные при расчете рам методом перемещений принимаются углы поворотов жестких узлов и линейные перемещения узлов. При этом влиянием поперечных и продольных сил на деформацию стержней и сближением концов стержня при изгибе пренебрегают.

Число неизвестных угловых поворотов узлов принимается равным числу жестких узлов. При этом жестким считается узел, в котором жестко соединяются хотя бы два стержня, и в котором происходит неопределимое с точки зрения статики изменение изгибающих моментов. Число неизвестных линейных смещений узлов определяется по числу возможных смещений жестких и шарнирных узлов системы при возможном упругом ее деформировании с учетом указанных выше допущений.

Основная система метода перемещений (О.С.) получается путем введения во все жесткие узлы заданной системы дополнительных заделок и введения дополнительных линейных связей, препятствующих линейным смещениям узлов. В результате О.С. метода перемещений будет статически неопределимой и будет представлять собой совокупность простых балочек с жесткими и шарнирными опорами, совершенно независимыми друг от друга, т.е. эшоры изгибающих моментов будут возникать только в тех балочках (на тех участках), которые непосредственно подвержены какому-то воздействию.

Для определения основных неизвестных составляется система уравнений в канонической форме:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} = 0; \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Здесь r_{ik} — реактивное усилие, возникающее в дополнительной связи i от смещения связи k на величину $Z_k = 1$; R_{ip} — реактивное усилие в i -ой связи от внешней нагрузки; Z_k — неизвестные угловые и линейные смещения узлов.

Каждое из канонических уравнений выражает собой отрицание реактивного усилия в соответствующей дополнительной связи от всех воздействий, так как в заданной схеме рамы такой связи нет.

Определению коэффициентов и свободных членов канонических уравнений должно предшествовать построение эпюр изгибающих моментов в основной системе от единичных смещений узлов и от внешней нагрузки. Эпюры строятся с помощью стандартных таблиц. Для определения реактивных усилий в дополнительных связях удобно применять статический способ.

Чтобы определить реакцию r_{ik} или R_{ip} , представляющую собой момент в дополнительной заделке, нужно вырезать соответствующий узел, содержащий заделку i , и рассмотреть его равновесие по уравнению $\sum M = 0$.

Для определения реакции r_{ik} или R_{ip} в дополнительном опорном стержне нужно отделить сечением часть рамы и рассмотреть ее равновесие, составляя уравнение в виде суммы проекций всех сил на ось, параллельную опорному стержню; при этом рассекать раму целесообразно таким образом, чтобы в уравнение равновесия входили только поперечные силы, и не входили продольные силы.

Заметим, что реактивное усилие считается положительным, если направление его действия совпадает с принятым направлением поворота или линейного смещения узла.

Из решения системы канонических уравнений находятся искомые перемещения узлов Z_k и строится окончательная эпюра изгибающих моментов по формуле:

$$M = M_1 \cdot Z_1 + M_2 \cdot Z_2 + \dots + M_n \cdot Z_n + M_p. \quad (8.2)$$

Для установления правильности построения эпюры M выполняется статическая проверка равновесия узлов и деформационная проверка. Для деформационной проверки необходимо построить одну из единичных эпюр в основной системе метода сил. Результат перемножения этой эпюры на окончательную эпюру M должен быть равен нулю. Эпюры поперечных и продольных сил строятся по эпюре M рассмотренными в методе сил приемами.

В конце расчета производится статическая проверка выполнения условий равновесия рамы в целом.

Пример 7. Рассчитать раму, изображенную на рис. 8.1а, методом перемещений.

Решение: Определяем число неизвестных перемещений узлов по формуле:

$$n = n_y + n_n$$

Число неизвестных углов поворота равно числу жестких узлов рамы $n_y = 1$.

Число независимых возможных линейных перемещений узлов для рассматриваемой рамы также будет равно единице – узлы 1 и 2 могут вместе упруго смещаться по горизонтали. В результате: $n = 1 + 1 = 2$.




Основную систему метода перемещений получаем путем установки заземления в узле 1 и опорного стержня в узле 2, препятствующего горизонтальному перемещению средних узлов (рис. 8.1б). Вычисляем условную погонную жесткость стержней, приняв $EJ/6 = 1$.

Строим единичные эпюры изгибающих моментов, задавая последовательно поворот по часовой стрелке заделки 1 на угол $Z_1 = 1$ и линейное смещение связи 2 вправо на величину $Z_2 = 1$, и эпюру M_p от внешней нагрузки. Все эпюры строятся с помощью табличных эпюр. Канонические уравнения

имеют следующий вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases}$$

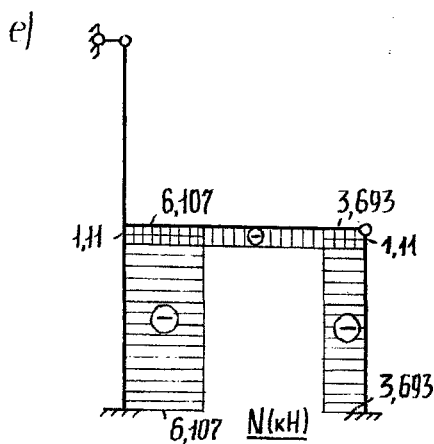
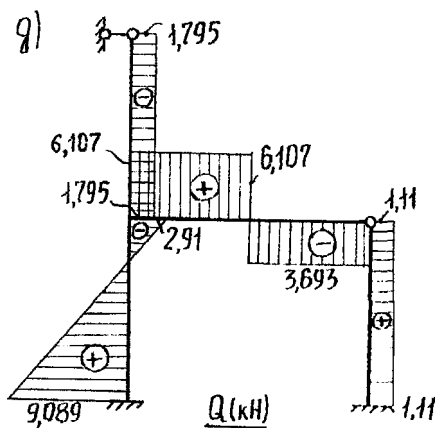
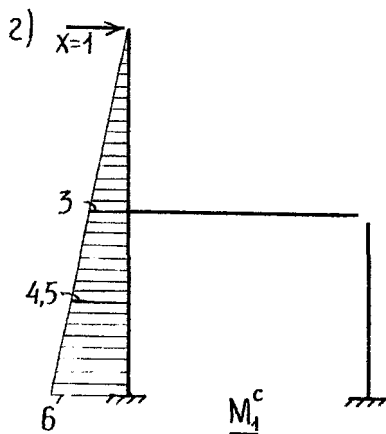
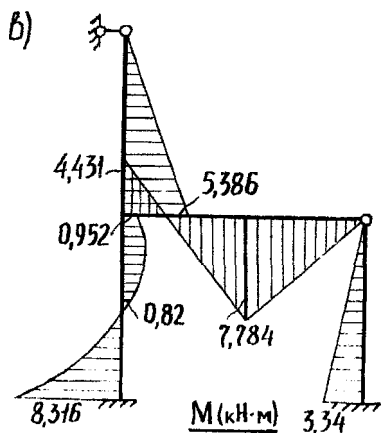
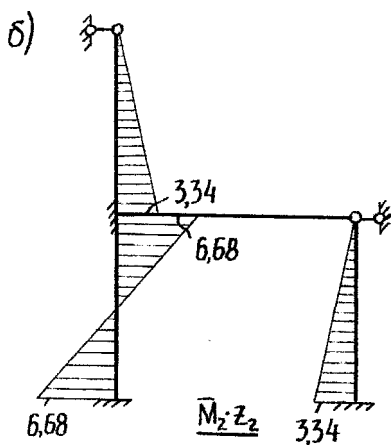
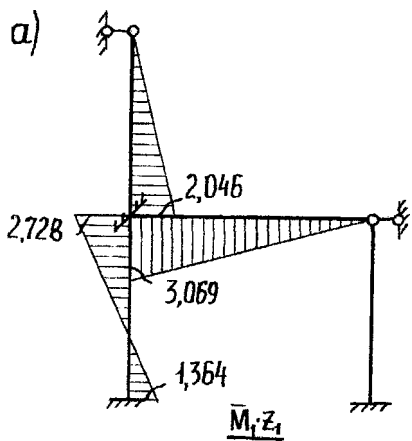
Определяем реактивные усилия в дополнительных связях. Определение реактивных реактивных моментов узле 1 показано на рис. 8.1е, а реактивных усилий в связи 2 представлено ниже:

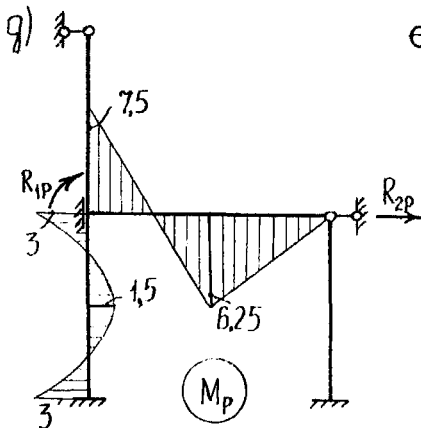
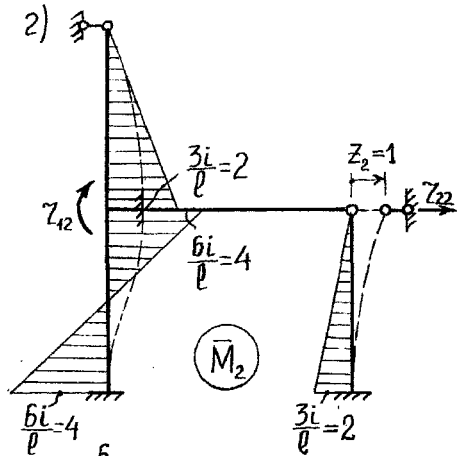
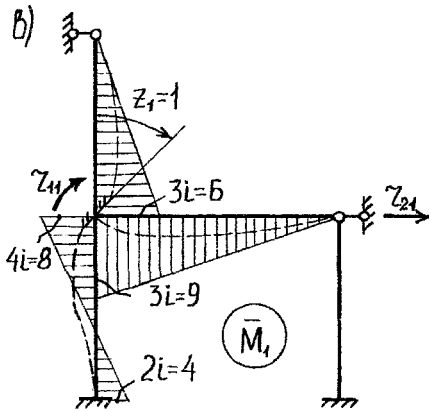
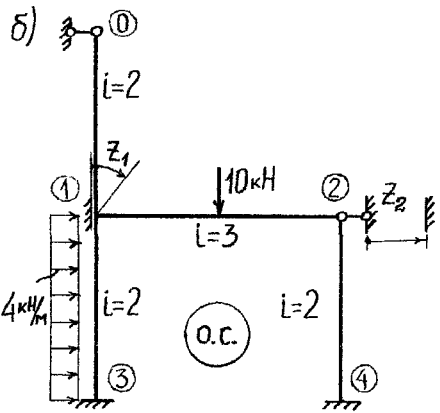
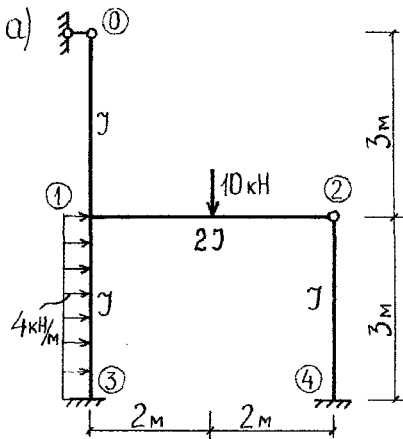
 <p>$Q = \frac{6}{3} = 2$</p> <p>$Q = \frac{12}{3} = 4$</p> <p>$\sum X = 0;$</p> <p>$r_{21} + 4 - 2 = 0;$</p> <p>$r_{21} = -2.$</p>	 <p>$Q = \frac{2}{3}$</p> <p>$Q = \frac{8}{3}$</p> <p>$Q = \frac{2}{3}$</p> <p>$\sum X = 0;$</p> <p>$r_{22} - \frac{2}{3} - \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 0;$</p> <p>$r_{22} = 4.$</p>	 <p>$Q = 0$</p> <p>$Q = \frac{9 \cdot 6}{2} = 6$</p> <p>$Q = 0$</p> <p>$\sum X = 0;$</p> <p>$R_{2p} + 6 = 0;$</p> <p>$R_{2p} = -6.$</p>
--	---	--

Решаем систему канонических уравнений:

$$\begin{cases} 23Z_1 - 2Z_2 - 4,5 = 0; \\ -2Z_1 + 4Z_2 - 6 = 0; \end{cases} \quad Z_1 = 0,341; \quad Z_2 = 1,67.$$

Строим промежуточные эпюры $M_1 \cdot Z_1$ и $M_2 \cdot Z_2$ и, сложив их с эпюрой M_p , получим окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 8.2в). Равновесие узла 1 на окончательной эпюре M сохраняется. Для деформационной проверки выбираем из заданной рамы основную систему метода сил и строим в ней единичную эпюру от $X = 1$ (рис. 8.2г).





е)

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0; \\ z_H - 6 - 8 - 9 &= 0; \\ z_H &= 23. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0; \\ z_{12} + 4 - 2 &= 0; \\ z_{12} &= -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0; \\ R_{1P} + 7.5 - 3 &= 0; \\ R_{1P} &= -4.5 \text{ kH.m.} \end{aligned}$$

$$\sum_0^1 \frac{M \cdot M_1^c \cdot ds}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,386 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{3}{6EJ} \cdot (8,316 \cdot 6 - 4 \cdot 0,82 \cdot 4,5 - 0,952 \cdot 3) =$$

$$= -\frac{16,158}{EJ} + \frac{16,14}{EJ} = \frac{0,018}{EJ} \approx 0.$$

Строим по эпюре M эпюру Q, а по эпюре Q из вырезания узлов эпюру N.

Выполняем статическую проверку равновесия рамы.

$$\sum X = 0; \quad 12 - 1,795 - 9,083 - 1,11 = 0. \quad \sum Y = 0; \quad 6,107 + 3,893 - 10 = 0.$$

9. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ РАМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Основной задачей расчете сооружений на устойчивость является определение критических нагрузок. Наиболее простым для решения задач устойчивости является метод перемещений. Основная система при этом принимается такой же, как и при расчете рамы методом перемещений на прочность. Поскольку на раму действует узловая нагрузка и до потери устойчивости стержни испытывают только напряжения сжатия, реакции в дополнительных связях основной системы от внешней нагрузки будут равны нулю. Канонические уравнения метода перемещений имеют вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n = 0; \\ \text{-----} \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Для определения коэффициентов уравнений необходимо построить эпюры изгибающих моментов от единичных смещений дополнительных связей. При этом в сжатых внешней нагрузкой стержнях изгибающие моменты и реакции опор будут зависеть от действия продольной силы. Влияние продольной силы учитывается безразмерным параметром устойчивости:

$$\nu_i = \sqrt[4]{\frac{P_i}{EJ_i}}. \quad (9.2)$$

В остальных стержнях усилия возникают такие же, как и при прочностном расчете методом перемещений. Эпюры изгибающих моментов от единичных смещений строятся с помощью специальных табличных эпюр, приведенных в учебниках и пособиях. Коэффициенты канонических уравнений определяются так же, как и при расчете рамы на прочность методом перемещений.

При потере устойчивости рамы перемещения узлов Z_i в общем случае не равны нулю. Поэтому должен быть равен нулю определитель из коэффициентов канонических уравнений:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad (9.3)$$

Раскрывая этот определитель, получаем уравнение устойчивости рамы. Это уравнение относительно параметров ν_i решается методом подбора.

Найдя критические параметры ν_i , определяют значения критических сил по формуле:

$$P_{кр} = \nu_i^2 \cdot \frac{EJ_i}{l_i^2}. \quad (9.4)$$

Пример 8. Определить значения критических сил ^{для} рамы, изображенной на рис. 9.1а, при $J_2 = 2J_1$; $P_2 = 3P_1$.

Решение. Основная система показана на рис. 9.1б. Принимаем условную погонную жесткость $\frac{EJ_1}{6} = 1$, тогда $i_1 = \frac{EJ_1}{6} = 1$; $i_2 = \frac{EJ_2}{4} = \frac{2EJ_1}{4} = 3$.

Вычисляем параметры ν_i : $\nu_1 = 6 \sqrt{\frac{P_1}{EJ_1}} = \nu$; $\nu_2 = 6 \sqrt{\frac{P_2}{EJ_1}} = 6 \sqrt{\frac{3P_1}{EJ_1}} = 1.73\nu$.

Строим единичные эпюры M_1 и M_2 , используя табличные эпюры (рис. 9.1в,г).

Канонические уравнения имеют вид:
$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0. \end{cases}$$

Используя статический метод, по эпюрам M_1 и M_2 определяем реактивные усилия в дополнительных связях:

$$r_{11} = 9 + 4\varphi_2(\nu); \quad r_{12} = r_{21} = \varphi_4(\nu); \quad r_{22} = \frac{1}{3}\eta_2(\nu) + \frac{1}{12}\eta_1(1.73\nu).$$

Составляем уравнение устойчивости:

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0;$$

$$[9 + 4\varphi_2(\nu)] \cdot \left[\frac{1}{3}\eta_2(\nu) + \frac{1}{12}\eta_1(1.73\nu) \right] - \varphi_4^2(\nu) = 0.$$

и решаем его методом подбора: 1) задаемся $\nu = 2$, по таблицам определяем значения функций $\varphi_2(2) = 0,859$; $\eta_1(3,46) = -4,4111$; $\eta_2(2) = 0,598$; $\varphi_4(2) = 0,9313$. При подстановке этих функций в уравнение устойчивости левая часть уравнения не обращается в нуль; 2) задаемся значением $\nu = 1,5$ и снова повторяем все расчеты; 3) окончательно, после нескольких попыток получаем $\nu_1 = \nu = 1,583$; $\nu_2 = 1,73\nu = 2,7386$.

Определяем значения критических сил:

$$P_{1кр} = \nu_1^2 \cdot \frac{EJ_1}{l_1^2} = 0,06961 J_1; \quad P_{2кр} = \nu_2^2 \cdot \frac{EJ_1}{l_1^2} = 0,2088EJ_1.$$

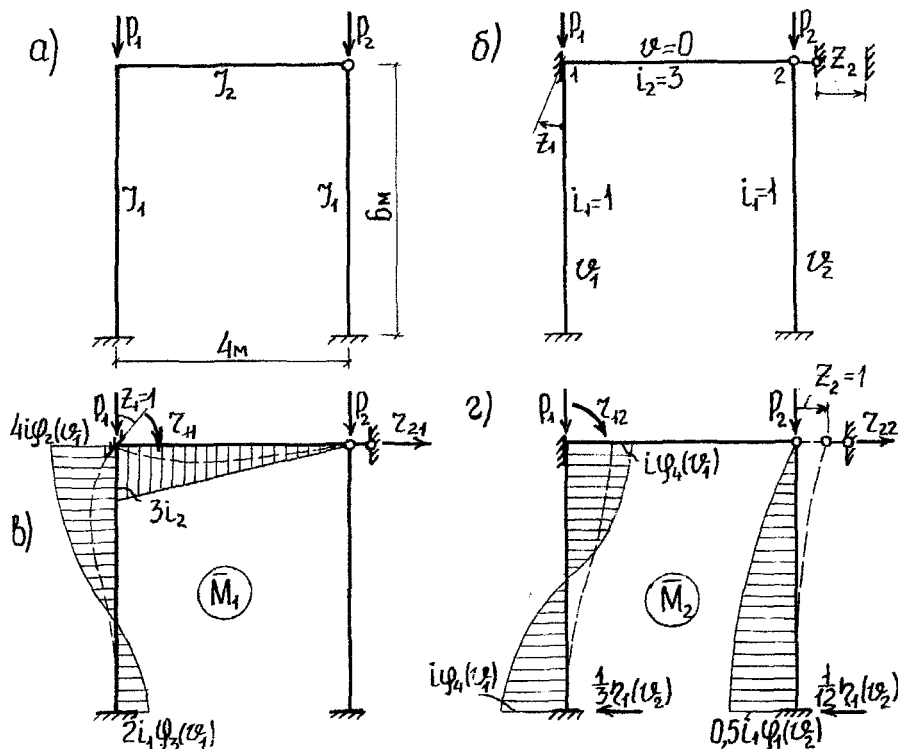


Рис. 9.1.

10. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ РАМЫ

При динамическом расчете прежде всего необходимо установить число степеней свободы с точки зрения динамики, то есть число независимых геометрических параметров, характеризующих положение всех масс при возможных перемещениях системы. При этом для рам здесь, как и в методе перемещений, не учитываются продольные деформации и деформации вдоль стержней при их изгибе. Для рам не учитывают обычно также инерцию вращения масс. Число степеней свободы с точки зрения динамики можно определить как число связей, которые надо ввести в систему для полной неподвижности всех масс. Число степеней свободы системы определяет и число возможных форм ее колебаний. При этом каждой форме свободных колебаний соответствует своя частота колебаний. Для практических целей наиболее важное значение имеет наименьшая частота колебаний, представляющая наибольшую опасность с точки зрения возникновения резонанса при вибрационных нагрузках.

Для определения частот свободных колебаний систем с конечным числом степеней свободы обычно используется, так называемое, частотное или вековое уравнение, записываемое в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - \lambda & \delta_{12}m_2 & \dots & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2 - \lambda & \dots & \delta_{2n}m_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \dots & \delta_{nn}m_n - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (10.1)$$

где n – число степеней свободы с точки зрения динамики;

m_i – величина массы, совершающей колебания в i -ом направлении;

δ_{ik} – перемещение в i -ом направлении возможных колебаний от действия единичной силы, приложенной в k -ом направлении возможных колебаний; определяются по формуле Мора вида

$$\delta_{ik} = \sum_0^1 \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EJ}, \quad (10.2)$$

для чего необходимо строить единичные эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i и \bar{M}_k от действия единичных сил в направлениях возможных колебаний масс;

$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$; ω – круговая частота свободных колебаний, показывающая число

полных колебаний системы за 2π секунд; измеряется в Гц или в s^{-1} .

Раскрывая определитель (10.1) и решая полученное уравнение, найдем для системы с n степенями свободы n положительных частот колебаний.

Для системы с одной степенью свободы уравнение (10.1) принимает вид:

$$\omega \begin{vmatrix} 1 \\ m\delta_{11} \end{vmatrix} = 0. \quad (10.3)$$

При действии на систему динамической нагрузки наиболее часто нам необходимо знать усилия (эпюры усилий) возникающие в системе, с учетом динамического действия нагрузок. Для решения этой задачи вначале необходимо найти величины инерционных сил, возникающих в процессе вынужденных колебаний. Это можно сделать с помощью уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* Z_1 + \delta_{12} Z_2 + \dots + \delta_{1n} Z_n + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} Z_1 + \delta_{22}^* Z_2 + \dots + \delta_{2n} Z_n + \Delta_{2p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1} Z_1 + \delta_{n2} Z_2 + \dots + \delta_{nn}^* Z_n + \Delta_{np} = 0. \end{cases} \quad (10.4)$$

где: Z_i – инерционная сила в i -ом направлении колебаний; $\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}$;

θ – частота вынуждающей нагрузки;

Δ_{ip} – перемещение в i -ом направлении колебаний от вынуждающей на-

грузки (для определения максимально возможных значений инерционных сил и усилий в системе для вычислений Δ_{ip} следует принимать амплитудное значение вынуждающей нагрузки), определяемое по формуле Мора:

$$\Delta_{ip} = \sum_0^l \frac{M_i M_p ds}{EJ}; \quad (10.5)$$

M_p – эпюра изгибающих моментов от действия вынуждающей нагрузки (от амплитудного ее значения).

Для системы с одной степенью свободы система уравнений (10.4) превращается в одно уравнение вида:

$$\delta_{11}^* Z_1 + \Delta_{ip} = 0 \quad \text{или} \quad \left(\delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2} \right) Z_1 + \Delta_{ip} = 0. \quad (10.6)$$

После определения инерционных сил динамическая эпюра M строится по формуле:

$$M_{\text{дин}} = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot Z_n + M_p \quad (10.7)$$

Эпюры $Q_{\text{дин}}$ и $N_{\text{дин}}$ строятся по эпюре $M_{\text{дин}}$ обычными способами (например, как в методе сил). При действии на систему наряду с динамическими статических нагрузок полная эпюра M строится по формуле:

$$M = M_{\text{дин}} + M_{\text{ст}}.$$

Пример 9. Для рамы представленной на рис. 10.1а, требуется определить частоту свободных колебаний и построить динамические эпюры M , Q и N .

Решение. Степень свободы системы с точки зрения динамики равна 1 (масса может перемещаться только в горизонтальном направлении), поэтому частоту свободных колебаний для заданной системы можно определить по формуле (10.3). При этом вначале построим эпюру \bar{M}_1 от действия единичной силы, приложенной к точке нахождения массы в направлении возможных колебаний – эпюра \bar{M}_1 представлена на рис. 10.1б; определение опорных реакций для ее построения выполнено с помощью уравнений:

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; & \begin{cases} -R_B \cdot 6 - H_B \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0; \\ \sum M_C^{\text{прав}} = 0; & \begin{cases} -R_B \cdot 4 + H_B \cdot 3 = 0; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow R_B = 0,3 (\text{кН}); H_B = 0,4 (\text{кН}); \end{cases}$$

$$\sum X = 0; \quad 1 - H_A - H_B = 0; \quad H_A = 0,6 (\text{кН}); \quad \sum Y = 0; \quad R_A = 0,3 (\text{кН}).$$

Теперь вычисляем единичное перемещение в направлении колебаний:

$$\delta_{11} = \sum_0^l \frac{M_1^2 dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1,8 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,8 + \frac{3}{6} \left(1,8^2 + 4 \cdot 1,2^2 + 0,6^2 \right) + \frac{0,6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1,2 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{1,2 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 \right] = \frac{11,52}{EJ} = 1,152 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\text{м}}{\text{кН}} \right).$$

В результате получим частоту свободных колебаний для системы

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{10^3}{3 \cdot 1,152}} = 17,01 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

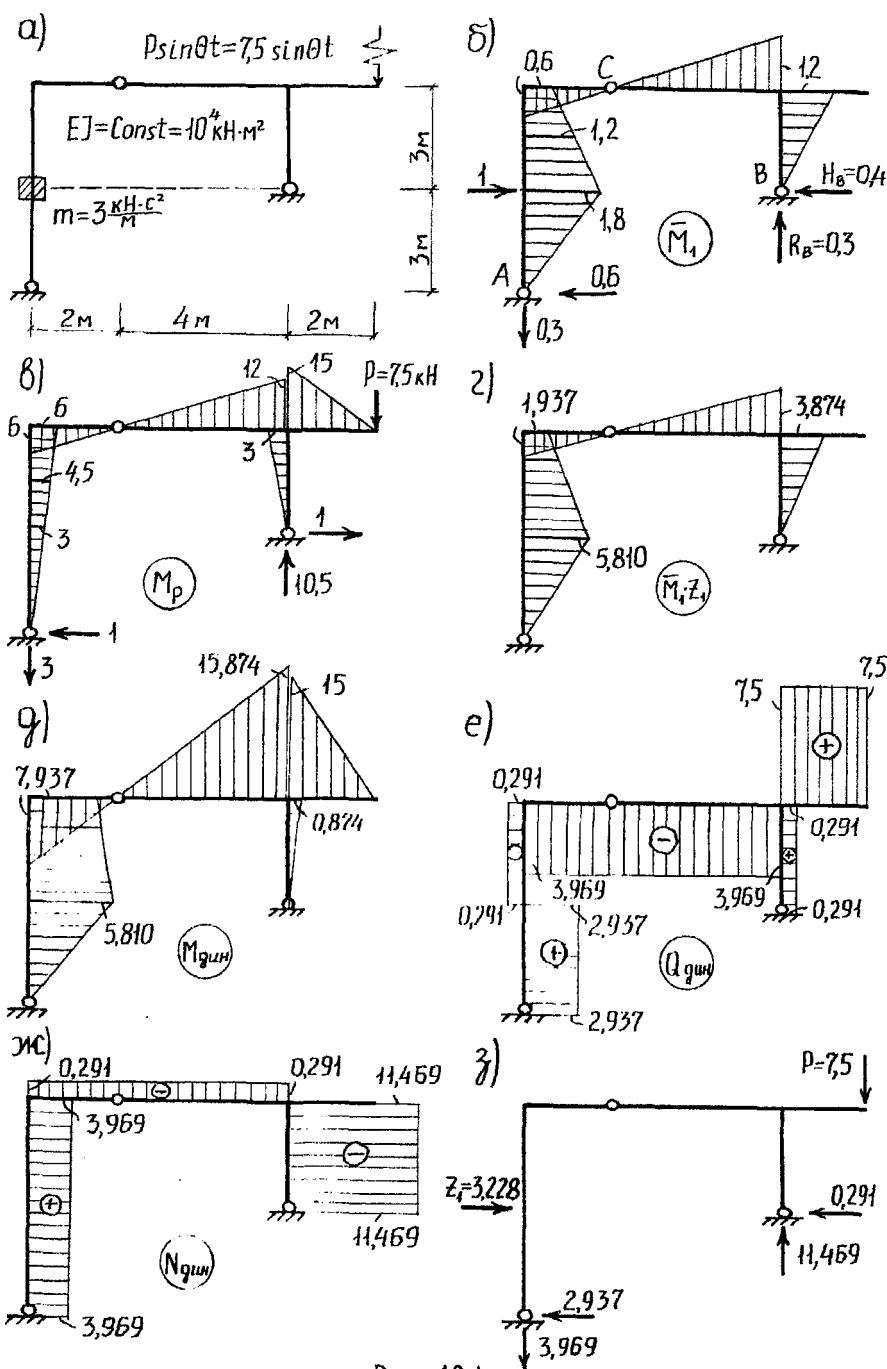


Рис. 10.1

Частота вынуждающей нагрузки равна $\theta = 0,7\omega = 0,7 \cdot 17,01 = 11,907 \text{ (с}^{-1}\text{)}$.

Для построения динамических эпюр внутренних усилий необходимо вычислить величину инерционной силы из решения уравнения (10.6), для чего строим грузовую эпюру M_p от действия амплитудного значения вынуждающей нагрузки $P = 7,5 \text{ кН}$ (рис. 10.1в), вычисляем грузовое перемещение в направлении возможных колебаний

$$\Delta_{1p} = \sum_0^1 \int \frac{\bar{M}_1 M_p dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,8 + \frac{3}{6} (1,8 \cdot 3 + 4 \cdot 1,2 \cdot 4,5 + 6 \cdot 0,6) + \frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{12 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 - \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 \right] = \frac{38,7}{EJ} = 3,87 \cdot 10^{-3} \text{ (м)},$$

и находим откорректированное единичное перемещение

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2} = 1,152 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{3 \cdot 11,907^2} = -1,199 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\text{м}}{\text{кН}} \right).$$

В результате инерционная сила будет равна

$$Z_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}^*} = -\frac{3,87 \cdot 10^{-3}}{-1,199 \cdot 10^{-3}} = 3,228 \text{ (кН)}.$$

Динамическая эпюра изгибающих моментов строится по формуле (10.7)

$$M_{\text{дин}} = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + M_p$$

и представлена на рис. 10.1д. Окончательные эпюры поперечных и продольных сил показаны на рис. 10.1е,ж.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Внутренние усилия, их определение, эпюры усилий.....	3
2. Расчет статически определимых многопролетных балок.....	7
3. Расчет простых и трехшарнирных рам.....	12
4. Определение перемещений в статически определимых балках и рамах ..	15
5. Расчет трехшарнирных арок на вертикальные нагрузки.....	17
6. Расчет плоских статически определимых ферм.....	19
7. Расчет статически неопределимых рам методом сил.....	26
8. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений.....	31
9. Расчет плоской рамы на устойчивость.....	36
10. Динамический расчет плоской рамы.....	38

Учебное издание

Составители: Валерий Иванович Игнатюк,
Иван Степанович Сыроквашко

**Методические указания к выполнению контрольных
работ по дисциплине "Строительная механика"**

*для студентов специальности Т.19.01
"Промышленное и гражданское строительство"
заочной формы обучения*

Ответственный за выпуск Игнатюк В.И.
Редактор Строкач Г.В.

Подписано к печати 30.04.99 г. Формат 60×84/16. Бумага писчая № 1.
Усл. п. л. 2,5. Уч. изд. ч. 2,75. Заказ № 39/. Тираж 200 экз. Бесплатно.
Отпечатано на ризографе Брестского политехнического института.
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.