

*Научный руководитель: доцент Ракецкий В.М.*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА МЕТОДОМ ОДНОМЕРНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Целью настоящей работы является разработка компьютерной программы, позволяющей моделировать процесс стекания воды по поверхности водосбора, используя метод одномерной кинематической волны.

В общем случае для моделирования поверхностного стока используются двумерные модели. Но недостаточность исходной информации, необходимой для их численной реализации, и большой объем вычислений, ограничивающий возможности определения неизвестных параметров методами оптимизации, делают целесообразным применение этих моделей в полной записи лишь для специальных задач, обеспеченных детальными исходными данными. Для массовых расчетов и учета стекания воды в моделях формирования стока, где учитывается ряд других процессов, необходимы более простые способы описания пространственной картины стекания.

Наиболее простым способом учета пространственной изменчивости условий стекания по поверхности водосбора является его схематизация в виде раскрытой книги, ось которой расположена горизонтально и соответствует руслу реки. В этом случае происходит плоскопараллельное движение вдоль каждого склона, описываемое одномерными уравнениями, в частности уравнениями кинематической волны:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_k + \alpha_k m h_k^{m-1} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_k = q_k(t), \quad (1)$$

где  $h_k$  - высота стекающего слоя;

$t_k$  - время;

$\alpha_k$  - коэффициент, зависящий от характеристик водосбора;

$m = 3$ ;

$x_k$  - координата водосбора;

$q_k(t)$  - эффективные осадки на  $k$ -той площадке, т. е. разность между интенсивностью дождя и инфильтрацией воды в почву.

Кинематическими волнами называется перемещение водных масс в условиях равновесия сил сопротивления и силы тяжести. Кинематические волны отличаются от динамических, которые могут распространяться как вниз, так и вверх по течению, тем, что распространяются только вниз по течению. Еще одним отличием является то, что динамические волны в естественных водотоках и на речных склонах распространяются с гораздо большей скоростью, чем кинематические, и быстро распластаются.

Однако возможности схематизации при помощи раскрытой книги весьма ограничены. Существенным шагом по сравнению с ней является модель кинематического каскада [2]. Водосбор в этой модели представляется в виде каскада площадок разных уклонов, ширин и длин (рисунок 1).

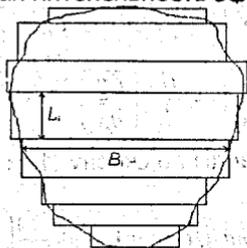
В работе [1] был предложен алгоритм математического моделирования поверхностного стока методом одномерной кинематической волны. Но при реализации он оказался неудобным с точки зрения вычислитель-

ного процесса, поэтому был разработан другой алгоритм моделирования, изложенный ниже.

С целью перевода переменных к безразмерным величинам для каждой  $k$ -той площадки, имеющей уклон  $I_k$ , ширину  $B_k$  и длину  $L_k$ , вводим характерный расход

$$Q_0(k) = \frac{q_{\max}}{B_k} \sum_{i=1}^k B_i L_i, \quad (2)$$

где  $q_{\max}$  - максимальная интенсивность эффективных осадков.



Ри. 1 - Схематизация водосбора в модели кинематического каскада

При движении кинематической волны этому расходу соответствует глубина

$$H_0(k) = \left( \frac{Q_0}{cm} \right)_k^{1/m}, \quad (3)$$

где  $\alpha_k = \frac{g I_k}{2\nu}$ ,  $(4)$

$g$  - коэффициент свободного падения;

$\nu = 179$  - кинематическая вязкость воды, и скорость

$$v_0(k) = \alpha_k m H_0^{m-1}(k). \quad (5)$$

Далее введем характерный масштаб длины

$$L_k = \sum_{i=1}^k L_i, \quad (6)$$

где  $k$  - общее число площадок, и характерный масштаб времени

$$T_0(k) = \frac{L_k}{v_0(k)}. \quad (7)$$

После этого величины  $h_k$ ,  $t_k$  и  $x_k$  при помощи выражений (2) - (7) переведем к безразмерным, т. е.  $\bar{h}_k$ ,  $\bar{t}_k$  и  $\bar{x}_k$  соответственно

$$\begin{aligned} \bar{h}_k &= \frac{h_k}{H_0(k)}; \\ \bar{t}_k &= \frac{t_k}{T_0(k)}; \\ \bar{x}_k &= \frac{x_k}{L_k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда с учетом приведенных выше формул будем иметь

$$\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}\right)_k = \frac{L_k}{m \alpha_k H_0^m(k)} \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_k \quad (9)$$

или

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_k = \frac{m \alpha_k H_0^m(k)}{L_k} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}\right)_k \quad (10)$$

Далее

$$\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}\right)_k = \frac{L_k}{H_0} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_k \quad (11)$$

или

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_k = \frac{H_0}{L_k} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}\right)_k \quad (12)$$

Имея уравнение движения воды по склону (1) и подставляя в него (10) и (12), получим

$$\frac{m \alpha_k H_0^m(k)}{L_k} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}\right)_k + m \alpha_k (H_0(k) \bar{h})^{m-1} \frac{H_0(k)}{L_k} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}\right)_k = q(t) \quad (13)$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}\right)_k + \bar{h}_k^{m-1} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}\right)_k = \bar{q}_k(\bar{t}), \quad (14)$$

где

$$\bar{q}_k(\bar{t}) = \frac{L_k}{m \alpha_k H_0^m(k)} q(T_0 \bar{t}) = \frac{T_0(k)}{H_0(k)} q(T_0 \bar{t}) \quad (15)$$

На основе приведенного выше алгоритма на языке программирования Delphi 6 была разработана программа, моделирующая стекание воды по поверхности водосбора.

Процесс моделирования заключается в численном решении дифференциального уравнения (14) при помощи конечно-разностных методов.

В программе реализовано решение по независимым переменным  $x_k$  и  $t_k$  при помощи двух конечно-разностных схем:

$$h_j^{i+1} = h_j^i - \Delta t \left[ \frac{(h^m)_{j+1}^i - (h^m)_{j-1}^i}{2\Delta x} - \frac{1}{2}(q_{j+1}^i + q_{j-1}^i) \right] + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} \times$$

$$\times \left\{ \left[ (h^{m-1})_{j+1}^i + (h^{m-1})_j^i \right] \left[ \frac{(h^m)_{j+1}^i - (h^m)_j^i}{2\Delta x} - \frac{1}{2}(q_{j+1}^i + q_j^i) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[ (h^{m-1})_{j-1}^i + (h^{m-1})_j^i \right] \left[ \frac{(h^m)_j^i - (h^m)_{j-1}^i}{2\Delta x} - \frac{1}{2}(q_j^i + q_{j-1}^i) \right] + \frac{2\Delta x}{\Delta t} (q_j^{i+1} - q_j^i) \right\} \quad (16)$$

$$h_j^{i+1} = h_j^i + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (h^m)_j^i - (h^m)_{j-1}^i \right] + q_j^i \Delta t \quad (17)$$

Перед началом моделирования задаются параметры моделирования для каждой площадки водосбора. Они включают в себя порядковый номер  $k$ , ширину  $B_k$ , длину  $L_k$  и уклон  $I_k$ . В заключение вводятся эффективные осадки на  $k$ -той площадке в момент времени  $t$  ( $q_k(t)$ ).

В работе [1] приведено аналитическое решение для простейшего случая, когда на одну площадку выпадает дождь, и известна его продолжительность. В таблице 1 приведены значения высоты стекающего слоя в конечном створе водосбора при различных значениях времени, полученные решением двух конечно-разностных схем, а также значения, полученные из аналитического решения уравнения (14), для следующих параметров:

- а) длина водосбора  $L = 10$  м;
- б) ширина водосбора  $B = 6$  м;
- в) уклон водосбора  $I = 0,013$ ;
- г) интенсивность дождя  $R_0 = 30$  мм;
- д) продолжительность дождя  $t_d = 3$  суток.

Таблица 1 - Значения высоты стекающего слоя

| Время $t$ ,<br>сутки | Значение высоты стекающего слоя $h$ , м |                            |                          |
|----------------------|---|----------------------------|--------------------------|
|                      | первая разностная<br>схема              | вторая разностная<br>схема | аналитическое<br>решение |
| 0                    | 0,000                                   | 0,000                      | 0,000                    |
| 2                    | 0,030                                   | 0,030                      | 0,030                    |
| 4                    | 0,090                                   | 0,090                      | 0,090                    |
| 6                    | 0,090                                   | 0,089                      | 0,090                    |
| 8                    | 0,085                                   | 0,083                      | 0,083                    |
| 10                   | 0,073                                   | 0,072                      | 0,071                    |
| 12                   | 0,064                                   | 0,064                      | 0,063                    |
| 14                   | 0,058                                   | 0,058                      | 0,057                    |
| 16                   | 0,054                                   | 0,054                      | 0,052                    |
| 18                   | 0,050                                   | 0,050                      | 0,049                    |
| 20                   | 0,047                                   | 0,047                      | 0,046                    |
| 22                   | 0,044                                   | 0,044                      | 0,043                    |
| 24                   | 0,042                                   | 0,042                      | 0,041                    |
| 26                   | 0,040                                   | 0,040                      | 0,039                    |
| 28                   | 0,038                                   | 0,038                      | 0,038                    |
| 30                   | 0,037                                   | 0,037                      | 0,037                    |

Сравнивая решения, полученные программным путем, с аналитическим решением, можно сделать вывод, что алгоритм моделирования реализован верно.

Следует отметить, что моделирование поверхностного стока является частью моделирования речного стока. Реализация модели стекания воды по речному руслу - предстоящий этап исследований. Эта модель позволит прогнозировать водный режим, качество воды, проектировать и управлять водохозяйственными системами.

#### Литература

- 1) Кучмент Л.С. Модели процессов формирования речного стока. - Ленинград: Гидрометеоздат, 1980.
- 2) Kilber D. E., Woolhiser D. A. Mathematical properties of the kinematic cascade. - J. Hydr., 1972.