позитных оболочек переменной вдоль образующей толщины, а также оболочек, соединенных между собой кольцом.

Предложенная методика реализована в виде программно-вычислительного комплекса, который может быть использован при расчете и проектировании тонкостенных неоднородных по толщине сооружений.

---

УДК 539.3
*Трач В.М., Подворный А.В.*

## *К ВОПРОСУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО РАВНОВЕСИЯ СОСТАВНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУКТУРЫ*

Практическое применение составных оболочек вращения в технике обусловило попытки получения экономичных конструкций при обеспечении необходимой прочности и жесткости. Расчет таких конструкций, изготовленных из композитных материалов с низкой сдвиговой жесткостью упругих свойств, требует использования уточнённых методов.

Для получения системы геометрически нелинейных уравнений равновесия неоднородных по толщине составных оболочек несимметричной структуры воспользуемся вариантом конечно-сдвиговой теории. Сравнивая выражения потенциальных энергий ортотропной оболочки и оболочки, главные направления упругости которой отклонены на некоторый угол от координатной сетки, получим уравнения, определяющие механические параметры материала несимметричной структуры. Решение системы из десяти неоднородных дифференциальных уравнений в смешанной форме проводится с использованием метода линеаризации решения систем нелинейных уравнений.

Для реализации предложенной методики, применяя в меридиональном направлении численный метод Рунге-Кутта с дискретной ортогонализацией, а в окружном – метод прямых, разработан пакет программ для ЭВМ.

Исследовано равновесное состояние слоистых составных оболочек вращения несимметричной структуры под различными видами внешнего и внутреннего давления, условиями закрепления торцов и формы меридиана. Определены углы поворота направлений упругости, при которых компоненты напряженного состояния оболочки становятся наименьшими.

---

УДК 624.04
*Трепачко В.М.*

## *ЗАМЕНА ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗГИБАЕМЫХ СИСТЕМ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫМИ*

Расчет и оптимизация изгибаемых физически нелинейных стержневых систем, даже при использовании упрощающих гипотез, представляют собой сложную задачу.

Экспериментальные диаграммы деформирования материалов можно аппроксимировать аналитическими выражениями. Согласно гипотезе плоских сечений, удлинение волокна, отстоящего на расстоянии $z$ от нейтрального слоя, равно:

$$\varepsilon = \kappa \cdot z, \qquad (1)$$

где $\kappa = 1/\rho$ – кривизна оси стержня.

При известной зависимости $\sigma = f(\varepsilon)$ с учетом (1) оказывается определенным и закон изменения напряжений по высоте сечения элемента $\sigma = f(\kappa \cdot z)$. Так как между кривизной оси элемента и изгибающим моментом существует взаимосвязь, то для статически определимых систем задача определения напряжений в сечении не представляет большой сложности: по известным значениям $M$, из выражения $M = \eta(\kappa)$ находится $\kappa$, а затем вычисляются напряжения в сечении. Дополнительно могут быть определены перемещения характерных сечений изгибаемой системы, а при необходимости, и уравнение изогнутой оси. Проблема расчета статически неопределимых изгибаемых нелинейно-упругих стержневых систем связана с необходимостью одновременного учета в ходе вычислительного процесса нелинейности распределения напряжений по высоте сечения элемента и сложного, иногда явно не описываемого, закона изменения кривизны оси стержня. К системам, для которых между изгибающим моментом в сечении и кривизной $\kappa$ существует нелинейная связь, не применим принцип суперпозиции. При попытке использования линеаризованной схемы расчета посредством последовательных догружений оказывается неясным вопрос о выборе сечения, по которому следует определять жесткостные характеристики и, к тому же, нет оснований распространять этот показатель на всю длину стержня. Отождествление жесткостных характеристик стержня по некоторой определяющей, например, для более напряженного сечения, приведет к непредсказуемому отклонению конечного результата от истинного показателя. Отсюда возникают и неясности в раскрытии статической неопределимости в классическом понимании этого вопроса [1].

Для приближенного расчета балки как физически нелинейной системы итерационным способом ее разбивают по длине на отдельные участки и на каждом из них принимают приведенную жесткость, которая определяется для сечения с наибольшим по абсолютной величине изгибающим моментом на участке, постоянной [2]. На первом итерационном шаге выполняется линейный расчет заданной системы с начальным модулем упругости. Полученные в результате этого этапа приведенные жесткости для каждого участка балки являются основой для следующего шага вычислений и т.д.

В данной работе предлагается рассматривать изгибаемый элемент как сложный и моделировать его работу под нагрузкой связями первого вида, т. е. стержнями, в которых возникает только один вид усилия – продольная сила. Сочетание (комбинация) усилий в этих связях при удачном их расположении позволило бы определить в поперечном сечении элемента изгибающий момент, поперечную и продольную силы. Соответствующей конструкцией, заменяющей (моделирующей) изгибаемый элемент, является ферма. По усилиям в стержнях ферм можно судить о работе моделируемого, например, балочного элемента. Задача, таким образом, сводится к поиску расчетной схемы, эквивалентной в отношении распределения усилий и перемещений (энергетическая сторона вопроса) балке. После решения этой задачи по разработанной методике оптимального проектирования шарнирно-стержневой системы [3], материал которой подчиняется тому же закону физической нелинейности, что и для заданной системы отыскивается оптимальный проект аппроксимирующей системы, а затем устанавливается соответствие оптимальных проектов заданной и заменяющей систем.

Идея замены плоских или пространственных сплошных стержней эквивалентными сквозными (ферма) и наоборот не является новой. Подробно такие замены (аппроксимация) описываются в работах Ржаницына А.Р., Сидоровича Е.М., Смирнова А.Ф., Тимошенко С.П., Кондратьева В.М. и др.

Сплошную конструкцию можно заменить эквивалентной статически определимой (с треугольной, раскосной, полураскосной решеткой) или статически неопределимой (например, с перекрестной решеткой) фермой. В качестве критерия эквивалентности принимается равенство потенциальной энергий деформаций заданной конструкции и фермы-модели.

В ферме-модели с перекрестной решеткой жесткости поясов и высота фермы должны удовлетворять известному условию:

$$h^2 \cdot EA_n = 2EI \qquad (2)$$

где один из известных параметров задается произвольно.

Жесткости раскосов и стоек вычисляются по формулам:

$$EA_p = t_p \cdot EA_n;\ EA_c = t_c \cdot EA_n; \qquad (3)$$

где

$$\frac{1}{t_p} = 4k(1+\nu)\, \sin^2\alpha \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{3t_n}, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{t_c} = ctg^3\alpha \left(\frac{2}{1-2t_n} - \frac{1}{t_p \cos^3\alpha}\right), \qquad (5)$$

$$t_n = \frac{EA_n}{EA} \qquad (6)$$

$\nu$ – коэффициент Пуассона.

Необходимо соблюдать требование, чтобы выражение в скобках (5) оставалось положительным. Это будет возможным, если будет выполнено условие:

$$t_0 < t_n < 0.5 \qquad (7)$$

где

$$t = \frac{b - 1 + \sqrt{(b-1)b+1}}{4b} \qquad (8)$$

$$b = 1.5 \cdot k \cdot (1+\nu) \cdot tg^2\alpha \qquad (9)$$

Для эквивалентных ферм с поясами разных поперечных сечений также можно получить аналогичные соотношения. Сумма продольных жесткостей поясов эквивалентной фермы принимается равной продольной жесткости сплошного стержня [4]:

$$EA_B + EA_H = EA_\Phi = EA, \qquad (10)$$

где индексы "в", "н", "ф" относятся соответственно к верхнему и нижнему поясам эквивалентной фермы, если ее рассматривать расположенной горизонтально, и к самой ферме в целом. Высота эквивалентной фермы $h_\phi$ с поясами равного поперечного сечения входит в уравнение:

$$\frac{EJ}{EA} = h_\phi^2 \frac{2\tau}{(1+\tau)^2} \qquad (11)$$

где

$$\tau = \frac{EA_B}{EA_H} \qquad (12)$$

Один из неизвестных параметров в уравнении (11) можно задавать произвольно. При $\tau = 1$ выражение (11) становится аналогом зависимости (2). Жесткости элементов решетки эквивалентной фермы с поясами разных сечений определяются так же, как и для ферм с одинаковыми сечениями поясов, по формулам (3)–(6).

Рассмотренные модели эквивалентных ферм характеризуются тем свойством, что их высота, однозначно определяемая в зависимости от отношения жесткостей поясов, получается достаточно малой, что не позволяет укрупнять длины панелей эквивалентной фермы без ухудшения обусловленности результатов численного решения из-за малости углов наклона раскосов к поясам. От указанных недостатков свободны трехпоясные фермы-модели (рис. 1,б). Для таких ферм жесткости крайних поясов можно получить по формуле (2). Жесткость $EA_0$ серединного пояса получается из условия равенства продольных жесткостей фермы-модели в целом и заменяемого фермой стержня:

$$EA_0 = EA - 2 \cdot EA_n \qquad (13)$$

Так как поперечная сила воспринимается двойной решеткой, то жесткости раскосов трехпоясной фермы вычисляются по формуле (3) с коэффициентом при $t_p$ равным *0,5*.

Из двухпоясных и трехпоясных ферм можно собирать фермы-модели более сложной структуры: многопоясные и т.п. Например, несимметричный двутавр можно рассматривать составленным из двух тавров высотой $h_1$ и $h_2$. Каждый из тавров можно заменить трехпоясной фермой, причем нижний пояс верхней фермы и верхний пояс нижней фермы объединяются. В результате получается пятипоясная ферма-модель.

Разумеется, аппроксимация сплошных стержней эквивалентными шарнирно-стержневыми приводит к приближенному решению. Однако погрешность расчета при использовании моделируемой системы сопоставима с погрешностью, закладываемой гипотезой плоских сечений и гипотезой об отсутствии нормальных напряжений между фибрами сплошного стержня. В фермах-моделях автоматически учитывается искривление поперечных сечений в процессе деформации, и слои многопоясной фермы-модели взаимодействуют между собой.

Способ дискретизации континуальных систем позволяет легко решать многие задачи строительной механики, причем точность расчета необходимых величин не уступает точности по методу конечных разностей и методу конечных элементов,

Например, многопролетную неразрезную балку можно заменить как двухпоясной фермой с перекрестной решеткой (см. рис. 1,b), так и эквивалентными трехпоясными (см. рис. 1,c) и пятипоясными фермами (см. рис. 1,d).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Борисевич А.А. Расчет и оптимизация нелинейно упругих изгибаемых систем с использованием стержневой аппроксимации // Вестник Брестского государственного технического университета, №.1. – Брест, 2000 г.
2. Борисевич А.А., Казутов М.А., Трепачко В.М. Некоторые особенности расчета физически нелинейных балок // Вестник Брестского технического университета, №.. – Брест, 2001 г.
3. Трепачко В.М. Оптимизация физически нелинейных шарнирно-стержневых систем // Материалы 6-го международного научно-методического семинара «Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь», посвященного 80-летию БГПА. – Минск, Принтекс, 2001 г.
4. Кипцевич В.А., Сидорович Е.М. Шарнирно-стержневая аппроксимация нелинейно-деформируемых изгибаемых стержневых систем // Зборнік навуковых артыкулаў студэнтаў ВНУ Рэспублікі Беларусь. Матэрыялы Рэспубліканскай навуковай канферэнцыі студэнтаў ВНУ Рэспублікі Беларусь (15-18 мая 1995 г., Мінск).– Мн.: БДУ, 1995 – с. 171–174.

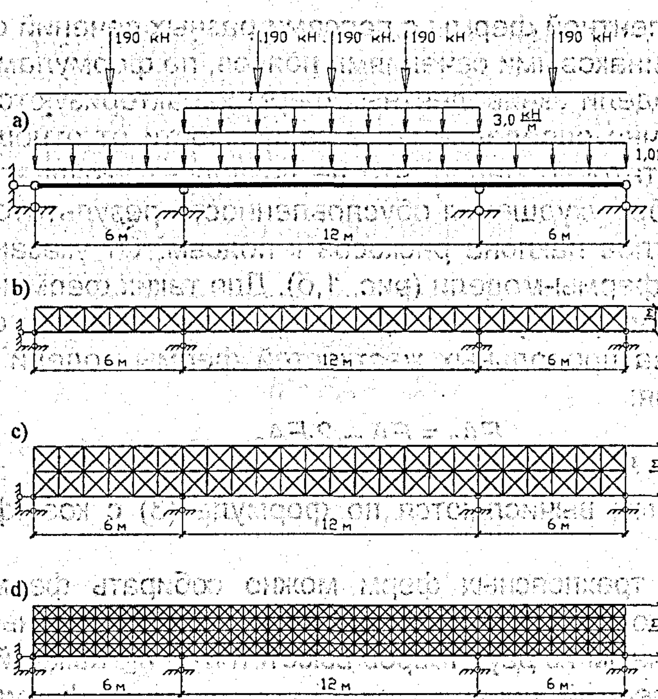


**Рис. 1.**
***Замена многопролетной неразрезной физически нелинейной балки (a) эквивалентными двухпоясной фермой (b), трехпоясной (c), пятипоясной (d) фермами***