В сб. Научных трудов: Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь, Брест, 1997. с. 127-136.
4. Голышев А.Б. и др. Проектирование и изготовление сборно-монолитных конструкций. Киев "Будівельник" 1982. 152с.
5. Семенюк С.Д. и др. Отчет по НИР тема № 42 - 19 № гос. регистрации 01.830081120 " Расчет и конструирование фундаментов пространственного типа в сложных грунтовых условиях". Ровно - 1983. 192с.
6. Семенюк С.Д. и др. Отчет по НИР тема НП-3. "Экспериментальные исследования рамно-пространственного железобетонного фундамента на подрабатываемых территориях со ступенчатыми деформациями для 5-ти этажных жилых домов серии 1.21. Ровно - Киев, 1986. 96с.

УДК 624.04: 539.31
Сидорович Е.М.

ПРЯМЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ СООРУЖЕНИЙ

Как известно, существующие численные самых разных порядков точности одношаговые и многошаговые методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями требуют преобразования уравнений движения второго порядка к так называемому нормальному виду, т. е. к системе дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенной относительно производных. При этом повсеместно подчеркивается, что явные численные методы не являются безусловно устойчивыми в применении к жестким системам (деформируемую систему можно отнести к классу жестких, если максимальная и минимальная частоты ее свободных колебаний различаются на много порядков). Для расчета жестких систем рекомендуются неявные методы, обладающие лучшей численной устойчивостью, но требующие итерационных процедур для раскрытия нелинейностей. В теории сооружений для численного исследования переходных процессов при решении линейных и нелинейных дифференциальных уравнений движения деформируемых систем применяются прямые численные методы, не требующие никакого преобразования исходных дифференциальных уравнений второго порядка [1, 2, 3 и др.]. В основном это полуявные модификации метода Эйлера, имеющие невысокий порядок точности. Для сокращения же объема вычислений в реальных высокоразмерных задачах [4] необходимы численные методы высокого порядка точности.

В работе [5] при решении нелинейных задач статики сооружений методом непрерывного продолжения по параметру успешно применены явные одношаговые методы Рунге-Кутта-Мерсона с четырьмя-пятью обращениями к вычислению правых частей получаемых неявных дифференциальных уравнений первого порядка. Именно неявность получаемой методом непрерывного продолжения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных относительно производных, смягчила проблему их жесткости. Для численного решения нелинейных уравнений движения (1)..(3) также применимы методы Рунге-Кутта-Мерсона. Однако более эффективными для решения задач нелинейного деформирования оказались явный и полуявный методы степенных рядов, порядок точности которых может быть выбран, вообще говоря, сколь угодно высоким.

Рассмотрим нелинейные дифференциальные уравнения движения, вызванного, скажем, действием на шарнирно-стержневую систему динамических нагрузок при наличии нелинейных сил неупругого сопротивления:

$$A(R)V+B(X)U+A(U)V=P(t)-M\ddot{V}-S(\dot{V}), \qquad (1)$$

$$C(X)V+0.5C(V)V_{i}=(L^{*})^{2}(\gamma_{i}+0.5\,\gamma^{*}\gamma), \qquad (2)$$

$$\Psi[L(1+\gamma)(R+U)]=e+\gamma+e\gamma-e_{t}, \qquad (3)$$

где условные обозначения заимствованы из [4, 5]

Начальные условия полагаем заданными:

при

$$t=t_{0}, \quad V(t_{0})=V_{0}, \quad \dot{V}(t_{0})=V_{1}. \qquad (4)$$

Итак, на очередном шаге интегрирования

$$h=t-t_{0}$$

будем искать неизвестные перемещения в уравнениях (1)..(3) в виде разложения в степенные ряды, допустим, не выше пятого порядка относительно h:

$$V=V_{0}+V_{1}h+\frac{1}{2}V_{2}h^{2}+\frac{1}{6}V_{3}h^{3}+\frac{1}{24}V_{4}h^{4}+\frac{1}{120}V_{5}h^{5} \qquad (5)$$

где значения производных

$$V_{i}=d^{i}V/dt^{i} \qquad (i=1,\dots,5)$$

должны быть вычислены для значений аргумента $t=t_{o}$.

Для вычисления производных неизвестных функций продифференцируем трижды уравнения (1)..(3):

$$A(R+U)V_{1}+B(X+V)U_{1}=P_{1}-MV_{3}-S_{1}V_{2},$$

$$C(X+V)V_{1}-L_{1}^{2}\gamma_{1}=0, \qquad (6)$$

$$\gamma_{1}=\Psi_{1}L_{1}U_{1}/h_{1};$$

$$A(R+U)V_{2}+B(X+V)U_{2}=P_{2}-MV_{4}-S_{1}V_{3}-S_{2}V_{2}^{2}-2A(U_{1})V_{1},$$

$$C(X+V)V_{2}-L_{1}^{2}\gamma_{2}=(L_{1}\gamma_{1})^{2}-C(V_{1})V_{1}, \qquad (7)$$

$$\gamma_{2}=\Psi_{1}L_{1}U_{2}/\eta+2\Psi_{1}L_{1}/\eta U_{1}\gamma_{1}+\Psi_{2}/\eta N_{1}^{2}$$

$$A(R+U)V_{3}+B(X+V)U_{3}=P_{3}'-MV_{5}'-S_{1}V_{4}-$$

$$-3S_{2}V_{2}V_{3}-S_{3}V_{2}^{3}-3[A(U_{1}V_{2}+A(U_{2})V_{1}];$$

$$C(X+V)V_{3}-L_{1}^{2}\gamma_{3}=3L_{1}^{2}\gamma_{1}\gamma_{2}-3C(V_{1})V_{2}, \qquad (8)$$

$$\gamma_{3}=\Psi_{1}L_{1}/\eta U_{3}+3/\eta[\Psi_{1}L_{1}(U_{1}\gamma_{2}+U_{2}\gamma_{1})+\Psi_{2}N_{1}N_{2}]+\Psi_{3}/\eta N_{1}^{3}$$

В последних трех группах уравнений введены обозначения:

$N_{1}=L_{1}[U_{1}+(R+U)\,\gamma_{1}]$; $\quad N_{2}=L_{1}[\gamma_{2}(R+U)+2\gamma_{1}\gamma_{2}+U_{2}]$.

$P_{i}=d^{i}P/dt^{i}$; $\quad S_{i}=d^{i}S/dV_{1}^{i}$; $\quad \Psi_{i}=d^{i}\Psi/dN^{i}$;

$\eta=(1+\varepsilon)(1+\gamma)-\Psi_{1}L_{1}(R+U)$.

Таким образом, при заданных начальных перемещениях V_{0} и начальных скоростях V_{1} из уравнений (2) и (3) определяются начальные погонные деформации γ и начальные погонные усилия U, а из уравнения (1) - почти явно начальные ускорения V_{2} (матрица масс часто имеет диагональную или ленточную структуру). Затем последовательно из групп уравнений (6)..(8) также достаточно просто вычисляются начальные значения старших производных параметров состояния. И, наконец, по формуле (5) вычисляются искомые значения перемещений в конце шага интегрирования.

Путем дифференцирования ряда (5) вычисляются в конце шага интегрирования скорости

$$dV/dt = V_1 + V_2h + V_3h^2/2 + V_4h^3/6 + V_5h^4/24, \quad (9)$$

а также и ускорения

$$d^2V/dt^2 = V_2 + V_3h + V_4h_2/2 + V_5h^3/6. \quad (10)$$

Затем процесс повторяется для следующего шага интегрирования. При этом значения ускорений в конце шага интегрирования, вычисленные по формуле (10), сопоставляются со значениями ускорения в начале следующего шага, вычисленными из уравнения (1), и служат для контроля длины шага.

В силу того, что в разложении (5) отброшены члены шестого и выше порядков относительно шага интегрирования, данный численный явный метод пятого порядка точности приобрел демпфирующие свойства. Численные эксперименты показали, что с увеличением шага и длины отрезка интегрирования (количества шагов) решение затухает, динамическая система стремится к состоянию устойчивого равновесия или к режиму установившихся колебаний даже при отсутствии сил сопротивления. Аналогичные свойства присущи и явному численному методу Рунге-Кутта-Мерсона четвертого порядка точности. В то время как численные методы невысоких (второго-третьего) порядков точности типа модификаций метода Эйлера, методов Рунге-Кутта и методов постоянного или линейного ускорения с увеличением длины шага или длины отрезка интегрирования при постоянном шаге приводят к возрастающей осцилляции решения и численной неустойчивости. На практике всегда существует реальная опасность принять осциллирующую численную неустойчивость применяемого алгоритма за флаттерную неустойчивость исследуемой деформируемой системы.

Анализируя уравнения (6)..(8) с точки зрения квазистатического деформирования при нагрузке, зависящей от параметра t, но при отсутствии сил инерции ($M = 0$) и сил сопротивления движению [$S(dV/dt) = 0$], можно построить эффективный неявный одношаговый метод степенных рядов третьего (можно и выше) порядка точности для решения задач статики. Если известно начальное решение:

$$V = V_o \text{ и } U = U_o \text{ при } t = t_o \text{ и } P(t) = P(t_o),$$

удовлетворяющее системе уравнений (1)..(3), то решение в конце шага интегрирования при $t = t_o + h$ вычисляется по формулам:

$$V = V_o + V_1h + V_2h^2/2 + V_3h^3/6; \quad (11)$$

$$U = U_o + U_1h + U_2h^2/2 + U_3h^3/6, \quad (12)$$

где векторы V_i и U_i (i = 1, 2, 3) вычисляются из решения систем линейных алгебраических уравнений (6)..(8) с одной и той же матрицей коэффициентов и рекуррентно вычисляемыми правыми частями. Вектор погонных деформаций γ можно исключить, а системы уравнений (6)..(8) привести к виду

$$A(R+U_o)V_i + B(X+V_o)U_i = F_{1,i-1};$$

$$C(X+V_o)V_i - D_oU_i = F_{2,i-1} \quad (13)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Особенности решения систем уравнений вида (13) исследованы в [5].

Основное достоинство данного неявного метода степенных рядов состоит в том, что матрица решаемых рекуррентных систем линейных уравнений факторизуется только один раз на один шаг не зависимо от принятого порядка точности. В методе непрерывного продолжения по параметру с использованием явных методов численного интегрирования типа методов Рунге-Кутта подобная процедура выполняется при каждом обращении к вычислению значений производных из получаемых неявных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, разработанный прямой явный одношаговый метод пятого порядка точности на основе степенных рядов Тейлора для численного решения дифференциальных уравнений движения нелинейно деформируемых систем высокой размерности отличается простым и устойчивым алгоритмом, не требующим формирования и обработки глобальных матриц мгновенной жесткости. Как частный случай из него следует неявный, но линейный относительно производных метод третьего порядка точности для численного решения нелинейных задач квазистатического деформирования, отличающийся повышенной скоростью алгоритма и возможностью исследования устойчивости текущих мгновенных состояний равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stricklin J. A., Haisler W. E., Reisman W. A. Geometrically Non-linear Analysis by the Direct Stiffness Method // J. Struct. Div.: Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. - 1971. - V. 97, N 9. - P. 2299 - 2314.
2. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. - М.: Стройиздат, 1979. - 320 с.
3. Дарков А. В., Шапошников Н. Н. Строительная механика. - М.: Высш. шк., 1986. - 607 с.
4. Сидорович Е. М. Новые проблемы динамики и устойчивости сооружений // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров в Республике Беларусь: Сб. ст. / Под ред. Т. М. Пецольда. - Минск: Редакция журнала "Тыдзень", 2000. - С. 266 - 273.
5. Сидорович Е. М. Нелинейное деформирование, статическая и динамическая устойчивость пространственных стержневых систем. - Мн.: БГПА, 1999. - 200 с.

УДК 624.074.04

Трач В.М., Гупалюк В.Н.

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕК

Необходимость получения экономичных конструкций при обеспечении необходимой прочности, жесткости и устойчивости обусловила практическое использование составных оболочек вращения в технике. Уменьшение веса таких конструктивных систем приводит к необходимости определения действующих на них предельных нагрузок, которое связано, например, с расчетами на устойчивость. Использование материалов с существенной анизотропией свойств и низкой сдвиговой жесткостью требует использования при расчетах конструкций, изготовленных из композитных материалов, уточненных подходов, которые основаны на развитии прикладных теорий.

Авторами на основании прикладной конечно-сдвиговой теории, кото-рая основана на совместном использовании кинематических и статических гипотез о распределении перемещений и сдвигающих напряжений по тол-щине многослойного пакета, получены дифференциальные уравнения устой-чивости в смешанной форме. При использовании метода Ньютона и численного метода дискретной ортогонализации разработан алгоритм по расчету геометрически нелинейного напряженно-деформированного состояния и устойчивости многослойных оболочек вращения.

Авторами проведено исследование влияния жесткости заполнителя на величины критических значений внешнего равномерно-распределенного давления для три- и пятислойных составных оболочек. Исследована устойчивость составных ком-