ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ №4 2005
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.9

Т. И. РУСИНА, О. Л. ЯБЛОНСКИЙ

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ИТОВСКИХ КОНЕЧНЫХ СУММ С ОСРЕДНЕНИЕМ В НЕОДНОРОДНОМ СЛУЧАЕ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 09.03.2004)

При исследовании дифференциальных уравнений со случайными функциями часто приходится рассматривать уравнения, в которых под знаком дифференциала стоят процессы типа броуновского движения. Траектории таких процессов являются недифференцируемыми ни в одной точке. Поэтому методы классического анализа не применимы к решению подобных уравнений и для них разработана специальная теория стохастических дифференциальных уравнений. Данная теория базируется на понятиях стохастических интегралов Ито [1], Стратоновича [2], θ-интегралов [3] и др.

Отметим, что проблемы теории стохастических дифференциальных уравнений непосредственно связаны с проблемой умножения обобщенных функций. Такие уравнения содержат произведение обобщенных на недостаточно гладкие функции. Поэтому решение проблемы умножения обобщенных функций привело к созданию алгебр обобщенных случайных процессов. В работе [4] анонсирована одна из конструкций подобных алгебр, которая позволила с единых позиций исследовать решения стохастических уравнений различных классов (см., например, [5, 6]) с помощью решений соответствующих уравнений в дифференциалах в этой алгебре. При этом исследование ассоциированных решений уравнений в дифференциалах сводится к исследованию предельного поведения конечных сумм с осреднением следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{m-1} f_n(L_n(t_k))(L_n(t_{k+1}) - L_n(t_k))), \tag{1}$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = t, t \in T = [0, a] \subset \mathbb{R}$, f_n и L_n — соответственно свертки функции f и случайного процесса L с δ-образной последовательностью. В работах [6, 7] показано, что пределы подобных сумм в случае, когда $L(t)$ стандартный процесс броуновского движения, полностью описываются стохастическими θ-интегралами вида $(\theta) \int_0^t f(L(s))\, dL(s)$, $t \in T$, в зависимости от связи диаметра разбиения и δ-образной последовательности.

Данная работа посвящена исследованию предельного поведения сумм вида (1) в случае, когда $L(t)$ — многомерный стандартный процесс броуновского движения, а функция f зависит еще и от времени $t \in T$, т. е. $f = f(t, x)$. Для функций, не зависящих от t, подобная задача рассматривалась в работе [8].

Пусть (Ω, A, P) — полное вероятностное пространство, $\overline{B}(t) = (B^1(t), B^2(t), \ldots, B^r(t))$, $t \in T$, — r-мерный стандартный процесс броуновского движения [9].

Рассмотрим произвольную последовательность $h_n > 0, h_n \to 0, n \to \infty$. Для любой фиксированной точки t из отрезка T имеет место представление:

$$t = \tau_t + m_t h_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \tau_t \in [0, h_n), \quad m_t \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Обозначим

$$S_nf(t,\overline{B}(t))=\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_t}f_n(t,\overline{B_n}(\tau_t+(k-1)h_n))[B_n^i(\tau_t+kh_n)-B_n^i(\tau_t+(k-1)h_n)],$$

где

$$B_n^i(t)=\int\limits_0^{1/n}B^i(t+s)\rho_n^i(s)ds,\quad \rho_n^i(t)\in\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}),\quad \rho_n^i(t)\geqslant 0,\quad \operatorname{supp}\rho_n^i(t)\subset[0,1/n],$$

$$\int\limits_0^{1/n}\rho_n^i(s)ds=1,\quad i=\overline{1,r},\quad \overline{B}_n(t)=(B_n^1(t),B_n^2(t),\dots,B_n^r(t)),$$

$$f_n(t,t_1,t_2,\dots,t_r)=\int\limits_0^{1/n}\dots\int\limits_0^{1/n}f(t+s,t_1+s_1,\dots,t_r+s_r)\overline{\rho}_n(s,s_1,\dots,s_r)\,ds\,ds_1\,ds_2\dots ds_r,$$

а $\overline{\rho}_n$ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в $[0,1/n]^{r+1}$ и $\int_0^{1/n}\dots\int_0^{1/n}\overline{\rho}_n(s,s_1,\dots,s_r)\,ds\,ds_1\,ds_2\dots ds_r=1$.

В данной статье исследуется предельное поведение суммы $S_nf(t,\overline{B}(t))$ при $h_n\to 0$, $n\to\infty$. Введем обозначение:

$$K_i(n,h_n)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant s,\tau\leqslant 1/n,\\ |s-\tau|\leqslant h_n}}(1-|s-\tau|h_n^{-1})\rho_n^i(s)\rho_n^i(\tau)\,ds\,d\tau.$$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия сходимости суммы $S_nf(t,\overline{B}(t))$.

Теорема 1. *Пусть $f\in\mathbf{C}_B^2(\mathbb{R}^2)$, $f\not\equiv\mathrm{const}$ и последовательность $h_n\to 0$ при $n\to\infty$, причем $1/n^2=o(h_n)$. Конечная сумма $S_nf(t,\overline{B}(t))$ сходится в $\mathbb{L}^2(\Omega,A,P)$ и равномерно по $t\in T$ при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ тогда и только тогда, когда числовые последовательности $K_i(n,h_n)$, $i=\overline{1,r}$, сходятся при $n\to\infty$, $h_n\to 0$.*

Доказательство. Выберем $N=N(h_n):(0,1)\to\mathbb{N}$ так, что $h_nN(h_n)=\delta\to 0$, $1/n=o(\delta)$ при $h_n\to 0$, $n\to\infty$. Тогда представление (2) можно записать в виде $t=\tau_t'+MNh_n=\tau_t'+M\delta$, где $\tau_t'=\tau_t+k_t'h_n\in[0,\delta)$, $M,N,k_t'\in\mathbb{N}$.

Покажем, что

$$\sup_{t\in T}E\left(S_nf(t,\overline{B}(t))-\sum_{i=1}^{r}\left((I)\int\limits_0^t f(s,\overline{B}(s))dB^i(s)-\frac{1-K_i(n,h_n)}{2}\int\limits_0^t f'_{X_i}(s,\overline{B}(s))\,ds\right)\right)^2\to 0.\quad(3)$$

Для простоты исследуем случай $r=2$. Рассмотрим первое слагаемое. Следующие преобразования очевидны:

$$\sum_{k=1}^{m_t}f_n(\tau_t+(k-1)h_n,B_n^1(\tau_t+(k-1)h_n),B_n^2(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n^1(\tau_t+kh_n)-B_n^1(\tau_t+(k-1)h_n))-$$

$$(I)\int\limits_0^t f(s,B^1(s),B^2(s))\,dB^1(s)-\frac{1-K_1(n,h_n)}{2}\int\limits_0^t f'_{X_1}(s,B^1(s),B^2(s))ds=$$

$$\left(\sum_{l=1}^{M} f_n(\tau_t'+(l-1)\delta, \overline{B}_n(\tau_t'+(l-1)\delta))[B_n^1(\tau_t'+l\delta)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta)]-(I)\int_0^t f(s,B^1(s),B^2(s))dB^1(s)\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{M} f'_{nX_1}(\tau_t'+(l-1)\delta, \overline{B}_n(\tau_t'+(l-1)\delta))[B_n^1(\tau_t'+l\delta)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta)]^2-\int_0^t f'_{X_1}(s,B^1(s),B^2(s))ds\right)-$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{m_t} f'_{nX_1}(\tau_t+(k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))[B_n^1(\tau_t+kh_n)-B_n^1(\tau_t+(k-1)h_n)]^2-\right.$$

$$\left.K_1(n,h_n)\int_0^t f'_{X_1}(s,B^1(s),B^2(s))ds\right)+$$

$$\left(\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}(f_n(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n))-f_n(\tau_t'+(l-1)\delta, \overline{B}_n(\tau_t'+(l-1)\delta)))\times\right.$$

$$[B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+kh_n)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]-$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{M} f'_{nX_1}(\tau_t'+(l-1)\delta, \overline{B}_n(\tau_t'+(l-1)\delta))[B_n^1(\tau_t'+l\delta)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta)]^2-\right.$$

$$\left.\left.\sum_{k=1+k_t'}^{m_t} f'_{nX_1}(\tau_t'+(k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t'+(k-1)h_n))[B_n^1(\tau_t'+kh_n)-B_n^1(\tau_t'+(k-1)h_n)]^2\right)\right)+$$

$$\left(\sum_{k=1}^{k_t'} f_n(\tau_t+(k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))[B_n^1(\tau_t+kh_n)-B_n^1(\tau_t+(k-1)h_n)]\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k_t'} f'_{nX_1}(\tau_t+(k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))[B_n^1(\tau_t+kh_n)-B_n^1(\tau_t+(k-1)h_n)]^2\right)=$$

$$I_1+\frac{1}{2}I_2-\frac{1}{2}I_3+I_4+I_5.$$

Пользуясь методами, предложенными при доказательстве теоремы 1 статьи [5], можно показать, что $E(I_1(t))^2 \leqslant C/(n\delta)+C\delta$. Так же, как и при доказательстве леммы 4 из статьи [7], можно доказать, что $E(I_2(t))^2 \leqslant C/n+C\delta$. Аналогично получим оценку для $I_3(t)$: $E(I_3(t))^2 \leqslant C/n+Ch_n$.

Исследуем $I_4(t)$. Для этого воспользуемся формулой Тейлора для f_n :

$$I_4(t)=\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f'_{nt}(\tau_t'+(l-1)\delta, \overline{B}_n(\tau_t'+(l-1)\delta))h_n(k-1)[B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+kh_n)-$$

$$-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]+\left[\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f'_{nX_1}(\tau_t'+(l-1)\delta, \overline{B}_n(\tau_t'+(l-1)\delta))\times\right.$$

$$[B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta)][B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+kh_n)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]-$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{M} f'_{nX_1}(\tau_t'+(l-1)\delta, \overline{B}_n(\tau_t'+(l-1)\delta))[B_n^1(\tau_t'+l\delta)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta)]^2-\right.$$

$$\left.\left.\sum_{k=1}^{m_t} f'_{nX_1}(\tau_t'+(k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t'+(k-1)h_n))[B_n^1(\tau_t'+kh_n)-B_n^1(\tau_t'+(k-1)h_n)]^2\right)\right]+$$

$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f'_{nX_2}(\tau'_t+(l-1)\delta,\overline{B}_n(\tau'_t+(l-1)\delta))[B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta)]\times$$
$$[B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+kh_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f''_{ntt}(s_1,\overline{B}_n(\tau'_t+(l-1)\delta))h^2_n(k-1)^2[B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+kh_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]+$$
$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f''_{ntX_1}(\tau'_t+(l-1)\delta,B^1_n(s_2),B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta))h_n(k-1)[B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-$$
$$B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta)][B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+kh_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]+$$
$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f''_{ntX_2}(\tau'_t+(l-1)\delta,B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta),B^2_n(s_3))h_n(k-1)[B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-$$
$$B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta)][B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+kh_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f''_{nX_1X_1}(\tau'_t+(l-1)\delta,B^1_n(s_4),B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta))[B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta)]^2\times$$
$$[B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+kh_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]+$$
$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f''_{nX_1X_2}(\tau'_t+(l-1)\delta,B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta),B^2_n(s_5))[B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta)]\times$$
$$[B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta)][B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+kh_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]+$$
$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} f''_{nX_2X_2}(\tau'_t+(l-1)\delta,B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta),B^2_n(s_6))[B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-B^2_n(\tau'_t+(l-1)\delta)]^2\times$$
$$[B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+kh_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]=$$
$$I_{41}+I_{42}+I_{43}+\frac{1}{2}I_{44}+I_{45}+I_{46}+\frac{1}{2}I_{47}+I_{48}+\frac{1}{2}I_{49},$$

где $f'_{nX_i}=\partial f_n/\partial X_i$, $f''_{nX_iX_j}=\partial^2 f_n/\partial X_j\partial X_i$, а s_i, $i=\overline{1,6}$, — некоторые точки интервала $[\tau'_t+(l-1)\delta,\tau'_t+l\delta)$.

Для оценки $I_{41}(t)$ воспользуемся ограниченностью функции f'_{nt} и свойствами броуновского движения:

$$E(I_{41}(t))^2\leqslant MNCh^2_n\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}(k-1)^2E[B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+kh_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]^2\leqslant$$
$$\leqslant MNCh^2_n\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}(k-1)^2h_n\leqslant MNCh^3_nMN^3\leqslant\frac{C\delta^4M^2}{h_n}\leqslant\frac{C\delta^2}{h_n}.$$

Сумму $I_{42}(t)$ можно записать в виде:

$$I_{42}(t)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}(f'_{nX_1}(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n,\overline{B}_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n))-$$
$$-f'_{nX_1}(\tau'_t+(l-1)\delta,\overline{B}_n(\tau'_t+(l-1)\delta)))[B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+kh_n)-B^1_n(\tau'_t+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]^2.$$

Тогда, используя формулу Лагранжа и неравенство Коши — Буняковского, получим:

$$E(I_{42}(t))^2 \leqslant CMN\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}E\Big[\big(|(k-1)h_n| + |B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n)) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta)| +$$

$$|B_n^2(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-B_n^2(\tau_t'+(l-1)\delta)|\big)^2[B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+kh_n)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]^4\Big] \leqslant$$

$$CMN\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}N^2h_n^4 + CMN\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}Nh_n^3 \leqslant C\delta.$$

Запишем $I_{43}(t)$ в виде:

$$I_{43}(t) = \Big[I_{43}(t) - \sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}f'_{nx_2}\Big(\tau_t' + (l-1)\delta, B_n^1\Big(\tau_t' + (l-1)\delta - \frac{1}{n}\Big), B_n^2\Big(\tau_t' + (l-1)\delta - \frac{1}{n}\Big)\Big)\times$$

$$[B_n^2(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n)-B_n^2(\tau_t'+(l-1)\delta)][B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+kh_n)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]\Big] +$$

$$\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}f'_{nx_2}\Big(\tau_t' + (l-1)\delta, B_n^1\Big(\tau_t' + (l-1)\delta - \frac{1}{n}\Big), B_n^2\Big(\tau_t' + (l-1)\delta - \frac{1}{n}\Big)\Big)\times$$

$$[B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta)]\times$$

$$[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n)] = I_{431}(t) + I_{432}(t).$$

Пользуясь теоремой Лагранжа и неравенством Коши — Буняковского, для $I_{431}(t)$ получим оценку:

$$E(I_{431}(t))^2 \leqslant MN\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}E\big[(C|B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta - n^{-1}) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta)| +$$

$$C|B_n^2(\tau_t'+(l-1)\delta-n^{-1})-B_n^2(\tau_t'+(l-1)\delta)|)[B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+kh_n)-B_n^1(\tau_t'+(l-1)\delta+(k-1)h_n)]\times$$

$$[B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta)]\big]^2 \leqslant C\delta/(nh_n).$$

В силу ограниченности f'_{nx_2} и независимости множителей, стоящих под знаком математического ожидания, имеем:

$$E(I_{432}(t))^2 \leqslant C\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}\big(E[B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta)]^2\times$$

$$E[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^2\big) \leqslant C\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}(k-1)h_n^2 \leqslant C\delta.$$

Тогда для $I_{43}(t)$ справедлива оценка:

$$I_{43}(t) \leqslant C\delta/(nh_n) + C\delta.$$

Рассуждая аналогично, получим оценки для $I_{44}(t)$ и $I_{45}(t)$:

$$E(I_{44}(t))^2 \leqslant CMN^5h_n^4\sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}E(B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n))^2 \leqslant C\delta^4/h_n,$$

$$E(I_{45}(t))^2 \leqslant CMNh_n^2 \sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}(k-1)^2 \big(E[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta)]^4 \times$$

$$E[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^4\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\delta^3/h_n.$$

Пользуясь независимостью множителей под знаком математического ожидания, для $I_{46}(t)$ получаем:

$$E(I_{46}(t))^2 \leqslant CMN \sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} h_n^2(k-1)^2 \big(E[B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta)]^2 \times$$

$$E[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^2\big) \leqslant CM^2N^5h_n^4 \leqslant C\delta^3/h_n.$$

Используя такие же рассуждения, получим оценки для $I_{47}(t)$, $I_{48}(t)$, $I_{49}(t)$:

$$E(I_{47}(t))^2 \leqslant CMN \sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} \big(E[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta)]^8 \times$$

$$E[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^4\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\delta^2/h_n,$$

$$E(I_{48}(t))^2 \leqslant CMN \sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} \big(E[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta)]^4 \times$$

$$E[B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta)]^4 E[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + kh_n) -$$

$$B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^4\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant CM^2N^4h_n^3 \leqslant CM^2\delta^4/h_n \leqslant C\delta^2/h_n,$$

$$E(I_{49}(t))^2 \leqslant CMN \sum_{l=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} \big(E[B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n) - B_n^2(\tau_t' + (l-1)\delta)]^4 \times$$

$$E[B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + kh_n) - B_n^1(\tau_t' + (l-1)\delta + (k-1)h_n)]^2\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\delta^2/h_n.$$

Из полученных неравенств с учетом того, что $1/n < \delta$ и $h_n \leqslant \delta$, получим оценку для $I_4(t)$:

$$E(I_4(t))^2 \leqslant C\delta^2/h_n.$$

Рассмотрим $I_5(t)$. Используя вид k_t', ограниченность f и ее частных производных, получим:

$$E(I_5(t))^2 \leqslant 2E\left(\sum_{k=1}^{k_t'} f_n(\tau_t + (k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t + (k-1)h_n))[B_n^1(\tau_t + kh_n) - B_n^1(\tau_t + (k-1)h_n)]\right)^2 +$$

$$E\left(\sum_{k=1}^{k_t'} f_{nx_1}'(\tau_t + (k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t + (k-1)h_n))[B_n^1(\tau_t + kh_n) - B_n^1(\tau_t + (k-1)h_n)]^2\right)^2 \leqslant \frac{C\delta^2}{h_n}.$$

В итоге получена оценка:

$$\sup_{t\in T} E\Bigg(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t+(k-1)h_n, B_n^1(\tau_t+(k-1)h_n), B_n^2(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n^1(\tau_t+kh_n) - B_n^1(\tau_t+(k-1)h_n)) -$$

$$(I)\int_0^t f(s, B^1(s), B^2(s))dB^1(s) - \frac{1 - K_1(n, h_n)}{2}\int_0^t f_{X_1}'(s, B^1(s), B^2(s))ds\Bigg)^2 \leqslant \frac{C}{n\delta} + \frac{C\delta^2}{h_n}.$$

Если $1/n^2 < h_n < 1/n^{1/2}$, то, положив $\delta = h_n^{1/3}/n^{1/3}$, а если $1/nh_n \leqslant h_n$, то, взяв $\delta = h_n$, получим утверждение теоремы 1.

Используя связь между интегралом Ито и θ-интегралом, из выражения (3) получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда если* $K_i(n, h_n) \to (1 - 2\theta_i)$, $\theta_i \in [0, 1/2]$, $i = \overline{1, r}$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *так, что* $1/n^2 = o(h_n)$, *то*

$$\sup_{t \in T} E\Big(\sum_{k=1}^{m_t} \sum_{i=1}^{r} f_n(\tau_t + (k-1)h_n, \overline{B}_n(\tau_t + (k-1)h_n))(B_n^i(\tau_t + kh_n) - B_n^i(\tau_t + (k-1)h_n)) -$$

$$\sum_{i=1}^{r} (\theta_i) \int_0^t f(s, \overline{B}(s)) dB^i(s))^2 \to 0.$$

Работа частично поддержана INTAS (договор № 03–55–1861).

Литература

1. Ito K. // Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1994. Vol. 20. P. 519 – 524.
2. Стратонович Р. К. // Вестн. МГУ. 1964. Т. 1. С. 3 – 12.
3. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.
4. Лазакович Н. В. // Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39, № 3. С. 20 – 22.
5. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П. // Теория вероятностей и ее применение. 1996. Т. 41, № 4. С. 785 – 809.
6. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Яблонский О. Л. // Литовский мат. сб. 1999. Т. 39, № 2. С. 248 – 256.
7. Яблонский О. Л. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 2. С. 22 – 26.
8. Ковальчук А. Н. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2003. № 3. С. 57 – 62.
9. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузные процессы. М., 1986.

T. I. RUSINA, A. L. YABLONSKI

THE LIMITING BEHAVIOR OF MULTIDIMENSIONAL ITÔ SUMS WITH AVERAGING IN THE NONHOMOGENEOUS CASE

Summary

The limiting behavior of multidimensional sums with averaging for functions $f = f(t, x)$, $t \in [0; a]$, $x \in \mathbb{R}^k$ are investigated. Complete classification of the ways of the approximations of multidimensional stochastic θ-integrals with these functions in the convolution algebra of generalized stochastic processes has been given.