ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ №1 2004
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.9

Т. И. РУСИНА, О. Л. ЯБЛОНСКИЙ

АППРОКСИМАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ В НЕОДНОРОДНОМ СЛУЧАЕ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 24.04.2002)

Классические методы математического анализа не применимы к исследованию задач, возникающих в теории стохастических дифференциальных уравнений. Поэтому была развита специальная теория стохастического интегрирования, основными понятиями которой являются стохастический интеграл Ито [1], Стратоновича [2], а также их обобщения: стохастический интеграл Огавы [3], стохастический θ-интеграл [4] и др.

Однако, не взирая на специфику стохастического анализа, многие авторы изучают стохастические интегралы с помощью аппроксимаций. К исследованиям такого рода можно отнести и некоторые из результатов, полученных с помощью интенсивно развивающейся в последнее время теории алгебр обобщенных случайных процессов. Одна из конструкций подобных алгебр предложена в работе [5]. На ее основе с единых позиций были изучены стохастические интегралы Ито и Стратоновича для однородных [5] и неоднородных [6] функций под знаком интеграла. Дальнейшее развитие этого подхода не только позволило исследовать более общие объекты — стохастические θ-интегралы [7], но и, как анонсировано в сообщении [8], привело к классификации способов аппроксимации стохастических θ-интегралов в однородном случае.

Данная статья является продолжением работ [6–8]. В ней с позиций алгебр обобщенных случайных процессов исследованы аппроксимации стохастических θ-интегралов с неоднородными функциями и получены необходимые и достаточные условия сходимости, что позволяет классифицировать способы аппроксимации стохастических θ-интегралов в неоднородном случае.

Напомним некоторые понятия из работ [5, 9], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $T = [0, a]$ — отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, а $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство.

Определение 1 [9]. Расширенной прямой $\widetilde{\mathbb{R}}$ называется следующее фактор-множество $\widetilde{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}}/M$, где $\overline{\mathbb{R}} = \{(x_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathbb{R}\}$ и $M = \{(x_n) \in \overline{\mathbb{R}} : \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0,\ x_n = 0\}$.

Аналогичным образом определяется $\widetilde{T} = \overline{T}/M$, где $\overline{T} = \{(x_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in T\}$.

Рассмотрим множество последовательностей функций $f_n(t,\omega) : T\times\Omega \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) $f_n(t,\cdot)$ является случайной величиной на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ для всех $t \in T$ и $n \in \mathbb{N}$;

2) $f_n(\cdot,\omega) \in \mathrm{C}^\infty(T)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и почти всех $\omega \in \Omega$.

Будем говорить, что элементы $F = (f_n(t,\omega))$ и $G = (g_n(t,\omega))$ эквивалентны, если существует такой номер n_0, что для любых $t \in T$ и почти всех $\omega \in \Omega$ $f_n(t,\omega) = g_n(t,\omega)$ при $n > n_0$.

Через $G(T,\Omega)$ обозначим данное множество последовательностей функций. Очевидно, что $G(T,\Omega)$ образует алгебру с покоординатным сложением и умножением.

Определение 2 [5]. Класс эквивалентности вида $\widetilde{F}(\widetilde{t},\omega) = [(f_n(t_n,\omega))], \widetilde{t} = [(t_n)] \in \widetilde{T}$, $(f_n(t_n,\omega)) \in G(T,\Omega)$ называется обобщенным случайным процессом.

Множество обобщенных случайных процессов обозначим через $G(\widetilde{T},\Omega)$; оно является алгеброй с покоординатными операциями сложения и умножения.

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс $\widetilde{F}(\widetilde{t},\omega) = [(f_n(t_n,\omega))] \in G(\widetilde{T},\Omega)$ ассоциирует классический случайный процесс с непрерывными, интегрируемыми и т.д. траекториями, если $f_n(t,\omega)$ при $n \to \infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$ или в $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathcal{A},\mathsf{P})$ сходится к данному процессу в соответствующем пространстве непрерывных, интегрируемых и т. д. функций.

Пусть $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ — стандартный поток σ-алгебр, $\mathcal{F}_a \subset A$; $B(t)$, $t \in T$, — одномерный стандартный процесс $\mathcal{F}_t$-броуновского движения.

Определение 3. Обобщенным случайным процессом броуновского движения называется элемент алгебры $G(\widetilde{T},\Omega)$, ассоциирующий $B(t)$.

В качестве обобщенного случайного процесса броуновского движения в дальнейшем будем рассматривать элемент $G(\widetilde{T},\Omega) : \widetilde{B}(t) = [(B_n(t))]$, где $B_n(t) = (B * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} B(t+s) \times \rho_n(s)\,ds$, $\rho_n(t) \in \mathbf{D}(\mathbb{R})$, $\rho_n(t) \geq 0$, $\operatorname{supp}\rho_n(t) \subset [0,1/n]$ и $\int_0^{1/n} \rho_n(t)\,dt = 1$.

Лемма 1. *Пусть $h_n > 0$, тогда имеет место следующее равенство:*

$$\mathsf{E}(B_n(t+h_n) - B_n(t))^2 = h_n \iint\limits_{\substack{0\leq s;\ \tau\leq 1/n \\ |s-\tau|\leq h_n}} (1 - |s-\tau|h_n^{-1})\rho_n(s)\rho_n(\tau)\,ds\,d\tau = h_n K(n,h_n).$$

Доказательство получается непосредственно из определения $B_n(t)$.

Очевидно, что $0 \leq K(n,h_n) \leq 1$.

В качестве представителя обобщенной функции $\widetilde{f}$ [9], ассоциирующей $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, рассмотрим последовательность $f_n = f * \rho_n$, где $\rho_n(u,v) \in \mathbf{D}(\mathbb{R}^2)$, $\rho_n(u,v) \geq 0$, $\operatorname{supp}\rho_n(u,v) \subset [0,1/n]^2$, $\int_0^{1/n}\int_0^{1/n} \rho_n(u,v)\,du dv = 1$.

Основные результаты. Пусть t — произвольная фиксированная точка из отрезка T. Очевидно, что существует $m_t \in \mathbb{N}$, $0 \leq \tau_t \leq h_n$, такое, что $t = \tau_t + m_t h_n$.

Теорема 1. *Пусть $f(x,y) \in \mathbf{C}^1_B(\mathbb{R}^2)$, $f \not\equiv 0$ и точка $\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $B_n(\tau_t + kh_n)$ и $B_n(\tau_t + (k-1)h_n)$, а $\tau_t + (k-1)h_n \leq \bar{t}_{k-1} \leq \tau_t + kh_n$, где $k = 1,\dots,m_t$. Тогда конечная сумма $\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\bar{t}_{k-1},\overline{B}_n(\tau_t + (k-1)h_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n))^2$ сходится в $\mathbf{L}^2(\Omega,\mathcal{A},\mathsf{P})$ и равномерно по $t \in T$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ тогда и только тогда, когда числовая последовательность $K(n,h_n)$ сходится при $n \to \infty$, $h_n \to 0$.*

Замечание 1. $\mathbf{C}^p_B(\mathbb{R}^2)$ — множество функций p раз непрерывно дифференцируемых как функций двух переменных и ограниченных на $\mathbb{R}^2$ вместе со своими частными производными до порядка p включительно.

Следствие 1. *Пусть $f(x,y) \in \mathbf{C}^1_B(\mathbb{R}^2)$, $\theta \in [0;1]$ и точка $\overline{B}_n(\tau_t + (k-1)h_n)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $B_n(\tau_t + kh_n)$ и $B_n(\tau_t + (k-1)h_n)$, а $\tau_t + (k-1)h_n \leq \bar{t}_{k-1} \leq \tau_t + kh_n$, где $k = 1\dots m_t$. Тогда выполняется следующее неравенство:*

$$\sup_{t\in T}\mathsf{E}\left(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\bar{t}_{k-1},\overline{B}_n(\tau_t + (k-1)h_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))^2 - \theta\int_0^t f(s,B(s))ds\right)^2 \leq$$

$$Ch_n + Cn^{-1} + C(K(n,h_n) - \theta)^2.$$

Здесь и везде далее C — абсолютная константа, не зависящая от n, t, ω.

Теорема 2. *Пусть $f(x,y) \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$. Конечная сумма*

$$\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + (k-1)h_n, B_n(\tau_t + (k-1)h_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n))$$

сходится в $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *и равномерно по* $t \in T$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *тогда и только тогда, когда числовая последовательность* $K(n, h_n)$ *сходится при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$.

Следствие 2. *Пусть* $f(x,y) \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$ *и* $\theta \in [0;1/2]$. *Тогда выполняется следующее равенство:*

$$\sup_{t\in T} \mathsf{E}\Bigg(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + (k-1)h_n, B_n(\tau_t + (k-1)h_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n)) - (\theta)\int_0^t f(s, B(s))dB(s)\Bigg)^2 \le \frac{C}{n} + Ch_n + C(1 - K(n,h_n) - 2\theta)^2.$$

Замечание 2. Стохастический интеграл в следствии 2 — стохастический θ-интеграл [4].

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда если* $n \to \infty$, $h_n \to 0$, $K(n,h_n) \to (1-2\theta)$, *то*

$$\sup_{t\in T} \mathsf{E}\Bigg(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + (k-1)h_n, B_n(\tau_t + (k-1)h_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n)) - (\theta)\int_0^t f(s, B(s))\, dB(s)\Bigg)^2 \to 0.$$

Теорема 3. *Пусть* $f(x,y) \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$, $f \not\equiv \mathrm{const}$. *Конечная сумма*

$$\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + kh_n, B_n(\tau_t + kh_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n))$$

сходится в $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *и равномерно по* $t \in T$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *тогда и только тогда, когда числовая последовательность* $K(n, h_n)$ *сходится при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$.

Следствие 4. *Пусть* $f(x,y) \in \mathbf{C}^2_B(\mathbb{R}^2)$ *и* $\theta \in [1/2;1]$. *Тогда выполняется следующее неравенство:*

$$\sup_{t\in T} \mathsf{E}\Bigg(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t + kh_n, B_n(\tau_t + kh_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n)) - (\theta)\int_0^t f(s, B(s))dB(s)\Bigg)^2 \le \frac{C}{n} + Ch_n + C(1 + K(n,h_n) - 2\theta)^2.$$

Следствие 5. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда если* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *и* $K(n,h_n) \to (2\theta - 1)$, *то*

$$\sup_{t\in T} \mathsf{E}\Bigg(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t+kh_n, B_n(\tau_t+kh_n))(B_n(\tau_t+kh_n) - B_n(\tau_t+(k-1)h_n)) - (\theta)\int_0^t f(s, B(s))dB(s)\Bigg)^2 \to 0.$$

Замечание 3. Из следствий 4 и 5 видно, что при $\theta \in [1/2;1]$ стохастический θ-интеграл не является естественным, так как приводит к конечно-разностным уравнениям с опережением.

Доказательства теорем. Доказательство теоремы 1. Докажем следующее утверждение:

$$\sup_{t\in T} \mathsf{E}\Bigg(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\bar{t}_{k-1}, \overline{B}_n(\tau_t + (k-1)h_n))(B_n(\tau_t + kh_n) - B_n(\tau_t + (k-1)h_n))^2 -$$

$$K(n,h_n)\int\limits_{\tau_t}^{t} f(s,B(s))ds\Big)^2 \le Ch_n+\frac{C}{n}. \qquad (1)$$

Устремив $n\to\infty$, $h_n\to 0$, очевидно, получим результат теоремы.

Выполним следующие преобразования:

$$\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\bar t_{k-1},\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))^2-K(n,h_n)\int\limits_{\tau_t}^{t} f(s,B(s))ds=$$

$$\sum_{k=1}^{m_t}[f_n(\bar t_{k-1},\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))-f_n(t_{k-1},\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))](B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))^2+$$

$$\sum_{k=1}^{m_t}[f_n(t_{k-1},\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))-f_n(t_{k-1},B_n(\tau_t+(k-1)h_n))](B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))^2+$$

$$\sum_{k=1}^{m_t}[f_n(t_{k-1},B_n(\tau_t+(k-1)h_n))-f(t_{k-1},B_n(\tau_t+(k-1)h_n))](B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))^2+$$

$$\sum_{k=1}^{m_t}[f(t_{k-1},B_n(\tau_t+(k-1)h_n))-f(t_{k-1},B(\tau_t+(k-1)h_n))](B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))^2+$$

$$\sum_{k=1}^{m_t} f(t_{k-1},B(\tau_t+(k-1)h_n))[(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))^2-K(n,h_n)h_n]+$$

$$K(n,h_n)\Big(\sum_{k=1}^{m_t} f(t_{k-1},B(\tau_t+(k-1)h_n))h_n-\int\limits_{\tau_t}^{t} f(s,B(s))ds\Big).$$

Рассматривая каждое слагаемое отдельно и применяя теорему Лагранжа о конечных разностях, неравенство Коши — Буняковского, лемму 1, получим справедливость неравенства (1).

Доказательство теоремы 2. Покажем, что

$$\sup_{t\in T}\mathsf{E}\Big(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(t_{k-1},B_n(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))-(I)\int\limits_{\tau_t}^{t} f(s,B(s))\,dB(s)-$$

$$\frac{1-K(n,h_n)}{2}\int\limits_{\tau_t}^{t} f'_B(s,B(s))\,ds\Big)^2\le\frac{C}{n}+Ch_n. \qquad (2)$$

Устремив $n\to\infty$, $h_n\to 0$, очевидно, получим результат теоремы.

Используя формулу Тейлора, получим следующее тождество:

$$\int\limits_0^{B_n(t)} f_n(t,x)\,dx-\int\limits_0^{B_n(\tau_t)} f_n(\tau_t,x)\,dx=\sum_{k=1}^{m_t}\Big(\int\limits_0^{B_n(\tau_t+kh_n)}(f_n(\tau_t+kh_n,x)-f_n(\tau_t+(k-1)h_n,x))\,dx+$$

$$f_n(\tau_t+(k-1)h_n,B_n(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))+$$

$$2^{-1}f'_{nB}(\tau_t+(k-1)h_n,\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))^2\Big),\quad t\in T,\quad (3)$$

точка $\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $B_n(\tau_t+kh_n)$ и $B_n(\tau_t+(k-1)h_n)$, $k=1,\ldots,m_t$.

Аналогично можно получить

$$\int\limits_0^{B(t)} f(t,x)\,dx - \int\limits_0^{B(\tau_t)} f(\tau_t,x)\,dx = \sum_{k=1}^{m_t}\Biggl(\int\limits_0^{B(\tau_t+kh_n)} (f(\tau_t+kh_n,x) - f(\tau_t+(k-1)h_n,x))\,dx +$$

$$f(\tau_t+(k-1)h_n, B(\tau_t+(k-1)h_n))(B(\tau_t+kh_n) - B(\tau_t+(k-1)h_n))+$$

$$2^{-1}f'_B(\tau_t+(k-1)h_n, \bar{B}(\tau_t+(k-1)h_n))(B(\tau_t+kh_n) - B(\tau_t+(k-1)h_n))^2\Biggr), \quad t\in T, \tag{4}$$

где точка $\overline{B}(\tau_t+(k-1)h_n)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $B(\tau_t+kh_n)$ и $B(\tau_t+(k-1)h_n)$, $k=1,\ldots,m_t$.

С учетом формул (3) и (4) выражение под знаком математического ожидания в формуле (2) распишем следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m_t} f_n(\tau_t+(k-1)h_n, B_n(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))-(I)\int\limits_0^t f(s,B(s))dB(s)-$$

$$\frac{1-K(n,h_n)}{2}\int\limits_{\tau_t}^t f'_B(s,B(s))ds = \Biggl[\sum_{k=1}^{m_t} f(\tau_t+(k-1)h_n, B(\tau_t+(k-1)h_n))(B(\tau_t+kh_n)-$$

$$B(\tau_t+(k-1)h_n))-(I)\int\limits_{\tau_t}^t f(s,B(s))dB(s)\Biggr]-\frac{1}{2}\Biggl(\sum_{k=1}^{m_t} f'_{nB}(\tau_t+(k-1)h_n, \bar{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-$$

$$B_n(\tau_t+(k-1)h_n)\Biggr)^2 - K(n,h_n)\int\limits_{\tau_t}^t f'_B(s,B(s))ds) + \frac{1}{2}\Biggl(\sum_{k=1}^{m_t} f'_B(\tau_t+(k-1)h_n, \bar{B}(\tau_t+(k-1)h_n))\times$$

$$(B(\tau_t+kh_n)-B(\tau_t+(k-1)h_n))^2 - \int\limits_{\tau_t}^t f'(s,B(s))ds\Biggr) + \Biggl[\int\limits_0^{B_n(t)} f_n(t,x)\,dx - \int\limits_0^{B(t)} f(t,x)\,dx\Biggr]+$$

$$\Biggl[\int\limits_0^{B(\tau_t)} f(\tau_t,x)\,dx - \int\limits_0^{B_n(\tau_t)} f_n(\tau_t,x)\,dx\Biggr] + \sum_{k=1}^{m_t}\int\limits_0^{B(\tau_t+kh_n)} (f(\tau_t+kh_n,x)-f(\tau_t+(k-1)h_n,x))\,dx-$$

$$\sum_{k=1}^{m_t}\int\limits_0^{B_n(\tau_t+kh_n)} (f_n(\tau_t+kh_n,x)-f_n(\tau_t+(k-1)h_n,x))\,dx \equiv I_1 - \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{2}I_3 + I_4 + I_5 + I_6.$$

Исследуя каждое слагаемое отдельно из свойств интеграла Ито, теорем Фубини и Лагранжа, а также из неравенства Коши — Буняковского с помощью теоремы 1 и леммы 1 получим справедливость неравенства (2).

Доказательство теоремы 3. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. Покажем справедливость неравенства:

$$\sup_{t\in T}\mathsf{E}\Biggl(\sum_{k=1}^{m_t} f_n(t_k, B_n(\tau_t+kh_n))(B_n(\tau_t+kh_n) - B_n(\tau_t+(k-1)h_n)) - (I)\int\limits_{\tau_t}^t f(s,B(s))\,dB(s)-$$

$$\frac{1+K(n,h_n)}{2}\left(\int\limits_{\tau_t}^{t} f'(s,B(s))ds\right)^2 \le \frac{C}{n} + Ch_n. \quad (5)$$

Для этого будем пользоваться следующим равенством:

$$\int\limits_0^{B_n(t)} f_n(\tau_t+kh_n,x)dx - \int\limits_0^{B_n(\tau_t)} f_n(\tau_t+(k-1)h_n,x)\,dx = \sum_{k=1}^{m_t}\left(\int\limits_{B_n(\tau_t+(k-1)h_n)}^{B_n(\tau_t+kh_n)} f_n(\tau_t+kh_n x)\,dx + \right.$$

$$\left.\int\limits_0^{B_n(\tau_t+(k-1)h_n)} (f_n(\tau_t+kh_n,x) - f_n(\tau_t+(k-1)h_n,x)\,dx\right) = \sum_{k=1}^{m_t}\left(\int\limits_0^{B_n(\tau_t+(k-1)h_n)} (f_n(\tau_t+kh_n,x) - \right.$$

$$f_n(\tau_t+(k-1)h_n,x)dx + f_n(\tau_t+kh_n,B_n(\tau_t+kh_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n)) -$$

$$\left.\frac{1}{2}f'_{nB}(\tau_t+kh_n,\bar{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))(B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n))^2\right),\quad t\in T, \quad (6)$$

точка $\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $B_n(\tau_t+kh_n)$ и $B_n(\tau_t+(k-1)h_n)$, $k=1,\dots,m_t$. Подставив (4) и (6) в (5), получим справедливость теоремы.

Доказательства следствий 1, 3 и 5 очевидны.

Доказательство следствия 2. Известна связь между стохастическим интегралом Ито и стохастическим θ-интегралом [4]: $(\theta)\int_0^t f(s,B(s))\,dB(s) = (I)\int_0^t f(s,B(s))\,dB(s) + \theta \times \int_0^t f'_B(s,B(s))\,ds$. Тогда из этого равенства и соотношения (2) непосредственно получаем справедливость доказываемого неравенства.

Аналогичным образом доказывается следствие 4.

Работа частично поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований.

Литература

1. Itô K. // Proc. Imp. Acad. Tokyo. 1946. Vol. 22. P. 32 – 36.
2. Стратонович Р. Л. // Вестн. МГУ. 1964. Т. 1. С. 3 – 12.
3. Ogawa B. S. // Proc. Japan. Acad. 1970. Vol. 46, No 21. P. 153 – 157.
4. Пугачев В. С., Синицин И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990.
5. Лазакович Н. В. // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 5. С. 23 – 27.
6. Лазакович Н. В., Юферева И. В. // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1994. № 2. С. 28 – 32.
7. Лазакович Н. В., Сташуленок С. П., Яблонский О. Л. // Литовский матем. сб. 1999. Т. 39, № 2. С. 248 – 256.
8. Яблонский О. Л. // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 2. С. 22 – 26.
9. Егоров Ю. В. // Успехи матем. наук. 1990. Т. 45, вып. 5 (275). С. 3 – 40.

T. I. RUSINA, O. L. YABLONSKI

APPROXIMATION OF STOCHASTIC INTEGRALS IN THE NON-HOMOGENEOUS CASE

Summary

The approximations of stochastic θ-integrals with non-homogeneous functions are investigated. Complete classification of the ways of approximations of stochastic θ-integrals with non-homogeneous functions by process of Brownian motion in the convolution algebra has been given.