ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2003
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.9

С. Ф. МАКАРУК

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С ОПТИМАЛЬНЫМ РАЗМЕЩЕНИЕМ ВНУТРЕННИХ ОБЛАСТЕЙ

Брестский государственный технический университет

(Поступила в редакцию 12.06.2002)

1. Рассмотрим конечное число простых гладких замкнутых кривых L_k, $k = 1, \dots, n$; $\operatorname{int} L_j \cap \operatorname{int} L_k = \varnothing$, $\forall j \neq k$. Обозначим $D^- := \operatorname{ext} L = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{ext} L_k$ многосвязную область, ограниченную объединением L кривых L_k, а $D^+ := \bigcup\limits_{k=1}^{n} \operatorname{int} L_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k^+$ — объединение внутренностей кривых L_k (D^+ — несвязная область). Пусть $g \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{C})$ — заданная функция.

В работе рассматривается задача определения такого размещения кривых L_k при фиксированном n, что функции ϕ^+, ϕ^- являются решением задачи о скачке

$$\phi^+(t) - \phi^-(t) = g(t), \quad t \in L, \tag{1}$$

$\phi^\pm \in \mathcal{C}^\pm(\overline{D^\pm}) := \mathcal{H}^\pm(D^\pm) \cup \mathcal{C}(\overline{D^\pm})$, т. е. ϕ^+, ϕ^- аналитичны в соответствующих областях и непрерывны в их замыкании, а также доставляют экстремальное значение функционалу

$$\sigma := \int_L \operatorname{Re} \phi^+(t) dy, \tag{2}$$

где $t = x + iy$.

Подобная задача возникает при моделировании композиционных материалов, обладающих экстремальными свойствами проводимости (например, электрической проводимости, теплопроводности и т. п.). При этом решение $\phi^\pm(z)$ задает комплексный потенциал соответствующего поля, а функционал σ связан простым соотношением с эффективной проводимостью композиционного материала (см., например, [6]). Аналогичные задачи (задачи оптимального дизайна композиционных материалов) исследуются различными авторами (см., например, [1, 5, 6]). В работе [4] также решается задача типа (1) – (2), но при других геометрических условиях и с другими краевыми задачами, а именно, комплексный потенциал определяется на конечной части плоскости, ограниченной заданным контуром Γ ($\operatorname{int} \Gamma \supset L$), по смешанному краевому условию

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \phi^-(t) = f(t), & t \in \Gamma, \\ \phi^+(t) - \phi^-(t) = g(t), & t \in L, \end{cases} \tag{3}$$

где $f \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Gamma)$, $g \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{C})$ — заданные функции на соответствующих множествах, при этом ϕ также доставляет экстремальное значение функционалу (2).

В данной работе рассмотрена задача об оптимальном расположении круговых включений одинакового радиуса. В этом случае оптимизирующими параметрами являются центры круговых включений. Общее решение данной задачи построено в виде сумм, зависящих от центров включений. Выяснены некоторые общие правила расположения включений. В случае малого количества включений ($n = 2, 3$) получено явное представление решений и дано полное геометрическое описание экстремальных конфигураций для важного с точки зрения приложений случая $g(z) = \overline{z}$. Заметим, что подобная задача для произвольных (не обязательно круговых) включений может быть сведена к исследуемой с помощью конформных отображений (см., например, [3]), но в этом случае явного решения не получается даже в частных случаях.

2. Установим необходимое условие оптимальности расположения круговых включений D_k одинакового радиуса, т.е. $D_k := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| < r\}$, $k = 1, \dots, n$, при условии, что $|a_k - a_j| > 2r$, $\forall k \neq j$, а радиус r один и тот же для всех включений. Другими словами, рассмотрим необходимые условия разрешимости задачи (1) – (2) в указанной ситуации.

Известно [2], что решение задачи (1) имеет в этом случае вид

$$\phi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \frac{g(t)dt}{t - z}, \quad z \in D^{\pm}, \tag{4}$$

где каждый из контуров L_k ориентирован по часовой стрелке. Таким образом, экстремальное расположение областей D_k определяется как их центрами, так и заданной функцией g. Определение экстремального значения функционала (2) представляет при этом достаточно сложную задачу. Обозримое исследование можно провести в том случае, когда функция g явным образом задана. Важным с точки зрения приложений является случай $g(z) = \overline{z}$. В этом случае интегралы (4) вычисляются, и общее решение задачи (1) имеет вид

$$\phi(z) = \begin{cases} -r^2 \sum\limits_{m=1}^{n} (z - a_m)^{-1}, & z \in D^-, \\ \overline{a}_k - r^2 \sum\limits_{m \neq k}^{n} (z - a_m)^{-1}, & z \in D_k. \end{cases} \tag{5}$$

Вычислим значение функционала (2) по теореме о среднем:

$$\sigma = \int\limits_{L} \operatorname{Re}\phi^{+}(t)\, dy = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{L_k} \operatorname{Re}\phi^{+}(t)\, dy = \pi r^2 \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}(\phi^{+})'(a_k). \tag{6}$$

Найдем $(\phi^{+})'(a_k)$:

$$(\phi^{+})'(a_k) = r^2 \sum_{m \neq k} (z - a_m)^{-2}\Big|_{z = a_k} = r^2 \sum_{m \neq k} (a_k - a_m)^{-2}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получим $\sigma = \operatorname{Re}\mu$, где

$$\mu = \frac{\pi r^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m \neq k} (a_k - a_m)^{-2}. \tag{8}$$

Исследование исходной экстремальной задачи сводится теперь к изучению комплексной функции μ, зависящей от n комплексных переменных $a_1, a_2, \dots, a_n$. Очевидно, что при трансляции значение μ не меняется, поэтому одну из точек можно зафиксировать.

Имеет место следующая

Лемма. *Пусть функция $\sigma = \operatorname{Re}\mu$ достигает максимума на множестве точек $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Тогда:*

1) $\mu(A) \in \mathbb{R}$;

2) каждый круг D_k касается хотя бы одного из остальных кругов D_m, причем замыкание $\overline{D^+}$ является связным множеством на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Доказательство. 1) Представим μ в виде $\mu = \mu_1 + i\mu_2$. Пусть набору точек A соответствут значение $\mu = \mu(A)$. Рассмотрим значение функции μ при повороте на угол θ, т. е. на наборе $A' = \{e^{i\theta}a_1, e^{i\theta}a_2, \dots, e^{i\theta}a_n\}$: $\mu(A') = \pi r^2 n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m\neq k} e^{-2i\theta}(a_k - a_m)^{-2} = e^{-2i\theta}(\mu_1(A) + i\mu_2(A)) = \mu_1(A)\cos 2\theta + \mu_2(A)\sin 2\theta + i(\mu_2(A)\cos 2\theta - \mu_1(A)\sin 2\theta))$. Таким образом, $\sigma = \operatorname{Re}\mu = \mu_1 \cos 2\theta + \mu_2 \sin 2\theta$. Поскольку модуль комплексного числа μ не меняется при повороте, то $\max\sigma = \max\mu_1$ и достигается при $\mu_2 = 0$. Следовательно, для экстремального набора A выражение $\mu(A) = \mu_1(A) = \pi r^2 n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m\neq k}(a_k - a_m)^{-2}$ принимает действительное значение.

2) Пусть $A := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - множество, на котором достигается максимальное значение функционала σ. Рассмотрим оптимальный набор кругов, определяемых центрами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Предположим, что какой-то из кругов этого набора, например D_1, не касается остальных. Рассмотрим функцию $u(z) := \operatorname{Re}\sum_{k=2}^{n}(z - a_k)^{-2}$. Сумма $u(a_1)$ является частью суммы σ, которая меняется при изменении положения круга D_1. По предположению функция $u(z)$ достигает максимального значения при $z = a_1$, причем $|a_1 - a_k| > 2r$, $k = 2, 3, \dots, n$. Но функция $u(z)$ гармонична в области $\{z : |z - a_k| > 2r, k = 2, \dots, n\}$ и непрерывна в $\{z : |z - a_k| \geq 2r, k = 2, \dots, n\}$. Поэтому $\max u(z)$ достигается в граничной точке, т. е. когда $|a_1 - a_k| = 2r$ для некоторого k. Полученное противоречие показывает, что каждый круг касается хотя бы одного из остальных.

Покажем теперь, что замыкание всех кругов, соответствующих набору A, образует связное множество. Предположим противное, а именно, пусть $A = A_1 \cup A_2$, где ни один круг, соответствующий множеству A_1, не касается ни одного круга для множества A_2. Зафиксируем один из центров a_p, $a_p \in A_1$, а также один из центров a_q, $a_q \in A_2$. Представим остальные центры $a_k \in A_1$ в виде $a_k = a_p + b_{kp}$, а центры $a_m \in A_2$ — в виде $a_m = a_q + b_{qm}$. Рассмотрим функцию $u(z) := \operatorname{Re}\sum_{k,m}(a_p - z + b_{kp} - b_{mq})^{-2}$, где k, m пробегают те значения, для которых $a_k \in A_1$, $a_m \in A_2$. Сумма $u(a_q)$ представляет собой часть суммы σ, которая изменится при взаимном изменении множеств A_1, A_2 при фиксированных элементах внутри этих множеств. Переменная z моделирует такое изменение. Эта переменная пробегает некоторое компактное множесто K в $\widehat{\mathbb{C}}$, которое описывает все допустимые жесткие изменения взаимного расположения кругов, соответствующих A_1, A_2, вплоть до касания. Функция $u(z)$ гармонична в $\operatorname{int} K$ и непрерывна в K. В силу принципа максимума эта функция достигает своего максимума на границе компакта K, что соответствует касанию некоторых кругов, соответствующих A_1, с кругами, соответствующими A_2, что противоречит начальному предположению. Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что оптимальное расположение кругов всегда достигается при перколяции, т. е. когда круги, касаясь друг друга, образуют множество типа цепи.

3. Пусть $n = 2$, тогда $\mu_1 = \pi r^4(a_1 - a_2)^{-2}$. Следовательно, $\operatorname{Im}(a_1 - a_2)^{-2} = 0$. Это возможно в двух случаях:

а) $a_1 - a_2 = 2ri$. Тогда $\mu_1 = -\pi r^2/4$. Таким образом, минимальное значение функционала эффективной проводимости для случая двух круговых включений достигается, когда центры этих включений расположены на прямой параллельной мнимой оси, и эти круги касаются;

б) $a_1 - a_2 = 2r$. Тогда $\mu_1 = \pi r^2/4$. Максимальное значение функционала (2) соответствует горизонтальному расположению включений.

Пусть $n = 3$, тогда функция μ_1 имеет вид: $\mu_1 = (2/3)\pi r^4((a_1 - a_2)^{-2} + (a_1 - a_3)^{-2} + (a_2 - a_3)^{-2})$. Зафиксируем положение одного из центров, пусть $a_1 = 0$, тогда $\mu_1 = (2/3)\pi r^4(a_2^{-2} + a_3^{-2} + (a_2 - a_3)^{-2})$. Функция μ_1 является гармонической функцией от двух переменных a_2 и a_3 в области $\{(a_2, a_3) : |a_2| > 2r, |a_3| > 2r, |a_2 - a_3| > 2r\}$ и непрерывна в замыкании этой области. Согласно лемме, μ_1 достигает максимума на границе области определения. Тогда возможны два варианта расположения окружностей. Первый, когда $a_2 = 2re^{i\theta_2}$, $a_3 = a_2 + 2re^{i\theta_3}$, и второй, когда $a_2 = 2re^{i\theta_2}$, $a_3 = 2re^{i\theta_3}$.

Рассмотрим первый случай. Функция μ_1 принимает следующий вид: $\mu_1 = 6^{-1}\pi r^2(e^{-2i\theta_2} + e^{-2i\theta_3} + (e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3})^{-2}) \in \mathbb{R}$. Решая систему уравнений

$$\partial\mu_1/\partial\theta_2 = 0, \quad \partial\mu_1/\partial\theta_3 = 0, \tag{9}$$

получаем $\theta_3 = \theta_2 + (2/3)k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le \theta_2 \le 2\pi$, $0 \le \theta_3 \le 2\pi$. При $k = 0$ получаем $\theta_2 = \theta_3$ и $\mu_1 = 3\pi r^2 e^{-2i\theta_2}/8 \in \mathbb{R}$. Значит, $\sin 2\theta_2 = 0$, следовательно, $\theta_2 = \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. Максимальное значение функционала, задающего эффективную проводимость для случая трех круговых включений, достигается, когда центры этих включений лежат на вещественной оси и круги касаются, само максимальное значение функционала равно $\mu_1 = 3\pi r^2/8$. Минимальное значение функционала достигается, когда центры включений расположены на мнимой оси и круги касаются, в этом случае $\mu_1 = -3\pi r^2/8$. Для остальных $k \in \mathbb{Z}$ решения не удовлетворяют условию нашей задачи.

Рассмотрим второй вариант размещения круговых включений. В этом случае μ_1 имеет вид $\mu_1 = \pi r^2(e^{-2i\theta_2} + e^{-2i\theta_3} + (e^{i\theta_2} - e^{i\theta_3})^{-2})/6 \in \mathbb{R}$. Решая систему уравнений (9), получим $\theta_3 = \theta_2 + (\pi + 2k\pi)/3$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le \theta_2 \le 2\pi$, $0 \le \theta_3 \le 2\pi$. При $k = 0$ имеем $\theta_3 = \theta_2 + (\pi/3)$ и соответственно $\mu_1 = 0$. При $k = 1$ имеем $\theta_3 = \theta_2 + \pi$, и необходимо найти такие $\theta_2 \in [0, 2\pi]$, чтобы $\mu_1 = 3\pi r^2 e^{-2i\theta_2}/2 \in \mathbb{R}$. Значит, $\sin 2\theta_2 = 0$, и, следовательно, $\theta_2 = \pi n/2$, $n \in \mathbb{N}$. Максимальное значение функционала, задающего эффективную проводимость, для случая трех круговых включений равно $\mu_1 = 3\pi r^2/8$. Оно достигается тогда, когда центры этих включений лежат на вещественной оси и круги касаются. Минимальное значение функционала равно $\mu_1 = -3\pi r^2/8$. Минимальное значение функционала достигается, когда центры включений расположены на мнимой оси и круги касаются. Для остальных k решения не удовлетворяют условию нашей задачи.

Работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Литература

1. Buttazzo G. // ESIAM: Proceedings. Actes du 29ème Congrès d'Analyse Numerique: CANum'97. Paris, 1998. Vol. 3, P. 51 - 64.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функции комплексного переменного. М., 1966.
4. Макарук С. Ф. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2001. Т. 9. С. 101 - 104.
5. Solowski J., Zolesio J. P. Introduction to Shape Optimization. Berlin, 1992.
6. Cherkaev A. Variational Methods for Structural Optimization. N.-Y., 2000.

S. F. MAKARUK

BOUNDARY VALUE PROBLEM ON JUMP FOR A MULTIPLY CONNECTED DOMAIN WITH OPTIMALLY SITUATED INTERNAL DOMAINS

Summary

It is considered jump boundary value problem for multiply connected domains with unknown internal domains (inclusions). Distribution of the inclusions is determined by the optimality of the functional of effective conductivity and the constancy of their complete area. The solution is given in form of sums depending on centers of inclusions. For two and three inclusions optimal configurations are described, and the closed form solution is found in the important for application particular case.