МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания и варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы по курсу «Высшая математика» для студентов специальности
74 05 01 «Мелиорация и водное хозяйство»

Брест 2007

УДК 517.9

В соответствии с действующей программой по высшей математике для студентов специальности 74 05 01 «Мелиорация и водное хозяйство» подобраны индивидуальные задания к аттестационной работе по теме «Кратные и криволинейные интегралы» и к аттестационной работе по теме «Теория вероятностей» приведены решения типовых вариантов, перечислены основные вопросы и задачи 3-го семестра.

Составители: Гусева С.Т., доцент
Золотухина Л.С., старший преподаватель
Каримова Т.И., доцент, к. ф-м. н.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент [illegible] А.В.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ГМ-II
III СЕМЕСТР

1. Двойной интеграл и его свойства.
2. Вычисление двойного интеграла.
3. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам.
4. Приложение двойного интеграла.
5. Тройной интеграл.
6. Вычисление тройного интеграла.
7. Переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле.
8. Криволинейный интеграл первого рода и его вычисление.
9. Криволинейный интеграл второго рода и его вычисление.
10. Вычисление площади с помощью криволинейного интеграла второго рода.
11. Приложения криволинейного интеграла первого рода.
12. Формула Грина.
13. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от формы кривой интегрирования.
14. Элементы комбинаторики.
15. Основные понятия ТВ.
16. Классическое определение вероятности.
17. Статистическое определение вероятности.
18. Геометрическое определение вероятности.
19. Вероятность суммы совместных и несовместных событий.
20. Вероятность произведения зависимых и независимых событий.
21. Вероятность появления хотя бы одного из событий.
22. Формула полной вероятности.
23. Формула Байеса.
24. Формула Бернулли.
25. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.
26. Дискретные случайные величины, закон распределения свойства.
27. Непрерывные случайные величины.
28. Числовые характеристики ДСВ.
29. Числовые характеристики НСВ.
30. Биноминальный закон распределения, его числовые характеристики.
31. Закон Пуассона, его числовые характеристики.
32. Равномерное распределение НСВ, его числовые характеристики.
33. Нормальное распределение НСВ, его числовые характеристики. Правило трех «сигм».
34. Показательный закон распределения НСВ, его числовые характеристики.
35. Вероятность попадания в заданный интервал НСВ, распределенной нормально.
36. Генеральная и выборочная совокупности. Вариационный ряд.
37. Графическое изображение статистических рядов.
38. Эмпирическая функция распределения.
39. Генеральная и выборочная средние. Устойчивость выборочных средних.
40. Генеральная, выборочная и эмпирическая дисперсии. Точность оценки. Доверительная вероятность. Доверительный интервал.
41. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном среднем квадратическом отклонении.
42. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном среднем квадратическом отклонении.
43. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонениия нормального распределения.
44. Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая гипотезы.
45. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы.
46. Область принятия гипотезы. Отыскание критической области.
47. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности при помощи критерия Пирсона.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Изменить порядок интегрирования:

   а) $\int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$;

   б) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy$.

2. Представить $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по *x* и внешним интегрированием по *y*, если D задана указанными линиями:

   а) $y = x^2 - 2,\ \ y = x$;

   б) $x \geq 0,\ y \geq 1,\ y \leq 3,\ y = x$;

   в) $x = \sqrt{2 - y^2},\ y^2 = x,\ y \geq 0$.

3. Вычислить двойной интеграл:

   а) $\iint\limits_{D} ye^{\frac{xy}{2}}\,dxdy,\ D: y = \ln 2;\ x = 2;\ y = \ln;\ 3x = 4$;

   б) $\iint\limits_{D} \left(x^3 + 3y\right)dxdy,\ D: x + y = 1;\ y = x^2 - 1;\ x \geq 0$.

4. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты

   а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,dy$;

   б) $\iint\limits_{D} \left(x^2 + y^2\right)dxdy$, если $D: x^2 + y^2 = 4x$;

   в) $\iint\limits_{D} arctg\frac{x}{y}dxy,\ D: x^2 + y^2 = 4;\ x^2 + y^2 = 25;\ x^2 + y^2 = 25;\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x;\ y = \sqrt{3}x$.

5. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь фигуры D, ограниченной следующими линиями

   а) $D: xy = 1,\ x^2 = y,\ y = 2,\ x = 0$.

   б) $D: x^2 + y^2 = 9$.

6. Найти координаты центра масс пластины $D: y = x,\ y = 5x,\ x = 5$, если ее плотность $\rho(x,y) = xy$.

7. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$,

если область V ограничена указанными поверхностями:

а) $V: x=3,\ y=x,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=3x^2+y^2$;

б) $V: x=4,\ y=\dfrac{x}{4},\ z\ge 0,\ z=4y^2$.

8. Вычислить тройной интеграл

а) $\iiint\limits_V x^3yzdxdydz$, $V: -1\le x\le 2;\ 1\le y\le 3;\ 0\le z\le 1$.

б) $\iiint\limits_V z^2dxdydz$, $V: 1\le x^2+y^2\le 36;\ y\ge x;\ x\ge 0;\ z\ge 0$.

9. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

$$y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=x,\ x=\sqrt{9-y^2},\ x=\sqrt{25-y^2}.$$

10. Вычислить криволинейный интеграл вдоль заданной дуги L

а) $\int\limits_{L_{AB}}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$,

$L_{AB}: y=x^2$ от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

б) $\int\limits_L y^2dl$, L – первая арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

в) $\int\limits_{L_{AB}}\left(xy+x^2\right)dl$, L_{AB} - отрезок прямой, заключенный между точками $A(1;1)$ и $B(3;3)$.

11. В урне имеются 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Их урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар: а) белый; б) черный?

12. Из слова "НАУГАД" выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что: а) это буква "Я"; б) это гласная?

13. Вероятность того, что стрелок, произведя выстрел, выбьет 10 очков, равна 0,4, 9 очков – 0,3 и, наконец, 8 или меньше – также 0,3. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не меньше 9 очков.

14. В лотерее 1000 билетов; из них на один билет выпадает выигрыш 500 руб., на 10 билетов – выигрыш по 100 руб., на 50 билетов – выигрыш по 20 руб., на 100 билетов – выигрыш по 5 руб., остальные билеты невыигрышные. Участник лотереи покупает один билет. Найти вероятность выигрыша не менее 20 руб.

15. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятность того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) три камеры.

16. По самолету производится три одиночных выстрела из зенитного орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором – 0,5, при третьем – 0,7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2, а при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

17. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

18. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность, что при 300 испытаниях успех наступит: а) ровно 75 раз? б) ровно 85 раз?

19. Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в любой день равна 1/365.

20. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске равна 0,8. Построить ряд распределения числа попаданий.

Аттестационная работа №5

«Кратные и криволинейные интегралы»

ВАРИАНТ 1

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D \left(x^2 + y\right) dxdy$, $D: y = x^2;\ y^2 = x$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V 8y^2 z e^{-xyz} dxdydz,\ V: \begin{cases} x = 2,\ y = -1,\ z = 2 \\ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ z \geq 0,\ z = 2\ \ y \geq \pm x,\ z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right);\ \mu = y\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L \sqrt{2 - z^2}\left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dl$,

где L – дуга кривой $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$,

где L_{AB} - дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$.

ВАРИАНТ 2

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (7x+5y+3)dxdy$, $D: y=\frac{1}{x};\ y=x;\ y=-2$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V 2y^2 z\,ch(2xyz)\,dxdydz,\ V: \begin{cases} x=\frac{1}{2},\ y=2,\ z=-1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V: 1\le x^2+y^2\le 36,\ z\ge 0,\ x\ge 0,\ y\ge x;\ \mu=z^2,\ z=2.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\oint\limits_L (x^2+y^2)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=4$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, где L_{AB} - дуга астроиды $x=2\cos^3 t$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$.

ВАРИАНТ 3

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (4y-xy+7)dxdy$, $D: y=\frac{1}{x};\ y=1;\ x=2$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-6y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 z\,ch\left(\frac{xyz}{2}\right)dxdydz,\ V: \begin{cases} x=2,\ y=-1,\ z=2 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=32,\ y^2=x^2+z^2,\ y\ge 0;\ \mu=y.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OB}}\frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, где L_{OB} – отрезок прямой соединяющий точки $O(0;0)$ и $B(2;2)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OA}}\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$, где L_{OA} - дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

ВАРИАНТ 4

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0}fdx+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{y}^{0}fdx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_{D}(yx+y-1)dxdy$, $D:y=\frac{1}{x};\ y=\sqrt{x};\ x=2$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ y=x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{V}y^2\cdot z\cos\left(\frac{xyz}{9}\right)dxdydz,\ V:\begin{cases}x=9,\ y=1,\ z=2\pi,\\ x=0,\ y=0,\ z=0.\end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=8,\ x^2=y^2+z^2,\ x\ge 0;\ \mu=x.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, где L_{AB} – отрезок прямой AB; $A(-1;0)$ и $B(0;1)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\oint\limits_{L}(x+2y)dx+(x-y)dy$, где L - окружность $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

ВАРИАНТ 5

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{x^2}fdy+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{y}^{\sqrt{2-x^2}}fdy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_{D}(2+x-xy)dxdy$, $D:y=x^2+1;\ y=1-x$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-8y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 z\,ch(xyz)\,dxdydz,\ V:\begin{cases}x=1,\ y=1,\ z=1\\x=0,\ y=0,\ z=0\end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ z=\sqrt{8-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ y\ge 0;\ \mu=y.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}}\frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, где L_{AB} – отрезок прямой, заключенной между точками $A(0;4)$ и $B(4;0)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L(x^2y-x)dx+(y^2x-2y)dy$,

где L – дуга эллипса $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ при положительном направлении обхода.

ВАРИАНТ 6

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-(2+y)}^{0}fdx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0}fdx.$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D(y^2+xy)dxdy,\ D: y=\sqrt{-x};\ y=1;\ x=0.$

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2z\sin\left(\frac{xyz}{2}\right)dxdydz,\ V:\begin{cases}x=1,\ y=4,\ z=\pi,\\x=0,\ y=0,\ z=0.\end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ y\ge 0,\ y\le\sqrt{3}\cdot x,\ z=3(x^2+y^2);\ z=3;\ \mu=\frac{y^2z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho=2(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2 y dy$, где L_{AB} – дуга эллипса $x=\cos t$, $y=2\sin t$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.

ВАРИАНТ 7

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f dx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (2+x^2 y)dxdy$, $D: x=-y^2;\ x=-1$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-4y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=x,\ x=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V 2x^2 z\, sh(2xyz)dxdydz,\ V: \begin{cases} x=2,\ y=\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{1}{2}, \\ x=0,\ y=0,\ \ z=0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:,\ z=2\left(x^2+y^2\right),\ y\geq 0,\ y\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot x;\ z=18;\ \mu=\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} ydl$, где L_{AB} – дуга астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, заключенная между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx - x^2 dy$, где L_{OBA} – ломаная OBA; $O(0;0)$; $B(2;0)$; $A(2;1)$.

ВАРИАНТ 8

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (xy+1)dxdy$, $D: y=x^2;\ x=-y^2$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V 2x^2 zsh(xyz)\,dxdydz\,,\ V:\begin{cases} x=1, & y=-1, & z=1, \\ x=0, & y=0, & z=0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V: z=x^2+y^2\ y\geq 0\ \ y\leq x,\ z=4;\ \mu=\frac{xy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OB}} ydl$, где L_{OB} – дуга параболы $y^2=\frac{2}{3}x$ между точками $O(0;0)$ и $B\left(\frac{\sqrt{35}}{6};\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}}\left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, где L_{AB} - отрезок прямой AB от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;4)$.

ВАРИАНТ 9

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{y}} fdx+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} fdx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (4x+5y)\,dxdy$, $D: y=x;\ y=-x;\ y=-1$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-6y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x,\ x=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint_V y^2 z\cos\left(\frac{xyz}{3}\right)dxdydz\,,\ V:\begin{cases} x=3, & y=1, & z=2\pi, \\ x=0, & y=0, & z=0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2=4y,\ y+z=4;\ z\geq 0,\ \mu=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)dl$, где L – дуга кривой $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=\sqrt{3}t,\ 0\leq t\leq 2\pi$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}}\cos ydx-\sin xdy$, где L_{AB} - отрезок прямой AB: $A(2\pi;-2\pi)$, $B(2\pi;2\pi)$.

ВАРИАНТ 10

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_{D}\left(2-3xy^2\right)dxdy$, $D: y=-x^2$; $y=x$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{V} x^2 z sh(xyz)\,dxdydz,\ V:\begin{cases} x=2, & y=1, & z=1, \\ x=0, & y=0, & z=0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V: x^2+y^2=2x;\ x+z=2,\ y\geq 0,\ z\geq 0;\ \mu=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L} arctg\frac{y}{x}dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho=\left(1+\cos\varphi\right),\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}}\frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, где L_{AB} - отрезок прямой АВ : $A(1;2)$, $B(3;6)$.

ВАРИАНТ 11

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f dx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_{D}\left(3-2xy\right)dxdy$, $D: y=x^2-1$; $y=-x$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}\cdot x,\ x=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{V} 2y^2 z e^{xyz}\,dxdydz,\ V:\begin{cases} x=1, & y=1, & z=1, \\ x=0, & y=0, & z=0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2=16y,\ y+z=16\ \ x\ge 0,\ z\ge 0;\ \mu=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, где L – первая арка циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} xydx+(y-x)dy$, где L_{AB} - дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

ВАРИАНТ 12

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} fdy+\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} fdy.$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (3-2xy^2)dxdy$, $D: y=-x;\ x=-1;\ y=0.$

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2 z\sin\left(\frac{xyz}{4}\right)dxdydz,\ V:\begin{cases}x=1, & y=2\pi, & z=4,\\ x=0, & y=0, & z=0.\end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2=2x,\ y+z=2\ \ z\ge 0,\ \mu=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OA}}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где L_{OA} – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(1;2)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{ABC}}(x^2+y^2)dx+(x+y^2)dy$, где L_{ABC} - ломаная АВ: $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(3;5)$.

ВАРИАНТ 13

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} fdx+\int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} fdx.$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D \left(5x^2y-3\right)dxdy$, $D: y=x-1;\ y=0;\ x=0$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-4y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}\cdot x,\ x=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2z\cos\left(xyz\right)dxdydz,\ V:\begin{cases} x=1,\ \ y=\pi,\ \ z=2, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ 2\le x^2+y^2+z^2\le 8,\ z^2=y^2+x^2\ \ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;\ \mu=xy.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L \frac{\left(y^2-x^2\right)\cdot xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dl$, где L – дуга кривой

$\rho=9\sin 2\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, где L_{OB} – отрезок прямой OB между точками $O\left(0;0;0\right)$, $B\left(-2;4;5\right)$.

ВАРИАНТ 14

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dy\int\limits_0^{\arcsin y}fdx+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dy\int\limits_0^{\arccos y}fdx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D \left(8y+5\right)dxdy$, $D: y=1-x^2;\ y=x^2\left(x\le 0\right)$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V 8y^2ze^{2xyz}dxdydz,\ V:\begin{cases} x=-1,\ \ y=2,\ \ z=1, \\ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=4y\ \ x\ge 0,\ z\ge 0,\ z=6;\ \mu=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OABC}} xydl$, где L_{OABC} – контур прямоугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OB}} ydx + xdy$, где L_{OA} - дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$; $O(R;0)$, $A(0;R)$.

ВАРИАНТ 15

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} fdx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} fdx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (4 - 3xy)dxdy$, $D: y = x$; $y = -x$, $x = -1$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2 z\sin(xyz)dxdydz,\ V: \begin{cases} x = 2,\ y = \pi,\ z = 1, \\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x\ \ y \ge 0,\ y \le x,\ z \ge 0,\ z = 4;\ \mu = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{ABO}} (x + y)dl$, где L_{ABO} – контур треугольника с вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OA}} xydx + (y - x)dy$, где L_{OA} - дуга параболы $y^2 = x$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

ВАРИАНТ 16

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} fdx + \int\limits_1^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} fdx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (x + 2y - 3)dxdy$, $D: x = y^2$; $x = 9$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2+=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}dxdydz,\ V:\begin{cases} x=0,\ y=1, & z=1,\\ \qquad y=x, & z=0. \end{cases}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2-2x+y^2=0,\ y\geq 0\ z\geq 0,\ x+z=2;\ \mu=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L \frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, где L – первый виток винтовой линии $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=2t$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} xdx+ydy+(x-y+1)dz$, где L_{AB} - отрезок прямой AB: $A(1;1;1),\ B(2;3;4)$.

ВАРИАНТ 17

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-2}^{-1}dy\int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0}fdx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0}fdx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy,\ D:y^2=x;\ x=0,\ y=1.$

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2y+y^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\cdot x,.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2ch(2xy)dxdydz,\ V:x=0,\ y=+2,\ y=4x,\ z=0,\ z=2.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2=4y,\ y+z=4\ z\geq 0,\ \mu=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OAB}}(x+y)dl$, где L_{OAB} – контур треугольника с вершинами $O(0;0),\ A(-1;0),\ B(0;1)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx + x^2 y dy$, где L_{AB} - дуга параболы $y^2 = 4-4x$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.

ВАРИАНТ 18

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (2y-x)dxdy$, $D: y=\sqrt{x}$; $y=1$, $y=-x$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2 sh(3xy)dxdydz,\ V: x=1,\ y=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=36.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2=2x,\ y\geq 0\ \ z\geq 0,\ z=3;\ \mu=z\cdot\sqrt{x^2+y^2}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L (x+y)dl$, где L – дуга лемнискаты Бернулли $\rho^2=\cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OB}} xydx+(y-x)dy$, где L_{OB} - дуга параболы $y=x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

ВАРИАНТ 19

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (4xy+1)dxdy$, $D: y=x$; $y=1$; $x=0$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-4y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2\cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right)dxdydz,\ V: x=0,\ y=-1,\ y=\frac{x}{2},\ z=0,\ z=-\pi^2.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2=2\left(y^2+z^2\right),\ x=4,\ x\ge 0,\ \mu=x.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L\sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2y$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OB}}\left(xy-y^2\right)dx+xdy$, где L_{OB} - дуга параболы $y=x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

ВАРИАНТ 20

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}dy\int\limits_0^{\sqrt{2+y}}fdx+\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_0^{\sqrt{-y}}fdx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D\left(x^2+xy\right)dxdy,\ D: y=1-x;\ y=0;\ x=0.$

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=0,\ y=x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2e^{-xy}dxdydz,\ V: x=0,\ y=-2,\ y=4x,\ z=0,\ z=1.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2z,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z=0;\ \mu=10x.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OABC}}xydl$, где L_{OABC} – контур прямоугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(5;0)$, $B(5;3)$, $C(0;3)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}}xdy-ydx$, где L_{AB} - дуга астроиды $x=2\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$.

ВАРИАНТ 21

Задание 1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f dy .$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (y-2xy)dxdy$, $D: y=1-x;\ y=1;\ x=1$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x;\ x=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 ch(2xyz)dxdydz,\ V: x=0,\ y=1,\ y=x,\ z=0,\ z=8.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=1,\ x^2+y^2=4z^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;\ \mu=20z.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L (x^2+y^2)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=4x$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} (xy-x)dx+\frac{1}{2}x^2 ydy$, где L_{AB} - дуга параболы $y^2=4x$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

ВАРИАНТ 22

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^{1} f dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^{1} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (5x+3y)dxdy$, $D: y=x^2;\ y=\sqrt{x}$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0;\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 e^{\frac{xy}{2}} dxdydz,\ V: x=0,\ y=2,\ y=2x,\ z=0,\ z=-1.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ 36(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ z\ge 0;\ \mu=\frac{5}{6}(x^2+y^2).$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}\right) dl$, где L_{AB} – дуга астроиды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ заключенная между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2 y dy$, где L_{AB} - отрезок прямой АВ: $A(1;0)$, $B(0;2)$.

ВАРИАНТ 23

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_0^{\sin y} f dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_0^{\cos y} f dx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (xy - 2) dxdy$, $D: y = x^2$; $y = -1$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2 - 6y + x^2 = 0;\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = x;\ x = 0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} xy\right) dxdydz,\ V: x = 0,\ y = -1,\ y = x,\ z = 0,\ z = 2\pi^2.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 8z,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z = 0;\ \mu = 5x.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L xy dl$, где L – контур квадрата со сторонами $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + y^2 dy + z^2 dz$, где L_{AB} - дуга одного витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$;от точки $A(1;0;0)$ до точки $B(1;0;4\pi)$.

ВАРИАНТ 24

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f dx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями:

$$\iint\limits_D (3x + xy) dxdy,\ D: \Delta OBC,\ O(0;0),\ B(-1;0),\ C(0;1).$$

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0;\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2\cos(\pi xy)\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=1,\ y=2x,\ z=0,\ z=\pi^2.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z=0;\ \mu=6z.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L y^2dl$, где L – первая арка циклоиды $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}}\frac{y}{x}dx+xdy$, где L_{AB} - дуга линии $y=\ln x$, от точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

ВАРИАНТ 25

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-y}^0 fdx+\int\limits_1^{\sqrt{2}}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 fdx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D(2xy+1)dxdy,\ D: y=x^3,\ x=0,\ y=-1$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x;\ x=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2\,\mathrm{sh}(2xy)\,dxdydz,\ V: x=-1,\ y=x,\ y=0,\ z=0,\ z=8.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ 25(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;\ \mu=2(x^2+y^2).$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{ABCD}}xydl$, где L_{ABCD} – контур прямоугольника с вершинами $A(2;0)$, $B(4;0)$, $C(4;3)$, $D(2;3)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L ydx-xdy$, где L – дуга эллипса $x=3\cos t,\ y=2\sin t$ пробегаемая в положительном направлении обхода.

ВАРИАНТ 26

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_{D} (4x-y)dxdy$, $D: x=0$, $y=x^2$, $y=1$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{V} y^2 ch(xy)dxdydz,\ V: x=0,\ y=-1,\ y=x,\ z=0,\ z=2.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=6z,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z=0;\ \mu=90y.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L} ydl$, где L – дуга параболы $y^2=2x$, отсеченной параболой $x^2=2y$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx - x^2dy$, где L_{OA} – дуга параболы $y=\frac{x^2}{4}$, от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;1)$.

ВАРИАНТ 27

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f dx$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_{D} (x+2y)dxdy$, $D: y=0$, $y=\sqrt{x}$, $x=1$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}\cdot x;\ x=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{V} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right)dxdydz,\ V: x=2,\ y=x,\ y=0,\ z=0,\ z=\pi.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=9z^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0;\ \mu=10z.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, где L_{AB} – отрезок прямой, заключенной между точками $A(4;0)$ и $B(6;1)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, где L_{AB} – ломаная линия $y=|x|$, от точки $A(-1;1)$ до точки $B(2;2)$.

ВАРИАНТ 28

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} f dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\cos x} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D e^y dxdy$, $D: y=\ln x$, $y=0$, $x=2$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-4x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2\sin(\pi xy)dxdydz,\ V: x=1,\ y=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=4\pi.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ 9\left(x^2+y^2\right)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;\ \mu=\frac{5\left(x^2+y^2\right)}{3}.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^2 dl$, где L – первая четверть окружности $\rho=2$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx-x^2dy+zdz$, где L_{OA} – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0;0)$, $A(2;1;-1)$.

ВАРИАНТ 29

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f dy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D xydxdy$, $D: y=0$, $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$y^2-2y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ x=0.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V y^2 ch(3xy)\,dxdydz,\ V: x=0,\ y=2,\ y=6x,\ z=0,\ z=-3.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=z,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z=0;\ \mu=10y.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{AB}}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где L_{AB} – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L xdy-ydx$, где L – контур треугольника с вершинами $A(-1;0)$; $B(1;0)$, $C(0;1)$ при положительном направлении обхода.

ВАРИАНТ 30

Задание 1. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^0 fdy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-\sqrt{2-x}}^0 fdy$.

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy,\ D: y=x^2,\ y=x+2$.

Задание3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2-6x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ y=\sqrt{3}\cdot x.$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$\iiint\limits_V x^2\sin(4\pi xy)\,dxdydz,\ V: x=1,\ y=\frac{x}{2},\ y=0,\ z=0,\ z=8\pi.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями μ-плотность:

$$V:\ 16\left(x^2+y^2\right)=z^2,\ x^2+y^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0;\ \mu=5\left(x^2+y^2\right).$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_L (x-y)\,dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2x$.

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{L_{ACB}}\left(x^2+y\right)dx+\left(x+y^2\right)dy$, где L_{ACB} – ломаная ACB: $A(2;0)$, $C(5;0)$, $B(5;3)$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

ВАРИАНТ 30

Задание 1. Изменить порядок интегрирования

$$I = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 f dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 f dy .$$

Решение:

На плоскости Оху построим область интегрирования по заданным пределам изменения переменных в исходных повторных интегралах. Область интегрирования Д$_1$ в первом интеграле расположена между прямыми $x = 0$ и $x = 1$, ограничена веткой параболы $y = -\sqrt{x}$, а сверху прямой $y = 0$. Область интегрирования Д$_2$ расположена между прямыми $x = 1$ и $x = 2$, ограничена снизу веткой параболы $y = -\sqrt{2-x}$, сверху прямой $y = 0$ (см. рис. 1).

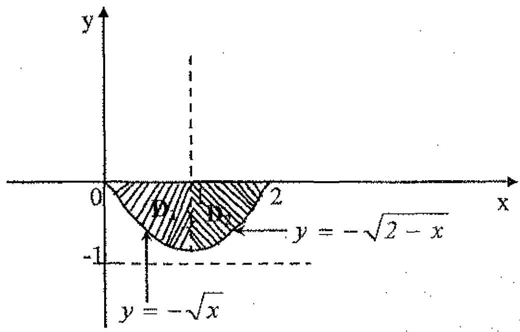


Рис. 1

С другой стороны, область интегрирования $D = D_1 \bigcup D_2$ расположена между прямыми $y = -1$ и $y = 0$, а переменная x изменяется в данной области при каждом фиксированном y от точек параболы $x = y^2$ до точек параболы $x = 2 - y^2$, т. е. имеем

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{y^2}^{2-y^2} f dx .$$

Задание 2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями: $\iint\limits_D (x + y) dxdy$, $D: y = x^2;\ y = x + 2$

Решение:

Область интегрирования D изображена на рис. 2 и ограничена сверху прямой $y = x + 2$ и параболой $y = x^2$ снизу.

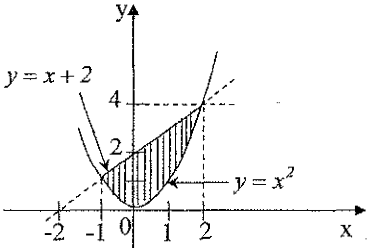


Рис. 2

Следовательно,

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} (x+y)dy = \int_{-1}^{2} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{x^2}^{x+2} dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 2x + \frac{x^2+4x+4}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(\frac{3}{2}x^2 + 4x + 2 - x^3 - \frac{x^4}{4} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} + 2x^2 + 2x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right) \Bigg|_{-1}^{2} = 11{,}1.$$

Задание 3. С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (в полярных координатах):

$$x^2 - 6x + y^2 = 0\,,\; x^2 - 10y + y^2 = 0\,,\; y = \frac{x}{\sqrt{3}},\; y = \sqrt{3}x\,.$$

Решение:

Изобразим область, ограниченную заданными линиями, для чего первые два уровня приведем к каноническому виду:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 25\,.$$

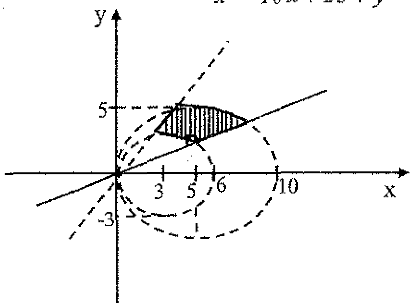


Рис. 3

Таким образом, область находится между прямыми $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ и $y=\sqrt{3}x$ и окружностями $(x-3)^2+y^2=9$ и $(x-5)^2+y^2=25$.

Перейдем к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $x^2+y^2=r^2$.

Имеем: $6\cos\varphi\le r\le 10\cos\varphi$; $\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

Тогда площадь области D равна

$$S=\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_{6\cos\varphi}^{10\cos\varphi}r\,dr=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(r^2\Big|_{6\cos\varphi}^{10\cos\varphi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(100\cos^2\varphi-36\cos^2\varphi\right)d\varphi=32\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\,d\varphi=16\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos2\varphi)d\varphi=$$

$$=16\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{8}{3}\pi \text{ (кв. ед.).}$$

Задание 4. Вычислить тройной интеграл:

$$I=\iiint\limits_V x^2\sin(4\pi xy)\,dx\,dy\,dz,\ V: x=1,\ y=\frac{x}{2},\ y=0,\ z=0;\ z=8\pi.$$

Решение:

Область интегрирования изображена на рис.4.

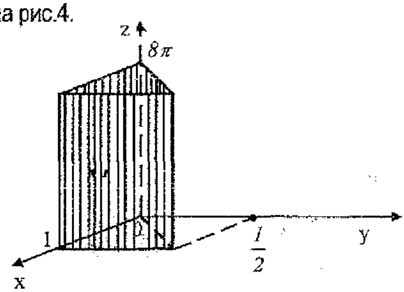


Рис. 4

Для данной области V получаем

$$I=\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^{\frac{x}{2}}\sin(4\pi xy)dy\int\limits_0^{8\pi}dz=\left(z\Big|_0^{8\pi}\right)\cdot\int\limits_0^1\frac{x^2}{4\pi x}\left(-\cos(4\pi xy)\right)\Big|_0^{x/2}dx=$$

$$=8\pi\frac{(-1)}{4\pi}\int\limits_0^1\left(x\cos\left(2\pi x^2\right)-x\right)dx=2\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4\pi}\sin\left(2\pi x^2\right)\right)\Big|_0^1=1 \text{ (куб.ед.)}$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями, μ - плотность:

V: $16\left(x^2+y^2\right)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$; $\mu=5\left(x^2+y^2\right)$.

Решение:

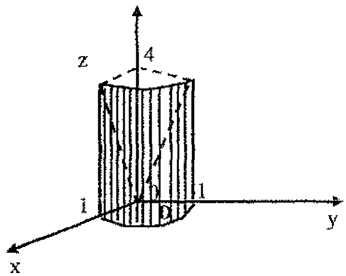


Рис. 5

Масса тела вычисляется по формуле $m=\iiint\limits_V \mu(x;y;z)dxdydz$.

В нашем случае $m=\iiint\limits_V 5\left(x^2+y^3\right)dxdydz$.

Перейдем в данном интеграле к цилиндрическим координатам в соответствии с формулами: $\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \quad x^2+y^2=r^2. \\ r=r \end{cases}$

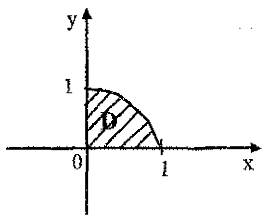


Рис. 6

Имеем

$$m=\iiint\limits_V 5r^2rdrd\varphi dz=\iint\limits_D 5r^3drd\varphi\cdot\int\limits_0^{4r}dz=5\iint\limits_D r^3\left(z\Big|_0^{4r}\right)drd\varphi=$$

$$=5\iint\limits_D 4r^4drd\varphi=20\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 r^4dr=20\left(\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{r^5}{5}\Big|_0^1\right)=4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=2\pi.$$

Задание 6. Вычислить криволинейный интеграл:

$\int\limits_L (x-y)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2x$.

Решение

Запишем уравнения окружности в полярных координатах: $r^2 = 2r\cos\varphi$ или $r = 2\cos\varphi$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ (см. рис. 7)

Тогда $r' = -2\sin\varphi$,

$$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = \sqrt{4\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2d\varphi.$$

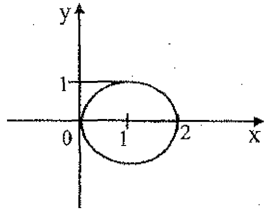


Рис. 7

Следовательно,

$$\int_L (x-y)dl = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r\cos\varphi - r\sin\varphi)2d\varphi = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2\cos^2\varphi - \sin 2\varphi\right)d\varphi = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 + \cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \left(2\varphi + \sin 2\varphi + \cos 2\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi.$$

Задание 7. Вычислить криволинейный интеграл

$\displaystyle\int_{L_{ABC}} \left(x^2+y\right)dx + \left(x^2+y^2\right)dy$, где L_{ABC} - ломаная ACB: $A(2;0)$, $C(5;0)$, $B(5;3)$.

Решение:

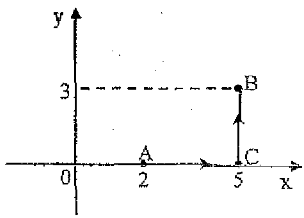


Рис. 8

Уравнение прямой AC: $y = 0$, $2 \le x \le 5$, $dy = 0$

прямой CB: $x = 5$, $0 \le y \le 3$, $dx = 0$.

Тогда

$$\int_{L_{ACB}} \left(x^2+y\right)dx + \left(x+y^2\right)dy = \int_{L_{AC}} \left(x^2+y\right)dx + \left(x+y^2\right)dy + \int_{L_{CB}} \left(x^2+y\right)dx +$$

$$+\left(x+y^2\right)dy = \int_2^5 x^2dx + \int_0^3 \left(5+y^2\right)dy = \frac{x^3}{3}\Big|_2^5 + \left(5y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(125-8) + 15 + 9 = 63.$$

Аттестационная работа №6

«Теория вероятностей»

Задание 1. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка - p_1, для второго - p_2, для третьего - p_3. (См. исходные данные в таблице 1). Найти вероятность того, что: а) в цель попадет только первый стрелок; б) в цель попадут только два стрелка; в) ни один стрелок не попадет в цель; г) в цель попадет хотя бы один стрелок.

Таблица 1

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	0,7	0,5	0,4	0,8	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,4
p_2	0,8	0,3	0,5	0,7	0,6	0,7	0,8	0,9	0,3	0,5
p_3	0,6	0,9	0,8	0,5	0,7	0,8	0,9	0,3	0,4	0,6

№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_1	0,7	0,6	0,8	0,3	0,4	0,5	0,3	0,1	0,9	0,5
p_2	0,6	0,5	0,7	0,2	0,5	0,6	0,4	0,5	0,7	0,7
p_3	0,5	0,4	0,6	0,1	0,1	0,6	0,9	0,3	0,5	0,8

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p_1	0,6	0,9	0,2	0,3	0,4	0,2	0,7	0,1	0,4	0,7
p_2	0,7	0,2	0,4	0,5	0,7	0,3	0,5	0,2	0,2	0,8
p_3	0,6	0,3	0,6	0,7	0,8	0,5	0,8	0,3	0,6	0,2

Задание 2. В ящике имеется n деталей, среди которых k окрашенных. Сборщик наудачу извлекает m деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет ни одной окрашенной; б) ровно l окрашенных; в) не менее l окрашенных; г) не более l окрашенных; д) хотя бы одна окрашенная. (См. исходные данные в таблице 2.)

Таблица 2

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	10	10	10	10	11	11	11	12	12	12
k	6	6	7	6	7	8	7	5	3	4
m	4	3	5	5	5	4	5	8	8	5
l	2	2	3	3	2	3	3	3	2	2

№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	9	9	9	8	8	8	10	10	10	12
k	6	6	7	5	4	5	5	7	7	6
m	4	5	3	4	5	4	6	7	6	8
l	2	3	2	2	2	3	4	5	4	4

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	8	8	8	8	8	9	9	9	9	9
k	4	5	3	4	2	5	4	3	5	4
m	3	3	4	5	4	3	4	6	5	5
l	2	2	2	3	1	2	3	2	4	3

Задание 3. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: n_1 – с первого завода, n_2 – со второго завода, n_3 – с третьего (См. исходные данные в таблице 3). Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе равна p_1, на втором – p_2, на третьем – p_3.

а) Какова вероятность того, что случайно взятое изделие будет качественным?

б) Взятое случайным образом изделие оказалось качественным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на i-том заводе.

Таблица 3

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_1	25	15	40	25	10	40	20	35	15	40
n_2	35	25	35	10	20	30	50	35	45	15
n_3	40	10	25	15	20	30	30	30	40	45
p_1	0,9	0,8	0,9	0,7	0,9	0,8	0,8	0,7	0,9	0,8
p_2	0,8	0,7	0,7	0,9	0,8	0,8	0,9	0,8	0,8	0,7
p_3	0,7	0,7	0,9	0,8	0,6	0,9	0,8	0,9	0,9	0,8
i	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_1	20	14	16	30	20	25	15	40	14	18
n_2	15	26	40	20	10	35	25	25	26	32
n_3	15	10	44	50	20	40	10	35	10	50
p_1	0,9	0,8	0,8	0,9	0,8	0,9	0,8	0,9	0,8	0,9
p_2	0,9	0,9	0,9	0,7	0,9	0,8	0,7	0,8	0,6	0,8
p_3	0,8	0,8	0,7	0,7	0,9	0,7	0,9	0,8	0,7	0,7
i	2	3	1	2	3	3	1	2	1	2

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n_1	30	30	16	15	40	15	35	40	30	10
n_2	10	30	24	35	20	20	25	20	40	20
n_3	10	40	60	50	40	15	40	40	30	20
p_1	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,9	0,8	0,8	0,9	0,7
p_2	0,7	0,7	0,8	0,9	0,8	0,8	0,7	0,9	0,8	0,9
p_3	0,8	0,7	0,9	0,8	0,9	0,6	0,8	0,8	0,9	0,7
i	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3

Задание 4. Правильная монета бросается n раз. Определить вероятность того, что герб выпадет: а) k раз; б) менее k раз; в) более k раз; г) хотя бы один раз. (См. исходные данные в таблице 4).

Таблица 4

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	10	11	12	10	11	12	13	14	10	11
k	2	3	7	3	6	5	5	3	4	5

№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	15	13	14	15	12	11	15	13	16	10
k	7	4	6	6	3	2	5	3	6	5

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	15	9	16	14	11	12	13	11	7	12
k	3	2	7	8	7	4	6	4	1	2

Задание 5. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна p. Куплено n билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность. (См. исходные данные в таблице 5).

Таблица 5

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4
n	10	14	13	12	11	15	11	13	14	10

№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p	0,4	0,4	0,5	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6
n	12	15	12	12	11	13	14	15	13	11

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p	0,6	0,6	0,6	0,6	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
n	12	10	15	14	14	10	15	11	12	13

Задание 6. Вероятность наступления некоторого события в каждом из n независимых испытаний равна p. Определить вероятность того, что число наступлений события m удовлетворяет следующему неравенству. (См. исходные данные в таблице 6).

Варианты 1–10: $k_1 \le m \le k_2$

Варианты 11–20: $k_1 \le m$

Варианты 21–30: $m \le k_2$.

Таблица 6

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
p	0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,7	0,7	0,6	0,75	0,75
k_1	80	85	70	83	50	65	70	40	65	70
k_2	90	95	95	93	60	75	80	50	80	85

№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
p	0,75	0,7	0,7	0,7	0,6	0,6	0,6	0,8	0,8	0,8
k_1	55	60	70	80	65	75	50	70	80	90
k_2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
n	100	100	100	100	200	200	200	300	400	400
p	0,8	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,8	0,6	0,7
k_1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
k_2	50	20	30	40	80	90	100	250	270	290

Задание 7. Для данной СВ X:

а) записать ряд распределения;

б) найти функцию распределения и построить её график;

в) вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$;

7.1 Вероятность того, что в библиотеке имеется необходимая студенту книга, равна 0,4. В городе 5 библиотек. СВ X – число библиотек, которые посетит студент.

7.2 Имеется 4 ключа, из которых только один подходит к замку. СВ Х – число попыток открыть замок каждым ключом при условии, что опробованный ключ в последующих попытках не участвует.

7.3 Среди шести изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, отбирают наугад одно изделие за другим и каждое выбранное изделие проверяют. СВ Х – число проверенных изделий.

7.4 В озере 3000 рыб, причем 2000 из них меченые. Выловили 7 рыб. СВ Х – число меченых рыб среди выловленных.

7.5 Батарея состоит из трех орудий. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого, второго и третьего орудий батареи равны соответственно 0,6, 0,8 и 0,7. Каждое орудие стреляет по некоторой цели один раз. СВ Х – число попаданий в цель.

7.6 Охотник, имеющий 6 патронов, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,5. СВ Х – число израсходованных патронов.

7.7 Испытуемый прибор состоит из четырех элементов. Вероятности отказа элементов соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Отказы элементов независимы. СВ Х – число отказавших элементов.

7.8 Вероятность попадания мячом в корзину при одном броске равна 0,4. СВ Х – число попаданий при трех бросках.

7.9 В шестиламповом радиоприемнике, где все лампы различны, перегорела одна лампа. С целью устранения неисправности наудачу выбранную лампу заменяют заведомо годной из запасного комплекта, после чего сразу проверяют работу приемника. СВ Х – число замен ламп.

7.10 Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятности того, что первый, второй, третий и четвертый станки не потребуют внимания рабочего в течение часа, соответственно равны: 0,6; 0,9; 0,65; 0,8. СВ Х – число станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

7.11 В партии хлопка 15% коротких волокон. СВ Х – число коротких волокон среди случайно отобранных четырех волокон.

7.12 Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. СВ Х – число выстрелов, производимых охотником.

7.13 В группе из десяти изделий два бракованных. Чтобы их обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое выбранное изделие проверяют. СВ Х – число проверенных изделий.

7.14 Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. СВ Х – число попыток открыть замок каждым ключом при условии, что опробованный ключ в последующих попытках не участвует.

7.15 Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. СВ Х – число выстрелов, производимых до первого попадания.

7.16 Производятся последовательные испытания десяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,7. СВ Х – число испытаний, на котором заканчивается проверка.

7.17 Из ящика, содержащего 2 бракованных и 6 стандартных деталей, наугад извлекают 3 детали. СВ X – число извлеченных стандартных деталей.

7.18 На пути движения автомашины 4 светофора, разрешающих или запрещающих дальнейшее движение с вероятностью 0,5. СВ X – число светофоров, мимо которых автомашина прошла до первой остановки.

7.19 Вероятность наступления некоторого события в каждом испытании постоянна и равна 0,2. Испытания проводятся 5 раз. СВ X – число появления события в пяти испытаниях.

7.20 Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,6. Производится 5 выстрелов. СВ X – число попаданий в цель.

7.21 Партия из 40 изделий содержит 8 бракованных. Из нее случайным образом отобраны 4 изделия. СВ X – число бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

7.22 Вероятность выпуска нестандартного изделия равна 0,2. Из партии изделий контролер берет одно и проверят его качество. Если изделие оказывается нестандартным, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, контролер берет следующее и т.д. Всего он проверяет не более четырех изделий. СВ X – число проверяемых изделий.

7.23 Вероятность попадания в движущуюся цель при одном выстреле постоянна и равна 0,1. Произведено 4 выстрела. СВ X – число попаданий в движущуюся цель.

7.24 В лотерее на 2000 билетов разыгрываются 3 вещи, стоимость которых 420, 120 и 60 руб. СВ X – сумма выигрыша для лица, имеющего один билет.

7.25 В некотором цехе брак составляет 6% всех изделий. СВ X – число бракованных изделий из пяти наугад взятых изделий.

7.26 Снайпер стреляет по замаскированному противнику до первого попадания. Вероятность промаха при отдельном выстреле равна 0,3. СВ X – число промахов, если у снайпера в запасе четыре патрона.

7.27 Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинаковая и равна 0,8. Произведено 4 пробы. СВ X – число проб с промышленным содержанием металла из четырех проверенных.

7.28 При штамповке металлических клемм для соединительных пластин бывает в среднем 5% брака. СВ X – число бракованных клемм из четырех проверяемых.

7.29 Вероятность положительного результата при химическом анализе равна 0,8. СВ X – число положительных результатов химического анализа среди пяти проведенных.

7.30 При автоматической прессовке заготовок 2/3 от общего их числа не имеют зазубрин. СВ X – число заготовок из трех, не имеющих зазубрин.

Задание 8. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X. Найти: а) плотность распределения вероятности $f(x)$; б) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$; в) вероятность попадания СВ X на отрезок $[a, b]$;

г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

8.1. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & \text{если } 0\le x\le \pi,\\ 1, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{\pi}{3},\quad b=\dfrac{\pi}{2}.$

8.2. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<1,\\ \dfrac{1}{4}(x-1), & \text{если } 1\le x\le 5,\\ 1, & \text{если} \quad x>5.\end{cases}$ $\qquad a=2,\quad b=4.$

8.3. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<\pi/2,\\ -\cos x, & \text{если} \ \pi/2\le x\le \pi,\\ 1, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{\pi}{2},\quad b=\dfrac{5\pi}{6}.$

8.4. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<1,\\ \dfrac{1}{2}(x^2-x), & \text{если } 1\le x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$ $\qquad a=1{,}5;\quad b=1{,}9.$

8.5. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<2,\\ (x-2)^2, & \text{если} \quad 2\le x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3.\end{cases}$ $\qquad a=2{,}5;\quad b=2{,}8.$

8.6. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<-1,\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, & \text{если} \ -1\le x\le 1,\\ 1, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$ $\qquad a=-0{,}5;\quad b=0{,}5.$

8.7. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{6}x, & \text{если} \quad 0\le x\le 6,\\ 1, & \text{если} \quad x>6.\end{cases}$ $\qquad a=2;\quad b=5.$

8.8. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<2,\\ \dfrac{1}{2}x-1, & \text{если } 2\le x\le 4,\\ 1, & \text{если } x>4.\end{cases}$ $\qquad a=1;\quad b=3.$

8.9. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<1,\\ (x^3-2x)/4, & \text{если}\quad 1\le x\le 2,\\ 1, & \text{если}\quad x>2.\end{cases}$ $\qquad a=1{,}2;\quad b=1{,}5.$

8.10. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<0,\\ (x^2+3x)/10, & \text{если}\quad 0\le x\le 2,\\ 1, & \text{если}\quad x>2.\end{cases}$ $\qquad a=0;\quad b=1.$

8.11. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<0,\\ (x^2+x)/6, & \text{если}\quad 0\le x\le 2,\\ 1, & \text{если}\quad x>2.\end{cases}$ $\qquad a=0;\quad b=1.$

8.12. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<1,\\ (x^2-x)/2, & \text{если}\quad 1\le x\le 2,\\ 1, & \text{если}\quad x>2.\end{cases}$ $\qquad a=0;\quad b=1.$

8.13. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<0,\\ (x^3+3x)/14, & \text{если}\quad 0\le x\le 2,\\ 1, & \text{если}\quad x>2.\end{cases}$ $\qquad a=0;\quad b=1.$

8.14. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<0,\\ \sin x, & \text{если}\quad 0\le x\le \pi/2,\\ 1, & \text{если}\quad x>\pi/2.\end{cases}$ $\qquad a=0,\quad b=\dfrac{\pi}{6}.$

8.15. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<-1,\\ \dfrac{1}{5}(x+1), & \text{если}\quad -1\le x\le 4,\\ 1, & \text{если}\quad x>4.\end{cases}$ $\qquad a=0;\quad b=3.$

8.16. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<0,\\ \dfrac{1}{15}(x^2+2x), & \text{если}\quad 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{если}\quad x>3.\end{cases}$ $\qquad a=0;\quad b=2.$

8.17. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<3\pi/2,\\ \cos x, & \text{если}\quad 3\pi/2\le x\le 2\pi,\\ 1, & \text{если}\quad x>2\pi.\end{cases}$ $\qquad a=\dfrac{3\pi}{2},\quad b=\dfrac{7\pi}{4}.$

8.18. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{33}(3x^2+2x), & \text{если } 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3.\end{cases}$ $a=0;\ \ b=2.$

8.19. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<-1,\\ (x^3+1)/9, & \text{если } -1\le x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$ $a=1;\ \ b=2.$

8.20. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<\pi/2,\\ 1-\sin x, & \text{если } \pi/2\le x\le \pi,\\ 1, & \text{если } x>\pi.\end{cases}$ $a=\dfrac{\pi}{2},\ \ b=\dfrac{3\pi}{4}.$

8.21. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<-1,\\ (x+1)^2/9, & \text{если } -1\le x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$ $a=1;\ \ b=2.$

8.22. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{96}(x^3+8x), & \text{если } 0\le x\le 4,\\ 1, & \text{если } x>4.\end{cases}$ $a=0;\ \ b=2.$

8.23. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ 1-\cos x, & \text{если } 0\le x\le \pi/2,\\ 1, & \text{если } x>\pi/2.\end{cases}$ $a=0,\ \ b=\dfrac{\pi}{3}..$

8.24. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<3\pi/4,\\ \cos 2x, & \text{если } 3\pi/4\le x\le \pi,\\ 1, & \text{если } x>\pi.\end{cases}$ $a=\dfrac{3\pi}{4},\ \ b=\dfrac{5\pi}{6}.$

8.25. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{20}(x^2+x), & \text{если } 0\le x\le 4,\\ 1, & \text{если } x>4.\end{cases}$ $a=0;\ \ b=3.$

8.26. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ \dfrac{1}{10}(x^3+x), & \text{если } 0\le x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$ $a=0;\ \ b=1.$

$$8.27.\ F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<0,\\ \dfrac{1}{24}(x^2+2x), & \text{если}\quad 0\le x\le 4,\\ 1, & \text{если}\quad x>4.\end{cases}\qquad a=0;\quad b=1.$$

$$8.28.\ F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<0,\\ \dfrac{1}{9}x^2, & \text{если}\quad 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{если}\quad x>3.\end{cases}\qquad a=0;\quad b=1.$$

$$8.29.\ F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<0,\\ \dfrac{1}{33}(2x^2+5x), & \text{если}\quad 0\le x\le 3,\\ 1, & \text{если}\quad x>3.\end{cases}\qquad a=1;\quad b=2.$$

$$8.30.\ F(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad x<0,\\ \dfrac{1}{8}x^3, & \text{если}\quad 0\le x\le 2,\\ 1, & \text{если}\quad x>2.\end{cases}\qquad a=0;\quad b=1.$$

Задание 9. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно $M(X)$, среднее квадратическое отклонение равно $\sigma(X)$ (см. исходные данные в таблице 7). Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале (a, b).

Таблица 7.

№ вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$M(X)$	10	12	14	16	18	20	24	26	28	30
$\sigma(X)$	1	2	3	2	1	2	1	3	2	1
a	8	8	10	15	16	17	20	23	24	27
b	14	14	15	8	21	22	26	27	30	32

№ вар.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$M(X)$	32	34	36	38	40	40	38	42	44	45
$\sigma(X)$	3	1	2	3	2	4	2	4	5	5
a	30	30	34	37	39	36	35	40	41	43
b	35	36	37	41	42	43	40	43	45	48

№ вар.	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$M(X)$	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64
$\sigma(X)$	4	5	6	4	3	4	5	6	5	6
a	44	45	48	50	53	55	56	58	59	60
b	48	49	53	55	56	58	61	63	64	66

Решение типового варианта

Задание 1. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели, вероятности попадания в которую равны: для первого стрелка 0.3, для второго 0,9, для третьего 0,6. Найти вероятность того, что: а) в цель попадет только первый стрелок; б) в цель попадут только два стрелка; в) ни один стрелок не попадет в цель; г) в цель попадет хотя бы один стрелок.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в цель попадет только первый стрелок; B – в цель попадут только два стрелка; C – ни один стрелок не попадет в цель; D – в цель попадет хотя бы один стрелок. Введем следующие события: H_1 – первый стрелок попадет в цель; H_2 – второй стрелок попадет в цель; H_3 – третий стрелок попадет в цель. Из условия задачи:

$$P(H_1)=0,3,\ P(H_2)=0,9,\ P(H_3)=0,6,$$
$$P(\bar{H}_1)=0,7,\ P(\bar{H}_2)=0,1,\ P(\bar{H}_3)=0,4.$$

а) Событие A состоит в том, что в цель попадет только первый стрелок: $A=H_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3$. Т.к. вероятность любого из событий H_i, $i=1,2,3$ не меняется при наступлении другого события, то события H_i независимы. Тогда:

$$P(A)=P(H_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3)=P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(\bar{H}_3)=0,3\cdot 0,1\cdot 0,4=0,012.$$

б) Событие B состоит в том, что в цель попадут только два стрелка: $B=H_1\cdot H_2\cdot\bar{H}_3+H_1\cdot\bar{H}_2\cdot H_3+\bar{H}_1\cdot H_2\cdot H_3$. Все три слагаемые – несовместные события, т.к. появление любого из них исключает появление других. Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей. Тогда:

$$P(B)=P(H_1\cdot H_2\cdot\bar{H}_3+H_1\cdot\bar{H}_2\cdot H_3+\bar{H}_1\cdot H_2\cdot H_3)=$$
$$=P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\bar{H}_3)+P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(H_3)+P(\bar{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=$$
$$=0,3\cdot 0,9\cdot 0,4+0,3\cdot 0,1\cdot 0,6+0,7\cdot 0,9\cdot 0,6=0,108+0,018+0,378=0,504.$$

в) Событие C состоит в том, что ни один стрелок не попадет в цель: $C=\bar{H}_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3$.

$$P(C)=P(\bar{H}_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3)=P(\bar{H}_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(\bar{H}_3)=0,7\cdot 0,1\cdot 0,4=0,028.$$

г) Событие D состоит в том, что в цель попадет хотя бы один стрелок:

$$D=H_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3+\bar{H}_1\cdot H_2\cdot\bar{H}_3+\bar{H}_1\cdot\bar{H}_2\cdot H_3+H_1\cdot H_2\cdot\bar{H}_3+H_1\cdot\bar{H}_2\cdot H_3+$$
$$+\bar{H}_1\cdot H_2\cdot H_3+H_1\cdot H_2\cdot H_3=H_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3+\bar{H}_1\cdot H_2\cdot\bar{H}_3+\bar{H}_1\cdot\bar{H}_2\cdot H_3+B+H_1\cdot H_2\cdot H_3.$$

$$P(D)=P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(\bar{H}_3)+P(\bar{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\bar{H}_3)+P(\bar{H}_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(H_3)+$$
$$+P(B)+P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3)=$$
$$=0,3\cdot 0,1\cdot 0,4+0,7\cdot 0,9\cdot 0,4+0,7\cdot 0,1\cdot 0,6+0,504+0,3\cdot 0,9\cdot 0,6=$$
$$=0,012+0,252+0,042+0,504+0,162=0,972.$$

Вероятность $P(D)$ можно найти и по другому. Событие D состоит в том, что в цель попадет хотя бы один стрелок, тогда событие $\bar{D}$ – ни один стрелок не попадет в цель. $P(\bar{D})=P(C)=0,028$. Вероятность события D найдем по формуле: $P(D)=1-P(\bar{D})$.

$$P(D)=1-P(\bar{D})=1-0,028=0,972.$$

Задание 2. В ящике имеется 9 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет ни одной окрашенной; б) ровно две окрашены; в) не менее двух окрашенных; г) не более двух окрашенных; д) хотя бы одна окрашена.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что среди извлеченных деталей нет ни одной окрашенной; B – среди извлеченных деталей ровно две окрашены; C – среди извлеченных деталей не менее двух окрашенных; D – среди извлеченных деталей не более двух окрашенных; E – среди извлеченных деталей хотя бы одна окрашена.

Вероятность будем находить по классической схеме: $P(A)=\frac{m}{n}$, где m – число исходов, благоприятствующих появлению события A, n – число всех возможных исходов.

а) Событие A состоит в том, что среди извлеченных деталей нет ни одной окрашенной. Общее число комбинаций выбора трех деталей из девяти имеющихся равно числу сочетаний из 9 по 3, т.е. $n=C_9^3$. Число благоприятствующих исходов m определяется как число комбинаций выбора трех деталей из трех неокрашенных, т.е. $m=C_3^3$. Таким образом,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{3!}{3!\cdot 0!}\cdot\frac{3!\cdot 6!}{9!}=\frac{1}{84}\approx 0{,}012.$$

б) Событие B состоит в том, что среди извлеченных деталей ровно две окрашены. Общее число комбинаций n определяется так же. Т.е $n=C_9^3$. Число благоприятствующих исходов m определяется как произведение числа комбинаций выбора двух деталей из шести окрашенных и числа комбинаций выбора одной детали из трех неокрашенных, т.е. $m=C_6^2\cdot C_3^1$. Таким образом,

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^2\cdot C_3^1}{C_9^3}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\frac{3!\cdot 6!}{9!}=\frac{15}{28}\approx 0{,}536.$$

в) Событие C состоит в том, что среди извлеченных деталей не менее двух окрашенных. Т.к. всего извлекается три детали, то событие C состоит из суммы двух событий: $C=B+C_1$, где событие B – среди извлеченных ровно две детали окрашены и событие C_1 – среди извлеченных ровно три детали окрашены. События B и C_1 несовместны (появление одного из них исключает появление другого). Тогда

$$P(C)=P(B+C_1)=P(B)+P(C_1).$$

Найдем вероятность события C_1 – среди извлеченных ровно три детали окрашены.

$$P(C_1)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^3}{C_9^3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{3!\cdot 6!}{9!}=\frac{5}{21}\approx 0{,}238.$$

Тогда

$$P(C)=P(B)+P(C_1)=\frac{15}{28}+\frac{5}{21}=\frac{65}{84}\approx 0{,}774.$$

г) Событие D состоит в том, что среди извлеченных деталей не более двух окрашенных. Событие D состоит из суммы трех несовместных событий: $D=A+D_1+B$, где событие A состоит в том, что среди извлеченных деталей нет ни одной окрашенной, событие D_1 – среди извлеченных ровно одна деталь окрашена, событие B – среди извлеченных ровно две детали окрашены.

Найдем вероятность события D_1 – среди извлеченных ровно одна деталь окрашена.

$$P(D_1)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^1\cdot C_3^2}{C_9^3}=\frac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{3!\cdot 6!}{9!}=\frac{3}{14}\approx 0{,}214.$$

Тогда

$$P(D)=P(A+D_1+B)=P(A)+P(D_1)+P(B)=\frac{1}{84}+\frac{3}{14}+\frac{15}{28}=\frac{16}{21}\approx 0{,}762.$$

Вероятность $P(D)$ можно найти и по-другому. Событие D состоит в том, что среди извлеченных деталей не более двух окрашенных, тогда событие $\bar{D}$ – среди извлеченных деталей более двух окрашенных. Т.к. извлекают всего три детали, то $\bar{D}$ можно определить как событие, состоящее в том, что среди извлеченных ровно три детали окрашены. Т.е. событие $\bar{D}$ совпадает с событием C_1. Вероятность события D найдем по формуле: $P(D)=1-P(\bar{D})$.

$$P(D)=1-P(\bar{D})=1-P(C_1)=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}\approx 0{,}762.$$

а) Событие E состоит в том, что среди извлеченных деталей хотя бы одна окрашена. Событие E состоит из суммы трех несовместных событий: $E=D_1+B+C_1$, где событие D_1 состоит в том, что среди извлеченных ровно одна деталь окрашена, событие B – среди извлеченных ровно две детали окрашены, событие C_1 – среди извлеченных ровно три детали окрашены. Тогда

$$P(E)=P(D_1+B+C_1)=P(D_1)+P(B)+P(C_1)=\frac{3}{14}+\frac{15}{28}+\frac{5}{21}=\frac{83}{84}\approx 0{,}988.$$

Вероятность $P(E)$ можно найти и по-другому. Событие E состоит в том, что среди извлеченных деталей хотя бы одна окрашена, тогда событие $\bar{E}$ – среди извлеченных деталей нет ни одной окрашенной. Т.е. событие $\bar{E}$ совпадает с событием A. Вероятность события E найдем по формуле: $P(E)=1-P(\bar{E})$.

$$P(E)=1-P(\bar{E})=1-P(A)=1-\frac{1}{84}=\frac{83}{84}\approx 0{,}988.$$

Задание 3. На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трех заводов в количестве: *10* – с первого завода, *25* – со второго завода, *15* – с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе равна *0,9*, на втором – *0,85*, на третьем – *0,7*.

а) Какова вероятность того, что случайно взятое изделие будет качественным?

б) Взятое случайным образом изделие оказалось качественным. Найти вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно взятое изделие будет качественным. Возможны следующие предположения (гипотезы):

H_1 – взятое изделие изготовлено первым заводом;

H_2 – взятое изделие изготовлено вторым заводом;

H_3 – взятое изделие изготовлено третьим заводом.

Всего на сборочное предприятие поступило $10+25+15=50$ комплектующих. Тогда вероятности гипотез будут равны:

$$P(H_1)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}=0{,}2;\ P(H_2)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}=0{,}5;\ P(H_3)=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

Из условия задачи условные вероятности события A при указанных гипотезах равны:

$$P(A/H_1)=0{,}9;\ P(A/H_2)=0{,}85;\ P(A/H_3)=0{,}7.$$

а) Вероятность того, что случайно взятое изделие будет качественным, найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)=$$
$$=0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}5\cdot 0{,}85+0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}18+0{,}425+0{,}21=0{,}815.$$

б) Если взятое случайным образом изделие оказалось качественным, то вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе найдем по формуле Байеса:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}85}{0{,}815}=\frac{0{,}425}{0{,}815}\approx 0{,}521.$$

Задание 4. Правильная монета бросается 16 раз. Определить вероятность того, что герб выпадет: а) 5 раз; б) менее пяти раз.

Решение. Вероятность выпадения герба при одном подбрасывании правильной монеты равна $p=\frac{1}{2}$, тогда $q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

а) Вероятность того, что герб выпадет ровно 5 раз, найдем по формуле Бернулли:

$$P_{16}(5)=C_{16}^5p^5q^{16-5}=\frac{16!}{5!\cdot 11!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=\frac{273}{4096}\approx 0{,}067.$$

б) Вероятность того, что герб выпадет менее пяти раз, равна:

$$P_{16}(m<5)=P_{16}(0)+P_{16}(1)+P_{16}(2)+P_{16}(3)+P_{16}(4)=$$
$$=C_{16}^0p^0q^{16}+C_{16}^1p^1q^{15}+C_{16}^2p^2q^{14}+C_{16}^3p^3q^{13}+C_{16}^4p^4q^{12}=$$
$$=\frac{16!}{0!\cdot 16!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{16}+\frac{16!}{1!\cdot 15!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{15}+\frac{16!}{2!\cdot 14!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{14}+$$
$$+\frac{16!}{3!\cdot 13!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{13}+\frac{16!}{4!\cdot 12!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=$$
$$=\frac{1}{2^{16}}+\frac{16}{2^{16}}+\frac{120}{2^{16}}+\frac{560}{2^{16}}+\frac{1820}{2^{16}}=\frac{2517}{65536}\approx 0{,}038.$$

Задание 5. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна *0,3*. Куплено *13* билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

Решение. Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют ***наивероятнейшим***, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности всех остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число k_0 определяется из двойного неравенства:

$$np-q\le k_0<np+p. \qquad (1)$$

Из условия задачи $p=0{,}3$, $q=0{,}7$, $n=13$. Подставив данные в формулу (1), получим: $13\cdot 0{,}3-0{,}7\le k_0<13\cdot 0{,}3+0{,}3$ или $3{,}2\le k_0<4{,}2$.

Т.к. k_0 – целое число и поскольку между числами 3,2 и 4,2 заключено одно целое число, а именно 4, то искомое наивероятнейшее число $k_0=4$.

Вероятность того, что из 13 купленных билетов выигрышными будут ровно 4, найдем по формуле Бернулли:

$$P_{13}(4)=C_{13}^4 p^4 q^{13-4}=\frac{13!}{4!\cdot 9!}\cdot(0,3)^4\cdot(0,7)^9\approx 0,234.$$

Задание 6. Вероятность наступления некоторого события в каждом из *400* независимых испытаний равна *0,8*. Определить вероятность того, что число наступлений события m удовлетворяет следующему неравенству:

а) $k_1\le m\le k_2$;

б) $k_1\le m$;

в) $m\le k_2$,

где $k_1=300$, $k_2=350$.

Решение.

Для нахождения вероятности того, что число наступлений события m удовлетворяет неравенству $k_1\le m\le k_2$, воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что событие A наступит в n независимых испытаниях число раз, заключенное в границах от k_1 до k_2 включительно, приближенно равна

$$P_n(k_1\le m\le k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $x_1=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

а) Из условия задачи $n=400$, $p=0,8$, $k_1=300$, $k_2=350$. Вычислим значения x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{300-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}=-\frac{20}{8}=-2,5;$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{350-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{30}{8}=3,75.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, получим:

$$P_{400}(300\le m\le 350)\approx\Phi(3,75)-\Phi(-2,5)=\Phi(3,75)+\Phi(2,5).$$

По таблице значений функции Лапласа найдем, что: $\Phi(2,5)=0,4938$, $\Phi(3,75)=0,499928$. Тогда искомая вероятность равна:

$$P_{400}(300\le m\le 350)\approx\Phi(3,75)+\Phi(2,5)=0,499928+0,4938=0,993728.$$

б) Из условия задачи $n=400$, $p=0,8$, $k_1=300$. Неравенство $300\le m$ означает, что число появлений некоторого события может быть равным либо 300, либо 301, ..., либо 400. Таким образом, для нахождения вероятности того, что число наступлений события m удовлетворяет неравенству $k_1\le m$, воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа, где $k_2=400$.

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{300-400\cdot 0,8}{\sqrt{400\cdot 0,8\cdot 0,2}}=-\frac{20}{8}=-2,5;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{400 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{80}{8} = 10.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим:

$$P_{400}(300 \le m) = P_{400}(300 \le m \le 400) \approx \Phi(10) - \Phi(-2,5) = \Phi(10) + \Phi(2,5).$$

По таблице значений функции Лапласа найдем, что: $\Phi(2,5) = 0,4938$, $\Phi(10) = 0,5$. Тогда искомая вероятность равна:

$$P_{400}(300 \le m) \approx \Phi(10) + \Phi(2,5) = 0,5 + 0,4938 = 0,9938.$$

в) Из условия задачи $n = 400$, $p = 0,8$, $k_2 = 350$. Неравенство $m \le 350$ означает, что число появлений некоторого события может быть равным либо 0, либо 1, ..., либо 350. Таким образом, для нахождения вероятности того, что число наступлений события m удовлетворяет неравенству $m \le k_2$, воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа, где $k_1 = 0$.

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{320}{8} = -40;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{350 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = \frac{30}{8} = 3,75.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим:

$$P_{400}(m \le 350) = P_{400}(0 \le m \le 350) \approx \Phi(3,75) - \Phi(-40) = \Phi(3,75) + \Phi(40).$$

По таблице значений функции Лапласа найдем, что: $\Phi(40) = 0,5$, $\Phi(3,75) = 0,499928$. Тогда искомая вероятность равна:

$$P_{400}(m \le 350) \approx \Phi(3,75) + \Phi(40) = 0,499928 + 0,5 = 0,999928.$$

Задание 7.1. Стрелок, имеющий пять патронов, стреляет по мишени до первого попадания или пока не израсходует всех патронов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле 0,7. Для СВ X – числа израсходованных патронов а) записать ряд распределения; б) найти функцию распределения и построить её график; в) вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение.

а) Возможные значения случайной величины X: 1; 2; 3; 4; 5. Вычислим вероятности, с которыми СВ X принимает свои возможные значения.

Событие $\{X = 1\}$ состоит в том, что будет израсходован только один патрон, т.е. стрелок попадет в мишень с первой попытки.

$$P(X = 1) = 0,7.$$

Событие $\{X = 2\}$ состоит в том, что будет израсходовано два патрона, т.е. стрелок попадет в мишень только со второй попытки.

$$P(X = 2) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21.$$

Рассуждая аналогично, найдем:

$$P(X = 3) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,063.$$

$$P(X = 4) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,0189.$$

Событие $\{X = 5\}$ состоит в том, что будут израсходованы все пять патронов, т.е. четыре раза стрелок не попадет в мишень.

$$P(X = 5) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0081.$$

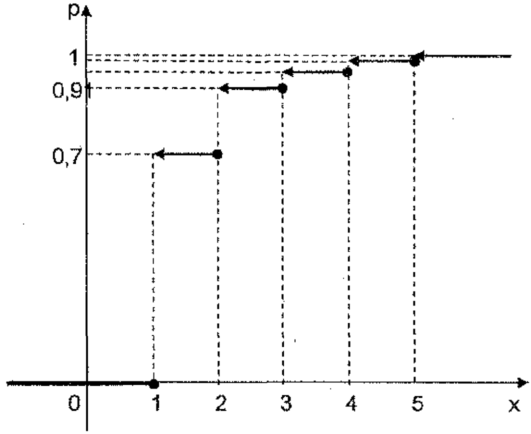
Контроль: $\sum_i P(X=x_i)=0,7+0,21+0,063+0,0189+0,0081=1$.

Таким образом, закон распределения СВ X имеет вид следующей таблицы:

X	1	2	3	4	5
P	0,7	0,21	0,063	0,0189	0,0081

б) Запишем функцию распределения вероятностей $F(x)$ СВ X и построим ее график.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0,7, & 1<x\le 2;\\ 0,91, & 2<x\le 3;\\ 0,973, & 3<x\le 4;\\ 0,9919, & 4<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$



в) Найдем числовые характеристики распределения.

$M(X)=\sum_i x_i p_i=1\cdot 0,7+2\cdot 0,21+3\cdot 0,063+4\cdot 0,0189+5\cdot 0,0081=1,3951$;

$D(X)=\sum_i x_i^2 p_i-M^2(X)=1\cdot 0,7+4\cdot 0,21+9\cdot 0,063+16\cdot 0,0189+25\cdot 0,0081-$

$-1,3951^2\approx 2,6119-1,9463=0,6656$;

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,6656}\approx 0,8158$.

Задание 7.2. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,8; второй – 0,4; третий – 0,7. Для СВ X – числа сданных экзаменов а) записать ряд распределения; б) найти функцию распределения и построить её график; в) вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение.

а) Возможные значения случайной величины X: 0; 1; 2; 3. Вычислим вероятности, с которыми СВ X принимает эти значения. Возможны следующие гипотезы: H_1 – студент сдаст первый экзамен; H_2 – студент сдаст второй экзамен; H_3 – студент сдаст третий экзамен. Из условия задачи:

$$P(H_1)=0,8,\ P(H_2)=0,4,\ P(H_3)=0,7,$$
$$P(\bar H_1)=0,2,\ P(\bar H_2)=0,6,\ P(\bar H_3)=0,3.$$

Событие $\{X=0\}$ состоит в том, что студент не сдаст ни одного экзамена.

$$P(X=0)=P(\bar H_1\cdot\bar H_2\cdot\bar H_3)=P(\bar H_1)\cdot P(\bar H_2)\cdot P(\bar H_3)=0,2\cdot 0,6\cdot 0,3=0,036.$$

Событие $\{X=1\}$ состоит в том, что студент сдаст только один экзамен.

$$P(X=1)=P(H_1\cdot\bar{H}_2\cdot\bar{H}_3+\bar{H}_1\cdot H_2\cdot\bar{H}_3+\bar{H}_1\cdot\bar{H}_2\cdot H_3)=$$

$$=0,8\cdot0,6\cdot0,3+0,2\cdot0,4\cdot0,3+0,2\cdot0,6\cdot0,7=0,084+0,024+0,144=0,252.$$

Событие $\{X=2\}$ состоит в том, что студент сдаст только два экзамена.

$$P(X=2)=P(\bar{H}_1\cdot H_2\cdot H_3+H_1\cdot\bar{H}_2\cdot H_3+H_1\cdot H_2\cdot\bar{H}_3)=$$

$$=0,2\cdot0,4\cdot0,7+0,8\cdot0,6\cdot0,7+0,8\cdot0,4\cdot0,3=0,056+0,336+0,096=0,488.$$

Событие $\{X=3\}$ состоит в том, что студент сдаст все три экзамена.

$$P(X=3)=P(H_1\cdot H_2\cdot H_3)=0,8\cdot0,4\cdot0,7=0,224.$$

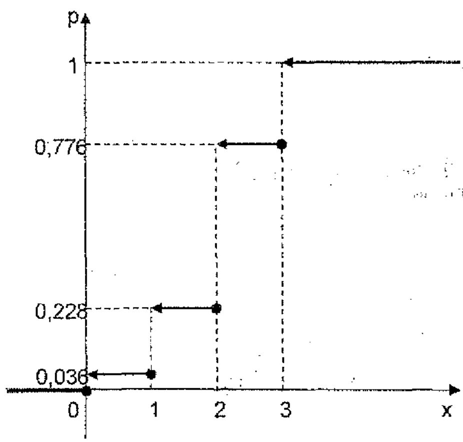
Контроль: $\sum_i P(X=x_i)=0,036+0,252+0,488+0,224=1.$

Таким образом, закон распределения СВ X имеет вид следующей таблицы:

X	0	1	2	3
p	0,036	0,252	0,488	0,224

б) Запишем функцию распределения вероятностей $F(x)$ СВ X и построим ее график.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0,036, & 0<x\le 1;\\ 0,288, & 1<x\le 2;\\ 0,776, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$



в) Найдем числовые характеристики распределения.

$$M(X)=\sum_i x_i p_i=0\cdot0,036+1\cdot0,252+2\cdot0,488+3\cdot0,224=1,9;$$

$$D(X)=\sum_i x_i^2 p_i-M^2(X)=0\cdot0,036+1\cdot0,252+4\cdot0,488+9\cdot0,224-1,9^2=0,61;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,61}\approx0,78.$$

Задание 7.3. Игральная кость подбрасывается три раза. Для СВ X – количества выпадений четырех очков: а) записать ряд распределения; б) найти функцию распределения и построить её график; в) вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение.

а) Возможные значения случайной величины X: 0; 1; 2; 3. Вычислим вероятности, с которыми СВ X принимает эти значения. Вероятность выпадения четырёх очков при одном подбрасывании равна $p=\frac{1}{6}$, тогда $q=1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Испытания проводятся в схеме Бернулли.

Событие $\{X=0\}$ состоит в том, что четыре очка не выпадет ни разу при трёх подбрасываниях. Тогда:

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0p^0q^{3-0}=\frac{3!}{0!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}\approx 0{,}579.$$

Событие $\{X=1\}$ состоит в том, что четыре очка выпадет ровно один раз при трёх подбрасываниях.

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1p^1q^{3-1}=\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}\approx 0{,}347.$$

Событие $\{X=2\}$ состоит в том, что четыре очка выпадет ровно два раза при трёх подбрасываниях.

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2p^2q^{3-2}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{15}{216}\approx 0{,}069.$$

Событие $\{X=3\}$ состоит в том, что четыре очка выпадет ровно три раза при трёх подбрасываниях.

$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3p^3q^{3-3}=\frac{3!}{3!\cdot 0!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}\approx 0{,}005.$$

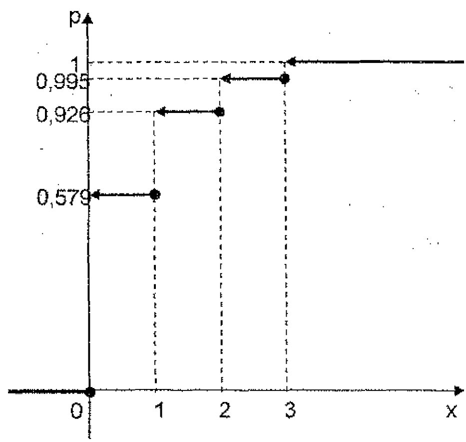
Контроль: $\sum_i P(X=x_i)=\frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}=1.$

Таким образом, закон распределения СВ X имеет вид следующей таблицы:

X	0	1	2	3
p	0,579	0,347	0,069	0,005

б) Запишем функцию распределения вероятностей $F(x)$ СВ X и построим ее график.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}579, & 0<x\le 1;\\ 0{,}926, & 1<x\le 2;\\ 0{,}995, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$



в) Найдем числовые характеристики распределения.

$$M(X)=\sum_i x_i p_i=0\cdot\frac{125}{216}+1\cdot\frac{75}{216}+2\cdot\frac{15}{216}+3\cdot\frac{1}{216}=\frac{108}{216}=0{,}5;$$

$$D(X)=\sum_i x_i^2 p_i-M^2(X)=0\cdot\frac{125}{216}+1\cdot\frac{75}{216}+4\cdot\frac{15}{216}+9\cdot\frac{1}{216}-0{,}5^2\approx 0{,}417;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}417}\approx 0{,}645.$$

Задание 7.4. В группе студентов 7 девушек и 5 юношей. Случайным образом из них отбирают трёх человек. Для СВ X – количества девушек среди отобранных студентов а) записать ряд распределения; б) найти функцию распределения и построить её график; в) вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение.

а) Возможные значения случайной величины X: 0; 1; 2; 3. Вычислим вероятности, с которыми СВ X принимает эти значения.

Событие $\{X=0\}$ состоит в том, что среди трёх отобранных студентов нет ни одной девушки, т.е все отобранные – юноши. Тогда:

$$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{3!\cdot 9!}{12!}=\frac{2}{44}\approx 0{,}046.$$

Событие $\{X=1\}$ состоит в том, что среди трёх отобранных студентов ровно одна девушка.

$$P(X=1)=\frac{C_7^1\cdot C_5^2}{C_{12}^3}=\frac{7!}{1!\cdot 6!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{3!\cdot 9!}{12!}=\frac{14}{44}\approx 0{,}318.$$

Событие $\{X=2\}$ состоит в том, что среди трёх отобранных студентов ровно две девушки.

$$P(X=2)=\frac{C_7^2\cdot C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\frac{3!\cdot 9!}{12!}=\frac{21}{44}\approx 0{,}477.$$

Событие $\{X=3\}$ состоит в том, что среди трёх отобранных студентов все три – девушки.

$$P(X=3)=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{3!\cdot 9!}{12!}=\frac{7}{44}\approx 0{,}159.$$

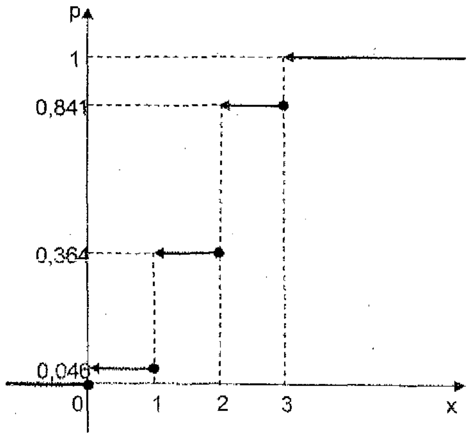
Контроль: $\sum_i P(X=x_i)=\frac{2}{44}+\frac{14}{44}+\frac{21}{44}+\frac{7}{44}=1.$

Таким образом, закон распределения СВ X имеет вид следующей таблицы:

X	0	1	2	3
p	0,046	0,318	0,477	0,159

б) Запишем функцию распределения вероятностей $F(x)$ СВ X и построим ее график.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 0{,}046, & 0<x\le 1;\\ 0{,}364, & 1<x\le 2;\\ 0{,}841, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$



в) Найдем числовые характеристики распределения.

$$M(X)=\sum_i x_ip_i=0\cdot\frac{2}{44}+1\cdot\frac{14}{44}+2\cdot\frac{21}{44}+3\cdot\frac{7}{44}=\frac{7}{4}=1{,}75;$$

$$D(X)=\sum_i x_i^2p_i-M^2(X)=0\cdot\frac{2}{44}+1\cdot\frac{14}{44}+4\cdot\frac{21}{44}+9\cdot\frac{7}{44}-1{,}75^2\approx 0{,}597;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}597}\approx 0{,}772.$$

Задание 8. Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X. Найти: а) плотность распределения вероятности $f(x)$; б) математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$; в) вероятность попадания СВ X на отрезок $[a,\ b]$; г) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{если}\quad x\le 0,\\ x^2, & \textit{если}\quad 0<x\le 1,\\ 1, & \textit{если}\quad x>1.\end{cases}\qquad a=\frac{1}{4};\quad b=\frac{3}{4}.$$

Решение.

а) Плотность распределения вероятностей непрерывной СВ X имеет вид:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \textit{если}\quad x\le 0,\\ 2x, & \textit{если}\quad 0<x\le 1,\\ 0, & \textit{если}\quad x>1.\end{cases}$$

б) Математическое ожидание СВ X:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0dx+\int_{0}^{1}x\cdot 2xdx+\int_{1}^{+\infty}x\cdot 0dx=2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}(1-0)=\frac{2}{3}.$$

Дисперсия СВ X:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-M^2(X)=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot 0dx+\int_{0}^{1}x^2\cdot 2xdx+\int_{1}^{+\infty}x^2\cdot 0dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}(1-0)-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\approx 0,236.$$

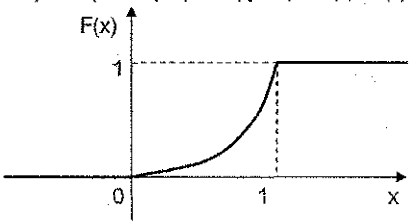
в) Для нахождения вероятности попадания СВ X на отрезок $\left[\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right]$ воспользуемся свойством функции распределения непрерывной СВ:

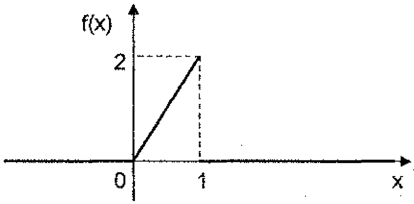
$$P(\alpha\le X\le\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Тогда:

$$P\left(\frac{1}{4}\le X\le\frac{3}{4}\right)=F\left(\frac{3}{4}\right)-F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{16}-\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=0,5.$$

г) Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$.





Задание 9. Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно $M(X)=7$, среднее квадратическое отклонение равно $\sigma(X)=2$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале *(5, 8)*.

Решение.

Т.к. случайная величина имеет нормальное распределение, то для нахождения вероятности попадания её в интервале $(\alpha;\ \beta)$ воспользуемся формулой:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $a=M(X)$, $\sigma=\sigma(X)$.

$$P(5<X<8)=\Phi\left(\frac{8-7}{2}\right)-\Phi\left(\frac{5-7}{2}\right)=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)+\Phi(1)\approx 0,1915+0,3413=0,533.$$

Литература

1. Высшая математика: Учебник. Т.2. / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 184 с.
2. Сборник задач по высшей математике. Часть 1. / Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576 с.
3. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике: учеб. пособие. Часть 1. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993. – 416 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. – М.: Высш. шк., 1997. – 415 с.
5. Индивидуальные задания по высшей математике: Учебное пособие. В трех частях. Часть 3 / Под общей редакцией Рябушко А.П. – Мн., Выш. шк., 2000. – 303 с.
6. Гилевский С.В. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие/ С.В. Гилевский, В.М. Молофеев. – Мн.: БГУ,2003. – 90с.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Гусева Светлана Тадеушевна
Золотухина Лада Станиславовна
Каримова Татьяна Ивановна

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания и варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы по курсу «Высшая математика»
для студентов специальности
74 05 01 «Мелиорация и водное хозяйство»

Ответственный за выпуск: Гусева С.Т.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 21.09.2006г. Формат 60x84 1/16. Бумага «Снегурочка».
Усл. печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 3,25. Зак. № 1012. Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.