МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. РЯДЫ

Методические указания и задания аттестационных работ
*по курсу «**Высшая математика**»*
для студентов строительного факультета

Брест 2008

УДК 517.9

Кратные и криволинейные интегралы. Ряды.
Методические указания аттестационных работ по курсу "Высшая математика" для студентов строительного факультета, Брест, УО "БГТУ", 2008.

В соответствии с действующей программой для студентов строительного факультета составлены две аттестационные работы с индивидуальными заданиями и даны образцы их решения.

Составители: Пархимович И.В.,к.ф-м.н., доцент,
Гоголинская Р.А. ассистент,
Остапчук Е.М. ассистент

Рецензент: доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Учреждения образования "Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина", к.ф.—м.н. Дежурко Ю.И.

ВОПРОСЫ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ (III СЕМЕСТР)

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Определение, теоремы существования двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
3. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.
4. Замена переменных в двойном интеграле. Переход в двойном интеграле от декартовых к полярным координатам.
5. Приложения двойного интеграла - площадь плоской фигуры, объемы тел, статические моменты и центр тяжести. Момент инерции плоской фигуры .
6. Тройной интеграл: определение, свойства, вычисление в декартовых координатах.
7. Цилиндрические и сферические координаты. Переход в тройном интеграле от декартовых к цилиндрическим и сферическим координатам.
8. Приложения тройного интеграла — объемы тел, масса тел, центр тяжести.
9. Криволинейный интеграл 1-го рода (КрИ-I): определение, свойства, вычисление, приложения.
10. Криволинейный интеграл 2-го рода (КрИ-II): определение, свойства, вычисление, приложения.
11. КрИ-II по замкнутому контуру. Формула Грина. Независимость КрИ-II от формы пути интегрирования.
12. Общие понятия числового ряда. Геометрическая прогрессия и гармонический ряд.
13. Основные свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости рядов.
14. Признаки сравнения.
15. Признаки Даламбера и Коши.
16. Интегральный признак Коши. Ряд Дирихле.
17. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.
18. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
19. Равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.
20. Степенные ряды. Теорема Абеля.
21. Свойства степенных рядов
22. Разложение функций и степенный ряд. Ряд Тейлора.
23. Разложение и ряд Тейлора-Маклорена элементарных функций e^x , cosx, sinx, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$
24. Приложение степенных рядов: приближенное вычисление значений функции, приближенное вычисление определенных интегралов, решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
25. Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье.
26. Сходимость ряда Фурье. Теорема Дирихле.
27. Ряды Фурье для четных и нечетных функций .
28. Разложение в ряд Фурье периодических функций с общим периодом. Разложение в ряд Фурье непериодических функций.
29. Виды уравнений математической физики. Метод Фурье. Метод сеток.

Основные формулы и теоремы

1. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, где обл. D – правильная и [a,b] - проекция обл. D на OX, и $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$- графики функций, ограничивающих обл. D на OY,
$x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ – графики функций, ограничивающие обл. D слева и справа.

2. Двойной интеграл в полярных координатах:
$\iint\limits_D f(r,\varphi)rdrd\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r,\varphi)rdr$, где $[\alpha,\beta]$ - раствор угла, содержащий обл. D, а $r = r_1(\varphi)$ $r = r_2(\varphi)$ – линии, ограничивающие область D.

3. Площадь плоской фигуры D:
$S = \iint\limits_D dxdy,\ S = \iint\limits_D rdrd\varphi$

4. Объем цилиндрического тела
$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

5. $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, где
$z = \psi_1(x,y),\ z = \psi_2(x,y)$ - поверхности, ограничивающие обл. V снизу и сверху;
$y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x)$ - линии, ограничивающие снизу и сверху проекцию обл. V на пл. XOY, [a,b], - проекция на ось OX проекции обл. V на плоскости XOY.

6. $V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$

7. $\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$, где
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\alpha \le 1 \le \beta$ – параметрические уравнения кривой AB.

8. $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$, где x=x(t), y=y(t), z=z(t)
$\alpha \le 1 \le \beta$ – параметрические уравнения кривой AB.

9. $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) +$

$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt$.

где x=x(t), y=y(t), z=z(t), $\alpha \le 1 \le \beta$ – параметрические уравнения кривой АВ.

10. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b}(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x))dx,$

где $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$ – уравнение кривой АВ.

11. $\iint\limits_{(\lambda)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int Pdx + Qdy$ – формула Грина

12. $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – ряд

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ – частичная сумма ряда

$S = \lim\limits_{x\to\infty} S_n$ – сумма ряда.

13. $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$ – геометрическая прогрессия, при $|q| < 1$ – г.п. сходится

14. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд расходится

15. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = 0$ – необходимый признак сходимости ряда.

16. Пусть $0 \le u_n \le v_n$:

а) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

б) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

17. Пусть $u_n \ge 0$ и $v_n \ge 0$

Если $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lambda$ $(0 < \lambda < +\infty)$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

18. Пусть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ $(u_n \ge 0)$

а) если $\lambda < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

б) если $\lambda > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится - признак Даламбера

19. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lambda \quad (u_n\geq 0)$

а) если $\lambda<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится

б) если $\lambda>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится - признак Коши

20. Если интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, а если интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где f(x) – непрерывная, положительная, монотонно убывающая функция, и $u_n = f(n)$ – интегральный признак Коши.

21. Если члены знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ монотонно убывают по абсолютной величине и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то данный ряд сходится, его сумма положительная и не превосходит первого члена – признак Лейбница.

22. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ область сходимости $(-\infty;+\infty)$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$ область сходимости $(-\infty;+\infty)$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad (-\infty;+\infty)$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$ (-1; 1]

$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$ (-1;1)

23. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+bn\sin nx$ - тригонометрический ряд

$a_o=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)sinxdx$ - коэффициенты Фурье.

Типовые задания

1. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$

2. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где D – область, ограниченная линиями y=x, y=2x, x=2, x=3.

3. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где D – область, ограниченная линией $x^2+y^2=2x$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=4y-y^2$; $x+y=6$

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$

6. Вычислить $\iiint\limits_{(V)} x^2yzdxdydz$, где V – область, ограниченная плоскостями x=0, y=0, z=0, x+y+z-2=0

7. Вычислить $\int\limits_L (x-y)ds$, где L – отрезок прямой от A(0;0) до B(4;3)

8. Вычислить $\int\limits_{AB} (x^2-y^2)dx+xydy$, где AB – отрезок прямой от A(1;1) до B(3;4)

9. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$

10. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+5}$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

11. Найти область сходимости ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$

12. Разложить в ряды по степеням x:

а) $f(x)=\sin^2 x$ б) $f(x)=xe^{-2x}$

13. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную в интервале $(-\pi;\pi)$ уравнением $f(x)=\pi+x$

ЗАДАНИЯ К АТТЕСТАЦИОННОЙ РАБОТЕ №3 ПО ТЕМЕ: «Кратные и криволинейные интегралы»

№1. Измените порядок интегрирования

1	$\int\limits_{-2}^{-1} dy \cdot \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \cdot \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$
2	$\int\limits_{1}^{2} dx \cdot \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$
3	$\int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \cdot \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx$
4	$\int\limits_{-2}^{1} dx \cdot \int\limits_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy$
5	$\int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$
6	$\int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$
7	$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \cdot \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \cdot \int\limits_{x}^{0} f(x,y)dy$
8	$\int\limits_{0}^{4} dx \cdot \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$
9	$\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \cdot \int\limits_{0}^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dy \cdot \int\limits_{0}^{\arccos y} f(x,y)dx$
10	$\int\limits_{1}^{6} dx \cdot \int\limits_{\frac{6}{x}}^{7-x} f(x,y)dy$
11	$\int\limits_{-2}^{-1} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$
12	$\int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \cdot \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$
13	$\int\limits_{-1}^{0} dx \cdot \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

14	$\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \cdot \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \cdot \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$
15	$\int\limits_{1}^{e} dx \cdot \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \cdot \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy$
16	$\int\limits_{1}^{2} dy \cdot \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$
17	$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \cdot \int\limits_{0}^{\cos y} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sin y} f(x,y)dx$
18	$\int\limits_{-1}^{0} dx \cdot \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-2}^{-1} dx \cdot \int\limits_{-(2+x)}^{0} f(x,y)dy$
19	$\int\limits_{1}^{e} dy \cdot \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$
20	$\int\limits_{1}^{2} dy \cdot \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx$
21	$\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \cdot \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx$
22	$\int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{0}^{y^2} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \cdot \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx$
23	$\int\limits_{1}^{e} dy \cdot \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx$
24	$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \cdot \int\limits_{0}^{\cos x} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \cdot \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy$
25	$\int\limits_{0}^{1} dx \cdot \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \cdot \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y)dy$
26	$\int\limits_{1}^{2} dx \cdot \int\limits_{\sqrt{2-x}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \cdot \int\limits_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)dy$
27	$\int\limits_{0}^{1} dx \cdot \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

28	$\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$
29	$\int\limits_{1}^{2} dx \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{1} dx \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$
30	$\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \cdot \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

№2. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями

1	а) $y = x^2$, $y = 3 - x$	б) $\rho = 4(1 - \cos\varphi)$
2	а) $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$	б) $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$
3	а) $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$	б) $\rho = 2 + \cos\varphi$
4	а) $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 4$	б) $\rho = 2(1 + \sin\varphi)$
5	а) $y = 2 - x^2$, $y = x^2$	б) $\rho = 1 + \cos\varphi$
6	а) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 1$	б) $\rho^2 = 2\sin 2\varphi$
7	а) $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$	б) $\rho = 3\sin 4\varphi$
8	а) $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$, $x = 2$	б) $\rho = 4\sin^2\varphi$
9	а) $x^2 = 4y$, $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$	б) $\rho = 3\cos 2\varphi$
10	а) $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$	б) $\rho = 3\cos 3\varphi$
11	а) $y = 3\sqrt{x}$, $y = \dfrac{3}{x}$, $x = 9$	б) $\rho = 1 - \cos\varphi$
12	а) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$, $y = \dfrac{1}{2x}$, $x = 16$	б) $\rho = a\sin 2\varphi$
13	а) $x = 8 - y^2$, $x = -2y$	б) $\rho = a\cos 5\varphi$
14	а) $y = \dfrac{3}{x}$, $y = 4e^x$, $y = 3$, $y = 4$	б) $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$
15	а) $x = 8 - y^2$, $x = -2y$	б) $\rho = 2(2 + \cos\varphi)$
16	а) $4y^2 = x$, $x + y = 5$, $x \geq 0$	б) $\rho = 4\sin^2\varphi$
17	а) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$	б) $\rho^2 = 4\cos 3\varphi$
18	а) $x^2 = 3y$, $y^2 = 3x$	б) $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$

19	а) $x=y^2$, $x=\sqrt{2-y^2}$	б) $\rho=6(2-\cos\varphi)$
20	а) $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $x=16$	б) $\rho=6\sin4\varphi$
21	а) $x=27-y^2$, $x=-6y$	б) $\rho=4(1+\cos\varphi)$
22	а) $x=\sqrt{72-y^2}$, $6x=y^2$, $y=0(y\geq0)$	б) $\rho=2\sin^2\varphi$
23	а) $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{2x}$, $x=4$	б) $\rho=6\sin3\varphi$
24	а) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0(x\leq0)$	б) $\rho=5\cos2\varphi$
25	а) $y=\frac{1}{x}$, $y=6e^x$, $y=1$, $y=6$	б) $\rho=5\cos3\varphi$
26	а) $y=3\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $x=9$	б) $\rho=2(1-\cos\varphi)$
27	а) $y=11-x^2$, $y=-10x$	б) $\rho=2\sin^2 2\varphi$
28	а) $x=5-y^2$, $x=-4y$	б) $\rho^2=a^2(1+\sin^2\varphi)$
29	а) $x=8-y^2$, $x=-2y$	б) $(x^2+y^2)^3=4(x^4+y^4)$
30	а) $y=\frac{3}{x}$, $y=8e^x$, $y=3$, $y=8$	б) $\rho^2=4(1+\sin^2\varphi)$

№3 Вычислить двойной интеграл

Вариант

1	$\iint\limits_D(12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$
2	$\iint\limits_D(9x^2y^2+48x^3y^3)dxdy$; $D: x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$
3	$\iint\limits_D(27x^2y^2+48x^3y^3)dxdy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$
4	$\iint\limits_D(4xy+3x^2y^2)dxdy$; $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

5	$\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2)dxdy$; $D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$
6	$\iint\limits_D ye^{\frac{xy}{2}}dxdy$; $D: y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2,\ x=4$
7	$\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy$; $D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}$
8	$\iint\limits_D y\cos xy dxdy$; $D: y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2$
9	$\iint\limits_D (2x+y)dxdy$; D-треугольник с вершинами $A(-2;-2)$, $B(-1;2)$, $C(-1;-\frac{3}{2})$
10	$\iint\limits_D (2x+y)dxdy$; D-треугольник с вершинами $A(-1;2)$, $B(3;4)$, $C(6;2)$
11	$\iint\limits_D (2x+y)dxdy$; D-определена неравенствами $\frac{1}{4}y-\frac{3}{2}\le x\le 2y+2$, $-2\le y\le 2$
12	$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$; $D: x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\prec x,\quad x=\sqrt{2},\ y=x,\ x^2+y^2=8$
13	$\iint\limits_D y^2(1+2x)dxdy$; $D: x=2-y^2,\ x=0$
14	$\iint\limits_D e^y dxdy$; $D: y=\ln x,\ y=0,\ x=2$
15	$\iint\limits_D xy^2 dxdy$; $D: x^2+y^2=4,\ x+y-2=0$
16	$\iint\limits_D (x+y)dxdy$; D-определена неравенствами $0\le y\le\pi$, $0\le x\le\sin y$
17	$\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$; $D: y=e^x,\ x=0,\ y=2$
18	$\iint\limits_D (3xy^2+4y^3)dxdy$; D - прямоугольник $[0,1;2,4]$
19	$\iint\limits_D \sin(3x+2y)dxdy$; D - прямоугольник $\left[0,\frac{\pi}{4};0,\frac{\pi}{4}\right]$
20	$\iint\limits_D (2x+y)dxdy$; $D: x-2y+5=0,\ 4x-y+6=0,\ 2x+3y-18=0,$ $x-2y-2=0$

21	$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$; $D: y=x,\ y=\sqrt{3}x,\ x^2+y^2=8,\ (x\ge 0, y\ge 0)$
22	$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy$
23	$\int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)dy$
24	$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$
25	$\iint\limits_D \sin 2\varphi d\rho d\varphi$; D - определена неравенствами $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $3\le\rho\le 5$
26	$\iint\limits_D \rho^4 \sin\varphi d\rho d\varphi$; D – круговой сектор, ограниченный линиями: $\varphi=\frac{\pi}{3}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\rho=2$
27	$\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$; D: $\frac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le 4\pi^2$
28	$\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$; D: $x+y=1,\ x+y=3,\ y=5x,\ y=10x$
29	$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^4}$; D: $x+y=1,\ x+y=2,\ 3x-y=0,\ 4x-y=0$
30	$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$; D – круг $x^2+y^2\le 16$

№4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по данной линии в указанном направлении

1	$\int\limits_L \sin^2 x dx + y^2 dy$; L – дуга линии $y=\cos x$, $0\le x\le\pi$
2	$\int\limits_L \sqrt{x^2+3y}dy+(x-y)dx$; L – дуга линии $y=x^2$ от A(0;0) до B(1;1)
3	$\int\limits_L \frac{xdx+ydy}{x^3+y^3}$; L – отрезок прямой от A(1;1) до B(2;2)
4	$\int\limits_L \cos^2 xdx+\frac{dy}{y^3}$; L – дуга линии $y=tgx$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}$
5	$\int\limits_L (x^2+y^2)dx+xydy$; L – дуга кривой $y=e^x$ от A(0;1) до B(1;e)
6	$\int\limits_L \sin^3 xdx+\frac{dy}{y^2}$; L – дуга кривой $y=ctgx$ от $x=0$ до $x=\frac{\pi}{3}$

7	$\int\limits_L (x^3 - y^2)dx + xydy$; L – дуга кривой $y = a^x$ от A(0;1) до B(1;a)
8	$\int\limits_L xydx + y^2dy$; L – дуга кривой $x = t^2$, $y = t$, $1 \le t \le 2$
9	$\int\limits_L x^2ydx + y^2xdy$; L – дуга кривой $x = t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 1$
10	$\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$;L – дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 < t \le \dfrac{\pi}{2}$
11	$\int\limits_L y^2dx + xydy$; L – дуга эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$
12	$\int\limits_L yzdx + xzdy + xydz$; L – дуга кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t$, $0 \le t \le 1$
13	$\int\limits_L ydx + x^2dy + zdz$; L – дуга кривой $x = t$, $y = t^3$, $z = t^5$, $0 \le t \le 1$
14	$\int\limits_L (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$; L – отрезок прямой от A(0;0;0) до B(1;1;1)
15	$\int\limits_L (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$; L – дуга кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$
16	$\int\limits_L (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$; L – дуга кривой $x = t$, $y = t^3$, $z = t^5$, $0 \le t \le 1$
17	$\int\limits_L x^2dx + (x + z)dy + xydz$; L – отрезок прямой от A(0;0;0) до B(1;1;1)
18	$\int\limits_L x^2dx + (x + z)dy + xydz$; L – дуга линии $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$
19	$\oint\limits_L (1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy$; L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$
20	$\oint\limits_L (x + y)dx - (x - y)dy$; L – эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
21	$\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$; L – дуга параболы $y = 2\sqrt{x}$ от A(0;0) до B(1;2)
22	$\oint\limits_L ydx - xdy$; L – дуга эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ против хода часовой стрелки.
23	$\int\limits_{L_{ABO}} (xy - x)dx + \dfrac{x^2}{2}dy$; L_{ABO} – ломаная ABO, O(0;0), A(1;2), B($\dfrac{1}{2}$;3) при положительном обходе
24	$\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$; L – отрезок прямой от O(0;0) до A(1;2)
25	$\int\limits_L ydx - (y + x^2)dy$; L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная под осью OX и пробегающая по ходу часовой стрелки

26	$\int\limits_L (x^2-y)dx+(y^2-x)dy$; L – отрезок прямой от A(1;2) до B(3;6)
27	$\int\limits_L ydx+\frac{x}{y}dy$; L – кривая $y=e^x$ от A(0;1) до B(-1;e)
28	$\int\limits_L y^2dx+x^2dy$; L – дуга верхней половины эллипса $x=5\cos t$, $y=2\sin t$, по ходу часовой стрелки
29	$\int\limits_L 2xydx-x^2dy$; L – дуга параболы $x=2y^2$ от A(0;0) до B(2;1)
30	$\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$; L – окружность $x^2+y^2=ax$

№5 С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями. Сделайте чертеж

Вариант

1	$6x+4y+3z-12=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$
2	$x+z=2$, $x=0$, $z=0$, $y=0$, $y=3$
3	$2y+3z=6$, $x=0$, $x=4$, $y=0$, $z=0$
4	$y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$, $z=0$, $z=3$
5	$y=1-x^2$, $y=-\sqrt{1-x^2}$, $z=0$, $z=6$
6	$y^2=x+1$, $y^2=1-x$, $x+y+z-3=0$, $z=0$
7	$z=2-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$,
8	$y=12-x^2-z^2$, $y=\sqrt{x^2+z^2}$
9	$y=16\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{2x}$, $z=0$, $x+z=2$
10	$x^2+y^2=2$, $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $z=15x$
11	$x+y=2$, $x=\sqrt{y}$, $z=\frac{12x}{5}$, $z=0$
12	$x+y=8$, $y=\sqrt{4x}$, $z=3y$, $z=0$

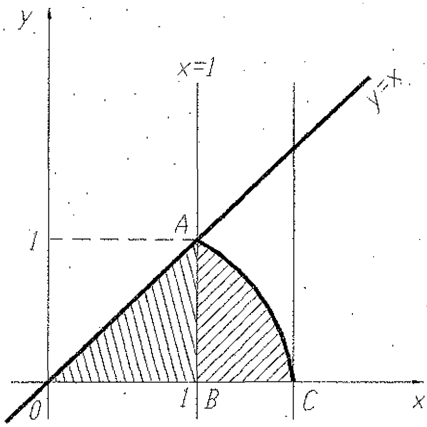
13	$x^2+y^2=2y,\ z=\dfrac{5}{4}-x^2,\ z=0$
14	$x^2+y^2+4x=0,\ z=8-y^2,\ z=0$
15	$x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=5y,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$
16	$x^2+y^2=4x,\ z=10-y^2,\ z=0$
17	$x+y=6,\ x=\sqrt{3y},\ z=\dfrac{4x}{5},\ z=0$
18	$y=\sqrt{3x},\ x+y=6,\ z=0,\ z=4x,\ x=0$
19	$z=2-x^2-y^2,\ z=x^2+y^2$
20	$z=0,\ z=4-x^2-y^2,\ x^2+y^2=4$
21	$x^2+y^2=2y,\ z=0,\ z=1+y$
22	$z\geq 0;\ z=x^2,\ x-2y+2=0,\ x+y=7$
23	$z\geq 0;\ z=x,\ x=\sqrt{4-y^2}$
24	$y\geq 0;\ z\geq 0;\ x+y=2,\ z=x^2$
25	$z\geq 0;\ y=\sqrt{9-x^2},\ z=2y$
26	$x^2+y^2=4x,\ z=12-y^2,\ z=0$
27	$x^2+y^2=4y,\ z=4-x^2,\ z=0$
28	$x+y=6,\ y=\sqrt{3x},\ z=4y,\ z=0$
29	$x^2+y^2=1,\ z=2-x-y,\ z\geq 0$
30	$x^2+y^2=z,\ z=4$

Решение типового варианта

1. Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \cdot \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \cdot \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

Решение



Для первого интеграла область интегрирования ограничена линиями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=x$ и представляет криволинейную фигуру ОАВ.

Для второго интеграла область интегрирования ограничена линиями $x=1$, $x=\sqrt{2}$, $y=0$, $y=\sqrt{2-x^2}$. Уравнение $y=\sqrt{2-x^2}$ можно преобразовать к виду $x^2+y^2=2$ (верхняя дуга окружности т.к. $y \geq 0$).

Окружность $x^2+y^2=2$ и прямая $y=x$, при условии $x \geq 0$, пересекаются в точке А(1;1).

Данную сумму интегралов можно записать в виде одного повторного интеграла с областью интегрирования ОАС.

$$\int_0^1 dx \cdot \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \cdot \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \cdot \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

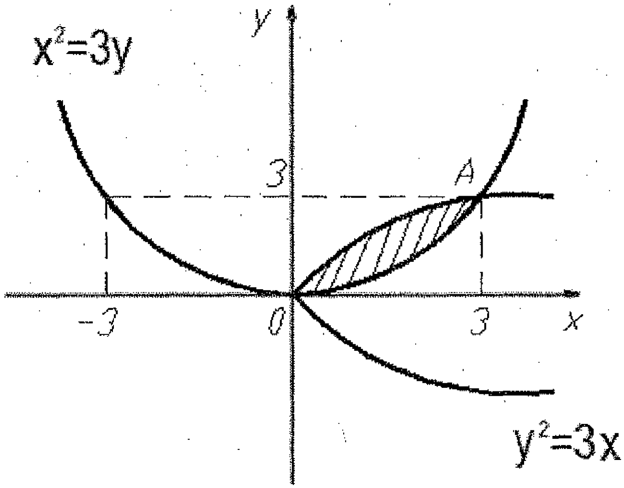
а) $x^2=3y$, $y^2=3x$

Решение

Площадь $S=\iint\limits_D dxdy$

Данная область ограничена снизу параболой $x^2=3y$, сверху – параболой $y^2=3x$. Параболы пересекаются в точках О(0;0) и А(3;3).

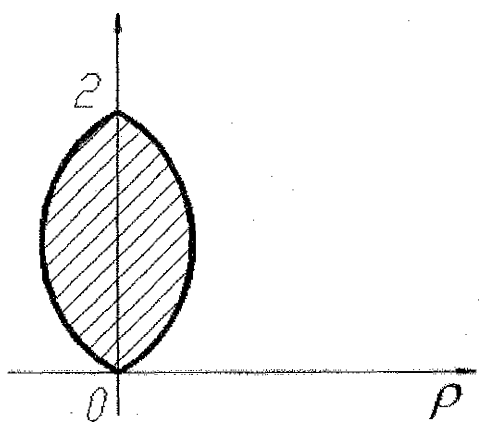
$$S=\int_0^3 dx\cdot\int_{\frac{1}{3}x^2}^{\sqrt{3x}} dy=\int_0^3\left[y\Big|_{\frac{1}{3}x^2}^{\sqrt{3x}}\right]dx=\int_0^3(\sqrt{3x}-\frac{1}{3}x^2)dx=(\frac{2\sqrt{3}x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^3}{9})\Big|_0^3=6-3=3\text{ (кв.ед.)}$$



б) $\rho=2\sin^3\varphi$

Решение

Так как $\rho\geq 0$, то $\sin\varphi\geq 0$. То есть $\varphi\in[0;\pi]$. Изобразим фигуру, ограниченную данной линией:



Полюс О лежит на границе области D, поэтому площадь фигуры равна:

$$S=\iint_D \rho d\rho d\varphi=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin^3\varphi}\rho d\rho=\int_0^{\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\sin^3\varphi}\right]d\varphi=2\int_0^{\pi}\sin^6\varphi d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^3 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-3\cos 2\varphi+3\cos^2 2\varphi-\cos^3 2\varphi)d\varphi=\frac{1}{4}((\varphi-\frac{3}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi}+\frac{3}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 4\varphi)d\varphi-$$

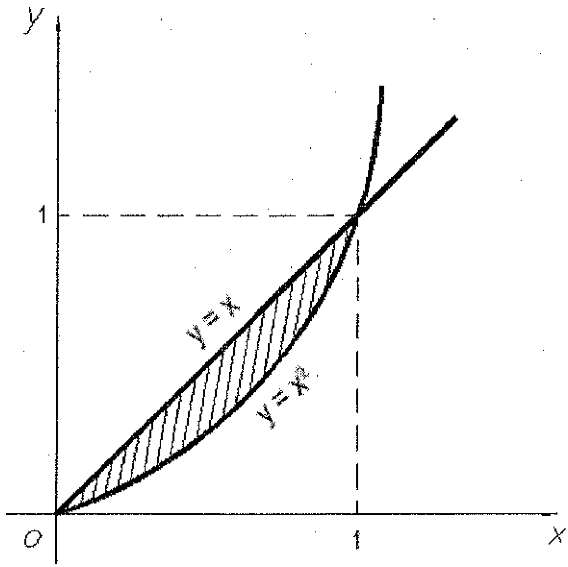
$$-\int_0^{\pi}\cos 2\varphi(1-\sin^2 2\varphi)d\varphi)=\frac{5}{8}\pi \text{ (кв.ед.)}$$

3. Вычислить двойной интеграл.

$\iint_D (x+y)dxdy$; $D: y=x,\ y=x^2$

Решение

Изобразим область D в прямоугольной системе координат:



Область D ограничена снизу параболой $y=x^2$, а сверху – прямой $y=x$. Тогда:

$$\iint_D (x+y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x+y)dy=\int_0^1\left[(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_{x^2}^{x}\right]dx=\int_0^1(x^2+\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2})dx=$$

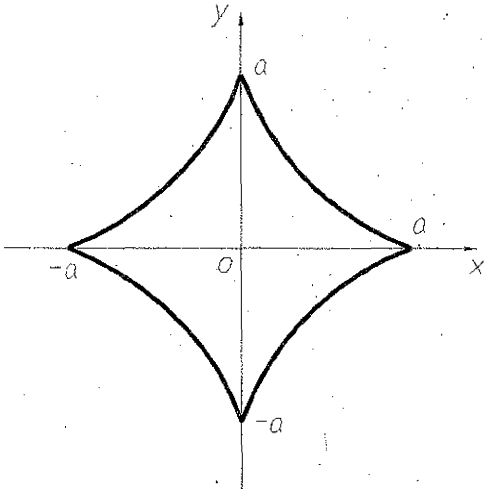
$$=(\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10})\Big|_0^1=\frac{3}{20}$$

4.Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\oint_L xdy+ydx$; $L: x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in[0;2\pi]$.

Решение

Равенства $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0; 2\pi]$ задают астроиду. Изобразим астроиду в прямоугольной системе координат:



Поскольку $dx = -3a\cos^2 t\sin t dt$, $dy = 3a\sin^2 t\cos t dt$, то

$$\oint\limits_L xdy + ydx = \int\limits_0^{2\pi} a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t dt + a\sin^3 t(-3a\cos^2 t\sin t dt) =$$

$$= 3a^2\int\limits_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t - \cos^2 t\sin^4 t)dt = 3a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t - \sin^2 t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\cos 2t dt = \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t d(\sin 2t) = \frac{3a^2}{8}\frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

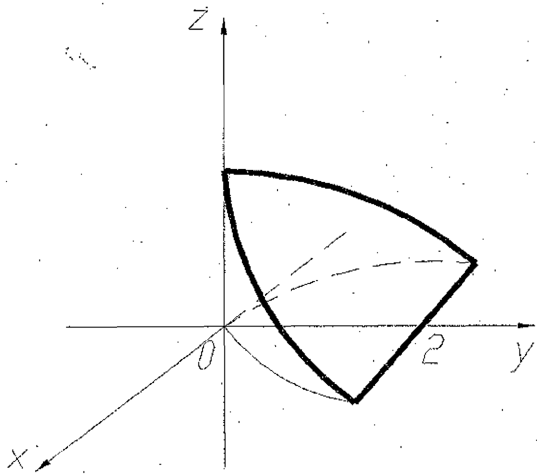
5. С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

$z = 4 - y^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$, $z = 0$.

Решение

Равенства $z = 4 - y^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ задают цилиндрические поверхности, а $z = 0$ - плоскость.

Область интегрирования V получается в результате пересечения параболы $y = \dfrac{x^2}{2}$ с линией пересечения цилиндра $z = 4 - y^2$ и плоскости $z = 0$, т.е. с прямой $y = 2$. Сверху тело ограничено цилиндрической поверхностью $z = 4 - y^2$.



Ввиду симметрии тела относительно плоскости OYZ вычисляем половину искомого объема:

$$\frac{1}{2}V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \int_0^2 dx \cdot \int_{\frac{x^2}{2}}^{2} dy \cdot \int_0^{4-y^2} dz = \int_0^2 dx \cdot \int_{\frac{x^2}{2}}^{2} (4-y^2)dy = \int_0^2 \left[(4y - \frac{y^3}{3}) \Big|_{\frac{x^2}{2}}^{2} \right] dx =$$

$$= \int_0^2 (8 - \frac{8}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24}) dx = (\frac{16}{3}x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^7}{168}) \Big|_0^2 = \frac{128}{21}$$

Следовательно, $V = \dfrac{256}{21} \approx 12,2$ (куб.ед.)

ЗАДАНИЯ К АТТЕСТАЦИОННОЙ РАБОТЕ №3 ПО ТЕМЕ: «РЯДЫ»

№1 Найти сумму ряда:

1	2	3
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-4^n}{12^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\sqrt{5})(n+\sqrt{5}+1)}$
4	5	6
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-5^n}{15^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$
7	8	9
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)}$	$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\ldots$
10	11	12
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\sqrt{2})(n+\sqrt{2}+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\sqrt{3})(n+\sqrt{3}+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+6)}$
13	14	15
$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+6^n}{12^n}$
16	17	18
$1+\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}+\ldots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)(n+8)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\sqrt{7})(n+\sqrt{7}+1)}$
19	20	21
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+6^n}{42^n}$	$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$	$1+\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\ldots$
22	23	24
$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\ldots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-4^n}{20^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$
25	26	27
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\sqrt{6})(n+\sqrt{6}+1)}$	$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+5^n}{35^n}$
28	29	30
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+8)(n+9)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-8^n}{56^n}$	$1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\ldots$

№2 Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

1	2
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+6)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3+2}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+9n-1}{n^4+4n^2+2}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5(n+4)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^8+2n^2+1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^5+6n+5}{8n^6+3n^2+1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^5+4}}$
3	**4**
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2(n+3)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^6+3n^4+3}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^7+2n+5}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5\sqrt{n^2+4}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5+n^3+4}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^5+3n^2+1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$
5	**6**
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+7)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^2-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^4+2n^2-1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\sqrt{n+4}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+8)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{10}+5}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10n^2+5}{2n^5+n^2+3}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^2+3}}$
7	**8**
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+6)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^5+3n+4}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+6n+9}{5n^5+4n^2+2}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^5+3}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^8+5}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+3n+5}{n^4+n^2+3}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sqrt{n+3}}$
9	**10**
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3(n+7)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{10}+3n}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2n+5}{n^8+3n^5-2}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8\sqrt{n^3+4}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2(n+7)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^7+3n^5-2}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+3n^4+4}{n^6+3n-2}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7\sqrt{n^8+5}}$
11	**12**
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{18}+9n^5-2}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+2n^2+3}{n^8+4n^7+2}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\sqrt{n^4+6}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2(n+10)}}$) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^8+3n^5-2}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2n+5}{n^6+3n^2+4}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5\sqrt{n^5+6}}$
13	**14**
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+9)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^7+3n^5}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-2n^2+3}{n^6+3n^2+1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^4+5}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3(n+1)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^6+2n^2+3}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^3+2n-3}{n^5-n^4+2}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^4+3}}$

15	16
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+9)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5+3n^3-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n-3}{n^5+2n^2+1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+8}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+9)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{10}+3n+2}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+2n-2}{n^6+n+4}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\sqrt{n+5}}$
17	18
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+5)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5+n^3-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{n^5+5n^2-4}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2(n+7)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^6+2n+3}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+12}{n^3+3n^2-2}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5\sqrt{n^2+2}}$
19	20
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^8+2n^4-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+4}{n^5+n+4}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^5+3}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2(n+3)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+2n+1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2-2n+5}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4\sqrt{n+2}}$
21	22
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)^2}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{16}+8n-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^4+n^2}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+1)\sqrt{n^6+2}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+20)}}$) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{10}+3n^6+1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+15n+3}{n^4+15n-4}$) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt{n^4+1}}$
23	24
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5(n+3)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^8+3n^6+1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+3n^3+2}{n^5+n^2-1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3\sqrt{n^3+2}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3(n+5)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3n^2+1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+n}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+11n-1}{n^6+2n^2+1}$
25	26
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{18}+n^7-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+4n^2-1}{n^6+5n+2}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n^4+2}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5+4n+2}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n-1}{n^5+4n+8}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^5+6}}$
27	28
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4(n+5)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n+15}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+15n-10}{n^4+12n+10}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8\sqrt{n^5+2}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+20)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^9+2n^2-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+3n^2-1}{n^6+2n+3}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^5+3}}$

29	30
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^4+3n-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7n+10}{n^5+7n+12}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}\sqrt{n^{10}+8}}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+11)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{13}+n^{10}-1}}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+15n-1}{n^3+15n+1}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^8+7}}$

№3 Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

1	2
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln(n+5)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+7}{7n}\right)^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right)^7$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{9n+1}\right)^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{5^n}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)}{n^n}$
3	**4**
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+3)\ln^2(10n+3)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)!}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln(3n-1)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+3)!}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+3)}{(n+1)!}$
5	**6**
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+8n)\ln^3(3+8n)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi}{5n+1}\right)^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n7^n}}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{4n!}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\ln(5n-2)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{5n}\right)^{5n}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(n+1)!}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(2n-1)}$
7	**8**
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln(n+4)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{17n+1}\right)^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+4)!}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n-1)}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(3n+4)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{11n+1}\right)^n$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{3n-1}}{3^{5n+1}}$

9	10
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+18}{2n}\right)^{3n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{3^n n}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+8)\ln^3(5n+8)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}{2^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(n+2)}$
11	**12**
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(9n-4)\ln^2(9n-4)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{4n}\right)^{3n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 5^n}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+2n)\ln^5(3+2n)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{5^n}\right)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 3^n}{n!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+3)}{5^n}$
13	**14**
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+8}{3n^2-2}\right)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n+2)}{(n+3)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^{n-1}}{n^2+2n+3}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(10n+5)\ln(10n+5)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{5^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 2^n}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(n+1)^n}$
15	**16**
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{(n+2)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^n}{n\cdot n!}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+12)\ln(n+12)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+2))^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4}{n\cdot n!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+5)(n+2)}$
17	**18**
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{18n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n(n+2)}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n}{(n+2)!}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)\ln(n+7)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 9^n}{(n+1)(n+2)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^2}{n\cdot 5^n}$

19	20
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)\ln^2(n+9)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{15n+4}\right)^{3n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)^5}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt{n+1}}{(n+2)!}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+10)\ln^2(n+10)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n^2+2)(n+3)}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot n^2}{2^n}$
21	**22**
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^{\frac{1}{2}}(n+1)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n+1}}{n(n-2)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n+2}}{(n+2)!}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+11)\sqrt{\ln(n+11)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{2n+1}\right)^{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n+1}}{(n+2)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14n}{14^n(n+1)}$
23	**24**
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+15)\ln^2(n+15)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n+1}{9^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+9}{9^n(n+1)!}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+20)\ln(n+20)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11n+1}{\sqrt{(n+2)\cdot 3^n}}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+11}{11^n(n-1)!}$
25	**26**
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+16)\ln^2(n+16)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{13}}{6^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+13}{2^n(n-1)!}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+17)\sqrt{\ln(n+17)}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+1}\right)^{2n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n+1)}{6^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+17)!}$
27	**28**
а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\frac{1}{3}}n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{23n+10}{\sqrt{2^n(n+23)}}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{22n+3}{2^n(n-1)!}$	а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)\ln^6(n+6)}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+20}{5n}\right)^{5n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+18}{2^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n(n+2)!}$

29	30
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt{n}}{(n+1)!}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+22}{2^n(n+1)!}$	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+17)\ln^2(n+17)}$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}$ в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{24n+1}{5^n}$ г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8n-3}{3^n(n+2)!}$

№4 Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд.

1	2	3	4
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{(n+9)^2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+6}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{6n+5}$
5	**6**	**7**	**8**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)\cdot\sqrt{n}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+5}{3^n}$
9	**10**	**11**	**12**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+10}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)\cdot 3^n}$ √	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8n+10}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$
13	**14**	**15**	**16**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+5}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+5}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$
17	**18**	**19**	**20**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+2n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{3n-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+7}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 5^n}$
21	**22**	**23**	**24**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+5}}{n+6}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{5n(n+1)}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+5}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$
25	**26**	**27**	**28**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{3n}{\sqrt{n^7}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{17n+1}{n(n+1)}$
29	**30**		
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(5n+2)\cdot n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^2+3}{2^n}$		

№5 Найти область сходимости степенного ряда.

1	2	3	4
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+7)^{n-1}}{(2n\sqrt{n}+5)7^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+1)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+7}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(x+9)^{n-1}}{4^n\sqrt[4]{n+2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n+1}}{5^n\sqrt{n^2+1}}$
5	6	7	8
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+7)^n 7^n}{4^n(n+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(x+5)^{n+1}}{5^n\sqrt{n^3+3n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+9)^n}{2^n(n+1)\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x-5)^n}{(n+15)2^n}$
9	10	11	12
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-9)^{n-1}}{(n+2)2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x-3)^{n+1}}{2\sqrt{n+3}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x-1)^{n-1}}{4^n(n+11)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{n+1}}{5\sqrt{n+1}}$
13	14	15	16
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x-3)^{n-1}}{\sqrt[3]{(n+13)^2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{n+1}}{5^n\sqrt{(n+3)^3}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(x-1)^n}{2^n\sqrt{(n+1)^5}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$
17	18	19	20
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$
21	22	23	24
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n(n+2)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{4^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}(x+1)^n$
25	26	27	28
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n(2n+1)}(x-2)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n}}(x-1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{4^n}(x-2)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-3}(x+2)^n$
29	30		
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}(x+1)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{5^n}(x+2)^n$		

№6 Найти разложение функции в степенной ряд по степеням x

1	2	3	4
$f(x)=e^{-x^4}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$	$f(x)=x\cos\sqrt{x}$	$f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$
5	6	7	8
$f(x)=\frac{1}{1+x}$	$f(x)=e^{3x}$	$f(x)=\frac{2}{1-3x^2}$	$f(x)=\cos\frac{2x^2}{3}$

9	10	11	12
$f(x)=\dfrac{1}{1-5x}$	$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$	$f(x)=\dfrac{1}{1+4x}$	$f(x)=\sin x^2$
13	14	15	16
$f(x)=\dfrac{x}{1-x^4}$	$f(x)=x^3 arctgx$	$f(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$	$f(x)=\cos 5x$
17	18	19	20
$f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$	$f(x)=\dfrac{1}{1-x^3}$	$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$	$f(x)=\sin\dfrac{x}{5}$
21	22	23	24
$f(x)=x^3e^{-x}$	$f(x)=e^{3x}$	$f(x)=\dfrac{x}{2}arctgx$	$f(x)=x\sin\sqrt{x}$
25	26	27	28
$f(x)=\dfrac{1}{1+3x}$	$f(x)=e^{6x}$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$f(x)=x^3\cos x$
29	30		
$f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$	$f(x)=\sin x^2$		

№7 Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенные интегралы с указанной погрешностью α:

1	2	3	4
$\int\limits_0^{1.5}\dfrac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}dx$ $\alpha=0.001$	$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x^2}dx$ $\alpha=0.001$	$\int\limits_{0.1}^{0.2}e^{-4x^2}dx$ $\alpha=0.001$	$\int\limits_0^1\dfrac{1+\cos x}{x^2}dx$ $\alpha=0.001$
5	6	7	8
$\int\limits_0^2\dfrac{1}{\sqrt[3]{64+x^3}}dx$ $\alpha=0.001$	$\int\limits_0^1\sqrt{1+x^4}dx$ $\alpha=0.001$	$\int\limits_0^1\cos(x^2)dx$ $\alpha=0.001$	$\int\limits_0^1\dfrac{\sin x}{x^3}dx$ $\alpha=0.001$
9	10	11	12
$\int\limits_{0.5}^1\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{5}\right)}{x^2}dx$ $\alpha=0.001$	$\int\limits_0^{\frac{1}{5}}\sqrt{x}\cdot e^x dx$ $\alpha=0.001$	$\int\limits_{0.1}^1 e^{-x^2}dx$ $\alpha=0.001$	$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$ $\alpha=0.001$

13	14	15	16
$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^{0.4} \cos(25x^2)dx$ $\alpha = 0.001$
17	18	19	20
$\int_0^1 \ln(1+x^3)dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^1 \cos 5x\,dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^3 \sqrt{1+x^2}\,dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^{0.1} e^{-6x^3} dx$ $\alpha = 0.001$
21	22	23	24
$\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos 3x\,dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_{0.5}^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^3}dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^{0.25} \sqrt{1+x^3}\,dx$ $\alpha = 0.001$
25	26	27	28
$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{x^2}{4}dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^1 x \cdot e^{-x^3} dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^1 e^{-2x^2} dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^1 x \cdot e^{-x^3} dx$ $\alpha = 0.001$
29	30		
$\int_0^1 \sqrt[5]{1+x^4}\,dx$ $\alpha = 0.001$	$\int_0^1 \sin\left(x^2\right)dx$ $\alpha = 0.001$		

№8 Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения(записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения):

1	2	3	4
$y' = 2y^2 + ye^x$ $y(0) = \frac{1}{3}$	$y' = 3x^2y - \cos 3x + 1$ $y(0) = 1$	$y' = x^2 - y^2$ $y(0) = \frac{1}{2}$	$y' = \cos x + y + e^{4x}$ $y(0) = 1$
5	6	7	8
$y' = x + y^2$ $y(0) = -1$	$y' = 4xy^2 - x^2y$ $y(0) = 3$	$y' = e^{\ln y} + x$ $y(0) = 0$	$y' = 3xy^2 - \sin 5x$ $y(0) = 3$
9	10	11	12
$y' = x^2 + 2y^2$ $y(0) = 0.2$	$y' = e^{3x} + 2xy^2$ $y(0) = 1$	$y' = 3x \cdot y^3 - 2y + 2x$ $y(0) = 2$	$y' = x + y + y^2$ $y(0) = 1$

13	14	15	16
$y'=4\sin x+y^2+2x$ $y(0)=1$	$y'=e^x-y^2$ $y(0)=0$	$y'=3\sin x+x^2y+x$ $y(0)=-2$	$y'=x+e^y$ $y(0)=0$
17	18	19	20
$y'=4x^2y^2-2x+y$ $y(0)=4$	$y'=xy-y^2$ $y(0)=0.2$	$y'=3x^2y-2xy+4$ $y(0)=0$	$y'=x\sin x-y^2$ $y(0)=1$
21	22	23	24
$y'=4xy^2-e^x+2$ $y(0)=0$	$y'=xe^x+2y^2$ $y(0)=0$	$y'=3xy^2+y$ $y(0)=2$	$y'=xy+e^x$ $y(0)=0$
25	26	27	28
$y'=4e^x-xy$ $y(0)=0$	$y'=ye^x$ $y(0)=1$	$y'=3xy-\sin x$ $y(0)=2$	$y'=x^2+e^y$ $y(0)=0$
29	30		
$y'=3y+2y^2$ $y(0)=4$	$y'=2x^2-xy$ $y(0)=0$		

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

1. Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}$$

Решение

Составим n-ую частичную сумму данного ряда:

$$S_n=\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(n+6)(n+7)}$$

Чтобы упростить выражение для S_n, преобразуем формулу для общего члена ряда, разлагая a_n на элементарные дроби. Положим

$$\frac{1}{(n+6)(n+7)}=\frac{A}{n+6}+\frac{B}{n+7}$$

отсюда

$$\frac{1}{(n+6)(n+7)}=\frac{(A+B)n+7A+6B}{(n+6)(n+7)}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в числителях обеих частей равенства, получаем:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 7A+6B=1 \end{cases}$$ откуда $A=1$, $B=-1$, поэтому

$$\frac{1}{(n+6)(n+7)}=\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+7}$$

Выражение для S_n принимает вид

$$S_n=\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)+\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+7}\right)$$

Приводя подобные члены, получаем

$$S_n=\frac{1}{7}-\frac{1}{n+7}$$

Переходя к пределу, находим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{7}$

Следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)(n+7)}=\frac{1}{7}$$

2. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+5)}}$

<u>Решение</u>

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Выпишем общие члены рядов:

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+5)}}$, $b_n=\frac{1}{n}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+5n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}}=1\neq 0$

Предел конечный и отличный от нуля.

Так как гармонический ряд расходится, то на основании признака сравнения заключаем, что данный ряд также расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^5+2n+1}}$

<u>Решение</u>

Сравним данный ряд с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Так как $\alpha=\frac{5}{2}\succ 1$, то ряд сходится.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{2n^5+2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^5}{2n^5+2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^5}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$

Согласно признаку сравнения данный ряд сходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n+10}{4n^5+3n^2+1}$

Решение

$P_m(n)=3n^2+5n+10$, $m=2$, $Q_k(n)=4n^5+3n^2+1$, $k=5$

Поскольку $m-k=-3$, сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, который является рядом Дирихле и сходится, т.к. $\alpha=3$, $\alpha\succ 1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+5n+10}{4n^5+3n^2+1}:\frac{1}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5+5n^4+10n^3}{4n^5+3n^2+1}=\frac{3}{4}\neq 0$$

Предел конечный и отличный от нуля.

Согласно признака сравнения данный ряд сходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^5+2}}$

Решение

Сравним данный ряд с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$, который сходится, т.к. $\alpha=\frac{7}{2}$, $\alpha\succ 1$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n^5+2}}:\frac{1}{\sqrt{n^7}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^7}}{n\sqrt{n^5+2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^7}{n^7+2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{n^5}}}=1\neq 0$$

Согласно признаку сравнения данный ряд сходится.

3. Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$

Решение

Применим интегральный признак Коши.

Функция $f(x)=\frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши.

Поскольку $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{d(\ln(x+2))}{\ln(x+2)}=\ln\left|\ln(x+2)\right|\Big|_1^{\infty}=\infty$, т.е. интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}$ расходится, то расходится и данный ряд.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

Решение

Применим признак Коши. Поскольку $a_n=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$, $\sqrt[n]{a_n}=\frac{n}{3n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3}$. Так как $q=\frac{1}{3}\prec 1$, ряд сходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$

Решение

Применим признак Даламбера. Поскольку $a_n=\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$;

$a_{n+1}=\frac{2(n+1)+1}{\sqrt{(n+1)2^{n+1}}}=\frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)2^{n+1}}}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{(n+1)2^{n+1}}}\frac{\sqrt{n2^n}}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\prec 1$, то данный ряд сходится.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$

Решение

Применим признак Даламбера.

Так как $a_n=\frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$, $a_{n+1}=\frac{7(n+1)-1}{5^{n+1}(n+2)!}=\frac{7n+6}{5^{n+1}(n+2)!}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n+6}{7n-1}\frac{5^n(n+1)!}{5^{n+1}(n+2)!}=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n+6}{(7n-1)(n+2)}=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n+6}{7n^2+13n-2}=0\prec 1$, то данный ряд сходится.

4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

Решение

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. Исследуем его на сходимость.

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2 \neq 0$.

Предел конечный и отличный от нуля.

Так как гармонический ряд расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ согласно признаку сравнения. Следовательно данный ряд не является абсолютно сходящимся. Применим к данному знакочередующемуся ряду признак Лейбница.

Найдем разность $a_n - a_{n+1}$: $a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{2n+1}{n^2+n}$

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2+n+1};$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n+1}{n^2+n} - \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2+n+1} = \frac{2n+1}{n^2+n} - \frac{2n+3}{n^2+3n+2} =$$

$$= \frac{(2n+1)(n^2+3n+2)-(2n+3)(n^2+n)}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} = \frac{2n^2+4n+2}{(n^2+n)(n^2+3n+2)} \succ 0,$$

так как $2n^2+4n+2 \succ 0$ при любом $n \in N$, $n^2+n \succ 0$ при любом $n \in N$ и $n^2+3n+2 \succ 0$ при любом $n \in N$.

Первое условие Лейбница выполнено: $a_n \succ a_{n+1}$. Проверим второе условие признака Лейбница: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)} = 0$. Значит данный ряд сходится.

Причем он является условно сходящимся.

5. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n-1}}{n7^n}$$

<u>**Решение**</u>

Найдем интервал сходимости ряда и исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости. Применим к ряду из модулей признак Даламбера, при фиксированном x:

$$u_n(x) = \frac{(x+2)^{n-1}}{n7^n};\quad u_{n+1}(x) = \frac{(x+2)^n}{(n+1)7^{n+1}}$$

Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty} = \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^n n7^n}{(n+1)7^{n+1}(x+2)^{n-1}}\right| = \frac{1}{7}|x+2|$

Если $\frac{1}{7}|x+2| \prec 1$, то $|x+2| \prec 7$, $-7 \prec x+2 \prec 7$, $-9 \prec x \prec 5$.

Интервалом сходимости является интервал $(-9;5)$.

Исследуем поведение ряда на концах интервала $(-9;5)$.

При $x=5$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{n-1}}{n7^n}=\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Этот ряд расходится.

При x=9 получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-7)^{n-1}}{n7^n}=\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Применим к данному ряду признак Лейбница.

Очевидно выполнение обоих условий: $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \ldots$, $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ряд $\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится условно, так как ряд из абсолютных величин $\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Следовательно, областью сходимости ряда является промежуток $[-9;5)$.

6. Найти разложение функции в степенной ряд по степеням x:

$f(x)=xe^{-x}$.

Решение

Используем разложение функции $f(x)=e^x$:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots \quad (|x|\prec\infty)$$

Заменяя в этой формуле x на $(-x)$, получаем $e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-x)^k}{k!}+\ldots$

Полученный ряд сходится при всех x, т.е. при $|x|\prec\infty$

Разложение $f(x)=xe^{-x}$ имеет вид:

$$xe^{-x}=x-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^4}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k!}+\ldots \quad (|x|\prec\infty)$$

7. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенные интегралы с указанной погрешностью α:

$$\int_0^1\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}dx, \quad \alpha=0.0001$$

Решение

Применим ряд для $\sin x$:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots \quad |x|\prec\infty$$

Заменим x на $\frac{x}{4}$:

$$\sin\frac{x}{4}=\frac{x}{4}-\frac{x^3}{3!4^3}+\frac{x^5}{5!4^5}-\ldots$$

Разделив почленно ряд для $\sin\frac{x}{4}$ на x, получим

$$\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}=\frac{1}{4}-\frac{x^2}{3!4^3}+\frac{x^4}{5!4^5}-\dots$$

Интегрируя этот ряд почленно (это возможно, так как пределы интегрирования принадлежат интервалу сходимости данного ряда), получим

$$\int_0^1\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}dx=\frac{1}{4}x\Big|_0^1-\frac{x^3}{3\cdot3!4^3}\Big|_0^1+\frac{x^5}{5\cdot5!4^5}\Big|_0^1-\dots=\frac{1}{4}-\frac{1}{3\cdot3!4^3}+\frac{1}{5\cdot5!4^5}-\dots=$$
$$=0.2500-0.0009+0.000002-\dots$$

Поскольку этот ряд удовлетворяет признаку Лейбница:

1. $a_n\ge a_{n+1}$, 2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то погрешность при замене суммы такого ряда суммой его первых n членов не превышает модуля первого отброшенного члена.

Ограничиваясь первыми двумя членами этого ряда, находим

$$\int_0^1\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}dx\approx0.2500-0.0009=0.2491$$

8. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения)

$y'=2x+y^2+e^x,\quad y(0)=1.$

<u>**Решение**</u>

Искомое решение запишем в виде ряда Моклорена

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

$y''=2+2yy'+e^x \qquad y(0)=1$

$y'''=2y'^2+2yy''+e^x \qquad y'(0)=2\cdot0+1+e^0=2$

.... $\qquad y''(0)=2+2\cdot1\cdot2+1=7$

Подставляя найденные значения производных в ряд, получим искомое решение дифференциального уравнения.

$y(x)=1+2x+3.5x^2+\dots$ - искомое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. «Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов». - М., 1960.

2. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. «Краткий курс высшей математики 1, 2». - М. 1978.

3. «Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов». / Под редакцией Б.П. Демидовича. - М., 1960.

СОДЕРЖАНИЕ

Составители: Пархимович Игорь Владимирович
Гоголинская Рената Альфонсовна
Остапчук Евгений Матвеевич

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. РЯДЫ

Методические указания и задания аттестационных работ
*по курсу «**Высшая математика**»*
для студентов строительного факультета

Ответственный за выпуск: Пархимович И.В.
Редактор: Строкач Т.В.
Компьютерная вёрстка: Боровикова Е.А.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 21.05.2008 г. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 2,3. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 200 экз. Заказ № 569. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.