МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ОБЩИЙ КУРС

Контрольные работы №3, №4

Методические указания и варианты заданий для студентов-заочников экономических специальностей

Второе издание, переработанное

Брест 2007

УДК 517.9
ББК 22.11

В соответствии с действующей программой для студентов-заочников 1 курса экономических специальностей подобраны индивидуальные задания к двум контрольным работам и даны решения типовых вариантов к каждой из них.

Составители: Тузик Т.А., доцент
Тузик А.И., профессор, к.ф.-м.н.,

Рецензент: зав. кафедрой высшей математики Брестского государственного университета им. А.С.Пушкина,

Общие методические указания

Основной формой изучения курса высшей математики для студентов-заочников является *самостоятельная работа* с учебниками, учебными пособиями, сборниками задач и упражнений, справочниками. Список основных и наиболее доступных их них приводится в конце пособия.

Изучение любого раздела курса следует *начинать с конспекта установочных лекций*, соответствующих глав учебника, учебного пособия или руководства к решению задач, в которых имеется необходимая теория, приводятся расчетные формулы и решения задач по темам. После этого, по аналогии с решением типового варианта к контрольной работе, можно приступать к решению самой контрольной работы.

Номер варианта контрольной работы совпадает с двумя последними цифрами номера зачетной книжки (шифра).

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими требованиями:

1. Контрольная работа должна быть выполнена и представлена на проверку в срок, предусмотренный учебным планом.
2. Контрольную работу желательно выполнять в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента.
3. Условия всех задач нужно записывать полностью, а их решения располагать в порядке номеров, указанных в заданиях.
4. В конце работы надо указать перечень использованной литературы, поставить подпись и дату.
5. В случае, если работа «не допущена к защите», студент в этой же тетради должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и представить ее на повторное рецензирование.

В случае необходимости студент может обращаться за консультациями к преподавателю кафедры, проверяющему контрольные работы в группе, лектору потока, либо к преподавателям, проводящим консультации студентов-заочников по графику, утвержденному на кафедре.

Вопросы учебной программы
II семестр

1. Функции нескольких переменных. Определение и вычисление частных производных.
2. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его применение в приближенных вычислениях.
3. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
4. Производная по направлению. Градиент и его свойства.
5. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума для функции двух переменных. Метод наименьших квадратов.
6. Определение и свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.
7. Замена переменных и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
8. Определенный интеграл как предел интегральной суммы и его основные свойства.
9. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле. Несобственные интегралы с бесконечными пределами.
11. Вычисление площадей и длин дуг кривых в декартовых координатах, в параметрическом виде, в полярных координатах.
12. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения (ДУ) 1-го порядка. ДУ с разделяющимися переменными. Линейные ДУ 1-го порядка.
13. Структура общего решения линейного однородного ДУ 2-го порядка. ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
14. Структура общего решения ЛНДУ 2-го порядка. ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.
15. Числовые ряды. Основные понятия (сумма ряда, сходимость, расходимость). Необходимый признак сходимости ряда.
16. Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами. Признаки Д'Аламбера и Коши.
17. Интегральный признак Коши сходимости ряда. Сходимость обобщенного гармонического ряда (ряда Дирихле).
18. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимости знакопеременного ряда.
19. Область сходимости степенного ряда.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Задание 1. Найти неопределенные интегралы следующих функций:

1.	а) $\int\left(3x^6+\frac{4}{x}+\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^4}\right)dx$;	б) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx.$
2.	а) $\int\left(5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$;	б) $\int(2x-3)\sin 4x\,dx.$
3.	а) $\int\left(7\sqrt{x^5}-\frac{2}{x^5}-3x^4+\frac{4}{x}\right)dx$;	б) $\int(x^2+x)e^x\,dx.$
4.	а) $\int\left(3x^4+\sqrt[5]{x^3}-\frac{2}{x}-\frac{4}{x^3}\right)dx$;	б) $\int x\sin(2x-3)\,dx.$
5.	а) $\int\left(6x^3-\frac{5}{x}+3\sqrt{x^5}-\frac{7}{x^4}\right)dx$;	б) $\int(4x+3)\cos 3x\,dx.$
6.	а) $\int\left(2x^5-\frac{4}{x^3}+\frac{6}{x}+3\sqrt{x}\right)dx$;	б) $\int(3x-1)\cos 2x\,dx.$
7.	а) $\int\left(2\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+6x^2-\frac{2}{x^5}\right)dx$;	б) $\int(x-7)e^{2x}\,dx.$
8.	а) $\int\left(6x^5+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{x^6}\right)dx$;	б) $\int(x-4)\cos 3x\,dx.$
9.	а) $\int\left(4x^5+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^4}\right)dx$;	б) $\int(2x-5)e^x\,dx.$
10.	а) $\int\left(3x^8+\frac{4}{x}-\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{x^5}\right)dx$;	б) $\int\ln(x+2)\,dx.$
11.	а) $\int\left(4x^2-\frac{3}{x}-\sqrt{x^7}-\frac{3}{x^6}\right)dx$;	б) $\int(3x+4)\sin x\,dx.$
12.	а) $\int\left(8x^3+\frac{6}{x^4}-\sqrt[6]{x^5}+\frac{7}{x^3}\right)dx$;	б) $\int(4x-3)\cos 2x\,dx.$
13.	а) $\int\left(5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x}\right)dx$;	б) $\int(3x+5)\sin x\,dx.$
14.	а) $\int\left(3x^5-\frac{4}{x}-\sqrt{x^5}+\frac{10}{x^5}\right)dx$;	б) $\int(8x-2)\cos 4x\,dx.$

15.	а) $\int\left(5x^4-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)dx$;	б) $\int(4x-1)\,e^{-x}\,dx$.
16.	а) $\int\left(4x^5-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^7}+\frac{6}{x^2}\right)dx$;	б) $\int(x+3)\sin 2x\,dx$.
17.	а) $\int\left(\sqrt[4]{x^5}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^3}+3x^4\right)dx$;	б) $\int(2x+4)\cos 6x\,dx$.
18.	а) $\int\left(8x^5-\frac{4}{x^4}+\frac{3}{x}-\sqrt[4]{x^5}\right)dx$;	б) $\int(x-6)\sin\frac{x}{2}\,dx$.
19.	а) $\int\left(\frac{7}{x}+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^5}-2x^6\right)dx$;	б) $\int(3x+2)\cos 6x\,dx$.
20.	а) $\int\left(\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}\right)dx$;	б) $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.
21.	а) $\int\left(8x^3-\frac{4}{x}-\frac{6}{x^4}+\sqrt[9]{x^2}\right)dx$;	б) $\int(4x-5)\,e^{x/2}\,dx$.
22.	а) $\int\left(4x^3+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}-\frac{3}{x^4}\right)dx$;	б) $\int(6x+1)\cos\frac{x}{2}\,dx$.
23.	а) $\int\left(7x^4+\frac{4}{x}-\sqrt[6]{x^5}+\frac{8}{x^6}\right)dx$;	б) $\int(2x-8)\sin x\,dx$.
24.	а) $\int\left(\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^5}-5x^4\right)dx$;	б) $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$.
25.	а) $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{4}{x^5}+6\sqrt[3]{x^2}-\frac{7}{x}\right)dx$;	б) $\int(8-x)\,e^{-2x}\,dx$.
26.	а) $\int\left(9x^5-\frac{6}{x}-\frac{5}{x^4}+\sqrt[5]{x^7}\right)dx$;	б) $\int\left(x+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{x}{4}\,dx$.
27.	а) $\int\left(\frac{3}{x^3}+\frac{8}{x}-2\sqrt{x^3}+5x^4\right)dx$;	б) $\int\left(x-\frac{1}{4}\right)\cos\frac{x}{8}\,dx$.
28.	а) $\int\left(4\sqrt[4]{x^3}-\frac{6}{x}-\frac{4}{x^5}-3x^7\right)dx$;	б) $\int\ln(x+4)\,dx$.
29.	а) $\int\left(10x^4+3\sqrt{x^5}-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^4}\right)dx$;	б) $\int(2x+3)\,e^{-4x}\,dx$.
30.	а) $\int\left(5x^3+\frac{6}{x^3}-\sqrt[3]{x^8}-\frac{6}{x^5}\right)dx$;	б) $\int(x+2)\cos\frac{x}{4}\,dx$.

Задание 2. Найти среднее значение издержек производства $K(x) = ax^2 + bx + c$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от x_1 до x_2 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

Вариант	*a*	*b*	*c*	x_1	x_2
1	3	4	5	1	3
2	6	2	1	0	4
3	3	6	3	2	6
4	9	8	4	0	8
5	6	4	3	1	7
6	4	3	2	2	5
7	3	8	2	3	6
8	6	2	7	2	7

Определить запас товаров на складе, образуемый за n дней, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t) = at^2 + bt + c$.

Вар.	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
a	12	3	15	9	6	3	12
b	2	6	4	4	2	2	4
c	3	7	1	3	10	8	2
n	2	3	5	4	6	3	5

Определить объем продукции, произведенный рабочим за n-ный час, если производительность труда задана функцией $f(t) = \dfrac{at + b}{ct + d}$.

Вар.	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
n	3	1	2	4	2	1	3	4
a	12	20	10	4	9	24	24	4
b	9	8	10	5	4	11	20	18
c	3	4	5	4	3	6	4	2
d	2	1	3	3	1	2	3	7

Найти полные издержки производства, если объем продукции $x = a$ единицам, а зависимость издержек от общего объема имеет вид $K(x) = bx^3 + cx^2 + dx$.

Вар.	24	25	26	27	28	29	30
a	48	12	36	60	42	24	36
b	1	1	1	1	1	4	3
c	3	6	9	3	2	3	1
d	-4	3	-2	8	-2	12	-10

Задание 3. Дана функция $z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 - 2axy + 3by + c$, точка $A\ (x_0;\ y_0)$, вектор $\vec{a} = (l\,;m)$. Найти:

1) эластичности $E_x(z)$ и $E_y(z)$ в точке $A\ (x_0;\ y_0)$;
2) матрицу Гессе функции z в точке А и вычислить ее определитель;
3) градиент функции z в точке А;
4) производную функции z в точке А по направлению вектора $\vec{a} = (l\,;m)$.

Вар.	a	b	c	x_0	y_0	l	m
1	1	1	3	4	1	4	3
2	2	1	2	2	1	4	-3
3	2	3	1	1	2	-4	3
4	4	2	3	-1	3	-4	-3
5	3	2	4	-1	-2	3	4
6	2	4	3	1	-1	-3	4
7	3	2	1	1	-2	3	-4
8	1	2	3	3	1	-3	-4
9	4	2	3	1	3	4	3
10	1	4	1	2	1	-3	4
11	4	1	2	1	2	5	12
12	2	4	3	2	1	5	-12
13	3	2	4	1	3	-5	12
14	3	1	2	3	1	-5	-12
15	1	4	2	-2	1	12	5
16	3	1	1	-2	-2	12	-5
17	3	2	5	3	1	-12	-5
18	1	2	3	2	1	-12	5
19	3	2	4	1	3	5	12
20	2	1	3	2	2	12	5
21	1	4	2	2	3	8	6
22	1	3	2	2	4	-8	6

Вар.	a	b	c	x_0	y_0	l	m
23	4	2	3	4	2	-8	-6
24	3	2	1	4	3	8	-6
25	3	4	2	4	1	6	8
26	1	2	1	1	3	-6	8
27	1	2	3	3	4	-6	-8
28	3	2	2	1	1	4	3
29	1	4	2	2	2	5	12
30	3	3	1	1	3	6	8

Задание 4. Производится два вида товаров, цены которых соответственно равны p_1 и p_2. Функция затрат, связанных с производством этих товаров, имеет вид $C = ax^2 + bxy + cy^2$, где x и y соответственно количества товаров первого и второго видов. *Требуется:*

1) составить функцию прибыли и найти ее максимальное значение;
2) проверить известное правило экономики: предельная стоимость (цена) товара равна предельным издержкам на производство этого товара.

Вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	0,45	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,05	0,10	0,15	0,20
b	0,50	0,20	0,30	0,20	0,10	0,50	0,10	0,20	0,10	0,30
c	0,25	0,10	0,15	0,20	0,15	0,20	0,35	0,15	0,20	0,15
p_1	18	16	70	24	19	34	28	18	16	31
p_2	12	10	60	11	7	23	58	22	24	29

Вар.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	0,25	0,30	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
b	0,20	0,30	0,20	0,10	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,30
c	0,15	0,20	0,25	0,20	0,04	0,35	0,45	0,15	0,20	0,55
p_1	49	48	17	11	14	24	33	20	37	19
p_2	38	45	41	9	7	30	45	14	29	17

Вар.	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,17	0,35	0,10	0,12
b	0,20	0,20	0,10	0,20	0,02	0,20	0,20	0,30	0,20	0,10
c	0,10	0,10	0,06	0,50	0,25	0,10	0,15	0,10	0,35	0,25
p_1	9	14	10	9	18	11	21	31	6	6
p_2	7	10	4	17	13	5	16	14	12	19

Задание 5. Найти величины спроса x и y на два вида товара, цены которых соответственно равны p_1 и p_2, если потребитель при ограниченном бюджете K стремится максимизировать функцию полезности (функция Кобба-Дугласа)

$$F(x,y) = x^{\frac{mp_1}{p_1+p_2+1}} \cdot y^{\frac{p_2}{p_1+p_2+1}},$$ где m – некоторый параметр.

При найденном оптимальном спросе указать наибольшее значение функции $F(x, y)$.

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_1	5	13	7	4	5	6	5	8	12	10
p_2	9	7	13	6	15	11	15	11	8	20
K	640	528	600	200	600	832	400	460	800	660
m	3	2	1	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5

Вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_1	7	12	14	10	7	14	11	20	4	15
p_2	8	10	12	8	15	10	9	16	7	9
K	300	448	800	792	720	590	560	1056	540	468
m	1	1,5	2	2,5	3	3,5	3	2,5	2	2

Вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
p_1	11	8	10	21	7	6	13	6	4	6
p_2	10	14	12	18	9	19	12	6	9	18
K	795	988	544	480	954	680	1360	360	1104	918
m	1,5	1,5	2	2	2,5	2,5	3	3	3,5	1,5

Задание 6. Выпуск некоторым предприятием промышленной продукции ($У$) по годам (X) характеризуется следующей таблицей:

X	1	2	3	4	5	6	7
$У$ (усл.ед.)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

По методу наименьших квадратов составить *линейную* зависимость $y = ax + b$, отражающую рост объема продукции за семь лет, дать прогноз по объему выпуска на восьмой год. Сделать чертеж.

Вар.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
1	6,3	9,5	13,9	16,1	20,2	24,1	25,0
2	6,1	12,5	15,6	21,2	24,3	25,0	27,3
3	6,2	9,8	12,1	16,0	20,0	23,9	25,6
4	5,2	8,1	10,6	13,7	16,7	20,1	21,3
5	5,8	6,4	8,7	7,5	12,3	14,1	15,0
6	5,7	8,3	9,2	9,4	12,8	13,0	14,6
7	7,4	8,1	9,9	10,2	13,6	12,5	14,0
8	5,3	6,2	9,1	10,0	12,7	14,3	16,2
9	10,0	15,6	17,2	18,4	19,4	20,5	22,9
10	16,1	17,4	18,5	19,3	20,2	21,9	23,4
11	14,7	15,4	17,2	16,9	18,3	19,5	20,5
12	12,1	13,6	14,2	15,4	16,8	15,3	17,8
13	13,7	15,3	14,2	16,1	16,4	17,5	17,8
14	12,6	14,5	15,2	17,6	18,8	17,3	19,2
15	15,2	16,6	16,3	17,4	18,8	19,3	20,5
16	18,2	20,7	19,6	23,2	31,4	27,3	32,5
17	19,5	21,4	20,2	24,4	32,1	28,6	34,3
18	16,3	18,6	17,5	21,3	25,2	23,4	29,4
19	17,0	15,9	20,1	22,4	25,2	21,6	24,7
20	19,4	22,7	26,2	24,3	27,7	29,1	26,8
21	18,1	21,0	25,4	23,2	28,4	26,9	30,2
22	20,4	61,6	116,3	168,1	198,9	204,3	253,5
23	10,7	10,6	11,8	12,4	12,2	12,9	14,3
24	10,2	12,3	13,4	14,8	13,9	18,2	19,6
25	10,9	12,4	12,6	13,9	13,0	16,8	15,6
26	13,0	14,1	14,8	16,2	16,8	18,4	17,9
27	14,1	14,9	16,4	17,3	18,2	18,7	20,8
28	11,8	13,2	13,9	14,7	16,2	17,8	19,3
29	12,2	12,8	13,2	14,5	15,1	15,7	17,6
30	10,4	11,6	13,2	14,3	14,8	16,5	19,3

Решение типового варианта контрольной работы № 3

Задание 1.

При нахождении неопределенных интегралов следует использовать таблицу интегралов основных элементарных функций, свойства интегралов и формулу интегрирования по частям. Приведем некоторые формулы:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1.$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$
3. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$
4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$
6. $\int \sin(ax+b)\, dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$
7. $\int \cos(ax+b)\, dx = -\dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$
8. $\int e^x dx = e^x + C.$
9. $\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + C.$

Свойства:

1. $\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx, \quad a - \forall const.$
2. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)\, dx \pm f_2(x)\, dx.$

Формула интегрирования по частям

$\int u(x)\, dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x)\, du(x)$ или более кратко

$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du.$

Найти неопределенные интегралы:

1. $$\int\left(18x^5+\frac{10}{x}-\sqrt[5]{x^3}-\frac{12}{x^4}\right)dx=18\int x^5dx+10\int\frac{dx}{x}-\int x^{3/5}dx-$$

$$-12\int x^{-4}dx=\frac{18}{6}\cdot x^6+10\ln|x|-\frac{x^{3/5+1}}{\frac{3}{5}+1}-12\cdot\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=$$

$$=3x^6+10\ln|x|-\frac{5}{8}x^{8/5}+\frac{3}{x^3}+C=3x^6+10\ln|x|-\frac{5}{8}x\cdot\sqrt[5]{x^3}+\frac{3}{x^3}+C.$$

2. $$\int\frac{\ln x}{x^6}dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & du=(\ln x)'dx=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{dx}{x^6}, & v=\displaystyle\int\frac{dx}{x^6}=\frac{x^{-5}}{-5}=-\frac{1}{5x^5}\end{array}\right|=-\frac{1}{5x^5}\cdot\ln x-$$

$$-\int\left(-\frac{1}{5x^5}\right)\cdot\frac{dx}{x}=-\frac{\ln x}{5x^5}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^6}=-\frac{\ln x}{5x^5}-\frac{1}{25x^5}+C=$$

$$=-\frac{5\ln x+1}{25x^5}+C.$$

3. $$\int(8x+6)\sin 3x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=8x+6, & du=(8x+6)'dx=8\,dx \\ dv=\sin 3x\,dx, & v=\displaystyle\int\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{8x+6}{3}\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 8\,dx=-\frac{8x+6}{3}\cos 3x+\frac{8}{3}\int\cos 3x\,dx=$$

$$=-\frac{8x+6}{3}\cos 3x+\frac{8}{9}\sin 3x+C.$$

4. $\int(3x-4)e^{-x/5}dx=\left|\begin{matrix} u=3x-4, & du=(3x-4)'dx=3dx \\ dv=e^{-x/5}dx, & v=\int e^{-\frac{1}{5}x}dx=-5e^{-x/5}\end{matrix}\right|=$

$=-5e^{-x/5}\cdot(3x-4)-\int\left(-5e^{-x/5}\right)\cdot 3dx=-5(3x-4)e^{-x/5}+$

$+15\int e^{-x/5}dx=(-15x+20)e^{-x/5}-75e^{-x/5}+C=(-15x-55)e^{-x/5}+C=$

$=-5(3x+11)e^{-x/5}+C.$

5. $\int\ln(x+8)\,dx=\left|\begin{matrix} u=\ln(x+8), & du=\dfrac{1}{x+8}dx \\ dv=dx, & v=\int dx=x\end{matrix}\right|=x\cdot\ln(x+8)-\int\dfrac{x}{x+8}dx=$

$=x\cdot\ln(x+8)-\int\dfrac{(x+8)-8}{x+8}dx=x\cdot\ln(x+8)-\int\left(1-\dfrac{8}{x+8}\right)dx=$

$=x\cdot\ln(x+8)-\int dx+8\int\dfrac{dx}{x+8}=x\cdot\ln(x+8)-x+8\ln(x+8)+C=$

$=(x+8)\ln(x+8)-x+C, \qquad x+8>0.$

Замечание 1. При интегрировании *неправильных алгебраических дробей* вида $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ надо предварительно выделить целую и дробные части.

6. $\int\dfrac{6x+15}{2x+1}dx=\int\dfrac{(6x+3)+12}{2x+1}dx=\int\dfrac{3(2x+1)+12}{2x+1}dx=\int\left(3+\dfrac{12}{2x+1}\right)dx=$

$=\int 3dx+\int\dfrac{12\,dx}{2x+1}=3x+6\ln|2x+1|+C.$

Задание 2. Применение определенного интеграла к решению задач экономического содержания рассмотрим на примерах.

1. Найти среднее значение издержек $K(x) = 24x^2 + 6x + 8$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от $x_1 = 2$ до $x_2 = 6$ единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

$$K_{ср.} = \frac{1}{6-2}\int_2^6 K(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_2^6 (24x^2 + 6x + 8)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{24}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + 8x\right)\Bigg|_2^6 =$$

$$= \frac{1}{4}(8\cdot 6^3 + 3\cdot 6^2 + 8\cdot 6) - \frac{1}{4}(8\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 8\cdot 2) = 2\cdot 6^3 + 3\cdot 9 +$$

$$+ 2\cdot 6 - 2\cdot 2^3 - 3 - 2\cdot 2 = 432 + 27 + 12 - 16 - 3 - 4 = 448\,(\textit{ден.ед.})$$

Определим, при каком объеме продукции $x > 0$ издержки принимают значение 448. Решаем уравнение $K(x) = 448$.

$$24x^2 + 6x + 8 = 448,\quad 24x^2 + 6x + 8 - 448 = 0,\quad 12x^2 + 3x - 220 = 0.$$

$$D = 3^2 - 4\cdot 12\cdot(-220) = 10569,\quad \sqrt{D} = 102{,}81,$$

$$x_1 = \frac{-3 - 102{,}81}{24} = -\frac{105{,}81}{24} = -4{,}41 < 0.$$

Это значение x не подходит по смыслу задачи.

$$x_2 = \frac{-3 + 102{,}81}{24} = 4{,}16 \text{ (ед. продукции).}$$

Если объем продукции 4,16 усл. единиц, то издержки производства принимают среднее значение 448 ден. ед.

2. Определить запас товаров на складе, образуемый за 7 дней, если поступление товаров характеризуется функцией $f(t) = 12t^2 - 4t + 5$.

Запас товаров на складе обозначим А, тогда

$$A = \int_0^7 f(t)\,dt = \int_0^7 (12t^2 - 4t + 5)\,dt = \left(\frac{12}{3}t^3 - \frac{4}{2}t^2 + 5t\right)\Bigg|_0^7 =$$

$$= 4\cdot 7^3 - 2\cdot 7^2 + 5\cdot 7 = 1372 - 98 + 35 = 1309 \text{ (ед. продукции).}$$

3. Определить объем продукции, произведенной рабочим за n-ый час, если производительность труда задана функцией *f(t)*.

$$n=4,\ f(t)=\frac{at+b}{ct+d},\ a=6;\ b=4;\ c=2;\ d=1.$$

$$f(t)=\frac{6t+4}{2t+1}=\frac{(6t+3)+1}{2t+1}=\frac{3(2t+1)}{2t+1}=3+\frac{1}{2t+1}$$

Продукция, произведенная за четвертый час работы, т.е. за промежуток времени от $t_1=3$ до $t_2=4$, определяется по формуле

$$V=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt=\int_3^4\frac{6t+4}{2t+1}dt=\int_3^4\left(3+\frac{1}{2t+1}\right)dt=3t\Big|_3^4+\frac{1}{2}\int_3^4\frac{d\,(2t+1)}{2t+1}=$$

$$=12-9+\frac{1}{2}\ln|2t+1|\Big|_3^4=3+\frac{1}{2}\ln(2\cdot4+1)=3+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{7}=3+0{,}126=$$

$= 3{,}126$ (усл.ед.).

4. Зависимость издержек от объема продукции имеет вид $K(x)=x^3+9x-6x$. Найти полные издержки производства, если объем продукции равен $a = 72$ единицы.

$$P=\int_0^{72}K(x)\,dx=\int_0^{72}(x^3+9x^2-6x)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{9}{3}x^3-\frac{6}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{72}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot72^4+3\cdot72^3-3\cdot72^2=18\cdot72^3+3\cdot72^2-3\cdot72^2=21\cdot72^3-$$

$$-3\cdot72^2=3\cdot72^2(7\cdot72-1)=15552\cdot503=7822656\ \text{(ден.ед.)}.$$

Задание 3. Пусть: $a=2;\ b=5;\ c=3;\ x_0=2;\ y_0=1;\ l=2;\ m=3.$

Тогда

$$z=2x^3+5x^2y+3xy^2-4xy+15y+3,\ A(2;1),\ \vec{a}=(2;3).$$

1. Находим *частные производные* первого и второго порядка $z=f(x,y)$. При дифференцировании функции z по x переменная y временно считается постоянной; при дифференцировании z по y переменная x считается постоянной.

$$z'_x=6x^2+10xy+3y^2-4y;\ z'_y=5x^2+6xy-4x+15;$$

$$z''_{xx}=12x+10y;\ z''_{xy}=10x+6y-4;\ z''_{yy}=6x.$$

Вычислим значения функции и ее производных в точке А (2;1).

$$z(A)=2\cdot 2^3+5\cdot 2^2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1^1-4\cdot 2\cdot 1+15\cdot 1+3=16+20+6-8+$$
$$+15+3=52,$$
$$z'_x(A)=(6x^2+10xy+3y^2-4y)\Big|_A=6\cdot 2^2+10\cdot 2\cdot 1+3\cdot 1-4\cdot 1=$$
$$=24+20+3-4=43,$$
$$z'_y(A)=(5x^2+6xy-4x+15)\Big|_A=5\cdot 4+6\cdot 2\cdot 1-4\cdot 2+15=20+12-$$
$$-8+15=39,$$
$$z''_{xx}(A)=(12x+10y)\Big|_A=24+10=34,$$
$$z''_{xy}(A)=(10x+6y-4)\Big|_A=20+6-4=22,$$
$$z''_{yy}(A)=(6x)\Big|_A=12.$$

Эластичности функции z по переменным x и y в точке А равны:

$$E_x(z(A))=\frac{x}{z}\cdot z'_x\Big|_A=\frac{2}{52}\cdot 43=1{,}65;$$
$$E_y(z(A))=\frac{y}{z}\cdot z'_y\Big|_A=\frac{1}{52}\cdot 39=0{,}75.$$

2. Составим матрицу Гессе функции z в точке А и вычислим ее определитель

$$H(A)=\begin{pmatrix} z''_{xx}(A) & z''_{xy}(A) \\ z''_{xy}(A) & z''_{yy}(A)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 & 22 \\ 22 & 12\end{pmatrix},$$
$$\det H(A)=\begin{vmatrix} 34 & 22 \\ 22 & 12\end{vmatrix}=34\cdot 12-22^2=408-484=-76.$$

3. *Градиент* функции z в точке А – это вектор

$$grad\, z=(z_x'(A);\ z_y'(A))=z_x'(A)\cdot\vec{i}+z_y'(A)\cdot\vec{j}.$$

В данном случае $grad\, z(A)=43\cdot\vec{i}+39\cdot\vec{j}=(43;39)$.

4. *Производная* функции $z=f(x,y)$ в точке А *по направлению* вектора $\vec{a}=(l;m)$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z(A)}{\partial \bar{a}} = z'_x(A) \cdot \cos\alpha + z'_y(A) \cdot \cos\beta,$$

где направляющие косинусы $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ вектора $\bar{a}$ соответственно равны:

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}; \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

Для вектора $\bar{a} = (2;3)$ в силу предыдущих формул получим

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+9}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0{,}555; \quad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{4+9}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0{,}832.$$

Тогда

$$\frac{\partial z(A)}{\partial \bar{a}} = 43 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 39 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{86+117}{\sqrt{13}} = \frac{203}{\sqrt{13}} = 56{,}302.$$

Так как производная положительна, то в направлении вектора $\bar{a}$, при прохождении через точку А функция z возрастает.

Задание 4. $a = 0{,}25$; $b = 0{,}10$; $c = 0{,}40$; $p_1 = 13$; $p_2 = 26$.

1. Стоимость всего товара равна $P = p_1 x + p_2 y = 13x + 26y$, а затраты на производство этих товаров составляют $C = 0{,}25x^2 + 0{,}10xy + 0{,}40y^2$. Следовательно, функция прибыли имеет вид $\Pi(x,y) = P - C = 13x + 26y - (0{,}25x^2 + 0{,}10xy + 0{,}40y^2)$.

Исследуем функцию прибыли на локальный экстремум. Находим частные производные $\Pi'_x(x,y)$ и $\Pi'_y(x,y)$ и приравниваем их нулю. Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \Pi'_x(x,y) \equiv 13 - 0{,}5x - 0{,}1y = 0, \\ \Pi'_y(x,y) \equiv 26 - 0{,}1x - 0{,}8y = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему

$$\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}11y = 13, \\ 0{,}1x + 0{,}8y = 26. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y = 130, \\ x + 8y = 260. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 130 - 5x, \\ x + 8(130 - 5x) = 260. \end{cases}$$

$$-39x = 260 - 8 \cdot 130, \quad 39x = 780, \quad x = 20, \quad y = 30.$$

Точка А (20;30) – *стационарная точка* функции $П(x, y)$. Покажем, что при $x = 20$, $y = 30$ прибыль будет максимальной.

Находим $П''_{xx} = -0{,}5$; $П''_{xy} = -0{,}1$; $П''_{yy} = -0{,}8$. Составим *матрицу Гессе* для функции $П(x, y)$ в точке А

$$H(A) = \begin{pmatrix} П''_{xx} & П''_{xy} \\ П''_{xy} & П''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det H(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 - 0{,}1^2 = 0{,}40 - 0{,}01 = 0{,}39 > 0$ и элементы матрицы $H(A)$, стоящие на главной диагонали, отрицательны, то точка А является точкой максимума функции $П(x, y)$.

$$П_{\max}(20;30) = 13 \cdot 20 + 26 \cdot 30 - (0{,}25 \cdot 20^2 + 0{,}1 \cdot 20 \cdot 30 + 0{,}4 \cdot 30^2) =$$
$$= 260 + 780 - (100 + 60 + 360) = 520 \text{ (ден. ед.)}.$$

Таким образом, чтобы при заданных ценах p_1 и p_2 получить наибольшую прибыль, надо произвести 20 единиц товара первого вида и 30 единиц товара второго вида.

2. Предельная стоимость товара первого вида равна $p_1 = 13$ (ден. ед.), а предельные издержки на его производство составляют $C'_x(A) = 0{,}5 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 30 = 10 + 3 = 13$ (ден. ед.). Предельная стоимость товара второго вида $p_2 = 26$, а затраты на производство $C'_y(A) = 0{,}1 \cdot 20 + 0{,}8 \cdot 30 = 2 + 24 = 26$ (ден. ед.).

Таким образом, по двум видам товаров их *предельная цена совпадает с предельными затратами на их производство.*

Задание 5. Пусть: $p_1 = 6$; $p_2 = 9$; $K = 780$, $m = 5$.

Считаем, что величины x, y, p_1, p_2, K выражены в определенных единицах.

$$\frac{mp_1}{p_1 + p_2 + 1} = \frac{5 \cdot 6}{6 + 9 + 1} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}; \quad \frac{p_2}{p_1 + p_2 + 1} = \frac{9}{16}.$$

Функция полезности в этом случае имеет вид

$$F(x, y) = x^{15/8} \cdot y^{9/16}.$$

По условию x и y соответственно – количества товаров первого и второго видов, в которых нуждается потребитель ($x \geq 0$ и $y \geq 0$). Общая стоимость этих товаров $p_2 x + p_2 y = 6x + 9y$. В силу ограниченности бюджета потребителя величиной $K = 780$ должно выполняться неравенство

$$6x + 9y \le 780 \text{ при } x \ge 0 \text{ и } y \ge 0.$$

Итак, требуется найти наибольшее значение функции полезности $F(x,y)$ в замкнутой области, определяемой системой ограничений-неравенств

$$\max F(x,y) = x^{15/8} \cdot y^{9/16},$$

$$\begin{cases} 6x + 9y \le 780, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Эти ограничения задают на плоскости xOy ΔOAB, внутри которого и на его границе будем искать точку наибольшего значения функции $F(x,y)$.

$6x + 9y = 780$ *или* $2x + 3y = 260$,

$x = 0, \quad y = 86{,}7;$ $\qquad x = 130, \quad y = 0.$

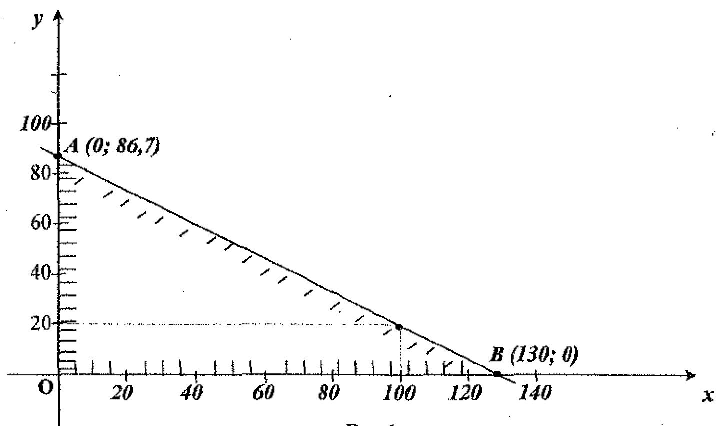


Рис.1.

Находим *стационарные* точки функции $F(x,y)$ из системы

$$\begin{cases} F'_x(x,y) = 0, \\ F'_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

$$F'_x = \frac{15}{8} x^{7/8} y^{9/16}, \qquad F'_y = \frac{9}{16} x^{15/8} y^{-7/16}.$$

Очевидно, что частные производные F'_x и F'_y одновременно не могут равняться нулю, т.е. $F(x,y)$ не имеет *стационарных точек* внутри ΔOAB и наибольшее значение функция $F(x,y)$ может принять только на отрезке AB

$$2x+3y=260, \quad y=\frac{260-2x}{3}, \quad \textit{если} \quad 0\le x\le 130.$$

На отрезке AB функция полезности будет функцией одной переменной

$$F(x)=x^{15/8}\left(\frac{260-2x}{3}\right)^{9/16}=\left(\frac{2}{3}\right)^{9/16}x^{15/8}(130-x)^{9/16}.$$

Находим *стационарную точку* функции $F(x)$.

$$F'(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{9/16}\left(\frac{15}{8}x^{7/8}(130-x)^{9/16}-\frac{9}{16}x^{15/8}(130-x)^{-7/16}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{9/16}\cdot\frac{3}{16}x^{7/8}(130-x)^{-7/16}\left(10(130-x)-3x\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{9/16}\cdot\frac{3}{16}x^{7/8}(130-x)^{-7/16}(1300-13x)=0 \Rightarrow 1300=13x,$$

$$x=100, \quad y=\frac{260-2\cdot 100}{3}=20.$$

В данной задаче оптимальный спрос на оба товара определяется значениями $x=100$, $y=20$ (рис. 1).

При этих значениях функция полезности имеет наибольшее значение, равное

$$\max_{(x,y)\in\Delta OAB} F(x,y)=F(100,20)=100^{15/8}\cdot 20^{9/16}=$$

$$=100^{1,8750}\cdot 20^{0,5625}=5623,413\cdot 5,393=30327,066.$$

Задание 6. Дана таблица значений x и y. Пользуясь методом наименьших квадратов, составить *линейную* зависимость $y=ax+b$. Найти $y(8)$. Сделать чертеж.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	12,7	15,2	16,4	16,9	19,4	21,3	22,6

Параметры a и b определим, решив систему уравнений

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{7}x_i=\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i, \\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{7}x_i+7\cdot b=\sum\limits_{i=1}^{7}y_i. \end{cases} \qquad (*)$$

Составим вспомогательную таблицу

	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
	1	12,7	12,7	1
	2	15,2	30,4	4
	3	16,4	49,2	9
	4	16,9	67,6	16
	5	19,4	97,0	25
	6	21,3	127,8	36
	7	22,6	158,2	49
$\sum$	28,0	124,5	542,9	140,0

Составляем и решаем систему уравнений (*)

$$\begin{cases}140a+28b=542{,}9, \\ 28a+7b=124{,}5.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}140a+28b=542{,}9 \\ -112a-28b=-498{,}0.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}28a=44{,}9, \\ b=\dfrac{124{,}5-28a}{7}.\end{cases} \Rightarrow \quad a=1{,}6; \quad b=11{,}4.$$

$$y=1{,}6x+11{,}4.$$

Таким образом, рост продукции за семь лет характеризуется линейной зависимостью $y=1{,}6x+11{,}4$.

Объем выпуска продукции за восьмой год

$$y_8=y(8)=1{,}6\cdot 8+11{,}4=24{,}2.$$

В системе координат xOy изображаем точки $M_i(x_i,y_i)$ таблицы и проводим прямую $y=1{,}6x+11{,}4$ (рис. 2).

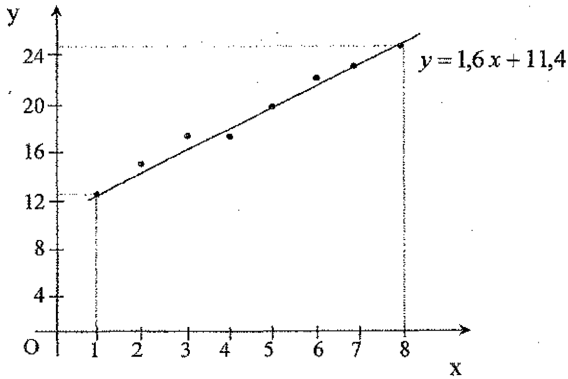


Рис. 2

Таким образом, выпуск продукции за 1 год *в среднем* возрастает на 1,6 усл. ед.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Задание 1. Найти общее или частное (если указано начальное условие) решение следующих дифференциальных уравнений *первого* порядка:

Вар.	
1.	а) $(x-e^{-2x})\,dx+(y+e^{2y})\,dy=0$; б) $y'-y\,tg\,x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y(0)=2$.
2.	а) $xyy'-y^2=4$; б) $y'+\dfrac{2y}{x}=x^3$, $y(1)=\dfrac{7}{6}$.
3.	а) $x\,dy-(y+1)\,dx=0$, $y(2)=5$; б) $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$.
4.	а) $y'=2\sqrt{y}\ln x$, $y(e)=1$; б) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2$.
5.	а) $y'tgx-y=4$; б) $xy'-2y=x$, $y(1)=1$.
6.	а) $4(yx^2+y)\,dy+\sqrt{5+y^2}\,dx=0$; б) $y'-\dfrac{2y}{x}=x^3$, $y(1)=\dfrac{3}{2}$.
7.	а) $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$; б) $x^2y'-2xy=1$, $y(1)=5$.
8.	а) $(x^2+x)y'=2y+1$; б) $xy'-3y=x^3+x$, $y(1)=3$.
9.	а) $(\sin 2x+x)\,dx+(\cos 2y+y)\,dy=0$; б) $xy'+3y=x^3-2x$, $y(1)=2$.
10.	а) $(3+e^x)yy'=e^x$; б) $xy'-3y=3-4x-x^2$, $y(1)=3$.
11.	а) $y'=\dfrac{y+1}{x}$; б) $xy'+2y=2+3x+x^2$, $y(1)=3$.
12.	а) $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$; б) $xy'-2y=x^3+x$; $y(1)=4$.
13.	а) $(2x-\sin 4x)\,dx+(4y-e^{2y})\,dy=0$; б) $y'-\dfrac{4y}{x}=x^2-2x+3$, $y(1)=-5$.
14.	а) $y'\cos^2 x=y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$; б) $xy'+2y=x^3+x^2$.
15.	а) $xyy'-y^2=9$; б) $y'-\dfrac{4y}{x}=-x^2+2x-3$, $y(1)=4$.

16.	а) $(x+1)\,dy-(y+2)\,dx=0$; б) $y'+\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^2$, $y(0)=\dfrac{6}{5}$.
17.	а) $(e^{3x}-3x^2)\,dx-(\sin 2y-4y^3)\,dy=0$; б) $xy'-4y=x^3+2x^2-3x$, $y(1)=2$.
18.	а) $xy'+4y=8x-2$, $y(1)=0{,}1$; б) $(4+e^x)yy'=e^x$.
19.	а) $y'=\dfrac{y+1}{x+3}$; б) $xy'-3y=x^3-2x^2+5x$, $y(1)=-3$.
20.	а) $x\sqrt{4+y^2}\,dx+y\sqrt{9+x^2}\,dy=0$; б) $xy'+3y=5x+4$, $y(1)=6$.
21.	а) $(x^2-e^{-4x})\,dx-(3y^5+\sin 3y)\,dy=0$; б) $y'-\dfrac{2y}{x+2}=e^{3x}(x+2)^2$, $y(0)=4$.
22.	а) $xyy'-y^2=16$; б) $xy'-3y=x^4-2x^3+5x$, $y(1)=5$.
23.	а) $x\,dy-(y+3)\,dx=0$, $y(2)=13$; б) $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{4x-5}{x^2}$.
24.	а) $6(x^2y+y)\,dy-\sqrt{4+y^2}\,dx=0$; б) $x^2y'-2xy=1$, $y(1)=5$.
25.	а) $yy'\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}=0$; б) $xy'-3y=4x^3+2x^2+x$, $y(1)=6$.
26.	а) $(x+3)y'=y-4$, $y(2)=14$; б) $xy'+2y=\dfrac{2+3x+x^2}{x^2}$.
27.	а) $x\sqrt{4+y^2}\,dx-y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$; б) $xy'-4y=x^3-2x^2+3x$, $y(1)=-5$.
28.	а) $y'\cos^2 x=y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$; б) $y'+\dfrac{4y}{x}=\dfrac{x^2-3x+1}{x^4}$.
29.	а) $(x+1)\,dy=(y+6)\,dx$; б) $y'+\dfrac{3y}{x+1}=(x+1)^2$, $y(2)=\dfrac{3}{2}$.
30.	а) $(4x^3-e^{-2x})\,dx-(e^{2y}-\sin 3y)\,dy=0$; б) $xy'+5y=10x-4$, $y(1)=1$.

Задание 2. Найти общее или частное (если указаны начальные условия) решение следующих дифференциальных уравнений второго порядка:

Вар.	
1.	а) $y''+4y=0$; б) $y''-10y'+25y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-4$; в) $y''+3y'+2y=0$; г) $y''+y'=(2x-1)e^x$.
2.	а) $y''-y'-2y=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=7$; б) $y''+25y=0$; в) $y''+4y'+4y=0$; г) $y''-2y'+5y=10\cos 2x$.
3.	а) $y''-3y'=0$; б) $y''-3y'+2y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=5$; в) $y''-4y'+13y=0$; г) $y''-2y'-8y=12\sin 2x-36\cos 2x$.
4.	а) $y''+7y'=0$; б) $y''-6y'+5y=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-2$; в) $y''+2y'+5y=0$; г) $y''-12y'+36y=5\sin 3x$.
5.	а) $y''-10y'+25y=0$; б) $y''+y'-2y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=-2$; в) $y''-2y'+10y=0$; г) $y''-3y'+2y=(34-12x)e^{-x}$.
6.	а) $y''+9y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=3$; б) $y''+2y'+17y=0$; в) $y''-y'-12y=0$; г) $y''-6y'+10y=51e^{-x}$.
7.	а) $y''+y'-6y=0,\ y(0)=6,\ y'(0)=-1$; б) $y''+8y'+16y=0$; в) $y''-4y'+20y=0$; г) $y''+49y=2\cos 3x-5\sin 3x$.
8.	а) $y''-12y'+36y=0$; б) $y''-4y'+5y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=1$; в) $y''+2y'-3y=0$; г) $y''+6y'+10y=74e^{3x}$.
9.	а) $y''+3y'=0$; б) $y''-5y'+4y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=-2$; в) $y''+16y=0$; г) $y''-3y'+2y=3\cos x+7\sin x$.
10.	а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''-6y'+9y=0,\ y(0)=-3,\ y'(0)=2$; в) $y''+4y'+5y=0$; г) $y''+100y=72e^{2x}$.
11.	а) $y''-2y'+10y=0$; б) $y''-6y'+9y=(48x+8)e^{2x}$ в) $4y''-8y'+3y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=3$; г) $y''+8y'+16y=0$;
12.	а) $y''-3y'-10y=0,\ y(0)=7,\ y'(0)=-3$; б) $y''+16y=0$; в) $y''+10y'+25y=0$; г) $y''-5y'+6y=3\cos x+19\sin x$.
13.	а) $9y''+6y'+y=0$; б) $y''-4y'-21y=0,\ y(0)=-4,\ y'(0)=6$; в) $y''+y=0$; г) $y''+36y=2+3x-x^2$;
14.	а) $y''-6y'+9y=0,\ y(0)=5,\ y'(0)=2$; б) $y''+4y'+8y=0$; в) $y''+6y'-7y=0$; г) $y''-y=-4\cos x-2\sin x$.

15.	а) $y''-10y'+21y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=3;$ б) $y''-2y'+2y=0;$ в) $y''+4y'+4y=0;$ г) $y''+2y'-24y=6\cos 3x-33\sin 3x.$
16.	а) $y''+6y'+9y=0;$ б) $y''+10y'+29y=0,\ y(0)=6,\ y'(0)=-3;$ в) $y''-8y'+7y=0;$ г) $y''+6y'+13y=-5\sin 2x.$
17.	а) $y''+2y'+26y=0;$ б) $y''+4y=3\sin 3x-2\cos 3x.$ в) $y''+y'-12y=0,\ y(0)=6,\ y'(0)=-5;$ г) $y''-14y'+49y=0;$
18.	а) $y''-7y'-8y=0;$ б) $y''+4y'+4y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=-4;$ в) $y''+4y'+13y=0;$ г) $y''-4y'+29y=7\sin 5x.$
19.	а) $y''-3y'-4y=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=3;$ б) $y''+6y'+13y=0;$ в) $y''+14y'+49y=0;$ г) $y''-4y'+5y=2e^{-3x}.$
20.	а) $y''-8y'+16y=0;$ б) $y''-10y'+16y=0,\ y(0)=-7,\ y'(0)=3;$ в) $y'+25y=0;$ г) $y''+16y=8\cos 4x.$
21.	а) $y''-3y'-18y=0;$ б) $y''+2y'+5y=0, y(0)=-3, y'(0)=6;$ в) $y''-16y'+64y=0;$ г) $y''+9y=(2x-5)e^{3x}.$
22.	а) $y''-2y'-15y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=-5;$ б) $y''-6y'+34y=0;$ в) $y''-18y'+81y=0;$ г) $y''-12y'+40y=3e^{6x}.$
23.	а) $y''+6y'+25y=0;$ б) $y''+2y'+y=0,\ y(0)=5,\ y'(0)=-4;$ в) $y''+4y'-12y=0;$ г) $y''+4y=2\sin 2x+3\cos 2x.$
24.	а) $y''-6y'+8y=0,\ y(0)=-4,\ y'(0)=3;$ б) $4y''+4y'+y=0;$ в) $y''+10y'+26y=0;$ г) $y''+2y'+y=4e^{2x}.$
25.	а) $y''+81y=0,\ y(0)=9,\ y'(0)=-8;$ б) $y''-81y=0;$ в) $y''+18y'+81y=0;$ г) $y''-8y'+12y=3x^2+5x-1.$
26.	а) $y''-18y'+82y=0;$ б) $y''-5y'+4y=0,\ y(0)=4,\ y'(0)=-5;$ в) $y''-4y'+4y=0;$ г) $y''+8y'+25y=13e^{5x}.$
27.	а) $y''-3y'-4y=0,\ y(0)=-3,\ y'(0)=-4;$ б) $y''-6y'+10y=0;$ в) $y''-20y'+100y=0;$ г) $y''-9y'+20y=3e^{-2x}.$
28.	а) $y''+8y'+25y=0,\ y(0)=-10,\ y'(0)=13;$ б) $9y''+3y'-2y=0;$ в) $y''-18y'+81y=0;$ г) $y''+2y'+37y=5x^2-1.$
29.	а) $6y''+7y'-3y=0,\ y(0)=7,\ y'(0)=-6;$ б) $4y''-4y'+y=0;$ в) $y''+100y=0;$ г) $6y''-y'-y=9e^{2x}.$
30.	а) $y''+12y'+36y=0,\ y(0)=8,\ y'(0)=-10;$ б) $y''-36y=0;$ в) $y''-12y'+40y=0;$ г) $2y''+7y'+3y=4\cos 3x.$

Задание 3. Модель роста выпуска продукции в условиях конкуренции. Производится некоторая однородная продукция. Пусть $y(t)$ - количество продукции, реализованной на момент времени t по цене $p(y)$, где $p(y)$ - убывающая функция, т.е. с увеличением объема продукции на рынке цена на нее падает: $\frac{dp}{dy} < 0$. Полученный на этот момент времени доход составит $p(y) \cdot y(t)$ (усл. единиц). Часть дохода, равная $I(t) = m \cdot p(y) \cdot y(t)$, где m – норма инвестиций, $0 < m < 1$, расходуется на инвестиции в производство реализуемой продукции.

В результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять инвестируется для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска (акселерации), причем скорость выпуска пропорциональна увеличению инвестиций: $y'(t) = l \cdot I(t)$, где $\frac{1}{l}$ - норма акселерации.

Требуется:

1. Составить дифференциальное уравнение, являющееся математической моделью роста выпуска продукции в условиях конкуренции, если $p(y) = a - by$, $a > 0$, $b > 0$;

2. Найти решение полученного уравнения, удовлетворяющее начальному условию: $y = y_0$ при $t = 0$;

3. Указать временные границы прогрессирующего роста выпуска продукции (эластичность спроса) и границы замедления (насыщения) роста выпуска (неэластичность спроса);

4. Построить найденную интегральную (логистическую) кривую, указав ее точку перегиба;

5. Указать предельный объем производства.

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	60	15	30	20	45	42	24	18	40	30
b	6	3	3	5	5	3	4	3	5	2
m	0,1	0,4	0,1	0,05	0,2	0,1	0,5	0,5	0,5	0,5
l	0,1	0,5	0,3	0,4	0,1	0,25	0,1	0,1	0,5	0,04
y_0	2	1	2	1	3	2	1	1	2	3

Вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	50	60	16	100	48	72	56	50	25	56
b	5	10	2	5	6	6	4	5	5	8
m	0,4	0,2	0,5	0,02	0,05	0,1	0,02	0,1	0,4	0,05
l	0,05	0,05	0,1	0,05	0,2	0,05	0,2	0,4	0,1	0,1
y_0	2	2	1	4	1	2	3	3	2	2

Вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	36	75	39	100	27	33	42	36	56	72
b	4	3	3	4	3	3	6	2	7	8
m	0,1	0,1	0,2	0,1	0,02	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1
l	0,5	0,04	0,1	0,1	0,5	0,02	0,05	0,1	0,04	0,05
y_0	2	5	4	5	2	4	1	2	2	3

Задание 4. Модель рынка с прогнозируемыми ценами. Даны зависимости спроса $D = D(t)$ и предложения $S = S(t)$ от цены $p = p(t)$ на однородный продукт рынка:

$$D(t) = \alpha_1 p'' - \beta p' + a_1 p + b_1, \qquad (1)$$

$$S(t) = \alpha_2 p'' + \beta p' + a_2 p + b_2, \qquad (2)$$

где α_1, α_2, β, a_1, a_2, b_1, b_2 - заданные действительные числа.

Требуется:

1. При равновесном состоянии рынка составить его математическую модель;
2. Найти частное решение полученного дифференциального уравнения, выступающего в качестве модели рынка, удовлетворяющего определенным начальным условиям;
3. Запрогнозировать цену продукта на рынке для момента времени t_1.

Вар.	α_1	α_2	β	a_1	a_2	b_1	b_2	$p(0)$	$p'(0)$	t_1
1	1	2	3	-2	8	25	-5	4	1	1,2
2	3	4	4	-16	25	80	-43	6	2	0,6
3	2	3	2	10	15	12	-3	4	-1	1,3
4	4	5	1	9	19	20	-10	5	-3	1,5
5	1	2	5	6	40	70	2	3	1	0,4
6	2	3	6	-20	25	86	-4	5	2	0,7
7	3	4	3	-4	9	15	-11	4	-2	0,8
8	4	5	5	-13	16	30	-28	3	3	0,4
9	1	2	6	-13	27	120	40	4	-1	0,2
10	2	3	1	3	8	25	-5	5	-2	1,5

Вар.	α_1	α_2	β	a_1	a_2	b_1	b_2	$p(0)$	$D(0)$	t_1
11	3	4	2	-13	16	56	-31	4	20	1,5
12	4	5	4	3	20	18	-16	4	18	0,8
13	1	2	3	-2	16	13	-5	4	38	0,9
14	2	3	5	-17	24	55	-27	3	10	0,3
15	3	4	6	-9	28	101	-10	6	20	0,25
16	4	5	1	16	18	17	1	10	24	1,5
17	1	2	2	10	18	28	4	6	32	1,5
18	2	3	4	-6	14	29	-11	4	26	0,7
19	3	4	2	10	23	20	-19	4	12	1,2

Вар.	α_1	α_2	β	a_1	a_2	b_1	b_2	$p(0)$	$S(0)$	t_1
20	4	5	5	10	36	31	-21	7	16	0,4
21	1	2	6	-20	32	40	-12	4	15	0,3
22	2	3	1	7	24	36	2	3	10	1,5
23	3	4	3	1	26	30	-70	6	28	0,4
24	4	5	4	-8	17	60	10	3	40	0,5
25	2	3	4	3	35	56	-40	4	36	0,6
26	3	4	6	-14	47	60	-62	4	16	0,3
27	4	5	5	-19	31	70	-30	3	30	0,25
28	6	7	3	-14	20	100	32	4	8	1,2
29	1	2	2	5	25	45	5	3	12	1,4
30	4	5	1	12	38	80	-24	5	26	1,2

Задание 5. Исследовать сходимость числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

Вар.	а) u_n	б) u_n	Вар.	а) u_n	б) u_n
1.	$\dfrac{2^n \cdot n!}{n^3}$	$\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$	**5.**	$\dfrac{3n^2+4}{2^n}$	$\dfrac{n}{n^4+1}$
2.	$\dfrac{3^n \cdot \sqrt{n}}{n!}$	$\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$	**6.**	$\dfrac{7n+1}{5^n}$	$\dfrac{n}{5n^3+2}$
3.	$\dfrac{4^n}{(n+2)!}$	$\dfrac{2n+1}{n^4+3}$	**7.**	$\dfrac{3n+2}{(n+1)!}$	$\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$
4.	$\dfrac{n^3+1}{4^n}$	$\dfrac{1}{(n+4)\sqrt{n}}$	**8.**	$\dfrac{(n+2)^4}{6^n}$	$\dfrac{n}{n^3+3}$

Вар.	а) u_n	б) u_n	Вар.	а) u_n	б) u_n
9.	$\frac{n(n+2)}{4^n}$	$\frac{n^2+n}{n^4+1}$	**20.**	$\frac{3^{n+1}}{7^n \cdot n^4}$	$\frac{4n+1}{n^3+2}$
10.	$\frac{5^n}{\sqrt{n}\cdot n!}$	$\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$	**21.**	$\frac{3^{n-1}}{5^n \cdot n^2}$	$\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$
11.	$\frac{4^n \cdot n^4}{n!}$	$\frac{3n+2}{n^3+6}$	**22.**	$\frac{3^n\sqrt{n+1}}{(n+2)!}$	$\frac{2n+7}{\sqrt{n^5+3}}$
12.	$\frac{2^n}{5^n(2n+1)}$	$\frac{n^2}{n^3+5}$	**23.**	$\frac{n^3+3}{5^n}$	$\frac{1}{4n+\sqrt{n}}$
13.	$\frac{4n+3}{6^n}$	$\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$	**24.**	$\frac{5^n}{4^n(6n+5)}$	$\frac{n+2}{n^3+3}$
14.	$\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}$	$\frac{n}{n^3+2}$	**25.**	$\frac{2^{n+1}}{n\cdot(n+2)!}$	$\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$
15.	$\frac{3n+7}{8^n}$	$\frac{5n+1}{n^4\sqrt{n}}$	**26.**	$\frac{n^2+7n}{6^n}$	$\frac{3n+2}{n\sqrt{n}+1}$
16.	$\frac{n+7}{(n+1)!}$	$\frac{2n+1}{n\sqrt{n}+3}$	**27.**	$\frac{\sqrt[3]{n}\cdot 6^n}{(n+1)!}$	$\frac{n}{(2n+1)(3n+2)}$
17.	$\frac{4^n}{7^n(3n+1)}$	$\frac{n+1}{\sqrt{n^6+5}}$	**28.**	$\frac{n^3+4}{2^n}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{n^6+8}}$
18.	$\frac{n^2+3n+1}{4^n}$	$\frac{1}{6n+\sqrt{n}}$	**29.**	$\frac{n^2+3n+2}{7^n}$	$\frac{n+5}{(n+3)^3}$
19.	$\frac{5n+3}{6^n}$	$\frac{n+6}{n^4+1}$	**30.**	$\frac{2^n\sqrt{n}}{(n+3)!}$	$\frac{1}{n^6\sqrt{n}}$

Задание 6. Исследовать знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ на абсолютную и условную сходимости. Вычислить приближенную сумму S этого ряда, заменив ее n-ой частичной суммой S_n. Оценить абсолютную погрешность $|r_n|$ такой замены.

Вар.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
u_n	$\frac{n}{6n^2+7}$	$\frac{n+1}{n^2+4}$	$\frac{n+7}{6^n}$	$\frac{3n+2}{n\sqrt{n}+1}$	$\frac{6n+3}{4^n}$
n	4	5	3	4	3

Вар.	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
u_n	$\frac{n+6}{n^4+8}$	$\frac{2n+3}{n^4+5}$	$\frac{n\sqrt{n}}{5^n}$	$\frac{n}{5n^3+2}$	$\frac{n^2+2n+3}{4^n}$
n	5	3	4	5	4

Вар.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
u_n	$\frac{n}{n^2+4}$	$\frac{3n+2}{n!}$	$\frac{4n+1}{6^n}$	$\frac{n^2}{n^4+3}$	$\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$
n	5	3	4	5	3

Вар.	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
u_n	$\frac{2n+7}{\sqrt{n^5}}$	$\frac{5n+3}{n^3+4}$	$\frac{5n+1}{n^4\sqrt{n}}$	$\frac{2^n}{(n+2)!}$	$\frac{2n+1}{n^6+2}$
n	6	5	3	4	3

Вар.	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
u_n	$\frac{4n+3}{2^n}$	$\frac{n+5}{(n+1)^3}$	$\frac{n+3}{\sqrt{n^3+2}}$	$\frac{3n+2}{\sqrt{n^4+n}}$	$\frac{n^3+3}{7^n}$
n	4	5	3	6	4

Вар.	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
u_n	$\frac{n(n+2)}{3^n}$	$\frac{n^2+5n}{n^6+8}$	$\frac{3n+1}{n^5+4}$	$\frac{n^2+3n}{5^n}$	$\frac{n+6}{n!}$
n	3	4	3	3	4

Задание 7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$:

Вар.	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{n}{3^n}$	$\frac{2n+1}{n^3+4}$	$\frac{2^n \cdot n}{4^n}$	$\frac{n}{(2n-1)^2}$	$\frac{n+1}{4^n}$
x_0	1	-4	2	5	-1

Вар.	6	7	8	9	10
a_n	$\frac{n+5}{n^3+3}$	$\frac{3n+4}{(n+6)^3}$	$\frac{n}{(3n+1)\cdot 4^n}$	$\frac{2n-1}{3^n \cdot (n+1)}$	$\frac{n+3}{2^n}$
x_0	3	-3	-4	3	-6

Вар.	11	12	13	14	15
a_n	$\frac{4n+1}{n^3+5}$	$\frac{n}{(n+2)\cdot 3^n}$	$\frac{n^2+3}{3^n\sqrt{n}}$	$\frac{8n+5}{n\cdot 4^n}$	$\frac{n}{4n^2-3}$
x_0	-2	-4	1	-5	2

Вар.	16	17	18	19	20
a_n	$\frac{n}{(3n+1)\cdot 5^n}$	$\frac{2n-1}{4^n}$	$\frac{2n+1}{n^2+4}$	$\frac{n}{(6n+1)^2}$	$\frac{n}{n^2+\sqrt{n}}$
x_0	4	-3	5	3	-1

Вар.	21	22	23	24	25
a_n	$\frac{3n+2}{n\cdot 5^n}$	$\frac{n+4}{n\cdot(n^3+1)}$	$\frac{5n+3}{n\cdot 4^n}$	$\frac{2n+5}{(n+1)\cdot 4^n}$	$\frac{n}{n^3-2}$
x_0	-4	2	5	1	-5

Вар.	26	27	28	29	30
a_n	$\frac{3n^2-2}{n^4+1}$	$\frac{3n+2}{6^n\sqrt{n}}$	$\frac{5n+1}{3^n}$	$\frac{n}{7^n(3n-1)}$	$\frac{2n+7}{3^n\sqrt{n}}$
x_0	-2	-4	3	4	-3

Решение типового варианта контрольной работы № 4.

Задание 1. Дифференциальное уравнение (ДУ) *первого* порядка имеет вид $y' = f(x,y)$ или $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, где $y' = \dfrac{dy}{dx}$, y – искомая функция от переменной x, $y = y(x)$.

Процесс решения ДУ называется его интегрированием.

а) *ДУ с разделяющимися переменными* имеет вид

$$\begin{aligned} &f_1(x)\cdot g_1(y)\,dx + f_2(x)\cdot g_2(y)\,dy = 0,\\ &f_1(x)\cdot g_1(y)\,dx = -f_2(x)\cdot g_2(y)\,dy. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $g_1(y) \neq 0$ и $f_2(x) \neq 0$. Разделим обе части уравнения (1) на произведение $f_2(x)\cdot g_1(y)$, получим *ДУ с разделенными переменными*

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy. \tag{2}$$

Равенство (2) означает, что дифференциалы двух функций равны,, значит сами функции отличаются лишь на постоянное слагаемое. Интегрируя равенство (2), получим общее решение или общий интеграл ДУ (1)

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy + C,\ \ C - \forall const.$$

Пример 1. Проинтегрировать ДУ

$$y'\cdot\sin^2 x = y\ln y \ \Leftrightarrow\ \sin^2 x\cdot\frac{dy}{dx} = y\ln y \ \Leftrightarrow\ \sin^2 x\cdot dy = y\ln y\,dx.$$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части равенства

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{y\ln y} \ \Leftrightarrow\ \int\frac{dx}{\sin^2 x} = \int\frac{dy}{y\ln y} \ \Leftrightarrow\ \int\frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int\frac{dx}{\sin^2 x} \ \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \ln\left|\ln y\right| = -ctgx + C$ - *общий интеграл* исходного ДУ, где $C - \forall const$.

Пример 2. Найти *частное решение* ДУ $(2x+1)\,dy - (y+4)\,dx = 0$, удовлетворяющее условию $y(4) = 11$.

Разделяем переменные

$$(2x+1)\,dy=(y+4)\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y+4}=\frac{dx}{2x+1} \Rightarrow \int\frac{d(y+4)}{y+4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{2x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y+4|=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+\ln|C|, \quad 0\neq C-\forall const \Rightarrow \ln|y+4|=$$

$=\ln\left|C\cdot\sqrt{2x+1}\right| \Rightarrow y+4=C\sqrt{2x+1} \Rightarrow y=C\sqrt{2x+1}-4$ - *общее решение* данного уравнения.

Определим постоянную С так, чтобы выполнялось начальное условие $y(4)=11$.

$11=C\sqrt{2\cdot 4+1}-4,\ \ 11=3C-4,\ \ 3C=15,\ \ C=5.$ Получаем *частное решение* данного уравнения в виде $y=5\sqrt{2x+1}-4$.

б) *Линейное ДУ I порядка* относительно функции $y=y(x)$ и ее производной y' имеет вид

$$y'+p(x)\cdot y=q(x), \tag{3}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - заданные непрерывные функции.

Заменой $y=u(x)\cdot v(x)$ решение ДУ (3) сводится к решению двух ДУ с разделяющимися переменными.

Пример 3. Найти *частное решение* ДУ $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{2}{x}-4x,$ (4)

удовлетворяющее начальному условию $y(1)=4$.

Находим общее решение уравнения (4) с помощью замены $y=u(x)\cdot v(x),\ \ y'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$. Подставляем эту замену в уравнение (4)

$$u'\cdot v+u\cdot v'+\frac{3u\cdot v}{x}=\frac{2}{x}-4x,$$

$$u'\cdot v+u\left(v'+\frac{3v}{x}\right)=\frac{2}{x}-4x.$$

Функции $v(x)$ и $u(x)$ определяем из условий

$$\begin{cases} v'+\dfrac{3v}{x}=0, \\ u'v=\dfrac{2}{x}-4x. \end{cases}$$

$$v'+\frac{3v}{x}=0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx}=-\frac{3v}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v}=-\frac{3\,dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-3\ln|x| \;\Rightarrow$$

$$=\ln|v|=\ln\left|\frac{1}{x^3}\right| \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{x^3}.$$

$$u' \cdot v = \frac{2}{x} - 4x,\ u' \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2}{x} - 4x,\ u' = 2x^2 - 4x^4,\ du = (2x^2 - 4x^4)\,dx,$$

$$u = \int (2x^2 - 4x^4)\,dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5 + C.$$

Общее решение ДУ (4) имеет вид

$$y = u \cdot v,\ \ y = \frac{1}{x^3}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5 + C\right),$$

$$y = \frac{C}{x^3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5}x^2,\ \ C - \forall\, const.$$

Определим C из начального условия $y(1) = 4$.

$$4 = C + \frac{2}{3} - \frac{4}{5},\quad C = 4 - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{60 - 10 + 12}{15} = \frac{62}{15}.$$

Искомое *частное решение* имеет вид $y = \dfrac{62}{15x^3} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5}x^2$.

Задание 2. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + q \cdot y = 0,\ \ p, q = const \in R, \tag{5}$$

имеет вид $y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$, где $y_{1,2}(x)$ - два частных *линейно независимых* решения уравнения (5). Если сделать замену $y = e^{kx}$, $k - const$, получим *характеристическое уравнение* для ДУ (5)

$$k^2 + p \cdot k + q = 0. \tag{6}$$

Решаем уравнение (6). Возможны три случая: $D = p^2 - 4q > 0$, $D = 0$ и $D < 0$. Общее решение ЛОДУ (5) в каждом случае имеет вид:

1. $D > 0,\ k_1 \neq k_2,\ y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},\ C_1, C_2 - \forall const.$
2. $D = 0,\ k_1 = k_2,\ y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x},$
3. $D < 0,\ k = \alpha \pm i\beta,\ y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$

Пример 4. Найти *общее решение* следующих ЛОДУ:

а) $y'' + y' - 56y = 0$; б) $y'' - 16y' + 68y = 0$; в) $y'' + 16y' + 64y = 0$.

а) $y'' + y' - 56y = 0$.

С помощью замены $y = e^{kx}$ приходим к характеристическому уравнению

$k^2 + k - 56 = 0,\quad D = 1 - 4\cdot(-56) = 1 + 224 = 225,$

$k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 15}{2},\ k_1 = \dfrac{-1-15}{2} = -8,\ k_2 = \dfrac{-1+15}{2} = 7.$

Общее решение ДУ есть:

$y = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{7x}$, где C_1, C_2 $-\forall\, const$.

Если надо выделить *частное решение*, удовлетворяющее начальным условиям, например, $y(0) = 5;\ y'(0) = -10$, то находим $y'(x)$,

$$y'(x) = -8C_1 e^{-8x} + 7C_2 e^{7x}.$$

Далее составляем систему уравнений для нахождения C_1 и C_2.

$$\begin{cases} y(0) = 5, \\ y'(0) = -10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 5, \\ -8C_1 + 7C_2 = -10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 5 - C_1, \\ -8C_1 + 35 - 7C_1 = -10. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = 5 - C_1, \\ -15C_1 = -45. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3,\ C_2 = 2.$$

Частное решение имеет вид $y = 3e^{-8x} + 2e^{7x}$.

б) $y'' - 16y' + 68y = 0$.

$k^2 - 16k + 68 = 0,\ (k-8)^2 + 4 = 0,\ (k-8)^2 = -4,$

$k - 8 = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i,\ k_{1,2} = 8 \pm 2i,\ \alpha = 8,\ \beta = 2.$

Общее решение данного уравнения запишется в виде:

$y = C_1 e^{8x}\cos 2x + C_2 e^{8x}\sin 2x$, где $C_1, C_2 - \forall\, const$.

в) $y'' + 16y' + 64y = 0$.

$k^2 + 16k + 64 = 0,\ (k+8)^2 = 0,\ k_{1,2} = -8.$

Общее решение

$y = C_1 e^{-8x} + C_2 x e^{-8x}$, где $C_1, C_2 - \forall\, const$.

Общее решение линейного неоднородного ДУ

$y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q $-const \in R$, состоит из общего решения $\overline{y}(x)$ соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и некоторого частного решения $y_*(x)$ данного ЛНДУ, т.е. $y = \overline{y}(x) + y_*(x)$.

Частное решение ЛНДУ в случае, когда $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ - многочлен степени $\leq n$ и $\alpha = const$ или $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, A , B и β - известные $const \in R$, будем искать методом неопределенных коэффициентов.

Пример 5. Найти *общее решение* ЛНДУ

$y'' - 4y' + 3y = 5x\,e^{-x}$.

$y = \overline{y}(x) + y_*(x)$.

$\overline{y}(x) = ?\quad y'' - 4y' + 3y = 0,\ k^2 - 4k + 3 = 0,$

$k_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2},\quad k_1 = 1;\ \ k_2 = 3.$

$\overline{y}(x) = C_1e^x + C_2e^{3x},\quad C_1, C_2 - \forall\, const.$

$y_*(x) = ?,\ f(x) = 5x\,e^{-x},\ P_1(x) = 5x,\ \alpha = -1,\ \alpha \neq k_1,\ \ \alpha \neq k_2.$

Будем искать $y_*(x)$ в виде $y_*(x) = (ax+b)e^{-x}$, где a и b – неопределенные пока коэффициенты, подлежащие вычислению. Найдем

$y_*'(x) = a\,e^{-x} + (ax+b)e^{-x}\cdot(-1) = e^{-x}(a - ax - b)$,

$y_*''(x) = -e^{-x}(a - ax - b) + e^{-x}(-a) = -e^{-x}(a - ax - b + a) =$

$= -e^{-x}(2a - ax - b).$

Подставим y_*, y_*', y_*'' в исходное уравнение

$$y_*'' - 4y_*' + 3y_* = 5x\,e^{-x}.$$

Получим

$-e^{-x}(2a - ax - b) - 4e^{-x}(a - ax - b) + 3e^{-x}(ax + b) = 5xe^{-x}.$

Сокращаем на e^{-x} и приводим подобные

$-2a + ax + b - 4a + 4ax + 4b + 3ax + 3b = 5x,$

$8ax - 6a + 8b = 5x.$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{c|l} x & 8a=5, \\ x^\circ & -6a+8b=0. \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{8}, \\ b=\dfrac{6}{8}a=\dfrac{3}{4}a=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{32}. \end{cases}$$

Частное решение имеет вид $y_*(x)=\left(\dfrac{5}{8}x+\dfrac{15}{32}\right)e^{-x}$.

Общее решение исходного ДУ есть

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}+\left(\frac{5}{8}x+\frac{15}{32}\right)e^{-x},\quad C_1,C_2-\forall const.$$

Пример 6. Найти *общее решение* ЛНДУ.

$y''-4y'+3y=(8x-4)e^x$.

$y=\bar{y}(x)+y_*(x)$.

$\bar{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}$, т.к. соответствующее однородное ДУ осталось тем же.

Ищем частное решение $y_*(x)$; $f(x)=(8x-4)e^x$, $P_1(x)=8x-4$, $\alpha=1=k_1$, поэтому

$y_*(x)=x(ax+b)e^x=(ax^2+bx)e^x$,

$y_*'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx)e^x=e^x(ax^2+2ax+bx+b)$,

$y_*''(x)=e^x(ax^2+2ax+bx+b+2ax+2a+b)=e^x(ax^2+4ax+bx+2a+2b)$.

Подставим выражения для y_*, y_*', y_*'' в левую часть исходного уравнения

$e^x(ax^2+4ax+bx+2a+2b)-4e^x(ax^2+2ax+bx+b)+3(ax^2+bx)=$

$=(8x-4)e^x$.

Сокращая на e^x и приводя подобные, будем иметь

$$-2x+a-b=4x-2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{array}{c|l} x & -2a=4, \\ x^\circ & a-b=-2. \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} a=-2, \\ b=a+2=0. \end{cases}$$

Частное решение $y_*(x)=-2x^2e^x$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{3x}-2x^2e^x,\quad C_1,C_2-\forall const.$$

Пример 7. Найти *общее решение* ЛНДУ $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$.

$$y = \overline{y}(x) + y_*(x).$$

$\overline{y}(x) = ?$ $y'' - 6y' + 9y = 0$, $k^2 - 6k + 9 = 0$,

$(k-3)^2 = 0$, $k_{1,2} = 3 \Rightarrow \overline{y}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

$y_* = ?$ $f(x) = 4 \cdot e^{3x}$, $P_0(x) = 4$, $\alpha = 3 = k_1 = k_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_*(x) = x^2 \cdot a \cdot e^{3x}$.

$y_*' = 2xae^{3x} + 3ax^2e^{3x} = ae^{3x} = ae^{3x}(2x + 3x^2)$,

$y_*'' = ae^{3x}(6x + 9x^2 + 2 + 6x) = ae^{3x}(9x^2 + 12x + 2)$,

$y_*'' - 6y_*' + 9y_* = 4e^{3x}$,

$ae^{3x}(9x^2 + 12x + 2) - 6ae^{3x}(2x + 3x^2) + 9ae^{3x} \cdot x^2 = 4e^{3x}$.

Сокращая на e^{3x} и приводя подобные, получим $2a = 4$, $a = 2$.

Следовательно,

$y_*(x) = 2x^2e^{3x}$, $y(x) = e^{3x}(C_1 + C_2x + 2x^2)$, $C_1, C_2 - \forall\, const$.

Пример 8. Найти *общее решение* ЛНДУ

$y'' - 6y' + 10y = 3\cos x - 4\sin x$.

$y = \overline{y}(x) + y_*(x)$.

$\overline{y}(x) = ?$ $y'' - 6y' + 10y = 0$, $k^2 - 6k + 10 = 0$,

$D = 36 - 40 = -4$, $k_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{6 \pm 2i}{2}$, $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица.*

$k_{1,2} = 3 \pm i$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.

$\overline{y}(x) = C_1e^{3x}\cos x + C_2e^{3x}\sin x$, $C_1, C_2 - \forall\, const$.

$y_*(x) = ?$ $f(x) = 3\cos x - 4\sin x \Rightarrow y_*(x) = a\cos x + b\sin x$, a и b – пока неопределенные числа.

$y_*'(x) = -a\sin x + b\cos x$, $y_*''(x) = -a\cos x - b\sin x$.

$y_*'' - 6y_*' + 10y_* = 3\cos x - 4\sin x$,

$-a\cos x - b\sin x + 6a\sin x - 6b\cos x + 10a\cos x + 10b\sin x = 3\cos x - 4\sin x$.

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$.

$$\begin{array}{l|l}\cos x & -a-6b+10a=3, \\ \sin x & -b+6a+10b=-4.\end{array}\Bigg\}\Rightarrow\begin{cases}9a-6b=3,\\6a+9b=-4.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a-2b=1,\\6a+9b=-4.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1+2b}{3},\\6\cdot\dfrac{1+2b}{3}+9b=-4.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1+2b}{3},\\2+4b+9b=-4.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1+2b}{3},\\13b=-6.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{12}{13}\right)=\dfrac{1}{39},\\b=-\dfrac{6}{13}.\end{cases}$$

Частное решение $\quad y_*(x)=\dfrac{1}{39}\cos x-\dfrac{6}{13}\sin x.$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{3x}\cos x+C_2e^{3x}\sin x+\frac{1}{39}\cos x-\frac{6}{13}\sin x,\ C_1,C_2-\forall\,const.$$

Пример 9. Найти *общее решение* ЛНДУ

$y''+25y=\cos 5x.$

$y=\overline{y}(x)+y_*(x).$

$\overline{y}(x)=?\ \ y''+25y=0,\ \ k^2+25=0,\ \ k^2=-25,$

$k_{1,2}=\pm\sqrt{-25}=\pm 5i;\ \ \alpha=0,\ \ \beta=5.$

$\overline{y}(x)=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x,\quad C_1,C_2-\forall\,const.$

$y_*(x)=?\ \ f(x)=1\cdot\cos 5x+0\cdot\sin 5x\Rightarrow y_*=x(a\cos 5x+b\sin 5x),$

a и $b-const$

$y_*'=(a\cos 5x+b\sin x)+5x(-a\sin 5x+b\cos 5x),$

$y_*''=5(-a\sin 5x+b\cos 5x)+5(-a\sin 5x+b\cos 5x)+25x(-a\cos 5x-$
$-b\sin 5x).$

Выражения для $y_*,\ y_*''$ подставляем в исходное уравнение $y_*''+25y_*=\cos 5x.$

$10(-a\sin 5x+b\cos 5x)-25x(a\cos 5x+b\sin 5x)+25x(a\cos 5x+b\sin 5x)=$
$=\cos 5x.$

$10(-a\sin 5x + b\cos 5x) = \cos 5x.$

Приравниваем коэффициенты при $\sin 5x$ и $\cos 5x$.

$$\begin{array}{l|l} \cos 5x & 10b = 1, \\ \sin 5x & -10a = 0. \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{cases} b = 0{,}1, \\ a = 0. \end{cases}$$

Частное решение $y_*(x) = 0{,}1x\sin 5x.$

Общее решение

$y(x) = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x + 0{,}1x\sin 5x, \quad C_1, C_2 - \forall const.$

Задание 3.

1. Искомое дифференциальное уравнение в общем виде есть

$$\begin{aligned} &y'(t) = l\cdot m\cdot p(y)\cdot y(t), \quad p(y) = a - by, \\ &y'(t) = lm(a - by)\cdot y. \end{aligned} \tag{7}$$

Все величины в правой части уравнения (7) положительны $y'(t) > 0$, а значит, функция $y(t) > 0$ - *возрастающая.*

Пусть $a = 76;\ b = 19;\ m = 0{,}4;\ l = 0{,}05;\ y_0 = 1$. Подставим данные в ДУ (7).

$$y'(t) = 0{,}05\cdot 0{,}4(76 - 19y)\cdot y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}38(4 - y)y. \tag{8}$$

2. Уравнение (8) – ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и почленно интегрируем

$$\frac{dy}{(4-y)y} = 0{,}38\,dt; \quad \frac{dy}{y^2 - 4y} = -0{,}38\,dt; \quad \int\frac{d(y-2)}{(y-2)^2 - 4} = -\int 0{,}38\,dt$$

Так как $\int\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad \int dt = t + C$, то общий интеграл ДУ (8) имеет вид

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2-2}{y-2+2}\right| = -0{,}38t + C_1, \quad \ln\left|\frac{y-4}{y}\right| = -1{,}52t + 4C_1,$$

Обозначим произвольную постоянную по-другому:

$4C_1 = \ln|C|, \quad C \neq 0, \quad C \in R.$

Выпишем общее решение ДУ (8) в виде $\ln\left|\frac{y-4}{y}\right| = -1{,}52\,t \cdot \ln e + \ln|C|$

$\frac{y-4}{y} = C \cdot e^{-1{,}52t}$; $1 - \frac{4}{y} = C\,e^{-1{,}52t}$; $\frac{4}{y} = 1 - C\,e^{-1{,}52t}$.

Функция $y = \frac{4}{1 - C\,e^{-1{,}52t}}$ - *общее решение* ДУ (8), называется [15] *функцией снабжения (логистики)*.

Из начального условия $y_0 = 1$ или $y(0) = 1$ определим C

$1 = \frac{4}{1-C}$, $1 - C = 4$, $C = -3$.

Получим искомое *частное решение* ДУ (8)

$$y = \frac{4}{1 + 3e^{-1{,}52\,t}} \qquad (9)$$

Кривая, заданная уравнением (9), называется *логистической кривой*.

Очевидно, что при $t \to +\infty$ $y \to 4$. Это значит, что прямая $y = 4$ - *горизонтальная асимптота* логистической кривой.

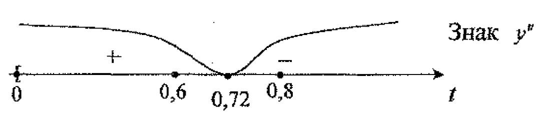
3.-5. Найдем точку перегиба кривой (9), т.е. точку, в которой $y'' = 0$, а при переходе через нее y'' меняет знак.

Из уравнения (8) $y' = 0{,}38(4y - y^2)$, $y'' = 0{,}38(4 - 2y) \cdot y'$, $y'' = 0$, значит $4 - 2y = 0 \Rightarrow y_2 = 2$, т.к. $y' \neq 0$ $(y' > 0)$.

Находим соответствующее значение аргумента t (время) из уравнения (9)

$2 = \frac{4}{1 + 3 \cdot e^{-1{,}52t}}$, $1 + 3 \cdot e^{-1{,}52t} = 2$, $e^{-1{,}52t} = \frac{1}{3}$, $-1{,}52t = \ln\frac{1}{3} \Rightarrow t_1 = 0{,}72$.

Исследуем знак второй производной в окрестности точки $t_1 = 0{,}72$.



$$y(0{,}6) = \frac{4}{1 + 3e^{-1{,}52 \cdot 0{,}6}} = 1{,}81;\quad y'(0{,}6) = 0{,}38\,(4 - 1{,}81) \cdot 1{,}81 = 1{,}51;$$

$$y''(0{,}6) = 0{,}38\,(4 - 2 \cdot 1{,}81) \cdot 1{,}51 = 0{,}22 > 0;$$

$$y(0{,}8) = \frac{4}{1 + 3e^{-1{,}52 \cdot 0{,}8}} = 2{,}12;\quad y'(0{,}8) = 0{,}38\,(4 - 2{,}12) \cdot 2{,}12 = 1{,}52;$$

$$y''(0{,}8) = 0{,}38\,(4 - 2 \cdot 2{,}12) \cdot 1{,}52 = -0{,}14 < 0.$$

Отсюда следует, что на интервале $t \in (0; t_1)$ кривая (9) вогнута, а на интервале $(t_1; +\infty)$ она выпукла.

Эластичность спроса у относительно цены р определяется по формуле

$E_p(y) = p \cdot \dfrac{y'}{y}$. В данном случае $p(y) = a - by,\ \ y = \dfrac{a-p}{b}$,

$y'(p) = -\dfrac{1}{b} \Rightarrow E_p(y) = p \cdot \left(-\dfrac{1}{b}\right) \cdot \dfrac{b}{a-p} = -\dfrac{p}{a-p} = \dfrac{p}{p-a}$ или

$E_p(y) = -\dfrac{a-by}{by} = 1 - \dfrac{a}{by}$.

Спрос эластичен, если $\left|E_p(y)\right| > 1$ и *неэластичен*, если $\left|E_p(y)\right| < 1$.

Возьмем $t = 0{,}6 \in (0; 0{,}72) \Rightarrow y = 1{,}81,\ \ a = 76,\ \ b = 19$.

$\left|E_p(y)\right| = \left|1 - \dfrac{76}{19 \cdot 1{,}81}\right| = \left|1 - \dfrac{4}{1{,}81}\right| = 1{,}21 > 1 \Rightarrow$ Спрос эластичен.

Значит, на данном интервале наблюдается прогрессирующий рост выпуска продукции.

При $t = 0{,}8 \in (0{,}72; +\infty) \Rightarrow y = 2{,}12$.

$\left|E_p(y)\right| = \left|1 - \dfrac{76}{19 \cdot 2{,}12}\right| = \left|1 - \dfrac{4}{2{,}12}\right| = \left|1 - \dfrac{1}{0{,}53}\right| = 0{,}89 < 1$.

На этом интервале происходит замедление роста, насыщение рынка данной продукцией.

Строим *график логистической кривой*. Точка (0,72 ; 2) является точкой перегиба этой кривой (рис. 3).

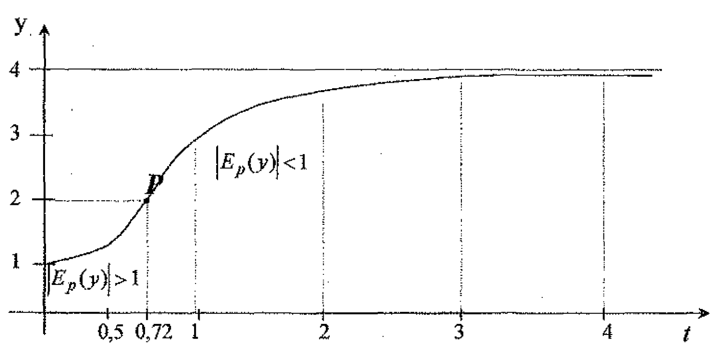


Рис.3.

$$y=\frac{4}{1+3e^{-1,52t}}\Rightarrow$$

t	0	0,5	0,72	2	4	$+\infty$
y	1	1,66	2	3,50	3,97	4

Из графика видно, что *предельный объем производства* равен 4 усл. единицам.

Задание 4. Пусть $\alpha_1=5, \alpha_2=6, \beta=2, a_1=9, a_2=62, b_1=70, b_2=-36$.

а) $p(0)=4,\ p'(0)=3,\ t_1=1{,}6$; б) $p(0)=4,\ D(0)=126,\ t_1=0{,}7$;
в) $p(0)=4,\ S(0)=49,\ t_1=2$.

Тогда зависимость спроса $D(t)$ и предложения $S(t)$ от цены $p(t)$ имеют вид:

$$D(t)=5p''-2p'+9p+70;\ S(t)=6p''+2p'+62p-36.$$

В данной модели рынка спрос и предложение зависят не только от цены $p(t)$ на товар, но и от *роста цены* $p'(t)$, а также от *темпа роста* $p''(t)$, что отражает реальную ситуацию ценообразования на данном рынке.

1. Составим ДУ равновесного состояния рынка $D(t)=S(t)$.

$5p''-2p'+9p+70=6p''+2p'+62p-36.$

$$p''+4p'+53p=106 \qquad (10)$$

Находим *общее решение* этого уравнения

$p(t)=\bar{p}+p_*$.

$\bar{p}=?\quad p''+4p'+53p=0,$ его характеристическое уравнение $k^2+4k+53=0,\ (k+2)^2+49=0,\ k=-2\pm\sqrt{-49}=-2\pm7i,$ тогда

$\bar{p}=C_1e^{-2t}\cos7t+C_2e^{-2t}\sin7t;\ C_1,C_2-\forall const.$

$p_*=?\quad p_*=A,\ p_*'=0,\ p_*''=0.$ Из уравнения (10) получим $53\cdot A=106$, $A=2$.

Общее решение уравнения (10)

$$p=2+e^{-2t}(C_1\cos7t+C_2\sin7t);\ C_1,C_2-\forall const. \qquad (11)$$

Находим *частное решение* уравнения (10) при заданных начальных условиях:

а) в вариантах 1-10 даны $p(0)$ и $p'(0)$.

$p(0)=4,\ p'(0)=3.$

Найдем

$$p'(t) = -2e^{-2t}(C_1\cos 7t + C_2\sin 7t) + e^{2t}(-7C_1\sin 7t + 7C_2\cos 7t) =$$
$$= e^{-2t}((7C_2 - 2C_1)\cos 7t - (2C_2 + 7C_1)\sin 7t).$$

Составим систему для определения C_1 и C_2

$$\begin{cases} p(0) = 4, \\ p'(0) = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + C_1 = 4, \\ 7C_2 - 2C_1 = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ 7C_2 = 3 + 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = 2, C_2 = 1.$$

Искомое *частное решение* имеет вид

$$p(t) = 2 + e^{-2t}(2\cos 7t + \sin 7t). \qquad (12)$$

Легко убедиться, что

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = 2 + \lim_{t\to\infty} \frac{2\cos 7t + \sin 7t}{e^{2t}} = 2 + 0 = 2.$$

Это означает, что с течением времени цены на рынке стабилизируются, приближаясь с незначительными колебаниями к установившейся цене $p(t) = 2$ (усл. ед.).

Зададим некоторое значение для $t = t_1 = 1{,}6$ и найдем соответствующую цену

$$p(1{,}6) = 2 + e^{-2\cdot 1{,}6}\left(2\cdot\cos(7\cdot 1{,}6) + \sin(7\cdot 1{,}6)\right) = 2 - 0{,}573\cdot e^{-3{,}2} \approx 1{,}98(\textit{усл.ед.})$$

б) В вариантах 11-20 даны $p(0)$ и $D(0)$.

Пусть $p(0) = 4$, $D(0) = 126$, $t_1 = 0{,}7$. Составим функцию спроса

$$D(t) = 5p''(t) - 2p'(t) + 9p(t) + 70, \quad p(t) = 2 + e^{-2t}(C_1\cos 7t + C_2\sin 7t),$$
$$p'(t) = -2e^{-2t}(C_1\cos 7t + C_2\sin 7t) + e^{-2t}\cdot 7(-C_1\sin 7t + C_2\cos 7t) =$$
$$= e^{-2t}((7C_2 - 2C_1)\cos 7t - (2C_2 + 7C_1)\sin 7t).$$
$$p''(t) = e^{-2t}((28C_1 - 45C_2)\sin 7t - (28C_2 + 45C_1)\cos 7t).$$
$$p(0) = 2 + C_1; \quad p'(0) = 7C_2 - 2C_1; \quad p''(0) = -(28C_2 + 45C_1).$$
$$D(0) = -5(28C_2 + 45C_1) - 2(7C_2 - 2C_1) + 9(2 + C_1) + 70 =$$
$$= 88 - 154C_2 - 212C_1.$$

Составляем систему

$$\begin{cases} p(0) = 4, \\ D(0) = 126. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + C_1 = 4, \\ 88 - 154C_2 - 212C_1 = 126. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ 154C_2 = 88 - 424 - 126. \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} C_1 = 2, \\ 154C_2 = -462. \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = 2, \quad C_2 = -3.$$

Частное решение в этом случае $p(t) = 2 + e^{-2t}(2\cos 7t - 3\sin 7t)$.

При $t_1 = 0{,}7 \quad p(0{,}7) = 2 + e^{-1{,}4}(2\cos 4{,}9 - 3\sin 4{,}9) =$
$= 2 + 3{,}32 \cdot 0{,}25 = 2{,}82$ (усл. единиц).

в) В вариантах 21-30 даны $p(0)$ и $S(0)$.

Пусть $p(0) = 4,\ S(0) = 49,\ t_1 = 2{,}0$. Составляем функцию предложения

$$S(0) = 6p''(0) + 2p'(0) + 62p(0) - 36.$$

$$S(0) = 6(-28C_2 - 45C_1) + 2(7C_2 - 2C_1) + 62(2 + C_1) - 36 =$$
$$= -154C_2 - 212C_1 + 88.$$

$$\begin{cases} p(0) = 4, \\ -154C_2 - 212C_1 + 88 = 49. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + C_1 = 4, \\ 154C_2 = -424 + 88 - 49. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ 154C_2 = -385. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2, \quad C_2 = -2{,}5.$$

$$p(t) = 2 + e^{-2t}(2\cos 7t - 2{,}5\sin 7t); \quad p(2) = 2 + e^{-4}(2\cos 14 - 2{,}5\sin 14) =$$
$$= 2 + 0{,}0183 \cdot (-2{,}20) \approx 1{,}96 \text{ (усл. единиц).}$$

Задания 5.-7. Числовые и функциональные ряды.

Числовым (функциональным) рядом называется бесконечная сумма чисел (функций), образующих последовательность $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - числовой ряд,

$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - функциональный ряд.

Ряд задан, если известна формула его *общего члена* $u_n = f(n),\ n \in N$.
Сумма $u_1 + u_2 + ... + u_n = S_n$ называется n-ой частичной суммой ряда.
Суммой ряда называется конечный или бесконечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Ряд, имеющий конечную сумму, называется *сходящимся*; в противном случае – *расходящимся*.

Бесконечная геометрическая прогрессия

$a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Если $|q| < 1$, то $S = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \dfrac{a}{1-q}$.

Гармонический ряд *расходится* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...=\infty$.

Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{сходится, если } p>1,\\ \text{расходится, если } 0<p\le 1.\end{cases}$$

Необходимый признак сходимости.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ - расходящийся.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд может сходиться, а может и расходиться.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

1. ***Признак сравнения***. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A\ (\ne 0;\ \ne\infty)$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ ведут себя одинаково, т.е. сходятся или расходятся одновременно.

2. ***Признак Д'Аламбера.*** Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то при $l<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ -сходится; при $l>1$ – расходится; при $l=1$ – признак не дает ответа.

3. ***Интегральный признак Коши.*** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)\,dx$ ведут себя одинаково, т.е. сходятся или расходятся одновременно.

Знакопеременные ряды.

Знакопеременный числовой ряд содержит как положительные, так и отрицательные члены. Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится ряд, составленный из модулей его членов, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Сходимость знакопеременного ряда в этом случае называется *абсолютной*.
Сходимость знакопеременного ряда называется *условной*, если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется *знакочередующимся*.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, $u_n > 0$, сходится, если: 1) его члены по абсолютной величине убывают $u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$; 2) $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$. Сумма ряда положительна и не превосходит его первого члена, т.е. $0 < S < u_1$.

При замене суммы S *сходящегося знакочередующегося числового ряда* n-ой частичной суммой S_n ошибка не превышает по абсолютной величине первого из отброшенных членов этого ряда $|S - S_n| = |r_n| \le u_{n+1}$.

Степенные ряды.

Степенными рядами называются функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ..., \quad (13)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ... + a_n (x - x_0)^n + ..., \quad (14)$$

где $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ - известные действительные числа – коэффициенты степенных рядов (13) и (14).

Множество значений x, при которых ряды (13) или (14)сходятся, называется *областью сходимости ряда*. Для определения интервала абсолютной сходимости степенного ряда можно воспользоваться признаком Д'Аламбера.

Задание 5.

Примеры. Исследовать сходимость числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

а) $u_n = \dfrac{3^n}{(n^2+1)\cdot n!}$; б) $u_n = \dfrac{1}{(n+3)\ln^4(n+3)}$; в) $u_n = \dfrac{7_n+1}{(n+3)\sqrt{n+3}}$;

г) $u_n = \dfrac{3n^2+4n+7}{n^5+6}$.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n^2+1)\cdot n!} = \dfrac{3}{2\cdot 1} + \dfrac{3^2}{5\cdot 2} + \dfrac{3^3}{10\cdot 6} + \dfrac{3^4}{17\cdot 24} + \ldots$

Здесь $u_n = \dfrac{3^n}{(n^2+1)\cdot n!}$;

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)^2+1)\cdot(n+1)!} = \frac{3^{n+1}}{(n^2+2n+2)\cdot(n+1)!},$$

$n! =$ (эн-факториал) $= 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$; $(n+1)! = n!(n+1)$.

Здесь удобно применить признак Д'Аламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n^2+1)\cdot n!}{(n^2+2n+2)\cdot n!(n+1)\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(n^2+1)}{(n^2+2n+2)(n+1)} =$$

$$= 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 3\cdot 0 = 0 < 1,$$

значит данный ряд *сходится*.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)} = \dfrac{1}{2\ln^4 2} + \dfrac{1}{3\ln^4 3} + \dfrac{1}{4\ln^4 4} + \ldots$

Нетрудно проверить, что в примерах б)-г) *признак Д'Аламбера ответа не дает*, поскольку $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)\ln^4(n+2)}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln^4(n+1)}{(n+2)\ln^4(n+2)} = 1.$$

В данном случае применим интегральный признак Коши. Составим несобственный интеграл, соответствующий ряду

$$f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)},\ 1 \le n < +\infty; \quad f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^4(x+1)},\ 1 \le x < +\infty.$$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ \ln^4(x+1)}dx = \int_1^{\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln^4(x+1)}dx = \left|\begin{array}{l}\ln(x+1)=t\\ d(\ln(x+1))=dt\\ x=1 \Rightarrow t=\ln 2\\ x=\infty \Rightarrow t=\infty\end{array}\right| =$$

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^4} = \lim_{N\to\infty}\int_{\ln 2}^{N} t^{-4}dt = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{t^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_{\ln 2}^{N} = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{3N^3}+\frac{1}{3\ln^3 2}\right) =$$

$$= 0 + \frac{1}{3\ln^3 2} = \frac{1}{3\ln^3 2} = 1{,}001 \text{ (равен конечному числу).}$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и числовой ряд.

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n+1}{(n+3)\sqrt{n+3}}$.

Признак Д'Аламбера ответа не дает, т.к.

$$u_n = \frac{7n+1}{(n+3)^{3/2}}, \qquad u_{n+1} = \frac{7(n+1)+1}{(n+4)^{3/2}} = \frac{7n+8}{(n+4)^{3/2}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(7n+8)(n+3)^{3/2}}{(n+4)^{3/2}\ (7n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(7n+8)}{(7n+1)}\cdot\left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{\frac{3}{2}} = 1.$$

Несложно составить соответствующий несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{7x+1}{\sqrt{(x+3)^3}}dx.$$

Сложнее вычислить этот интеграл или доказать его расходимость. Поэтому воспользуемся признаком сравнения.

Выпишем общий член u_n данного ряда и найдем общий член v_n нового ряда из условия их эквивалентности

$u_n \sim v_n$ при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

$$u_n = \frac{7n+1}{\sqrt{(n+3)^3}} \qquad v_n = \frac{7n}{\sqrt{n^3}} = \frac{7}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\sqrt{n}} = 7\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{N\to\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^N = 2\lim_{N\to\infty}(\sqrt{N}-1) = \infty \Rightarrow$ несобственный интеграл расходится, значит расходятся и сравниваемые ряды.

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4n+7}{n^5+6}$.

Сравним его с рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, который сходится как обобщенный гармонический ряд с $p = 3 > 1$.

$$u_n = \frac{3n^2+4n+7}{n^5+6}, \quad v_n = \frac{1}{n^3}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+4n+7)\,n^3}{n^5+6} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{7}{n^3}}{1+\dfrac{6}{n^5}} = 3.$$

Отсюда следует, что оба ряда ведут себя одинаково, т.е. *сходятся.*

Задание 6.

а) $u_n = \dfrac{3n+5}{n^2+2n+4}$, $\quad n = 6$.

б) $u_n = \dfrac{n^2\sqrt{n}+2}{6^n}$, $\quad n = 4$.

а) Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+5}{n^2+2n+4}$ может сходиться абсолютно и условно. Исследуем его на условную сходимость по признаку Лейбница. Проверяем условия:

1. $u_n \ge u_{n+1}$, $n \in N$; 2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

$$u_1 = \frac{3+5}{1+2+1} = \frac{8}{4} = 2;\; u_2 = \frac{6+5}{4+4+4} = \frac{11}{12};\; u_3 = \frac{9+5}{9+6+4} = \frac{14}{19};$$

$$u_4 = \frac{12+5}{16+8+4} = \frac{17}{28};\; u_5 = \frac{15+5}{25+10+4} = \frac{20}{39};\; u_6 = \frac{18+5}{36+12+4} = \frac{23}{52};\; \ldots$$

$u_1 = 2$; $u_2 = 0{,}9167$; $u_3 = 0{,}7368$; $u_4 = 0{,}6071$; $u_5 = 0{,}5128$; $u_6 = 0{,}4423$;...
Очевидно, что $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > u_5 > u_6 > \ldots$ Чтобы убедиться, что последовательность u_n убывающая для любого n, составим непрерывную функцию $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+2x+4}$ и найдем $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{3(x^2+2x+4)-(3x+5)(2x+2)}{(x^2+2x+4)^2} = \frac{3x^2+6x+12-6x^2-16x-10}{(x^2+2x+4)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2-16x+2}{(x^2+2x+4)^2} = -\frac{3x^2+16x-2}{(x^2+2x+4)^2} < 0 \quad \text{при} \quad x \ge 1.$$

Значит, функция $f(x)$ - убывающая для $x \ge 1$, а последовательность $u_n = f(n)$ - убывающая для любого $n \in N$. Первое условие выполнено.
Второе условие признака Лейбница
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+5}{n^2+2n+4} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2} = 0$ также выполнено. Значит, данный ряд *сходится условно.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+5}{n^2+2n+4} = 2 - \frac{11}{12} + \frac{14}{19} - \frac{17}{28} + \frac{20}{39} - \frac{23}{52} + \ldots = S.$$

Его сумма положительна и $S<2$.

Если $S \approx S_6$, *то* $|S - S_6| = |r_6| < u_7$.

$$u_7 = \frac{3 \cdot 7 + 5}{7^2 + 2 \cdot 7 + 4} = \frac{21+5}{49+14+4} = \frac{26}{67} = 0{,}388 < 0{,}4;$$

$$S \approx 2 - \frac{11}{12} + \frac{14}{19} - \frac{17}{28} + \frac{20}{39} - \frac{23}{52} = 2 - 0{,}92 + 0{,}74 - 0{,}61 + 0{,}51 - 0{,}44 = 1{,}28 \approx 1{,}3;$$

$S = 1{,}3 \pm 0{,}4$.

Исследуем знакочередующийся ряд на абсолютную сходимость. Составим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{3n+5}{n^2+2n+4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n^2+2n+4} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Сравним поведение этого ряда с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+5)\cdot n}{(n^2+2n+4)\cdot 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}} = 3.$$

Отсюда следует, что ряды ведут себя одинаково, т.е. расходятся, поскольку гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - расходится.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2\sqrt{n}+2}{6^n}$, $\quad n = 4$.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Составим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n}+2}{6^n}.$$

Применим признак Д'Аламбера

$$u_n = \frac{n^2\sqrt{n}+2}{6^n}; \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2\sqrt{n+1}+2}{6^{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^2\sqrt{n+1}+2)\cdot 6^n}{6^{n+1}(n^2\sqrt{n}+2)}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\sqrt{n+1}+2}{n^2\sqrt{n}+2}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}=\frac{1}{6}<1,$$

значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *сходится,* а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ *сходится абсолютно.*

Всякий абсолютно сходящийся ряд сходится и условно. Вычислим его сумму приближенно, взяв первых четыре члена ряда и оценим допускаемую при этом погрешность.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2\sqrt{n}+2}{6^n}=\frac{1+2}{6}-\frac{4\sqrt{2}+2}{6^2}+\frac{9\sqrt{3}+2}{6^3}-\frac{16\sqrt{4}+2}{6^4}+\frac{25\sqrt{5}+2}{6^5}-\ldots=S,$$

$$|S-S_4|=|r_4|<u_5;\ u_5=\frac{25\sqrt{5}+2}{6^5}=\frac{57{,}9017}{7776}=0{,}0074;\ \ u_5<0{,}01.$$

Заменяем сумму ряда четвертой частичной суммой, вычисления ведем до трех знаков после запятой, а затем округляем результат до сотых долей.

$$S\approx S_4=\frac{3}{6}-\frac{4\sqrt{2}+2}{36}+\frac{9\sqrt{3}+2}{6^3}-\frac{16\sqrt{4}+2}{64}=0{,}500-0{,}213+0{,}081-$$

$$-0{,}026=0{,}342=0{,}34.$$

$$S=0{,}34\pm0{,}01.$$

Задание 7.

а) $a_n=\dfrac{5n+2}{(n+3)\cdot 7^n}$, $x_0=4$.

б) $a_n=\dfrac{4n^2-1}{n^4+3}$, $x_0=-6$.

а) Дан степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{(n+3)\cdot 7^n}\cdot(x-4)^n. \qquad (15)$$

Найдем интервал его *абсолютной сходимости.* Для этого применим к ряду из модулей признак Д'Аламбера

$$|u_n(x)| = \frac{5n+2}{(n+3)\cdot 7^n}\cdot|x-4|^n, \quad |u_{n+1}(x)| = \frac{5n+7}{(n+4)\cdot 7^{n+1}}\cdot|x-4|^{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(5n+7)\cdot|x-4|^{n+1}\cdot(n+3)\cdot 7^n}{(n+4)\cdot 7^{n+1}\cdot(5n+2)\cdot|x-4|^n} = \frac{|x-4|}{7}\times$$

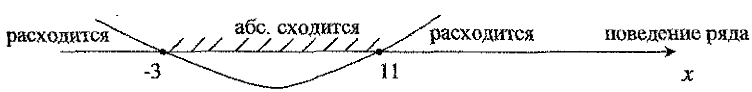
$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+7)(n+3)}{(n+4)(5n+2)} = \frac{|x-4|}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2}{5n^2} = \frac{|x-4|}{7}.$$

Если $\dfrac{|x-4|}{7} < 1 \Leftrightarrow |x-4| < 7 \Leftrightarrow -7 < x-4 < 7 \Leftrightarrow -3 < x < 11$, то ряд (15) *сходится абсолютно.*

Если $\dfrac{|x-4|}{7} > 1 \Leftrightarrow |x-4| > 7$ т.е. $\left|\begin{array}{l} x-4>7, \\ x-4<-7. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x>11, \\ x<-3, \end{array}\right.$

т.е. $x\in(-\infty;-3)\cup(11;+\infty)$, то ряд (15) расходится.

Если $\dfrac{|x-4|}{7} = 1 \Leftrightarrow |x-4| = 7 \Leftrightarrow x = 4\pm 7$, то признак Д'Аламбера ответа не дает.



Исследуем поведение ряда (15) на концах интервала сходимости, т.е. при $x=-3$ и $x=11$.

1) $x=-3$. $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{5n+2}{n+3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot u_n, \quad u_n = \dfrac{5n+2}{n+3}.$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+2}{n+3} = 5 \neq 0$, то ряд *расходится.*

2) $x=11$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n+2}{(n+3)\cdot 7^n}(11-4)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(5n+2)\cdot 7^n}{(n+3)\cdot 7^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n+2}{n+3}$ -

ряд *расходящийся,* т.к. его общий член не стремится к нулю при $n\to\infty$ (не выполняется необходимый признак сходимости ряда).

Таким образом, *областью сходимости* степенного ряда (15) является интервал $-3 < x < 11$.

б) Рассматриваем степенной ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-1}{n^4+3}(x+6)^n$. (16)

Составляем ряд из модулей и применяем признак Д'Аламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-1}{n^4+3} \cdot |x+6|^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(4(n+1)^2-1)\cdot|x+6|^{n+1}\cdot(n^4+3)}{((n+1)^4+3)\cdot(n^4-1)\cdot|x+6|^n} = |x+6| \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2\cdot n^4}{n^4\cdot 4n^2} = |x+6|.$$

Если $|x+6|<1 \Leftrightarrow -1<x+6<1 \Leftrightarrow -7<x<-5$, то ряд (16) *сходится абсолютно.*

Если $|x+6|>1$, т.е. $x \in (-\infty;-7)\cup(-5;+\infty)$, то ряд (16) *расходится.*

При $x=-7$ и $x=-5$ нужно дополнительное исследование.

1) $x=-7$. $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n^2-1}{n^4+3}$, (17)

2) $x=-5$. $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-1}{n^4+3}$. (18)

Очевидно, что ряд (18) сходится по признаку сравнения с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-1}{n^4+3} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2-1)n^2}{n^4+3} = 4.$

Значит, ряд (17) *сходится абсолютно.* Следовательно, *областью сходимости* степенного ряда (16) является отрезок $x \in [-7;-5]$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ведина О.И., Десницкая В.Н. и др. Математика. Математический анализ для экономистов.-М.: «Филинъ», 2000.-356 с.
2. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш.Кремера. - 3-е изд. - М.: ЮНИТИ - ДАНА, 2007.-479 с.
3. Высшая математика: Общий курс / Под ред. С.А.Самаля. - 2-е изд. - Мн.: Выш. шк., 2000.-352 с.
4. Гусак А.А., Гусак Г.М., Бричикова Е.А. Справочник по высшей математике.- 6-е изд. - Мн.: ТетраСистемс, 2005.-640 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах .- 5-е изд. - М.: Высш.шк., 1997. Ч.1. - 304 с.; Ч.2. – 416с.
6. Жевняк Р.М., Карпук А.А. и др. Общий курс высшей математики. – Орша: АРФА, 1996.-318 с.
7. Индивидуальные задания по высшей математике: Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Под ред. А.П.Рябушко. – 2-е изд. - Мн.: Выш. шк., 2000.- 396 с.
8. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов.- М.: ИНФРА-М, 1997.-208 с.
9. Красс М.С. Математика для экономических специальностей.- 3-е изд. - М.: Дело. – 2002.-704 с.
10. Малыхин В.И. Математика в экономике.- М.: ИНФРА-М, 1999.- 356 с.
11. Минюк С.А., Ровба Е.А. Высшая математика.- 3-е изд. - Гродно: ГрГУ, 2004.-408 с.
12. Минюк С.А., Самаль С.А., Шевченко Л.И. Высшая математика для экономистов. Т. 1. – Мн.: «Элайда», 2003. – 526 с.
13. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. В.И.Ермакова.-М.: ИНФРА-М, 2000.-656 с.
14. Руководство к решению задач по высшей математике. / Под ред. Е.И. Гурского.-Мн.: Выш. шк.,1989.Ч.1.-350с.; Ч.2.-1990.-400 с.
15. Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под ред. В.И.Ермакова.-М.: ИНФРА-М, 2001.-575 с.
16. Солодовников А.С., Бабайцев В.А. и др. Математика в экономике. Ч. 2.-М.: Финансы и статистика, 1999.-376 с.
17. Справочник по математике для экономистов / Под. ред. В.И.Ермакова.-М.: Высш. шк., 1997.-384 с.
18. Тузик А.И. Высшая математика. Интегрирование функций одной и нескольких переменных.-Брест: БГТУ, 2000.-129 с.
19. Тузик А.И. Высшая математика. Ряды. – Брест: БГТУ, 2003. – 123 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Тузик Татьяна Александровна
Тузик Альфред Иванович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ОБЩИЙ КУРС

Контрольные работы №3, №4

Методические указания и варианты заданий для студентов-заочников экономических специальностей

Второе издание, переработанное

Ответственный за выпуск *А.И.Тузик*
Редактор *Т.В.Строкач*
Компьютерный набор *Д.Н.Мищирук*
Компьютерная графика *И.И.Гладкий*

Подписано в печать 21.02.2007 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Бумага «Снегурочка». Усл. п. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,75. Тираж 150 экз.
Заказ № 247. Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.