Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания аттестационных работ
по курсу **«Высшая математика»**
для студентов строительного факультета

Брест 2010

УДК 517.9

В настоящей методической разработке приведены теоретические вопросы 4 семестра, основные формулы и задания, аттестационные работы №7 «Теория вероятностей» и №8 «Статистика». Приведен вариант решений обоих аттестационных работ.

Составители: Пархимович И.В., доцент, канд. физ-мат. наук
Гоголинская Р.А., ассистент
Остапчук Е.М., ассистент
Юхимук Т.Ю., ассистент

Рецензент: доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, канд. физ-мат. наук, доцент Дежурко Ю.И.

Вопросы учебной программы
4 семестр

1. Классификация событий.
2. Вероятность события (классическая и статическая вероятность).
3. Теоремы сложения вероятностей событий.
4. Теоремы умножения вероятностей событий.
5. Формула полной вероятности. Формула гипотез.
6. Формула Бернулли.
7. Локальная теорема Лапласа. Формула Пуассона.
8. Интегральная теорема Лапласа.
9. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.
10. Интегральная функция распределения и ее свойства.
11. Дифференциальная функция распределения и ее свойства.
12. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.
13. Биномиальный закон распределения. Пуассоновский закон распределения.
14. Равномерный закон распределения.
15. Нормальный закон распределения.
16. Показательный закон распределения.
17. Распределение Хи-квадрат. Распределение – Фишера-Снедекора.
18. Выборочный метод, виды выборки. Генеральная и выборочная совокупности.
19. Полигон и гистограмма.
20. Эмпирическая функция распределения, кумулята.
21. Числовое оценивание параметров распределения, требования несмещенности, эффективности и состоятельности оценок.
22. Выборочные средние, дисперсия и среднеквадратическое отклонение. Исправленная дисперсия.
23. Интервальное оценивание параметров генеральной совокупности.
24. Эмпирическая функция.
25. Статические гипотезы. Критерий согласия Пирсона.
26. Элементы теории корреляции.
27. Корреляционная таблица.
28. Нелинейная и множественная корреляции.

Основные формулы и теоремы IV семестра.

1. $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ – число размещений из n элементов по k элементов.

2. $P_n = 1\cdot 2\cdot \dots \cdot n = n!$ – число перестановок из n элементов.

3. $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k элементов.

4. $P(A) = \frac{m}{n}$, m – число благоприятствующих, n – общее число несовместных элементарных исходов, образующих полную группу событий.

5. Для несовместных событий:
$P(A+B) = P(A) + P(B)$

6. $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, если $A_1, A_2, \dots, A_n$ – образуют полную группу несовместных событий.

7. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ или $P + q = 1$ $\quad (P = P(A), q = P(\bar{A}))$

8. $P(AB) = P(A)P_A(B)$
$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C)$

9. $P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$ - вероятность появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности.

10. $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)$ - формула полной вероятности.

11. $P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}$ $\quad (i = \overline{1,n})$ – формула гипотез (формула Бейеса).

12. $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ – формула Бернулли.

13. $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ – локальная теорема Лапласа.

14. $P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$, $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ - интегральная теорема Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - функция Лапласа.

15. $P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ – распределение Пуассона.

16. $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \approx \bar{X}$: математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

17. Свойство математического ожидания:
a) $M(C) = C$; b). $M(kX) = kM(X)$; c). $M(XY) = M(X)M(Y)$;
d). $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

18. $D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2$

Рабочая формула дисперсии: $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$

19. Свойства дисперсии:

а) $D(C) = 0$; b). $D(kX) = k^2 DX$; c). $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

20. $F(x) = P(X < x)$ – интегральная функция распределения (и. ф. р.).

Свойства и. ф. р.:

а) $0 \leq F(x) \leq 1$; b). Если $\forall\, x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$;

с) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$; d). Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a; b), то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ и $F(x) = 1$ при $x \geq b$;

е) Для непрерывной случайной величины X, расположенной на всей числовой оси $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

21. $f(x) = F'(x)$ - дифференциальная функция распределения или функция плотности (д.ф.р.)

Свойства д.ф.р.:

а) $f(x) \geq 0$; b). $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

22. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq a \\ \frac{1}{b-a} \text{ при } a < x \leq b \\ 0 \text{ при } x > b \end{cases}$ – д.ф. равномерного распределения

23. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ – д.ф. нормального распределения

24. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа

25. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$ – д.ф. показательного распределения

26. $F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}$ – эмпирическая функция распределения, определяющая для каждого значения x относительную частоту события (X<x).

27. Критерий согласия Пирсона

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'},$$

n_i – эмпирические, n_i' – теоретические частоты.

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза отвергается, если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза принимается.

$$\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2(\alpha, x)$$

Аттестационная работа «Теория вероятностей»

Задание №1

1. Из партии втулок, изготовленных за смену токарем, случайным образом отбирается для контроля 10 шт. Найти вероятность того, что среди отобранных втулок 2 – второго сорта, если во всей партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго.
2. Из восьми книг две художественные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех книг хотя бы одна художественная.
3. На полке шесть радиоламп, из которых две негодные. Случайным образом отбираются две радиолампы. Какова вероятность того, что они годны для использования?
4. В группе из 8 спортсменов 6 мастеров спорта. Найти вероятность того, что из двух случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один – мастер спорта.
5. В шахматном турнире участвуют 10 гроссмейстеров, шесть международных мастеров и четыре мастера. Шахматисты для первого тура и номер столика для каждой пары участников определяются путем жеребьевки. Найти вероятность того, что за первым столиком встретятся шахматисты одной и той же категории.
6. В запасе ремонтной мастерской 10 поршневых колец, три из них восстановленные. Определить вероятность того, что среди взятых наугад четырех колец два окажутся восстановленными?
7. В партии, состоящей из 20 радиоприемников, пять неисправных. Наугад берут 3 радиоприемника. Какова вероятность того, что в число выбранных войдут 1 неисправный и 2 исправных радиоприемника?
8. В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 – коричневого цвета, а остальные – черного. Произвольно отбирают 8 пар сапог. Какова вероятность того, что все выбранные сапоги – черного цвета?
9. Из пруда, в котором плавают сорок щук, выловили пять щук, пометили их и пустили обратно в пруд. Во второй раз выловили девять щук. Какова вероятность, что среди них окажутся только две помеченные щуки?
10. В урне три белых и семь черных шаров. Какова вероятность того, что извлеченные наугад два шара окажутся черными?
11. В мастерскую для ремонта поступило 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер берет любые пять телевизоров. Какова вероятность того, что два из них нуждаются в настройке?
12. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях – четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.
13. При перевозке ящика, в котором содержались 21 стандартных и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, причем неизвестно какая. Наудачу извлеченная (после перевозки) из ящика деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная делать; б) нестандартная деталь.
14. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равные шести).
15. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь №1; б) детали №1 и №2.

16. В пачке 20 перфокарт, помеченных номерами 101, 102, ..., 120 и произвольно расположенных. Перфораторщица наудачу извлекает две карты. Найти вероятность того, что извлечены перфокарты с номерами 101 и 120.

17. В ящике имеется 15 деталей, среди которых десять окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

18. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

19. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

20. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

21. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

22. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся три кинескопа Львовского завода.

23. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны девять студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

24. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

25. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся две девушки.

26. Среди кандидатов в студенческий совет факультета три первокурсника, пять второкурсников и семь третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности событий: А – будут отобраны одни третьекурсники, В – будет отобран такой состав: один первокурсник, два второкурсника и два третьекурсника.

27. В ящике 30 деталей, среди которых 5 бракованных. Найти вероятность того; что наугад взятая из ящика деталь окажется бракованной.

28. На складе хранятся в нерассортированном виде 20 изделий первого сорта и 10 – второго. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти изделий два будут второго сорта.

29. Из ящика, в котором находится 31 стандартная и 6 нестандартных деталей, взято наугад 3 детали. Какова вероятность следующих событий: а) все три детали стандартны; б) по крайней мере одна деталь стандартная?

30. В ящике 5 изделий первого сорта, 10 – второго сорта и 15 – третьего сорта. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие – не третьего сорта.

Задание №2

1. В прибор входят четыре радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,3; 0,2; 0,4; 0,25. Какова вероятность того,

что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее трех радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна.

2. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,5; 0,6; 0,75. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) три камеры; б) не более двух камер; в) хотя бы одна камера.

3. Самолет обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,75; 0,85; 0,6. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) тремя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором.

4. В схему входят три узла. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны: 0,15; 0,3; 0,1. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) два узла; б) ни одного узла; в) хотя бы один узел.

5. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,75, второй – 0,9, третий – 0,85. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) три экзамена; б) не менее одного экзамена; в) более одного экзамена.

6. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,7, третьим – 0,65. Все стрелки сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) один раз.

7. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, высшего качества, равна 0,5, для второго – 0,75, для третьего – 0,9. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) две высшего качества; б) хотя бы две высшего качества; в) одна высшего качества.

8. На железобетонном заводе изготавливают панели, 90% из которых высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели.

9. В первом ящике 20 деталей, 15 из них стандартные, во втором 30 деталей, 25 из них стандартные. Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что: а) обе детали будут стандартными; б) хотя бы одна делать стандартная; в) обе детали нестандартные.

10. Первый станок-автомат дает 1% брака, второй – 1,5%, а третий – 2%. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Какова вероятность того, что стандартными окажутся: а) три детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь?

11. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6. Найти вероятность успешного преодоления: а) трех препятствий; б) не менее двух препятствий; в) двух препятствий.

12. В коробках находятся детали: в первой – 20, из них 13 стандартных; во второй – 30, из них 26 стандартных. Из каждой коробки наугад берут по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали окажутся нестандартными; б) одна деталь нестандартна; в) обе детали стандартны.

13. Для аварийной сигнализации установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,9, второй – 0,7. Найти вероятность того, что при аварии: а) сработают оба сигнализатора; б) не сработает ни одни сигнализатор; в) сработает хотя бы один сигнализатор.

14. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для станка №1 составляет 3%, для станка №2 – 4%. С каждого станка взяли по одной

детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали стандартные; б) одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные.

15. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени Т первого блока равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6, четвертого – 0,4. Найти вероятность того, что в течение времени Т проработают: а) все четыре блока; б) три блока; в) не менее трех блоков.

16. На участке 3 бригады, работающих независимо друг от друга. Вероятность выполнения плана первой бригадой – 0,7, второй – 0,9, третьей – 0,8. Найти: а) вероятность выполнения плана участком; б) вероятность выполнения плана только одной бригадой; в) вероятность выполнения плана хотя бы одной бригадой.

17. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень соответственно равна 0,8, 0,85, 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) А – {хотя бы одно попадание в мишень}, б) В – {не меньше двух попаданий}, в) С – {попадание в мишень после первого выстрела}.

18. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Какова вероятность того, что газеты получат вовремя: а) все три отделения; б) два отделения; в) хотя бы одно отделение?

19. Три станка работают независимо. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1; для второго и третьего станков эти вероятности соответственно равны 0,2 и 0,3. Какова вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) все три станка; б) два станка; в) хотя бы один станок?

20. Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,4. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) тремя стрелками; б) двумя стрелками; в) только одним стрелком.

21. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках соответственно равна 0,6, 0,7, 0,8. Найти вероятность того, что формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

22. Для одной бригады вероятность выполнения нормы равна 0,8, для другой – 0,85. Какова вероятность, что норму выполнят: а) обе бригады; б) одна бригада; в) хотя бы одна бригада?

23. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,7. Какова вероятность того, что студент сдаст: а) не менее двух экзаменов; б) два экзамена; в) хотя бы один экзамен?

24. Три орудия ведут огонь по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле из первого орудия 0,5, из второго 0,6 и из третьего 0,7. Зная, что каждое оружие стреляет один раз, найти вероятность поражения цели, если для этого достаточно двух попаданий. Чему равна вероятность того, что в цель попали только из двух орудий? Чему равна вероятность того, что в цель попали из всех орудий.

25. В мастерскую по ремонту телевизоров поступили две партии радиоламп определенного типа. В первой партии ламп в три раза больше, чем во второй. Из большего числа нерассортированных ламп мастер берет две первые попавшиеся. Чему равна вероятность того, что обе лампы окажутся: а) из какой-либо одной партии; б) из разных партий?

26. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

27. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

28. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что стандартными окажутся: а) все три вынутые детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь.

29. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны: 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль будет обнаружен: а) тремя станциями; б) не менее чем двумя станциями; в) ни одной станцией.

30. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4, из второго – 0,5. Сделано по одному выстрелу. Найти вероятность того, что: а) самолет уничтожен двумя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель.

Задание №3

1. На сборку поступают детали с трех автоматов, причем с первого 30%, со второго 40% и с третьего 30% всех деталей. Вероятность брака для первого автомата равна 0,02, для второго – 0,03, для третьего 0,04. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь – бракованная. б) Взятая наугад деталь оказалась бракованной. С какого автомата она вероятнее всего поступила?

2. Прибор состоит из двух узлов одного типа и трех узлов второго типа. Надежность работы в течение времени T для узла первого типа равна 0,8, а для узла второго типа – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный узел проработает в течение времени T. б) Узел проработал гарантийное время T. К какому типу он вероятнее всего относится?

3. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправны, второй – 10, из них 3 неисправных. а) Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию. б) Наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

4. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. а) Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь окажется отличного качества. б) Наугад взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Каким автоматом она вероятнее всего произведена?

5. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле с винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0.8. а) Найти вероятность того, что стрелок поразит мишень из наудачу взятой винтовки; б) Стрелок поразил мишень из наугад взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

6. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы – 0.7. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную института. б) Студент попал в сборную института. В какой группе он вероятнее всего учится?
7. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. а) Найти вероятность того, что к бензоколонке подъедет для заправки машина. б) К бензоколонке подъехала для заправки машина. Что вероятнее, к бензоколонке подъехала грузовая или легковая машина?
8. В телевизионном ателье имеется 2 кинескопа первого типа и 8 второго типа. Вероятность выдержать гарантийный срок для кинескопов первого типа равна 0,9, а для второго типа – 0,6. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад кинескоп выдержит гарантийный срок; б) взятый наугад кинескоп, выдержавший гарантийный срок, первого типа.
9. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести других ящиках с 20 шарами в каждом – по 4 красных шара. Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наудачу взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков.
10. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому комплекту перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,05; для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,1. а) Найти вероятность того, что при свертке перфокарт будет обнаружена ошибка; б) При свертке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица. (Предполагается, что оба перфоратора были исправны)
11. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попало к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равно 0,9, а вторым – 0,98. а) Найти вероятность того, что стандартное изделие при проверке будет признано стандартным. б) Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.
12. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей – на заводе №2, 18 деталей – на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. а) Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества. б) Извлеченная наудачу деталь оказалась отличного качества. На каком заводе она вероятнее всего изготовлена?
13. Сборщик получил 3 ящика деталей: в первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором – 50, из них 10 окрашенных; в третьем – 30 деталей, из них 15 окрашенных. а) Найти вероятность того, что наугад извлеченная деталь из наугад извлеченного ящика окажется окрашенной. б) Наугад извлеченная деталь из наугад извлеченного ящика оказалась окрашенной. Из какого ящика она вероятнее всего извлечена?
14. На складе имеется 60% приемников первого класса, остальные второго. Вероятность того, что приемник первого класса не выйдет из строя в течение гарантийного срока 0,9, а для второго класса 0,8. а) Найти вероятность того, что наудачу взятый приемник вы-

держит гарантийный срок службы. б) Наудачу взятый приемник выдержал гарантийный срок службы. К какому классу он вероятнее всего принадлежал?

15. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов, 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму равна: для лыжника 0,9, для велосипедиста 0,8 и для бегуна 0,75. а) Найти вероятность того, что спортсмен, вызванный наудачу, выполнит норму. б) Спортсмен, вызванный наудачу, выполнил норму. Что вероятнее: он был лыжником или велосипедистом, или бегуном?

16. На двух станках производятся одинаковые детали. Вероятность того, что деталь, произведенная первым станком, будет стандартной, равна 0,8, а вторым – 0,9. Производительность второго станка втрое больше производительности первого. а) Найти вероятность того, что деталь, взятая наудачу с транспортера, на который сбрасываются детали с обоих станков, будет стандартной. б) Деталь, взятая наудачу с транспортера, на который сбрасываются детали с обоих станков, оказалась стандартной. На каком станке она вероятнее всего произведена?

17. Имеется 6 коробок диодов типа А и 8 коробок диодов типа В. Вероятность безотказной работы диодов типа А равна 0,8, типа В – 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад диод проработает гарантийное число часов. б) Взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. К какому типу он вероятнее всего относится?

18. В вычислительной лаборатории 40% микрокалькуляторов и 60% дисплеев. Во время расчета 90% микрокалькуляторов и 80% дисплеев работают безотказно. а) Найти вероятность того, что наугад взятая вычислительная машина проработает безотказно во время расчета. б) Выбранная машина проработала безотказно во время расчета. К какому типу вероятнее всего она принадлежит?

19. При отклонении от штатного режима работы на поточной линии срабатывают сигнализатор типа Т-1 с вероятностью 0,9 и сигнализатор типа Т-2 с вероятностью 0,8. Вероятности того, что линия снабжена сигнализаторами типа Т-1 и Т-2 соответственно равны 0,7 и 0,3. а) Найти вероятность того, что при отклонении от штатного режима работы сигнализатор сработает. б) Сигнализатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит?

20. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными: 0,2; 0,3; 0,5. Вероятность брака на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01. Найти: а) вероятность того, что случайно взятая после обработки деталь – стандартная; б) вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной.

21. На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков: 60% от первого и 40% от второго. Брак микросхем первого поставщика составляет 3%, а второго – 2%. а) Какова вероятность того, что взятая наудачу микросхема окажется бракованной? б) Взятая наудачу микросхема оказалась бракованной. От какого поставщика она вероятнее всего поступила?

22. Изделие поступает на обработку на одну из трех линий производительностью 7, 3, 10 изделий в час соответственно. Брак может возникнуть на любой из этих трех линий, причем наблюдения показали появление дефектов: на первой – 6% изделий, на второй – 4%, на третьей – 2% изделий. Считая, что вероятность попадания изделий на ту или иную линии пропорциональна ее производительности, определить: а) вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным; б) вероятность того, что случайно выбранное бракованное изделие изготовлено на первой линии.

23. Предохранитель в электрической цепи отказывает при коротком замыкании в электронной лампе с вероятностью 0,45, при замыкании в обмотке трансформатора – с вероятностью 0,62, при пробое конденсатора – вероятность 0,78, по другим причинам – с вероятностью 0,3. Априорные вероятности этих событий соответственно 0,25, 0,18, 0,12, 0,45. а) Найти вероятность отказа предохранителя; б) Определить наиболее вероятную причину отказа предохранителя после того, как такое событие произошло.

24. Имеется 4 урны. В первой урне 1 белый и 1 черный шары. Во второй урне 2 белых и 3 черных шара. В третьей урне 3 белых и 5 черных шаров. В четвертой урне 4 белых и 7 черных шаров. Событие H_i – выбор i-ой урны (i = 1, 2, 3, 4). Дано, что вероятность выбора i-ой урны равна $\frac{i}{10}$, т.е. $P(H_1)=\frac{1}{10}, P(H_2)=\frac{1}{5}, P(H_3)=\frac{3}{10}, P(H_4)=\frac{2}{5}$. Выбирается наугад одна из урн и вынимается из нее шар. а) Найти вероятность того, что этот шар белый. б) Из выбранной наугад урны вынут белый шар. Найти вероятность того, что шар белый вынут из первой урны.

25. На склад поступает продукция с трех фабрик. Поступления с первой фабрики составляют 20%, со второй – 46%, с третьей – 34%. Вероятность брака для первой фабрики равна 0,03, для второй – 0,02, для третьей – 0,01. а) Найти вероятность того, что взятое наугад изделие окажется нестандартным; б) Найти вероятность того, что в случае, когда взятое наугад изделие нестандартно, оно произведено на первой фабрике.

26. В цехе 3 станка-автомата штампуют детали одного вида. Производительность первого станка в два раза больше, а третьего – в два раза меньше производительности второго станка. Вероятность брака для первого станка равна 0,05, для второго – 0,03, для третьего – 0,01. Изготовленные детали складываются в один ящик. а) Найти вероятность того, что наугад взятая из ящика деталь окажется бракованной. б) Наугад взятая из ящика деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым станком.

27. В канцелярии работают 4 секретаря, которые обрабатывают по 40, 10, 30 и 20% исходящих документов за одно и то же время. Вероятности неверной адресации документов секретарями соответственно равны: 0,01; 0,04; 0,06; 0,01. а) Найти вероятность того, что один из документов окажется неверно адресованным. б) Найти вероятность того, что один из документов, оказавшийся неверно адресованным, отправлен третьим секретарем.

28. 20% приборов монтируется с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодуля – 0,9, интегральных схем – 0,8. Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он был исправен.

29. По линии связи передано два сигнала типа А и В с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60% сигналов типа А и 70% типа В. Найти вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал типа А.

30. На участке, изготовляющем болты, первый станок производит 25%, второй – 35%, третий – 40% всех изделий. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт – с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке.

Задание №4

1. Два равносильных противника играют в шахматы. Найти вероятность выиграть из 6 партий: а) две; б) не менее двух партий; в) три партии.

2. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз; в) два раза.

3. Вероятность появления события А в каждом из четырех независимых испытаний равна 0,4. Найти вероятность того, что событие А появится: а) не менее трех раз; б) три раза; в) два раза.

4. В цеху работают четыре станка, причем вероятность остановки в течение часа для каждого из них одна и та же и равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение часа остановится: а) половина станков; б) менее половины станков; в) не менее половины станков.

5. В урне 30 шаров: 20 белых и 10 черных. Вынули подряд четыре шара, причем каждый вынутый шар возвращается в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешиваются. Найти вероятность того, что среди вынутых четырех шаров будет: а) два белых; б) не менее двух белых; в) три белых шара.

6. В классе 30 учеников: 20 мальчиков и 10 девочек. На каждый из трех вопросов, заданных учителем, ответили по одному ученику. Какова вероятность того, что среди ответивших было: а) два мальчика; в) не более двух мальчиков; в) один мальчик?

7. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы, равна р=0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии не превысит нормы в течение: а) четырех суток; б) менее трех суток; в) трех суток.

8. В цехе шесть моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

9. По данным технического контроля, в среднем 2% изготовленных на заводе автоматических станков нуждаются в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из шести изготовленных станков нуждаются в дополнительной регулировке: а) четыре станка; б) менее трех станков; в) более трех станков?

10. Производится 5 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,1. Найти вероятность того, что событие А появится: а) два раза; б) не менее четырех раз; в) менее четырех раз.

11. Устройство, состоящее из шести независимо работающих элементов, включается на время t. Вероятность отказа каждого из элементов за это время равна 0,3. Найти вероятность того, что за время t откажут: а) четыре элемента; б) не более трех элементов; в) два элемента.

12. При каждом выстреле из винтовки вероятность поражения мишени равна 0,7. Найти вероятность того, что при шести выстрелах мишень будет поражена: а) два раза; б) более четырех раз; в) менее трех раз.

13. В магазин вошли 10 покупателей. Вероятность совершить покупку для каждого покупателя одна и та же и равна 0,2. Найти вероятность того, что совершат покупки: а) шесть покупателей; б) менее трех покупателей; в) не менее восьми покупателей.

14. Пусть всхожесть семян ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдет: а) 5 семян; б) менее трех семян; в) более пяти семян?

15. Игральная кость подброшена 10 раз. Найти вероятность выпадения единицы: а) семь раз; б) менее трех раз; в) более пяти раз.

16. 30% изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Некто приобрел 6 изделий, изготовленных на этом предприятии. Чему равна вероятность того, что: а) че-

тыре из них высшего сорта; б) менее трех изделий высшего сорта; в) более четырех изделий высшего сорта?

17. Вероятность выигрыша по облигации займа за всё время его действия равна 0,25. Какова вероятность того, что некто, приобретя восемь облигаций, выиграет: а) шесть из них; б) менее трех облигаций; в) более шести облигаций?

18. Оптовая база обслуживает 6 магазинов. Вероятность получения заявки базой на данный день для каждого из магазинов равна 0,6. Найти вероятность того, что в этот день будет: а) пять заявок; б) не менее пяти заявок; в) не более пяти заявок.

19. Продукция, поступающая из цеха в ОТК, не удовлетворяет условиям стандарта в среднем в 8% случаев. Найти вероятность того, что из наугад взятых семи изделий не удовлетворяет условиям стандарта: а) шесть изделий; б) не менее шести изделий; в) менее шести изделий.

20. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) семь; б) не более семи; в) более семи.

21. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найти вероятность того, что экзамен сдадут: а) пять студентов; б) не менее пяти студентов; в) не более пяти студентов.

22. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,8. Найти вероятность того, что из шести изделий контроль пройдут: а) пять изделий; б) не менее пяти изделий; в) не более пяти изделий.

23. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80% высшего сорта. Найти вероятность того, что среди пяти изделий: а) хотя бы четыре высшего сорта; б) четыре высшего сорта; в) не более четырех высшего сорта.

24. Вероятность перевыполнения годового плана для каждого из восьми рабочих 0,8. Найти вероятность того, что перевыполнят годовой план: а) хотя бы один рабочий; б) двое рабочих; в) трое рабочих.

25. Вероятность попадания в цель равна 0,3. Одновременно сбрасывается 6 бомб. Найти вероятность того, что в цель попадают: а) четыре бомбы; б) не менее четырех бомб; в) не более четырех бомб.

26. В телеателье имеется семь телевизоров. Для каждого телевизора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) четыре телевизора; б) хотя бы один телевизор; в) не менее трех телевизоров.

27. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80%. Найти вероятность того, что из 6 посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех; в) четыре.

28. Вероятность потопить судно одной торпедой равна 0,2. Выпущено пять торпед. Найти вероятность того, что имеет место: а) три попадания в судно; б) не менее трех попаданий; в) четыре попадания.

29. В данной партии хлопка имеется 20% коротких волокон. Найти вероятность того, что в наугад взятом пучке из шести волокон окажется: а) не более трех коротких; б) более трех коротких волокон; в) три коротких волокна.

30. Среди вырабатываемых рабочим деталей в среднем 3% бракованных. Найти вероятность того, что среди взятых наугад шести деталей: а) три бракованных; б) не более трех бракованных; в) не менее трех бракованных.

Задание №5

1. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 и не более 1500 раз.

2. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

3. Найти вероятность того, что событие А наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

6. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p=0,8$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз.

7. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

8. Из партии, в которой доля первосортных деталей равна 0,8, отобрано 60 единиц (с возвратом). Определить вероятность того, что среди отобранных деталей окажется 30 первого сорта.

9. Монета была подброшена 40 раз. Пользуясь локальной теоремой Лапласа, найти вероятность того, что герб выпадет в 25 случаях.

10. Бюффон бросил монету 4040 раз. При этом герб выпал 2048 раз. С какой вероятностью можно было ожидать этот результат?

11. Приняв вероятность рождения мальчика, равной 0,515, найти вероятность того, что среди 80 новорожденных 42 мальчика.

12. Автоматическая штамповка клемм для предохранителей дает 10% отклонение от прямого стандарта. Сколько стандартных клемм следует ожидать с вероятностью 0,0587 среди 400 клемм?

13. При установившемся технологическом процессе фабрика выпускает в среднем 70% продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число первосортных заключено между 652 и 760?

14. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700, если вероятность, что отдельное изделие будет высшего сорта, равна 0,62.

15. Проведено 700 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события А равна 0,7. Найти вероятность того, что частота появления события А окажется заключенной между 460 и 600.

16. Найти вероятность того, что число мальчиков среди 1000 новорожденных больше 480, но меньше 540 (вероятность рождения мальчика принять равной 0,515).

17. Было посажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 250, если вероятность, что отдельное дерево приживется, равна 0,8.

18. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

19. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.
20. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.
21. Вероятность того, что деталь не прошла ОТК, равна р=0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.
22. Вероятность того, что деталь нестандартна, р=0,1. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности р=0,1 по абсолютной величине не более чем на 0,03.
23. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 10 бракованных.
24. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Найти вероятность того, что для 800 заготовок число бракованных колец заключено между 225 и 250.
25. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность останова для каждой машины равна 0,2.
26. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность отрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на шести веретенах.
27. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.
28. Аппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента за время Т равна 0,001 и не зависит от работы других элементов. Найти вероятность отказа не менее двух элементов.
29. Вероятность того, что изделие – высшего сорта, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 – высшего сорта.
30. Найти вероятность поражения мишени 75 раз при 100 выстрелах, если вероятность поражения при одном выстреле равна 0,8.

Задание №6

Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения F(x). Вычислить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение δ(x). Построить график функции распределения F(x).

1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. СВ X – число отказавших элементов в одном опыте.
2. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали. СВ X – число нестандартных деталей среди четырех отобранных.
3. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наугад отобраны 2 детали. СВ X – число стандартных деталей среди отобранных.
4. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. СВ X – число стандартных деталей среди отобранных.
5. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 50 руб. и 10 выигрышей по 1 руб. СВ X – стоимость возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

6. Монета брошена 2 раза. СВ X – число выпадений герба.
7. Игральная кость брошена 3 раза. СВ X – число появлений шестерки.
8. Стрелок производит по мишени 3 выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. СВ X – число поражений цели при трех выстрелах.
9. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из четырех студентов равна 0,8. СВ X – число студентов, сдавших экзамен.
10. Вероятность выхода из строя каждого из трех блоков прибора в течение гарантийного срока равна 0,3. СВ X – число блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока.
11. Вероятность попадания мячом в корзину при каждом броске для данного баскетболиста равна 0,4. СВ X – число попаданий при 4 бросках.
12. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/6. СВ X – число выигрышных билетов из четырех.
13. Вероятность отказа прибора за время испытания на надежность равна 0,2. СВ X – число приборов, отказавших в работе, среди пяти испытываемых.
14. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии 3 прибора. СВ X – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества.
15. Производятся три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,4, вторым – 0,5, третьим – 0,6. СВ X – число поражений мишени.
16. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено четыре независимо работающих светофора. Каждый светофор с интервалом в две минуты подает красный и зеленый сигналы. СВ X – число остановок автомобиля на этой улице.
17. В первой студенческой группе из 24 человек 4 отличника, во второй из 22 человек 3 отличника, в третьей из 24 – 6 отличников и в четвертой из 20 – 2 отличника. СВ X – число отличников, приглашенных на конференцию, при условии, что из каждой группы выделили случайным образом по одному человеку.
18. Вероятность поражения цели каждым из трех стрелков соответственно равны 0,7, 0,8, 0,6. СВ X – число поражений цели при условии, что каждый из стрелков сделал по одному выстрелу.
19. Вероятность попадания в корзину при каждом броске для данного баскетболиста равна 0,4. СВ X – число попаданий при четырех бросках.
20. Проводятся три независимых измерения исследуемого образца. Вероятность допустить ошибку в каждом измерении равна 0,01. СВ X – число ошибок, допущенных в измерениях.
21. В партии из 25 изделий 6 бракованных. Для контроля их качества случайным образом отбирают четыре изделия. СВ X – число бракованных изделий среди отобранных.
22. Из 30 приборов, испытываемых на надежность, 5 высшей категории. Наугад взяли четыре прибора. СВ X – число приборов высшей категории среди отобранных.
23. Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна 0,9, второго экзамена – 0,8, третьего – 0,7. СВ X – число сданных экзаменов.
24. В партии из 15 телефонных аппаратов 5 неисправных. СВ X – число неисправных аппаратов среди трех случайным образом отобранных.
25. Вероятность перевыполнения плана для СУ-1 равна 0,9, для СУ-2 – 0,8, для СУ-3 – 0,7. СВ X – число СУ, перевыполнивших план.
26. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7, третьего типа – 0,8. СВ X – число телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров разных типов.

27. 90% панелей, изготовляемых на железобетонном заводе – высшего сорта. СВ Х – число панелей высшего сорта из 4, взятых наугад.

28. Вероятность того, что деталь с первого автомата удовлетворяет стандарту, равна 0,9, для второго автомата – 0,8, для третьего – 0,7. СВ Х – число деталей, удовлетворяющих стандарту, при условии, что с каждого автомата взято наугад по одной детали.

29. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Наугад взято две детали. СВ Х – число стандартных деталей среди выбранных.

30. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,4, для четвертого – 0,5. СВ Х – число станков, вышедших из строя за смену.

Задание №7

Дана функция распределения F(x) СВ X. Найти плотность распределения вероятностей f(x), математическое ожидание M(X), дисперсию D(X).

Построить графики функций F(x) и f(x).

1. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \text{ если } -1 \le x \le 2 \\ 1, \text{если } x > 2 \end{cases}$

2. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le 1 \\ \frac{x^2 - x}{24}, \text{если } 1 < x \le 3 \\ 1, \text{если } x > 3 \end{cases}$

3. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 1 \\ \frac{1}{2}(x-1), \text{если } 1 \le x \le 3 \\ 1, \text{если } x > 3 \end{cases}$

4. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2}(1 + \sin 2x), \text{если } -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 1, \text{если } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

5. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{1}{5}x, \text{если } 0 \le x \le 5 \\ 1, \text{если } x > 5 \end{cases}$

6. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 2\pi \\ \sin x, \text{если } 2\pi \le x \le \frac{5\pi}{2} \\ 1, \text{если } x > \frac{5\pi}{2} \end{cases}$

7. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \text{если } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, \text{если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

8. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \sin x, \text{если } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, \text{если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

9. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{1}{4}x, \text{если } 0 \le x \le 4 \\ 1, \text{если } x > 4 \end{cases}$

10. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le 2 \\ \frac{1}{2}x - 1, \text{если } 2 \le x \le 4 \\ 1, \text{если } x > 4 \end{cases}$

11. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), \text{если } 0 \le x \le \pi \\ 1, \text{если } x > \pi \end{cases}$

12. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{x^2}{25}, \text{если } 0 \le x \le 5 \\ 1, \text{если } x > 5 \end{cases}$

13. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < -\frac{\pi}{2} \\ \cos x, \text{если } -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ 1, \text{если } x > 0 \end{cases}$

14. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ 1 - \cos x, \text{если } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1, \text{если } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

15. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{x^3}{8}, \text{если } 0 \le x \le 2 \\ 1, \text{если } x > 2 \end{cases}$

16. $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{x^2}{4}, \text{если } 0 \le x \le 2 \\ 1, \text{если } x > 2 \end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<-\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(1+\sin x), \text{если } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \\ 1, \text{если } x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ 18. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<0 \\ x^2, \text{если } 0\le x\le 1 \\ 1, \text{если } x>1 \end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<-1 \\ \frac{1}{2}(x+1), \text{если } -1\le x\le 1 \\ 1, \text{если } x>1 \end{cases}$ 20. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<4 \\ \frac{1}{2}x-2, \text{если } 4\le x\le 6 \\ 1, \text{если } x>6 \end{cases}$

21. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x\le -1 \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, \text{если } -1\le x\le\frac{1}{3} \\ 1, \text{если } x>\frac{1}{3} \end{cases}$ 22. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<1 \\ x-1, \text{если } 1\le x\le 2 \\ 1, \text{если } x>2 \end{cases}$

23. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<1 \\ \frac{1}{3}(x-1), \text{если } 1\le x\le 4 \\ 1, \text{если } x>4 \end{cases}$ 24. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<0 \\ \frac{1}{24}(x^2+2x), \text{если } 0\le x\le 4 \\ 1, \text{если } x>4 \end{cases}$

25. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<2 \\ (x-2)^2, \text{если } 2\le x\le 3 \\ 1, \text{если } x>3 \end{cases}$ 26. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<1 \\ \frac{1}{2}(x^2-x), \text{если } 1\le x\le 2 \\ 1, \text{если } x>2 \end{cases}$

27. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<\frac{\pi}{2} \\ -\cos x, \text{если } \frac{\pi}{2}\le x\le\pi \\ 1, \text{если } x>\pi \end{cases}$ 28. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<1 \\ \frac{1}{4}(x^3-2x), \text{если } 1\le x\le 2 \\ 1, \text{если } x>2 \end{cases}$

29. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<0 \\ \frac{1}{96}(x^3+8x), \text{если } 0\le x\le 4 \\ 1, \text{если } x>4 \end{cases}$ 30. $F(x)=\begin{cases} 0, \text{если } x<0 \\ \frac{1}{20}(x^2+x), \text{если } 0\le x\le 4 \\ 1, \text{если } x>4 \end{cases}$

Задание №8

1. Закон равномерного распределения задан плотностью вероятности $f(x)=\frac{1}{b-a}$ в интервале (a; b); вне этого интервала f(x)=0. Найти функцию распределения F(x).
2. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно a=3 и среднее квадратичное отклонение δ=2. Написать плотность вероятности X.
3. Написать плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X, зная, что M(X)=3, D(X)=16.
4. Найти математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной в интервале (a; b).
5. Найти математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной в интервале (2; 8).
6. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.
7. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12; 14).
8. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (a; b).

9. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2; 8).

10. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15; 25).

11. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением δ=10 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

12. Равномерно распределенная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{2l}$ в интервале (a-l; a+l); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

13. Диаметр круга x измерен приближенно, причем $a \le x \le b$. Рассматривая диаметр как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (a; b), найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

14. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением δ=20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

15. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением δ=0,4 мм., найти, сколько в среднем будет годных шариков среди 100 изготовленных.

16. Учебник издан тиражом 100.000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

17. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

18. Бросают три игральные кости. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на всех гранях.

19. Ребро куба x измерено приближенно, причем $a \le x \le b$. Рассматривая ребро куба как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (a; b), найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

20. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием a=10. Вероятность попадания X в интервал (10; 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0; 10)?

21. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

22. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \ge 0$; при x<0 f(x)=0. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,13; 0,7).

23. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X – в интервале (a; b), Y – в интервале (c; d). Найти математическое ожидание произведения XY.

24. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a=25$. Вероятность попадания X в интервал (10; 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35; 40)?

25. Найти среднее число A бракованных изделий в партии изделий, если вероятность того, что в этой партии содержится хотя бы одно бракованное изделие, равна 0,95. Предполагается, что число бракованных изделий в рассматриваемой партии распределено по закону Пуассона.

26. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделий в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

27. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X – в интервале (a; b), Y – в интервале (c; d). Найти дисперсию произведения XY.

28. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью P, не меньшей, чем 0,95?

29. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при $x \geq 0$: а) плотностью $f(x) = 5e^{-5x}$; б) функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$.

30. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности $f(x) = 10e^{-10x}$ ($x \geq 0$).

Решение типового варианта

Задание №1. В группе спортсменов 7 лыжников и 3 конькобежца. Из нее случайным образом выделены 3 спортсмена. Найти вероятность того, что все выбранные спортсмены окажутся лыжниками.

Решение

Число всех равновозможных случаев отбора трех спортсменов из 10 спортсменов равно числу сочетаний из 10 элементов по 3, т.е. C_{10}^3. 3 лыжника можно выбрать из 7 лыжников числом способов, равным числу сочетаний из 7 элементов по 3, т.е. C_7^3. Число C_7^3 равно количеству благоприятствующих случаев событию A.

Т.е. $m=C_7^3$, $n=C_{10}^3$. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3}; P(A) = \frac{7!\,3!\,7!}{3!\,4!\,10!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{8\cdot 9\cdot 10} = \frac{7}{24} \approx 0,29$$

Задание №2. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение смены потребует его внимания первый станок, равна 0,7; второй – 0,65; третий – 0,55. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют его внимания: а) два станка; б) не менее двух станков; в) хотя бы один станок.

Решение

Пусть событие A состоит в том, что в течение смены потребуют внимания рабочего два станка.

Обозначим событие, состоящее в том, что внимания рабочего потребует первый станок, H_1. Событие H_2 состоит в том, что в течение смены внимания рабочего потребует второй станок. H_3 – событие, состоящее в том, что в течение смены внимания рабочего потребует третий станок.

Из условий задачи находим $P(H_1)=0,7$; $P(H_2)=0,65$; $P(H_3)=0,55$.

$P(\bar{H}_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $P(\bar{H}_2) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$; $P(\bar{H}_3) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

Событие А равно сумме трех событий: $A = H_1 \cdot H_2 \cdot \bar{H}_3 + H_1 \cdot \bar{H}_2 \cdot H_3 + \bar{H}_1 \cdot H_2 \cdot H_3$.

Все три слагаемых – несовместные события.

Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Так как события H_1, H_2, H_3 – независимые в совокупности события, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей. Тогда вероятность события А найдем по формуле:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\bar{H}_3) + P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(H_3) + P(\bar{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3) =$$
$$= 0{,}7\cdot 0{,}65\cdot 0{,}45 + 0{,}7\cdot 0{,}35\cdot 0{,}55 + 0{,}3\cdot 0{,}65\cdot 0{,}55 = 0{,}20475 + 0{,}13475 + 0{,}10725 \approx 0{,}447$$

Пусть событие В состоит в том, что не менее двух станков потребуют внимания рабочего в течение смены.

$$B = H_1\cdot H_2\cdot \bar{H}_3 + H_1\cdot \bar{H}_2\cdot H_3 + \bar{H}_1\cdot H_2\cdot H_3 + H_1\cdot H_2\cdot H_3$$
$$P(B) = P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot P(\bar{H}_3) + P(H_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(H_3) + P(\bar{H}_1)\cdot P(H_2)\cdot P(H_3) + P(H_1)\cdot P(H_2)\cdot$$
$$\cdot P(H_3) = 0{,}7\cdot 0{,}65\cdot 0{,}45 + 0{,}7\cdot 0{,}35\cdot 0{,}55 + 0{,}3\cdot 0{,}65\cdot 0{,}55 + 0{,}7\cdot 0{,}65\cdot 0{,}55 = 0{,}44675 +$$
$$+ 0{,}25025 = 0{,}697.$$

Пусть событие С состоит в том, что хотя бы один станок потребует внимания рабочего в течение смены. Событие С противоположно событию, которое состоит в том, что ни один станок не потребует внимания рабочего в течение смены, тогда $\bar{C} = \bar{H}_1\cdot \bar{H}_2\cdot \bar{H}_3$.

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(\bar{H}_1)\cdot P(\bar{H}_2)\cdot P(\bar{H}_3) = 1 - 0{,}3\cdot 0{,}35\cdot 0{,}45 = 1 - 0{,}04725 \approx 0{,}953.$$

Задание №3. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено четыре вертолета первого типа и шесть вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат. б) К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат?

Решение

Для данного опыта возможны гипотезы: H_1={выбранный вертолет первого типа}, H_2={выбранный вертолет второго типа}. Вероятности гипотез равны:

$$P(H_1) = \frac{2}{5}; P(H_2) = \frac{3}{5}.$$

Пусть событие А={выбранный вертолет обнаружит спускаемый аппарат}. Условные вероятности этого события известны: $P(A/H_1)=0{,}6$; $P(A/H_2)=0{,}7$.

Используя формулу полной вероятности, находим:

$$P(A) = \frac{2}{5}\cdot 0{,}6 + \frac{3}{5}\cdot 0{,}7 = 0{,}66.$$

После опыта вероятности гипотез H_1, H_2 станут равными:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{0{,}66} \approx 0{,}3636;$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}7}{0{,}66} \approx 0{,}6364.$$

Таким образом, вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат, вероятнее всего принадлежит ко второму типу.

Задание №4. В семье четверо детей. Принимая равновероятным рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что мальчиков в семье: а) три; б) не менее трех; в) два.

Решение

а) Вероятность рождения мальчика p=0,5, тогда q=1-p=0,5 – вероятность рождения девочки. Вероятность $P_n(m)$ того, что в n независимых испытаниях событие наступит m раз, определяется формулой Бернулли: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

По условию задачи n=4, m=3, p=0,5, q=0,5. Тогда $P_4(3) = C_4^3 0{,}5^3 0{,}5 = 0{,}25$.

б) Пусть А – событие, состоящее в том, что мальчиков в семье не менее трех.

Тогда $P(A) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 0{,}5^3 0{,}5 + C_4^4 0{,}5^4 0{,}5^0 = 0{,}3125$.

в) По условию задачи n=4, m=2, p=0,5, q=0,5.

Тогда $P_4(2) = C_4^2 0{,}5^2 0{,}5^2 = 0{,}375$.

Задание №5. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится не менее 104 раз, если вероятность его наступления в каждом независимом испытании равна 0,2.

Решение

Требование, чтобы событие появилось не менее 104 раз, означает, что число появлений события может быть равно 104 либо 105, ..., либо 400.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$.

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа.

$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Необходимо принять k_1=104 и k_2=400. По условию n=400, p=0,2, q=0,8.

Найдем x' и x'': $x' = \frac{104 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 3$, $x'' = \frac{400 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 40$

$P_{400}(104;400) = \Phi(40) - \Phi(3) = 0{,}5 - 0{,}49865 = 0{,}00135$.

Задание №6. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока каждого из 3 узлов прибора соответственно равны: 0,2; 0,3; 0,1. Случайная величина X – число узлов, вышедших из строя в течение гарантийного срока. Найти закон распределения указанной дискретной случайной величины X и ее функцию распределения F(x). Вычислить математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратичное отклонение δ(X). Построить график функции распределения F(x).

Решение

Случайная величина X может принимать значения 0, 1, 2, 3.

Обозначим через H_1 событие, состоящее в том, что первый узел прибора выйдет из строя в течение гарантийного срока, H_2 – второй узел прибора выйдет из строя в течение гарантийного срока, H_3 – третий узел прибора выйдет из строя в течение гарантийного срока.

По условию $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}3$, $P(H_3)=0{,}1$

$P(\bar{H}_1) = 0{,}8$, $P(\bar{H}_2) = 0{,}7$, $P(\bar{H}_3) = 0{,}9$.

Пусть событие А состоит в том, что ни один узел прибора не выйдет из строя в течение гарантийного срока. Событие А выражается через события H_1, H_2, H_3 следующий образом: $A = \bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2 \cdot \bar{H}_3$. События H_1, H_2, H_3 независимые в совокупности события. Поэтому $P(A) = P(\bar{H}_1) \cdot P(\bar{H}_2) \cdot P(\bar{H}_3)$

P(A)=0,8 · 0,7 ·0,9 = 0,504.

Пусть событие В состоит в том, что только один узел прибора выйдет из строя в течение гарантийного срока. Событие В равно сумме трех несовместных событий:

$B = H_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot \overline{H}_3 + \overline{H}_1 \cdot H_2 \cdot \overline{H}_3 + \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot H_3.$

$P(B) = P(H_1) \cdot P(\overline{H}_2) \cdot P(\overline{H}_3) + P(\overline{H}_1) \cdot P(H_2) \cdot P(\overline{H}_3) + P(\overline{H}_1) \cdot P(\overline{H}_2) \cdot P(H_3).$

$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}126 + 0{,}216 + 0{,}056 = 0{,}398$

Пусть событие С состоит в том, что два узла выйдут из строя в течение гарантийного срока.

$C = H_1 \cdot H_2 \cdot \overline{H}_3 + H_1 \cdot \overline{H}_2 \cdot H_3 + \overline{H}_1 \cdot H_2 \cdot H_3$

$P(C) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(\overline{H}_3) + P(H_1) \cdot P(\overline{H}_2) \cdot P(H_3) + P(\overline{H}_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3)$

$P(C) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}054 + 0{,}014 + 0{,}024 = 0{,}092.$

Пусть событие D состоит в том, что все три узла выйдут из строя в течение гарантийного срока.

$D = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3, \quad P(D) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006.$

Получаем закон распределения случайной величины X

x	0	1	2	3
P	0,504	0,398	0,092	0,006

Найдем математическое ожидание M(X):

$M(X) = 0 \cdot 0{,}504 + 1 \cdot 0{,}398 + 2 \cdot 0{,}092 + 3 \cdot 0{,}006 = 0{,}398 + 0{,}184 + 0{,}018 = 0{,}6.$

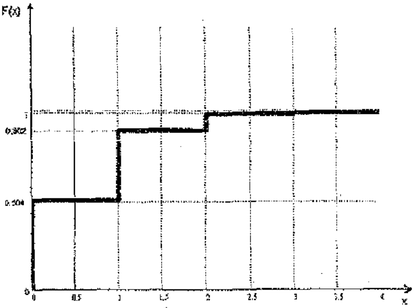
$M(X^2) = 0^2 \cdot 0{,}504 + 1^2 \cdot 0{,}398 + 2^2 \cdot 0{,}092 + 3^2 \cdot 0{,}006 = 0{,}82$

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 0{,}82 - 0{,}6^2 = 0{,}82 - 0{,}36 = 0{,}46;$

$\delta(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0{,}68$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \le 0 \\ 0{,}504, \text{если } 0 < x \le 1 \\ 0{,}902, \text{если } 1 < x \le 2 \\ 0{,}994, \text{если } 2 < x \le 3 \\ 1, \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Построим график функции F(x).



Задание №7. Дана функция распределения F(x) СВ X. Найти плотность распределения вероятностей f(x), математическое ожидание M(X), дисперсию D(X). Построить графики функций F(x) и f(x).

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{1}{9}x^2, \text{если } 0 \le x \le 3 \\ 1, \text{если } x > 3 \end{cases}$$

<u>Решение</u>

Т.к. f(x)=F'(x), то $f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x < 0 \\ \frac{2}{9}x, \text{если } 0 \le x \le 3 \\ 0, \text{если } x > 3 \end{cases}$

Далее вычисляем:

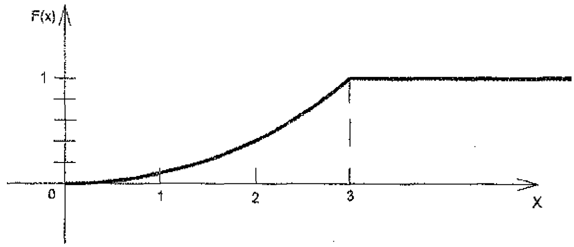
$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^3 x \cdot \frac{2}{9} x dx = \frac{2}{9} \int_0^5 x^2 dx = \left(\frac{2}{9}\right) \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 2.$

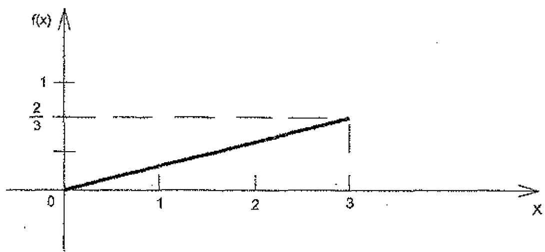
$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2$$

Найдем $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^3 x^2 f(x)dx=\int_0^3 x^2\cdot\frac{2}{9}xdx=\frac{2}{9}\int_0^3 x^3dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^3=\frac{9}{2}$

$$D(X)=\frac{9}{2}-4=0{,}5.$$

Построим графики функций F(x) и f(x):





Задание №8. а) Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 30 и средним квадратичным отклонением 10. Найти вероятность попадания СВ X на отрезок [10; 50].

Решение

Пусть a=M(X) – математическое ожидание случайной величины X и δ – среднее квадратичное отклонение.

Для нормального распределения

$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\delta}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\delta}\right)$, где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функция Лапласа, значения которой определяются из приложения.

По условию задачи M(X)=30, δ=10.

$P(10<x<50)=\Phi\left(\frac{50-30}{10}\right)-\Phi\left(\frac{10-30}{10}\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)=0{,}9544.$

б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение СВ X, распределенной равномерно в интервале (8; 14).

Решение

Для равномерного распределения плотность $f(x)=\frac{1}{b-a}$ на интервале (a; b); вне этого интервала f(x)=0.

Следовательно, на интервале (8; 14) $f(x)=\frac{1}{6}$; вне этого интервала f(x)=0. Найдем M(X) и D(X).

$$M(X)=\int_8^{14} x\cdot\frac{1}{6}dx=\frac{1}{6}\int_8^{14} xdx=\frac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_8^{14}=\frac{1}{12}(196-64)=\frac{132}{12}=11$$

$$D(X)=\int_8^{14} x^2\cdot\frac{1}{6}dx-121=\frac{1}{6}\int_8^{14} x^2dx-121=\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_8^{14}-121=\frac{1}{18}(2744-512)-121=$$
$$=124-121=3$$

$$\delta(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{3}.$$

в) Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: 1) ровно две; 2) менее двух; 3) более двух; 4) хотя бы одну.

Решение

1) Число n=1000, p=0,003 мало, и рассматриваемые события (повреждения бутылок) независимы, поэтому имеет место формула Пуассона:

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$\lambda=np=1000\cdot 0.003=3.$

Найдем вероятность того, что магазин получит ровно две (k=2) разбитых бутылки:

$P_{1000}(2)=\frac{3^2e^{-3}}{2!}=\frac{9\cdot 0,04979}{2}\approx 0,224.$

2) Найдем вероятность того, что будет разбито менее двух бутылок:

$P_{1000}(0)+P_{1000}(1)=\frac{3^0e^{-3}}{0!}+\frac{3^1e^{-3}}{1!}=0,04979+0,14937\approx 0,1992.$

3) Найдем вероятность P того, что будет разбито более двух бутылок. Событие «разбито более двух бутылок» и «разбито не более двух бутылок» (обозначим вероятность этого события через Q) – противоположны, поэтому P+Q=1. Отсюда

$$P=1-Q=1-\left(P_{1000}(0)+P_{1000}(1)+P_{1000}(2)\right)=1-(0,04979+0,14937+0,224055)=$$
$$=1-0,423215\approx 0,5768.$$

4) Найдем вероятность P_1 того, что будет разбита хотя бы одна бутылка. События «разбита хотя бы одна бутылка» и «ни одна из бутылок не разбита» (обозначим вероятность этого события через Q_1) – противоположные, следовательно $P_1+Q_1=1$. Отсюда

$P_1=1-Q_1=1-P_{1000}(0)=1-0,04979\approx 0,95.$

г) Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при x≥0 плотностью распределения $f(x)=0,04e^{-0,04x}$; при x<0 функция f(x)=0. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (1; 2).

Решение

По условию $f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x<0\\ 0,04e^{-0,04x}, \text{при } x\geq 0\end{cases}$.

Параметр λ=0,04.

Вероятность попадания в интервал (a; b) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону,

$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$

Следовательно,

$P(1<X<2)=e^{-0,04\cdot 1}-e^{-0,04\cdot 2}=e^{-0,04}-e^{-0,08}\approx 0,9608-0,9231\approx 0,038.$

Аттестационная работа «Математическая статистика»

Задание 1. Дан статистический ряд чисел. Необходимо:

1. Составить вариационный ряд.
2. Определить размах варьирования, найти по формуле Стерджеса оптимальное число интервалов, длину интервалов.
3. Составить интервальное распределение частот выборки.
4. Построить гистограмму частот и график эмпирической функции распределения.
5. Найти числовые характеристики выборки.
6. По критерию Пирсона проверить данное распределение, взяв в качестве нулевой гипотезу H_0 – данные распределены по нормальному закону (уровень значимости $\alpha=0.05$).
7. Найти формулу для дифференциальной функции нормального распределения и построить ее график по гистограмме относительных частот.
8. Построить доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения при надежности $\gamma=0.95$.

Варианты задания № 1

Вариант №1

1,1	3,2	3,9	1,9	2,5	3,6	1,6	1,9	1,6	3,5
2,8	2,4	3,3	3,6	0,6	2,6	1,9	1,5	1,9	4,1
3,2	3,1	1,3	2,6	3,7	1,7	0,7	2,9	0,7	1,6
2,7	1,3	3,6	1,5	0,8	2,8	2,4	3,1	2,4	3,9
2,1	3,5	4,2	0,7	1,9	2,0	0,9	1,2	0,9	3,2
4,1	2,4	1,1	2,8	3,3	3,2	2,0	2,5	2,0	2,9
1,1	4,0	2,7	2,5	3,7	3,5	1,5	1,9	1,5	2,4
2,1	2,5	1,7	2,0	4,1	3,9	0,8	2,8	0,8	3,3
1,3	2,0	2,4	2,9	1,6	2,4	2,3	3,2	2,3	2,9
2,1	1,1	2,7	2,7	2,4	3,1	1,5	0,9	1,5	2,3

Вариант №2

7,1	3,1	6,1	7,3	3,3	4,5	1,9	2,2	7,9	6,5
6,8	7,9	7,3	6,9	6,4	2,8	3,4	4,3	7,7	8,0
7,2	5,6	7,5	6,3	7,5	4,3	7,4	7,9	6,9	7,9
6,5	3,5	8,0	3,0	4,5	7,0	4,5	8,0	6,8	8,0
6,7	8,0	7,9	7,8	5,4	6,7	6,8	7,8	5,1	7,5
7,8	7,9	7,6	6,3	4,1	8,0	7,9	5,6	4,0	6,2
4,9	7,3	7,8	7,7	6,3	5,4	7,8	4,8	3,9	5,4
7,9	6,8	4,3	7,8	7,1	7,3	6,9	3,5	7,4	7,3
8,0	6,9	4,1	7,1	7,1	7,8	4,2	7,4	7,8	4,2
4,5	4,7	6,3	7,0	7,8	2,5	2,5	2,1	8,0	3,1

Вариант №3

15,8	26,7	32,7	29,2	22,6	30,0	31,6	24,3	30,4	20,3
30,7	22,5	30,0	27,3	25,4	26,2	20,7	28,1	19,3	28,9
22,5	30,9	25,7	28,0	17,8	22,0	30,1	22,1	18,4	24,4
24,7	29,8	18,2	29,6	23,4	18,1	16,9	24,2	24,1	32,2
19,1	32,5	22,4	24,0	22,3	15,0	23,6	16,6	25,8	25,3
26,9	19,7	21,5	19,8	16,8	21,7	26,4	23,2	22,9	26,6
18,8	22,7	28,8	18,6	16,0	15,2	27,5	25,1	27,1	23,1
29,1	16,8	31,9	28,0	20,9	24,9	27,7	25,5	21,2	26,3
21,1	29,7	23,7	21,4	30,8	26,8	17,2	24,8	31,5	17,4
32,1	20,6	24,5	28,7	27,9	20,4	33,0	20,0	26,0	29,5

Вариант №4

67	82	123	32	92	17	91	76	53	74
125	109	51	106	54	85	102	61	117	36
66	52	73	85	46	33	62	35	56	88
98	81	65	80	104	37	69	86	76	60
41	83	19	79	85	76	84	128	75	72
58	68	108	79	105	74	99	83	103	70
82	124	80	49	63	91	50	71	30	100
111	96	107	93	77	85	120	43	89	116
112	95	80	64	42	121	119	34	135	114
143	90	113	47	63	78	81	94	20	97

Вариант №5

31,2	52,9	44,1	59,9	35,1	56,2	48,9	44,7	54,2	35,9
48,8	66,7	38,8	69,6	49,4	68,5	28,3	67,1	53,0	56,6
55,1	27,9	54,6	43,5	60,3	45,8	53,8	43,3	56,9	49,1
45,5	70,8	48,3	36,6	71,1	40,5	71,3	34,7	52,8	57,1
29,4	49,7	42,9	59,1	21,4	57,3	47,5	48,8	60,5	39,1
42,4	71,4	32,4	53,5	46,2	53,3	41,2	61,4	28,6	58,4
30,3	54,8	47,3	41,1	51,3	49,9	36,8	62,7	50,2	46,8
46,3	72,5	36,1	58,8	29,1	58,6	50,6	46,5	37,2	64,2
62,9	26,1	66,1	50,7	63,1	47,1	40,9	63,4	51,1	34,1
34,3	50,8	40,8	46,9	38,3	79,0	65,9	29,8	63,5	59,7

Вариант№6

2,05	1,68	0,99	1,86	1,64	2,28	1,23	2,69	2,01	1,70
1,29	1,80	2,68	1,41	2,64	2,00	2,30	1,59	2,79	1,61
1,87	2,03	1,58	2,31	1,74	3,02	1,35	2,07	1,00	1,88
1,22	2,58	1,48	1,89	1,85	0,77	2,32	1,72	1,92	1,19
1,71	1,81	1,05	2,33	1,56	2,09	2,34	1,82	2,13	1,35
1,38	2,14	1,93	1,79	1,91	1,32	2,15	1,17	1,84	1,98
1,90	0,79	2,17	1,39	2,37	2,85	1,51	2,18	2,40	2,25
1,44	1,94	1,83	2,41	1,96	1,50	2,56	0,83	2,43	1,96
1,12	2,23	1,76	2,94	1,26	2,44	1,54	2,99	2,19	3,00
1,97	1,53	2,21	0,94	2,01	2,54	2,20	1,85	2,70	1,78

Вариант №7

182	30	44	93	95	206	176	104	135	219
249	68	142	128	207	154	31	223	187	53
173	79	33	136	119	149	75	197	242	162
73	76	178	180	80	131	101	225	129	98
90	201	146	27	241	118	203	231	132	205
137	211	58	226	84	105	46	247	147	165
161	167	171	196	81	156	252	80	184	71
243	175	252	183	125	86	186	163	49	151
122	109	209	55	126	157	29	134	133	181
78	130	153	116	62	193	179	212	130	228

Вариант №8

4,26	7,47	6,98	7,42	6,63	6,60	7,10	6,96	6,63	7,05
3,29	6,45	7,01	9,85	6,78	7,49	4,01	6,89	2,98	6,84
5,58	6,73	4,24	6,31	5,61	5,81	7,52	6,26	6,17	9,49
6,61	3,98	5,39	6,62	8,21	4,28	6,64	5,45	7,56	6,07
4,64	5,23	6,57	7,61	8,75	5,29	9,08	4,91	6,59	4,59
8,60	4,93	9,68	6,69	2,65	8,68	5,18	7,64	6,56	5,36
6,23	8,55	5,14	4,16	6,26	6,31	3,48	6,45	4,71	7,69
4,34	7,72	6,14	6,19	5,03	6,08	8,47	6,05	7,96	6,01
5,91	3,46	6,67	5,11	5,95	7,76	5,08	5,99	8,36	3,51
4,85	5,06	4,47	7,92	8,28	5,86	4,19	7,81	5,88	5,01

Вариант №9

56	50	106	83	103	31	97	33	101	86
110	81	78	77	40	74	117	126	133	70
95	122	92	47	76	89	45	69	88	98
123	79	49	78	52	35	100	84	115	58
65	94	121	91	90	83	89	41	51	114
109	80	105	30	75	15	118	74	87	72
96	107	63	104	102	83	67	59	74	34
80	18	78	79	61	61	48	111	28	141
39	93	17	62	83	119	82	32	73	112
64	66	71	77	44	72	60	81	54	68

Вариант №10

46	127	115	113	183	134	48	100	224	71
141	44	66	81	111	225	102	197	98	96
73	137	143	154	57	104	124	231	37	125
119	77	91	47	100	67	245	158	219	160
210	56	132	199	216	98	218	123	75	196
221	180	121	20	237	173	38	58	135	50
136	148	201	175	154	49	83	164	194	171
146	231	229	152	29	160	162	133	21	168
185	23	150	240	192	85	143	79	166	144
90	211	191	215	94	144	193	172	68	93

Вариант №11

45,6	38,4	53,6	49,8	41,6	27,2	36,9	45,1	56,4	57,2
30,1	66,8	39,6	54,1	50,8	38,2	42,1	22,4	50,9	37,1
39,5	48,8	23,5	48,4	61,4	60,8	33,7	39,1	35,8	36,0
45,1	52,5	50,3	44,8	53,2	55,2	50,6	55,1	40,8	31,1
51,1	51,6	45,7	50,8	46,4	21,8	28,4	50,2	46,0	42,1
66,2	33,4	42,7	29,3	42,9	50,5	45,3	46,2	58,3	52,0
49,7	45,6	59,7	45,3	36,9	44,5	49,2	59,6	44,2	50,2
32,1	44,5	37,5	41,2	62,5	50,5	34,4	46,2	47,3	25,7
37,4	44,4	47,1	46,4	45,9	41,4	41,6	64,1	43,4	46,6
52,1	40,8	34,8	35,5	36,2	28,0	56,4	40,5	38,5	41,6

Вариант №12

18,3	20,2	28,1	31,1	22,1	27,5	17,3	22,9	26,9	18,1
28,6	20,8	20,7	22,2	29,6	15,2	21,4	17,5	32,1	22,5
21,4	16,3	23,7	16,7	16,9	21,5	14,6	23,1	22,7	18,6
24,1	32,5	16,5	27,9	27,7	17,1	21,7	27,1	17,9	26,5
16,2	28,3	24,3	21,9	25,4	27,4	27,3	21,0	30,7	32,3
28,8	23,9	24,1	19,1	23,5	32,9	18,8	15,4	22,0	30,2
22,3	29,0	18,4	29,4	14,4	29,8	25,9	29,8	26,3	26,7
24,6	14,0	29,2	25,3	25,5	18,6	30,9	26,1	14,2	20,4
23,5	24,2	14,8	15,0	23,3	25,7	29,9	18,9	19,7	26,3
32,7	24,8	25,1	24,4	20,1	31,5	19,5	29,4	20,9	19,5

Вариант №13

38,4	96,3	40,1	56,1	74,2	65,3	39,3	52,3	96,2	76,5
85,4	89,4	103,5	67,2	94,5	94,4	85,8	112,1	59,1	67,3
50,1	61,6	105,6	46,1	52,1	41,2	57,4	40,7	48,1	43,1
89,1	55,9	112,4	85,3	80,2	45,7	51,4	68,6	67,4	58,6
49,9	49,7	55,3	62,0	72,0	76,7	50,9	107,1	90,9	112,5
96,7	100,9	107,4	70,1	49,5	40,3	31,6	86,3	74,7	70,9
47,3	69,9	85,1	92,1	112,6	68,3	71,4	65,8	59,9	94,9
94,2	79,5	101,2	76,4	32,7	80,1	73,4	61,4	77,1	85,7
75,9	103,4	58,7	45,1	67,7	66,2	78,4	76,9	90,1	67,5
44,4	96,5	103,8	95,1	35,1	84,1	65,8	42,6	31,8	103,9

Вариант №14

15,4	73,3	17,5	33,1	51,2	42,3	16,3	29,3	73,2	53,5
62,4	66,4	80,5	44,2	71,5	71,4	62,8	89,1	36,1	44,3
27,1	38,6	82,6	23,1	29,1	18,2	34,4	17,7	25,1	20,1
66,1	32,9	89,4	62,3	57,2	22,7	28,4	45,6	44,4	35,6
26,9	26,7	32,3	39,0	49,0	53,7	27,9	84,1	67,9	89,5
73,7	77,9	84,4	47,1	26,5	17,3	8,6	63,3	51,7	47,9
24,3	46,9	62,1	69,1	89,6	45,3	48,4	42,8	36,9	71,9
71,2	56,5	78,2	53,4	9,7	51,7	50,4	38,4	54,1	62,7
52,9	80,4	35,7	22,1	44,7	43,2	55,4	53,9	67,1	44,5
21,4	73,5	80,8	72,1	12,1	61,1	42,8	19,6	8,8	80,9

Вариант №15

66,0	52,1	77,5	28,8	24,8	25,5	80,5	25,7	43,5	19,5
53,3	31,5	46,9	48,1	79,3	43,3	27,5	27,4	75,9	44,7
48,6	44,9	29,5	78,6	27,7	27,6	52,7	80,6	27,3	51,1
32,7	66,5	58,6	57,6	66,3	80,3	69,5	50,6	71,6	27,1
43,7	20,3	47,9	66,7	56,6	68,6	26,3	70,4	47,3	50,4
35,1	65,5	11,0	37,5	81,0	63,5	53,6	15,1	26,4	51,3
50,9	45,7	58,9	23,6	40,6	13,6	34,7	52,6	49,5	18,8
43,1	76,5	36,5	67,8	64,0	55,6	63,0	62,5	51,9	72,9
19,1	68,0	65,0	11,3	19,9	39,7	14,7	41,9	17,7	35,6
67,1	35,3	22,9	64,5	38,6	33,3	40,8	49,7	42,9	25,6

Вариант №16

13,2	12,8	13,1	12,7	13,5	14,1	14,0	12,1	12,0	12,1
12,6	14,1	14,0	13,9	11,7	12,9	13,1	13,3	12,9	12,3
11,9	11,9	12,9	12,4	11,2	12,0	11,9	10,8	13,2	11,5
12,5	13,6	13,7	11,2	11,9	12,0	13,7	13,5	11,6	13,1
12,7	13,3	12,0	13,6	12,8	11,1	11,5	11,7	13,6	12,7
13,9	12,9	11,3	12,5	14,2	10,7	12,7	12,6	12,4	11,9
12,4	10,6	12,6	10,8	12,8	13,3	13,2	14,1	13,9	12,4
11,6	11,5	10,7	13,1	10,9	12,5	11,5	12,8	12,3	10,9
13,5	11,2	11,6	12,1	13,2	11,6	12,4	11,2	12,9	12,5
11,1	12,4	13,2	11,3	12,1	12,4	11,1	12,5	11,3	11,1

Вариант №17

6,13	6,31	6,55	5,56	5,59	5,78	5,31	5,15	6,37	5,66
5,69	5,39	5,71	6,30	6,16	6,09	5,91	6,17	6,12	6,21
6,59	5,85	5,90	6,48	5,10	5,54	5,13	5,45	5,37	5,21
6,34	6,38	6,29	4,99	6,45	5,79	6,10	5,75	5,84	5,46
6,51	5,65	5,17	5,18	5,77	5,08	5,07	5,14	5,67	5,16
4,91	6,51	5,87	6,11	5,44	5,45	5,73	5,94	6,25	5,81
5,82	5,48	5,47	5,64	6,60	4,80	5,24	5,53	6,19	4,86
5,51	5,28	5,83	6,28	4,84	5,96	5,86	4,83	6,39	5,74
5,76	6,18	5,27	5,29	5,27	5,19	5,63	5,68	4,81	6,08
6,14	5,49	6,15	5,93	5,88	4,85	6,39	5,35	6,27	5,38

Вариант №18

1,97	1,84	1,84	1,86	1,97	1,97	2,05	1,88	1,80	1,86
1,93	1,77	1,98	2,00	1,81	1,81	1,80	1,80	1,88	1,92
1,82	2,04	2,00	1,81	2,01	2,02	1,98	1,92	2,01	1,80
2,04	1,82	1,75	1,97	1,85	2,10	1,88	2,09	1,94	1,96
1,84	2,11	1,81	1,84	2,06	1,85	1,94	1,93	2,05	1,88
1,94	1,92	2,01	2,04	1,98	1,97	1,75	1,96	1,86	2,06
2,01	1,90	1,89	1,90	1,93	1,90	1,89	1,77	2,02	1,78
1,82	1,93	1,94	2,10	1,75	1,89	2,05	2,01	1,76	1,93
1,90	2,09	2,08	2,05	1,92	1,76	1,85	1,85	1,94	2,02
1,98	1,93	2,06	1,89	1,89	2,00	1,93	1,96	1,96	1,96

Вариант №19

23	25	99	141	116	31	125	100	24	22
82	148	59	61	77	9	6	139	94	95
55	57	78	84	15	132	67	26	41	38
81	20	137	5	131	51	92	93	80	70
135	83	27	115	30	75	28	72	68	134
79	113	129	66	63	149	60	43	84	118
127	40	88	44	136	105	121	83	7	54
39	128	42	89	76	47	45	120	110	102
111	11	114	29	90	62	74	58	119	8
86	87	7	130	46	91	104	140	56	71

Вариант №20

104	146	87	56	66	138	88	125	111	171
86	23	166	122	43	46	168	48	187	131
61	178	86	156	109	103	140	189	49	152
27	48	176	81	147	159	123	149	52	93
119	102	54	34	84	63	190	71	100	126
109	129	72	105	101	128	173	29	162	114
98	76	127	62	10	94	182	132	144	31
33	164	95	16	180	21	115	77	57	107
120	96	65	118	106	80	97	169	14	59
142	67	36	139	117	99	161	75	91	143

Вариант №21

64,0	72,7	75,9	67,4	81,6	63,8	81,7	78,7	81,8	58,4
75,8	74,0	71,9	74,1	69,6	74,9	68,0	66,9	63,6	76,2
66,0	63,0	70,2	80,2	78,8	70,0	63,4	79,4	73,6	79,2
73,0	72,6	76,0	72,2	75,2	84,9	83,5	58,8	65,9	70,4
76,6	76,5	79,0	81,5	64,6	58,1	70,7	81,8	83,7	61,2
68,9	72,8	66,3	63,2	85,1	73,7	68,2	65,5	78,2	78,4
66,1	61,0	80,0	67,8	85,0	67,7	82,4	73,9	68,5	67,2
72,9	75,4	72,3	84,8	65,1	79,8	61,8	68,4	64,2	70,6
72,5	77,2	64,8	77,9	59,2	60,6	59,1	84,2	70,5	73,2
62,4	72,0	72,4	60,4	74,6	71,1	76,4	71,7	82,2	69,8

Вариант №22

81	97	103	101	97	96	101	72	72	80
66	68	88	68	98	78	76	91	83	105
102	82	85	91	109	65	100	87	78	85
71	102	64	107	101	103	80	82	85	95
97	76	71	85	97	81	95	107	92	70
90	108	96	93	77	106	93	78	94	87
67	75	100	81	88	87	73	95	86	65
75	91	75	76	80	91	108	66	67	73
93	86	95	71	72	96	88	102	88	90
105	73	83	86	92	82	83	81	100	77

Вариант №23

5,0	3,7	4,6	4,6	4,3	3,8	5,0	3,8	3,2	3,7
4,7	2,5	3,7	3,7	4,4	2,9	4,1	2,4	4,1	4,9
3,5	4,0	5,1	4,1	2,8	4,1	2,4	4,9	3,8	4,3
4,3	3,4	4,0	3,5	3,5	3,2	3,8	4,0	4,3	3,1
4,9	2,4	3,5	2,9	3,2	3,4	4,6	3,2	2,5	4,4
3,7	4,4	3,8	4,3	4,0	4,9	3,7	3,4	5,1	3,8
4,7	3,2	2,6	3,8	3,7	4,4	2,5	3,1	2,9	4,0
2,9	2,8	4,6	3,1	2,5	3,7	4,3	2,8	4,7	3,1
3,4	3,4	3,2	2,6	3,4	3,1	3,5	3,7	4,4	2,8
4,4	3,8	4,9	3,4	5,0	4,7	4,1	4,6	3,2	4,3

Вариант №24

3,1	4,5	5,1	4,2	3,9	3,8	5,3	3,1	3,0	5,7
5,5	2,5	3,3	5,9	5,1	4,1	3,1	4,3	4,6	4,6
3,9	5,4	4,5	4,3	2,9	3,0	5,0	5,8	4,3	3,3
5,7	5,0	5,3	3,1	5,0	5,1	2,5	4,1	5,9	4,9
4,9	3,7	3,9	3,8	3,4	3,7	4,9	3,5	4,2	2,9
3,5	3,0	2,4	5,8	4,1	5,5	6,0	4,7	5,5	5,0
4,7	4,1	4,1	5,4	4,5	4,7	3,9	3,3	2,6	3,8
3,4	6,0	3,3	3,7	2,7	4,3	5,4	4,5	5,1	4,1
53	4,2	4,2	2,6	4,6	3,5	3,4	4,9	4,9	2,7
3,8	4,6	2,9	4,3	3,5	4,2	4,7	3,7	3,7	3,4

Вариант №25

3,8	3,8	3,6	3,8	2,7	3,0	2,8	4,4	3,0	3,0
3,6	4,5	4,5	3,2	3,0	4,0	3,8	3,4	3,2	3,6
3,2	4,2	3,8	4,6	4,2	2,7	4,2	3,8	3,8	4,2
3,6	3,2	3,2	4,0	4,5	3,4	4,0	3,0	4,4	4,4
4,0	3,6	2,7	3,0	4,0	4,2	3,4	4,2	3,6	3,6
4,5	3,4	4,2	3,6	3,2	3,8	3,8	2,7	3,4	3,8
3,8	3,6	3,4	3,8	3,8	3,2	4,5	3,2	3,2	3,2
3,6	3,4	4,0	3,3	3,4	3,6	3,6	3,4	2,8	4,0
3,4	4,0	3,6	3,4	3,6	3,4	3,2	3,6	3,8	2,7
2,8	3,4	3,0	4,2	4,4	4,0	4,0	4,0	4,0	3,4

Вариант №26

7,2	5,9	5,8	8,7	4,4	7,9	10,1	7,7	7,6	2,7
3,7	7,2	11,9	10,4	10,3	4,3	1,7	5,3	9,9	5,5
10,7	4,7	10,5	4,5	5,6	5,5	5,4	6,6	5,2	12,0
4,8	10,6	4,6	5,7	1,4	10,2	7,8	1,6	6,5	7,5
6,0	9,5	7,6	6,1	7,4	11,4	4,2	10,0	11,2	5,1
7,0	3,5	12,2	4,9	6,9	7,1	6,8	5,6	8,0	3,9
2,2	7,3	9,4	7,0	3,2	9,0	3,6	2,9	8,8	6,3
6,9	8,4	8,3	9,3	9,2	8,0	9,0	6,7	2,8	2,3
9,6	6,8	1,9	3,3	11,8	9,1	11,3	8,9	6,4	8,7
8,5	2,0	3,4	8,2	8,1	3,1	3,0	4,1	4,0	4,5

Вариант №27

11,3	11,2	7,1	6,0	5,6	9,3	4,6	2,1	12,2	10,4
5,4	3,6	11,9	1,4	8,5	8,6	5,7	8,3	2,4	8,9
7,2	5,5	4,2	9,9	1,5	1,7	1,8	4,7	4,8	1,3
3,9	4,1	9,2	8,1	4,3	8,3	8,4	5,4	5,3	7,8
7,5	7,2	7,0	10,6	5,9	4,4	5,8	12,8	11,5	5,2
9,1	12,7	3,5	12,5	6,8	12,4	6,7	9,6	6,5	12,9
7,9	7,3	10,1	6,9	12,3	6,7	3,1	2,9	2,8	8,8
12,9	1,2	2,0	10,0	10,7	10,9	6,2	6,6	8,7	2,7
7,4	8,0	6,9	6,3	5,7	3,2	12,6	11,1	12,1	6,1
2,2	10,2	10,5	3,4	3,3	8,2	11,0	9,4	9,7	9,8

Вариант №28

19,9	21,0	19,1	20,4	21,5	19,3	22,6	19,7	19,0	18,9
20,7	19,0	21,6	18,4	19,3	20,3	19,2	22,7	21,3	20,7
20,5	20,7	18,2	21,7	22,1	23,2	20,7	18,7	18,3	21,3
18,9	20,5	20,7	19,3	22,5	20,2	20,2	22,6	21,0	20,8
21,1	23,2	20,4	21,6	23,6	21,5	22,8	21,3	22,0	18,6
20,8	22,2	20,8	20,5	20,3	19,5	18,2	19,1	22,7	21,0
20,1	19,8	22,3	19,7	22,0	22,0	19,5	20,9	23,6	19,8
22,5	21,7	23,3	20,3	19,6	23,3	22,0	19,6	22,0	21,9
21,7	21,1	21,6	22,9	21,5	21,4	21,4	20,2	21,1	23,1
18,5	20,1	22,5	20,4	23,4	18,5	21,1	23,5	20,2	22,7

Вариант №29

13,1	17,2	15,7	15,9	18,7	20,8	15,3	19,5	14,1	14,8
18,2	12,8	13,5	19,8	16,2	15,4	13,3	12,9	12,5	15,9
19,1	17,7	16,3	12,2	13,9	20,2	19,6	16,6	19,4	19,4
13,6	15,7	14,6	19,2	16,9	14,5	17,5	18,4	17,1	12,1
16,9	14,5	16,1	14,1	21,0	19,7	16,8	13,2	16,3	17,1
20,6	15,8	13,7	16,4	18,9	13,4	12,4	16,5	14,2	16,1
18,1	16,5	18,4	15,5	15,5	19,3	16,7	15,1	16,4	13,1
15,1	12,0	14,7	17,3	17,4	12,3	14,3	20,4	20,5	16,2
18,8	19,9	15,6	20,7	13,5	18,5	17,7	18,8	16,5	18,3
13,8	14,9	20,1	17,6	18,6	14,4	15,2	17,8	17,5	14,7

Вариант №30

202	209	166	165	183	144	179	163	173	172
213	167	190	188	168	172	194	174	189	215
183	184	141	144	185	196	169	226	159	160
219	218	206	183	194	164	213	200	192	192
203	175	182	192	146	204	187	212	182	225
159	231	217	154	202	180	141	152	179	208
210	212	156	216	222	231	158	178	170	180
196	199	203	173	214	173	186	199	143	187
148	155	176	227	175	153	193	150	206	219
190	182	229	205	157	189	176	206	192	162

Задание 2. Дано интервальное распределение частот выборки. Необходимо:

1. Построить полигон и гистограмму частот.
2. Найти эмпирическую функцию распределения F*(x) и построить ее график.
3. Определить числовые характеристики X_B, D_B, σ_B.
4. Составить гипотезу о виде данной случайной величины X.
5. Найти формулу для плотности распределения и теоретической функции распределения.
6. Используя критерий Пирсона, выяснить справедливость выдвинутой гипотезы.

Варианты задания №2.

Вариант №1

Интервалы	0-15	15-30	30-45	45-60	60-75	75-90	90-105
Частота n_i	30	20	18	14	7	6	5

Вариант №2

Интервалы	0-18	18-36	36-54	54-72	72-90	90-108	108-126
Частота n_i	48	18	16	9	4	3	2

Вариант №3

Интервалы	0-13	13-26	26-39	39-52	52-65	65-78	78-91
Частота n_i	46	22	16	6	5	3	2

Вариант №4

Интервалы	0-17	17-34	34-51	51-68	68-85	85-102	102-119
Частота n_i	45	20	15	7	6	4	3

Вариант №5

Интервалы	0-25	25-50	50-75	75-100	100-125	125-150	150-175
Частота n_i	40	20	15	10	6	5	4

Вариант №6

Интервалы	0-31	31-62	62-93	93-124	124-155	155-186	186-217
Частота n_i	55	20	10	8	4	2	1

Вариант №7

Интервалы	0-27	27-54	54-81	81-108	108-135	135-162	162-189
Частота n_i	54	20	10	8	5	2	1

Вариант №8

Интервалы	0-40	40-80	80-120	120-160	160-200	200-240	240-280
Частота n_i	52	21	11	9	4	2	1

Вариант №9

Интервалы	0-37	37-74	74-111	111-148	148-185	185-222	222-259
Частота n_i	50	21	11	9	5	3	1

Вариант №10

Интервалы	0-12	12-24	24-36	36-48	48-60	60-72	72-84
Частота n_i	46	20	14	8	5	4	3

Вариант №11

Интервалы	0-11	11-22	22-33	33-44	44-55	55-66	66-77
Частота n_i	48	21	14	8	4	3	2

Вариант №12

Интервалы	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
Частота n_i	53	21	16	4	3	2	1

Вариант №13

Интервалы	0-43	43-86	86-129	129-172	172-215	215-258	258-301
Частота n_i	49	21	12	7	5	4	2

Вариант №14

Интервалы	0-44	44-88	88-132	132-176	176-220	220-264	264-308
Частота n_i	38	22	20	8	5	4	3

Вариант №15

Интервалы	0-32	32-64	64-96	96-128	128-160	160-192	192-224
Частота n_i	40	21	20	7	5	4	3

Вариант №16

Интервалы	0-70	70-140	140-210	210-280	280-350	350-420	420-490
Частота n_i	44	23	16	9	5	2	1

Вариант №17

Интервалы	0-42	42-84	84-126	126-168	168-210	210-252	252-294
Частота n_i	47	21	12	8	5	4	3

Вариант №18

Интервалы	0-26	26-52	52-78	78-104	104-130	130-156	156-182
Частота n_i	40	24	15	9	7	3	2

Вариант №19

Интервалы	0-45	45-90	90-135	135-180	180-225	225-270	270-315
Частота n_i	40	21	15	9	6	5	4

Вариант №20

Интервалы	0-22	22-44	44-66	66-88	88-110	110-132	132-154
Частота n_i	42	19	16	8	7	5	3

Вариант №21

Интервалы	0-52	52-104	104-156	156-208	208-260	260-312	312-364
Частота n_i	41	19	15	9	7	5	4

Вариант №22

Интервалы	0-55	55-110	110-165	165-220	220-275	275-330	330-385
Частота n_i	48	21	11	8	5	4	3

Вариант №23

Интервалы	0-16	16-32	32-48	48-64	64-80	80-96	96-112
Частота n_i	50	20	10	9	6	3	2

Вариант №24

Интервалы	0-19	19-38	38-57	57-76	76-95	95-114	114-133
Частота n_i	40	20	11	9	6	4	2

Вариант №25

Интервалы	0-23	23-46	46-69	69-92	92-115	115-138	138-161
Частота n_i	45	21	14	8	6	4	2

Вариант №26

Интервалы	0-24	24-48	48-72	72-96	96-120	120-144	144-168
Частота n_i	43	20	15	8	7	4	3

Вариант №27

Интервалы	0-90	90-180	180-270	270-360	360-450	450-540	540-630
Частота n_i	47	21	16	6	5	3	2

Вариант №28

Интервалы	0-65	65-130	130-195	195-260	260-325	325-390	390-455
Частота n_i	41	19	17	8	7	5	3

Вариант №29

Интервалы	0-36	36-72	72-108	108-144	144-180	180-216	216-252
Частота n_i	51	20	10	8	5	4	2

Вариант №30

Интервалы	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
Частота n_i	55	19	13	5	4	3	1

Решение типового варианта

Задание №1

В результате эксперимента получена выборка из ста чисел:

1,6	4,4	10,9	6,4	4,0	2,8	5,2	1,2	7,6	3,4
2,9	5,3	1,7	7,7	6,9	10,1	5,4	4,1	8,8	6,6
6,5	4,2	5,5	0,5	8,9	4,5	1,8	5,6	7,8	3,0
1,9	10,2	7,9	2,5	5,7	3,1	6,7	4,3	0,6	9,0
6,8	3,2	4,4	9,1	10,3	6,0	7,9	6,9	8,0	2,0
7,0	10,7	8,1	2,1	5,8	6,4	0,3	4,5	9,2	3,3
7,6	9,3	3,4	4,6	5,0	3,8	5,9	8,2	2,2	7,1
2,3	0,8	7,2	8,3	11,1	6,5	3,5	9,4	10,8	4,7
4,8	6,1	3,6	9,5	8,4	2,4	6,2	7,3	5,7	0,9
7,6	8,5	5,8	1,1	5,9	4,9	3,7	9,6	2,6	6,1

1. Составляем вариационный ряд, т.е. все числа таблицы записываем в возрастающем порядке:

0,3	0,5	0,6	0,6	0,9	1,1	1,2	1,6	1,7	1,8
1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,8	2,9
3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,4	4,5	4,5	4,6	4,7
4,8	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,7
5,8	5,8	5,9	5,9	6,0	6,1	6,1	6,2	6,4	6,4
6,5	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	6,9	7,0	7,1	7,2
7,3	7,4	7,6	7,6	7,7	7,8	7,9	7,9	8,0	8,1
8,2	8,3	8,4	8,5	8,8	8,9	9,0	9,1	9,2	9,3
9,4	9,5	9,6	10,1	10,2	10,3	10,7	10,8	10,9	11,1

2. Находим размах вариации $X_{max} - X_{min} = 11,1 - 0,3 = 10,8$ и оптимальное число интервалов $k = 1 + 3,322\ \lg n = 1 + 3,322\ \lg 100 = 7,644 \approx 8$. Длина частичного интервала определяется по формуле Стерджеса:

$h = \frac{X_{max} - X_{min}}{8} = \frac{11,1-0,3}{8} = \frac{10,8}{8} = 1,35$. Т.е. $h = 1,4$.

Границы интервалов находим, исходя из наименьшего значения $X_{min} = 0,3$ и величины интервала $h = 1,4$:

$a_1 = 0,3$, $a_2 = 1,7$, $a_3 = 3,1$, $a_4 = 4,5$, $a_5 = 5,9$, $a_6 = 7,3$, $a_7 = 8,7$, $a_8 = 10,1$, $a_9 = 11,5$.

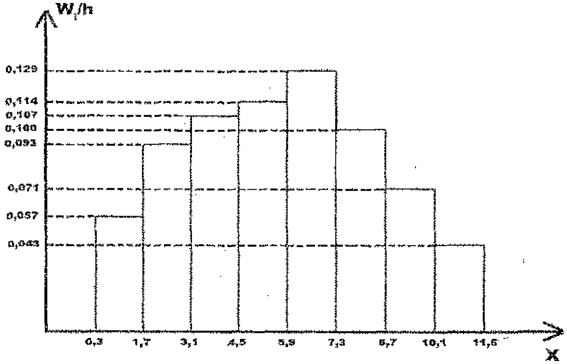
3. Запишем интервальное распределение частот вариант, попавших в каждый из полученных выше интервалов.

Интервалы	0,3-1,7	1,7-3,1	3,1-4,5	4,5-5,9	5,9-7,3	7,3-8,7	8,7-10,1	10,1-11,5
n_i	8	13	15	16	18	14	10	6

Вычислим относительные частоты $W_i = \frac{n_i}{n}$, n=100 и их плотности $\frac{W_i}{h}$, h=1,4

Интервалы	n_i	W_i	$\frac{W_i}{h}$
0,3-1,7	8	0,08	0,057
1,7-3,1	13	0,13	0,093
3,1-4,5	15	0,15	0,107
4,5-5,9	16	0,16	0,114
5,9-7,3	18	0,18	0,129
7,3-8,7	14	0,14	0,100
8,7-10,1	10	0,10	0,071
10,1-11,5	6	0,06	0,043
$\sum$	100	1	0,714

4. Согласно этой таблице строим гистограмму относительных частот.



Масштабы на осях различны.

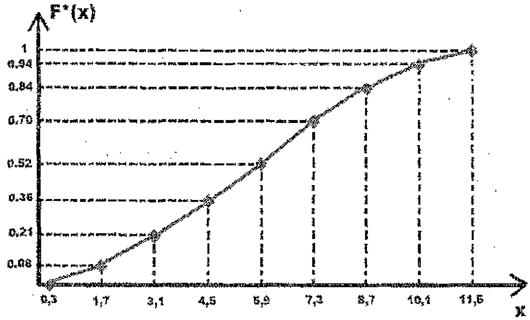
Находим эмпирическую функцию $F^*(x)=\frac{n_x}{n}$, где n_x – частота значений признака, меньшего х:

$F^*(0,3)=\frac{0}{100}=0;\ F^*(1,7)=\frac{8}{100}=0,08;\ F^*(3,1)=\frac{8+13}{100}=0,21;$

$F^*(4,5)=\frac{21+15}{100}=0,36;\ F^*(5,9)=\frac{36+16}{100}=0,52;\ F^*(7,3)=\frac{52+18}{100}=0,70;$

$F^*(8,7)=\frac{70+14}{100}=0,84;\ F^*(10,1)=\frac{84+10}{100}=0,94;\ F^*(11,5)=\frac{94+6}{100}=1.$

На основе этих значений построим график эмпирической функции или кумулятивной кривой.



5. Выборочное среднее $\bar{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n}$; среднее квадратов $\bar{x^2} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n}$;
выборочная дисперсия $D_B = \bar{x^2} - \bar{x}_B^2$; среднее квадратичное отклонение $\sigma_B = \sqrt{D_b}$;
исправленное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{S^2}$; $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$, x_i – середина интервала $[a_i; a_{i+1}]$.

Вычислим выборочное среднее. Все расчеты отобразим в таблице:

$a_i - a_{i+1}$	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
0,3-1,7	1	8	8,0	8,0
1,7-3,1	2,4	13	31,2	74,88
3,1-4,5	3,8	15	57,0	216,6
4,5-5,9	5,2	16	83,2	432,64
5,9-7,3	6,6	18	118,8	784,08
7,3-8,7	8,0	14	112,0	896,0
8,7-10,1	9,2	10	92,0	846,4
10,1-11,5	10,8	6	64,8	699,84
$\sum$		100	567,0	3958,44

$$\bar{x}_B = \frac{567}{100} = 5{,}67;\ \bar{x^2} = \frac{3958{,}44}{100} = 39{,}58;$$

$$D_B = 39{,}58 - 5{,}67^2 = 39{,}58 - 32{,}15 = 7{,}43;$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{7{,}43} = 2{,}73;\ S^2 = \frac{100}{99}\,7{,}43 = 7{,}51;\ S = \sqrt{S^2} = \sqrt{7{,}51} = 2{,}74.$$

6. Исходя из гистограммы выдвигаем гипотезу о нормальном распределении, при этом:
$M(x) = a = \bar{x}_B = 5{,}67;\ S = 2{,}74;\ \bar{x}_B - 3S = 5{,}67 - 3 \cdot 2{,}74 = -2{,}55;$
$\bar{x}_B + 3S = 5{,}67 + 3 \cdot 2{,}74 = 13{,}89$. Т.е. данные исходной выборки x_{min}=0,3 и x_{max}=11,1 входят в интервал (-2,55; 13,89), что согласуется с "правилом 3σ".

Применим критерий Пирсона и сравним эмпирические и теоретические частоты вариант. Находим теоретические частоты n'_i по формуле:

$$n'_i = n \times P_i = 100 \times P(a_i < x < a_{i+1}) = 100\left(\Phi\left(\frac{a_{i+1} - \bar{x}_B}{S}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}_B}{S}\right)\right)$$

Составим таблицу для нахождения вероятностей P_i, попаданий в i-интервал.

a_i	$U_i = \frac{a_i - \bar{x}_b}{S}$	$\Phi(U_i)$	$\Phi(U_{i+1}) - \Phi(U_i) = P_i$
0,3	-1,96	-0,4750	0,0485
1,7	-1,45	-0,4265	0,1001
3,1	-0,94	-0,3264	0,1610
4,5	-0,43	-0,1654	0,1385
5,9	0,08	0,0319	0,1905
7,3	0,59	0,2224	0,1441
8,7	1,11	0,3665	0,0809
10,1	1,62	0,4474	0,0287
11,1	1,98	0,4761	$\sum$ = 0,8733

Дальнейшие расчеты продолжим в следующей таблице.

№ интервала	n_i	$100\,P_i$	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	8	4,85	5	3	9	1,80
2	13	10,01	10	3	9	0,90
3	15	16,10	16	-1	1	0,06
4	16	13,35	13	3	9	0,69
5	18	19,05	19	-1	1	0,05
6	14	14,41	14	0	0	0
7	10	8,09	8	2	4	0,05
8	6	2,87	3	3	9	3
$\sum$	100					$Z^2_{набл} = 7$

По таблице 5 критических точек распределения
$Z^2_{кр}(\alpha, k - r - 1) = Z^2_{кр}(0{,}05;\, 8 - 3) = Z^2_{кр}(0{,}05; 5) = 11{,}1$, где к – число интервалов, r – число параметров.

Имеем $Z^2_{набл} = 7 < Z^2_{кр} = 11{,}1$, и поэтому гипотеза о нормальном распределении принимается.

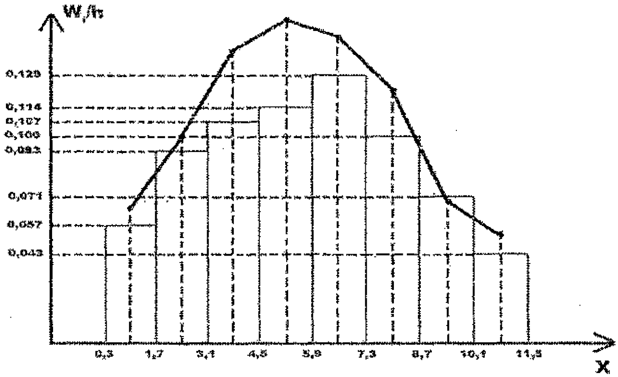
7. Плотность нормального распределения (дифференциальная функция распределения)

$$f(x) = \frac{1}{2{,}74\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-5{,}67)^2}{2(2{,}53)^2}} = 0{,}15\exp(-0{,}04(x - 5{,}67)^2)$$

Вычислим значения дифференциальной функции для середины интервалов распределения.

x_i	1	2,4	3,8	5,2	6,6	8	9,2	10,8
$x_i - \bar{x}_B$	-4,67	-3,27	-1,87	-0,47	0,93	2,33	4,53	5,13
$(x_i - \bar{x}_B)^2$	21,81	10,70	3,50	0,22	0,86	5,43	20,52	26,32
$-0{,}04(x_i - \bar{x}_B)^2$	-0,87	-0,43	-,014	-0,01	-0,03	-0,22	-0,82	-,105
$exp(-0{,}04(x_i - \bar{x}_B)^2)$	0,42	0,65	0,87	0,99	0,97	0,80	0,44	0,35
$0{,}15\,exp(-0{,}04(x_i - \bar{x}_B)^2)$	0,06	0,10	0,13	0,15	0,14	0,12	0,07	0,05

Эти пары значений f(x) откладываем на гистограмме относительных частот и соединяем плавной линией.



8). Если выборка генеральной совокупности распределена нормально, то исходная выборка такова, что математическое ожидание с надежностью γ=0,95 покрывается доверительным интервалом.

$(\bar{x}_B - \delta, \bar{x}_B + \delta)$, где $\delta = \frac{S}{\sqrt{n}} t_\gamma$ — точность оценки, n=100, S=2,74, $t_\gamma = t(\gamma; n) =$
$= t(0{,}95;100) = 1{,}984$ (приложение 3).

$$\delta = \frac{2{,}74}{10} 1{,}984 = 0{,}54$$

$$\bar{x}_B - \delta = 5{,}67 - 0{,}54 = 5{,}1; \quad \bar{x}_B + \delta = 5{,}67 + 0{,}54 = 6{,}21$$

$$P(5{,}1 < a < 6{,}21) = 0{,}95$$

Итак, доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание a с надежностью γ=0,95, имеет вид (5,1; 6,21).

Доверительный интервал, покрывающий среднее квадратичное отклонение σ с надежностью γ=0,95, имеет вид: $S(1-q) < \sigma < S(1+q)$, где

$q = q(\gamma; n) = q(0{,}95;100) = 0{,}143$ (приложение 4).

Точность оценки $\sigma = Sq = 2{,}74 \cdot 0{,}143 = 0{,}39$.

$S - \sigma = 2{,}74 - 0{,}39 = 2{,}35; \; S + \sigma = 2{,}74 + 0{,}39 = 3{,}13.$

$\sigma \in (2{,}35; 3{,}13)$ - доверительный интервал, покрывающий σ с надежностью γ=0,95.

Задание №2.

Дано интервальное распределение частот некоторой совокупности относительно признака x:

Интервалы	0-21	21-42	42-63	63-84	84-105	105-126	126-147
m_i	48	18	16	7	2	5	4

П. 1-3. Составим таблицу, в которой найдем плотность частоты $\frac{m_i}{h}$, середины интервалов x_i, произведения $x_i m_i$ и $x_i^2 m_i$ для построения полигона и гистограммы частот и нахождения числовых характеристик выборки. По таблице h=21.

$a_i - a_{i+1}$	x_i	m_i	$\frac{m_i}{h}$	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$
0-21	10,5	48	2,29	504	5292
21-42	31,5	18	0,86	567	17860,5
42-63	52,5	16	0,76	840	44100
63-84	73,5	7	0,33	514,5	37815,75
84-105	94,5	2	0,10	189	17860,5
105-126	115,5	5	0,24	577,5	66701,25
126-147	136,5	4	0,19	546	74529
$\sum$		n=100		3738	264159

$$\bar{x}_B = \frac{3738}{100} = 37{,}38; \quad \bar{x^2} = \frac{264159}{100} = 2641{,}59$$

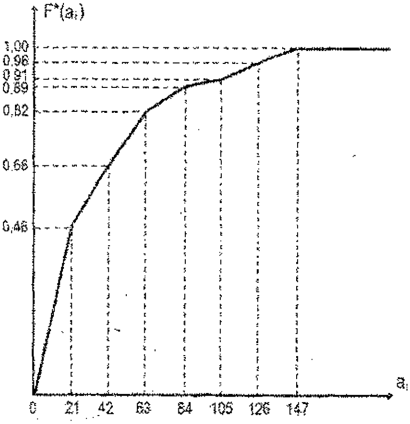
$D_B = 2641{,}59 - 37{,}38^2 = 2641{,}59 - 1397{,}26 = 1244{,}33$

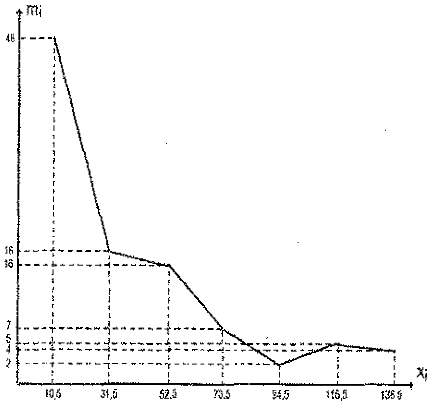
$\sigma_B = \sqrt{1244{,}33} = 35{,}28$

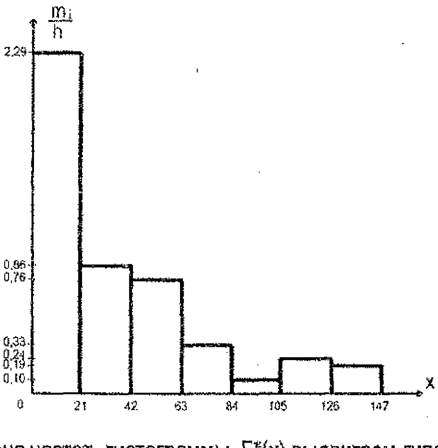
Строим эмпирическую функцию распределения

$F^*(a_i) = \frac{n_{a_i}}{n}$, a_i – концы интервалов $i = \overline{0,8}$.

a_i	0	21	42	63	84	105	126	147
$F^*(a_i)$	0	$\frac{48}{100} = 0{,}48$	$\frac{66}{100} = 0{,}66$	$\frac{82}{100} = 0{,}8$	$\frac{89}{100} = 0{,}8$	$\frac{91}{100} = 0{,}9$	$\frac{96}{100} = 0{,}9$	$\frac{100}{100} = 1$







П.4-5. По виду полигона частот, гистограммы, F*(x) выдвигаем гипотезу о показательном распределении признака x в генеральной совокупности.

Признаком этого распределения является почти совпадение $\bar{x}_B$ и σ_B.

$M(x) = \sigma(x) = \frac{1}{\lambda}, \ \lambda = \frac{1}{\bar{x}_B} = 0{,}027.$

Плотность распределения $f(x)=\begin{cases}0, \text{если } x<0\\ 0{,}027e^{-0{,}027x}, \text{если } x\geq 0\end{cases}$

Теоретическая функция распределения $F(x)=\begin{cases}0, \text{если } x<0\\ 1-e^{-0{,}027x}, \text{если } x\geq 0\end{cases}$

6. Подтвердим или опровергнем гипотезу H_0: генеральная совокупность признака X подчиняется показательному закону распределения.

Критерий Пирсона. Находим теоретические (выравнивающие) частоты
$m'_i=nP_i=nP(a_i<X<a_{i+1})=n\left(e^{-\lambda a_i}-e^{-\lambda a_{i+1}}\right)$

Сравниваем $Z^2_{\text{набл}}=\sum\frac{(m_i-m'_i)^2}{m'_i}$ и $Z^2_{\text{крит}}(\alpha;k=7-2)=Z^2_{\text{крит}}(0{,}05;5)=11{,}1$

Интервалы	$P_i=e^{-0{,}027a_i}-$ $-e^{-0{,}027a_{i+1}}$	100P	m'ᵢ	mᵢ	(mᵢ - m'ᵢ)²	$\frac{(m_i-m'_i)^2}{m'_i}$
0-21	1-0,5672=0,4328	43,28	43	48	25	0,58
21-42	0,5672-0,3217=0,2455	24,55	25	18	49	1,96
42-63	0,3217-0,1825=0,1392	13,92	14	16	4	0,29
63-84	0,1825-0,1035=0,0790	7,90	8	7	1	0,13
84-105	0,1035-0,0587=0,0448	4,48	4+1	2	9	1,80
105-126	0,0587-0,0333=0,0254	2,54	3	5	4	1,33
126-147	0,0333-0,0189=0,0144	1,44	1+1	4	4	2,00
$\sum$	0,9811		100	100		8,39

$Z^2_{\text{набл}}=8{,}39$. Т.к. $Z^2_{\text{набл}}<Z^2_{\text{крит}}$, то гипотеза H_0 принимается.

Литература

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М: Высшая школа, 1977.
2. Герасимович А.И. Математическая статистика. – М: Высшая школа, 1983.
3. Колешаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. – М: Высшая школа, 1991.

Содержание

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Пархимович Игорь Владимирович
Гоголинская Рената Альдефонсовна
Остапчук Евгений Матвеевич
Юхимук Татьяна Юрьевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания аттестационных работ
по курсу «**Высшая математика**»
для студентов строительного факультета

Ответственный за выпуск: **Пархимович И.В.**

Редактор: **Строкач Т.В.**

Компьютерная вёрстка: **Кармаш Е.Л.**

Корректор: **Никитчик Е.В.**

Подписано к печати 20.01.2010 г. Формат 60х84 1/16 Бумага «Снегурочка». Усл. п.л. 2,56. Уч. изд. л. 2,75. Заказ N 68. Тираж 200 экз. Отпечатано на ризографе Учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.