СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В θ-ИНТЕГРАЛАХ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.

А.Н. Ковальчук

(БГПУ г. Минск)

Современная теория стохастических дифференциальных уравнений базируется на понятиях стохастических интегралов. Наиболее общий среди них – стохастический θ-интеграл, где параметр θ принадлежит отрезку [0;1] ([1], с.192). Для исследования решений таких уравнений разработана специальная теория (см., напр., [2]).

Аппроксимациями решений стохастических дифференциальных уравнений занимались многие авторы. Как правило, решения уравнений Ито приближаются решениями соответствующих конечно-разностных уравнений, а решения уравнений Стратоновича – решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [3] установлено, что решения стохастических уравнений в θ-интегралах могут быть приближены решениями конечно-разностных уравнений с осреднением.

В сообщении [4] введен новый класс стохастических θ-интегралов, в котором параметр θ принадлежит всей вещественной прямой **R**. Данная статья посвящена задаче аппроксимации стохастических интегралов и решений стохастических уравнений в θ-интегралах именно для такого случая. В ней дается полное описание предельного поведения конечных сумм с осреднением для процесса броуновского движения, приводятся необходимые и достаточные условия сходимости решений конечно-разностных уравнений с осреднением к решениям стохастических уравнений в θ-интегралах, $\theta \in \mathbf{R}$. Найдены также оценки скорости сходимости.

Пусть (Ω, A, P) – полное вероятностное пространство, $T=[0, a] \subset \mathbf{R}$, $\{F_t\}_{t\in T}$ – стандартный, непрерывный справа поток σ-алгебр и $B(t)$ – стандартный одномерный процесс F_t-броуновского движения ([5], с.48). В качестве представителя обобщенного случайного процесса броуновского движения будем рассматривать

$$B_n(t)=(B*\rho_n)(t)=\int_0^{1/n} B(t+s)\rho_n(s)ds, \qquad (1)$$

где $\rho_n(t)\in\mathbf{D}(\mathbf{R})$, $supp\ \rho_n(t)\subset[0,1/n]$, $\int_0^{1/n}\rho_n(s)ds=1$ и существует $A\in\mathbf{R}$ такое, что $\int_0^{1/n}|\rho_n(s)|ds\le A$, для любого n=1,2,3...

<u>Лемма 1.</u> *Пусть* $t\ge 0$, $h_n>0$, $n\in\mathbf{N}$, *тогда имеет место следующее равенство* $\mathsf{E}(B_n(t+h_n)-B_n(t))^2=h_n\iint\limits_{\substack{0\le s,\tau\le 1/n\\ |s-\tau|\le h_n}}(1-\frac{|s-\tau|}{h_n})\rho_n(s)\rho_n(\tau)dsd\tau=h_nK(n,h_n)$.

В качестве представителя обобщенной функции $\tilde{f}$, ассоциирующей функцию f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, рассмотрим следующую последовательность $f_n=f*\rho_n$, где ρ_n из выражения (1).

Следующие теоремы дают полную классификацию способов аппроксимации стохастических θ-интегралов, где $\theta\in\mathbf{R}$ по броуновскому движению в сверточной алгебре.

<u>Теорема 1.</u> *Пусть* $f\in\mathrm{C}^1_{\mathrm{B}}(\mathbf{R}), f\ne 0$ *и точка* $\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n)$ *лежит на отрезке, соединяющем точки* $B_n(\tau_t+kh_n)$ *и* $B_n(\tau_t+(k-1)h_n)$, $k=1...m_t$. *Тогда конечная сумма* $\sum_{k=1}^{m_t}f_n(\overline{B}_n(\tau_t+(k-1)h_n))[B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n)]^2$ *сходится в* $\mathbf{L}^2(\Omega, A, \mathsf{P})$ *и равно-мерно по* $t\in T$ *при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ *тогда, и только тогда, когда числовая последовательность* $K(n,h_n)$ *сходится при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$.

<u>Теорема 2.</u> *Пусть* $f\in\mathrm{C}^2_{\mathrm{B}}(\mathbf{R})$, $f\ne const$. *Конечная сумма* $\sum_{k=1}^{m_t}f_n(B_n(\tau_t+(k-1)h_n))\times[B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n)]$ *сходится в* $\mathbf{L}^2(\Omega, A, \mathsf{P})$ *и равномерно по* $t\in T$ *при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ *тогда, и только тогда, когда числовая последовательность* $K(n,h_n)$ *сходится при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$.

<u>Теорема 3.</u> *Пусть* $f\in\mathrm{C}^2_{\mathrm{B}}(\mathbf{R})$ *и* $\theta\in(-\infty;1/2]$. *Тогда выполняется следующее неравенство* $\sup_{t\in T}\mathsf{E}(\sum_{k=1}^{m_t}f_n(B_n(\tau_t+(k-1)h_n))[B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n)]-$

$$-(\theta)\int_{\tau_t}^{t}f(B(s))dB(s))^2\le Ch_n+C/n+C((1-K(n,h_n))/2-\theta)^2$$

<u>Теорема 4.</u> *Пусть* $f\in\mathrm{C}^2_{\mathrm{B}}(\mathbf{R}), f\ne const$. *Конечная сумма* $\sum_{k=1}^{m_t}f_n(B_n(\tau_t+kh_n))\times[B_n(\tau_t+kh_n)-B_n(\tau_t+(k-1)h_n)]$ *сходится в* $\mathbf{L}^2(\Omega, A, \mathsf{P})$ *и равномерно по* $t\in T$ *при*

$n\to\infty$, $h_n\to 0$ тогда, и только тогда, когда числовая последовательность $K(n, h_n)$ сходится при $n\to\infty$, $h_n\to 0$.

Рассмотрим стохастическое уравнение в θ-интегралах

$$X(t) = x + (\theta)\int_0^t f(X(s))dB(s) + \int_0^t g(X(s))ds\,,\ t\in T, \tag{2}$$

где $f\in C_B^2(\mathbf{R})$, $g\in C_B^1(\mathbf{R})$, интеграл в правой части (2) стохастический θ-интеграл, $\theta\in\mathbf{R}$.

Решение данного уравнения будем аппроксимировать решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t))[B_n(t+h_n) - B_n(t)] + g_n(X_n(t))h_n, \\ X_n(t)\big|_{[0,h_n)} = X_{n0}(t), \quad t\in T, \end{cases} \tag{3}$$

где случайный процесс $X_{n0}(t)$, $t\in[0;h_n)$ является $F_{t+1/n}$-измеримым и лежит в $\mathbf{L}^2(\Omega, A, \mathsf{P})$

<u>Теорема 5.</u> *Пусть $\theta\in(-\infty;1/2]$, $f\in C_B^2(\mathbf{R})$ и $g\in C_B^1(\mathbf{R})$, "начальное условие" задачи Коши (3) $X_{n0}(t)$ принадлежит $\mathbf{L}^2(\Omega, A, \mathsf{P})$ и является $F_{t+1/n}$ измеримым для любых $t\in[0;h_n)$. Тогда для решения задачи Коши (3) $X_n(t)$ и решения уравнения (2) $X(t)$ справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T} \mathsf{E}[X_n(t)-X(t)]^2 \le C \sup_{t\in[0,h_n)} \mathsf{E}[X_{n0}(t)-x]^2 + C/(n^{2/3}h_n^{1/3}) + C(K(n, h_n) - (1-2\theta))^2$$

<u>Теорема 6.</u> *Пусть $\theta\in(-\infty;1/2]$, $f\in C_B^2(\mathbf{R})$ и $g\in C_B^1(\mathbf{R})$. Если $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $1/n^2=o(h_n)$, причем $\sup_{t\in[0,h_n)} \mathsf{E}[X_{n0}(t)-x]^2\to 0$, то для сходимости последовательности $X_n(t)$ решений задачи Коши (3) в $\mathbf{L}^2(\Omega, A, \mathsf{P})$ и равномерно по $t\in T$ необходимо и достаточно, чтобы сходилась числовая последовательность $K(n, h_n)$.*

Чтобы получить аналогичные теоремы для уравнения (2) в случае, когда $\theta\in[1/2;+\infty)$ рассмотрим следующую задачу Коши с опережением

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) = f_n(X_n(t+h_n))[B_n(t+h_n) - B_n(t)] + g_n(X_n(t))h_n, \\ X_n(t)\big|_{[0,h_n)} = X_{n0}(t), \quad t\in T, \end{cases} \tag{4}$$

<u>Теорема 7.</u> *Пусть $\theta\in[1/;\infty)$, $f\in C_B^2(\mathbf{R})$ и $g\in C_B^1(\mathbf{R})$, "начальное условие" задачи Коши (4) $X_{n0}(t)$ принадлежит $\mathbf{L}^2(\Omega, A, \mathsf{P})$ и является $F_{t+1/n}$ измеримым*

для любых $t\in[0;h_n)$. *Тогда для решений задачи Коши* (4) $X_n(t)$ *и решения уравнения* (2) $X(t)$ *справедливы следующие неравенства:*

$$\sup_{t\in T}\mathsf{E}[X_n(t)-X(t)]^2\le C\sup_{t\in[0,h_n)}\mathsf{E}[X_{n0}(t)-x]^2+C/(n^{2/3}h_n^{1/3})+C(K(n,h_n)-(2\theta-1))^2$$

<u>*Теорема 8.*</u> *Пусть* $\theta\in[1/2;\infty)$, $f\in C_B^2(\mathbf{R})$ *и* $g\in C_B^1(\mathbf{R})$. *Если* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $1/n^2=o(h_n)$, *причем* $\sup_{t\in[0,h_n)}\mathsf{E}[X_{n0}(t)-x]^2\to 0$, *то для сходимости последовательности* $X_n(t)$ *решений задачи Коши* (4) *в* $\mathbf{L}^2(\Omega, A, \mathsf{P})$ *и равномерно по* $t\in T$ *необходимо и достаточно, чтобы сходилась числовая последовательность* $K(n, h_n)$.

Литература

1. В.С. Пугачев, И.Н. Синицын. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука,1990.630 с.

2. И.И. Гихман, А.В. Скороход. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев. Наукова думка,1982. 611 с.

3. Лазакович Н.В., Яблонский О.Л. О приближении решений одного класса стохастических уравнений // Сиб. матем. журнал – 2001. – Т. 42, №1. – С.87-102

4. Ковальчук А.Н., Лазакович Н.В., Лаппо Д.П. Новые классы стохастических интегралов. // AMADE-2001: Тез. докл. межд. мат. конф., Минск, 15 – 20 февраля 2001 г. – Минск, 2001. – С. 84-85.

5. С. Ватанабэ, Н. Икэда. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 448 с.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СПОСОБОВ АППРОКСИМАЦИИ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА

А.В. Кот

(БрГУ, г. Брест)

Рассмотрим уравнение Дуффинга

$$\ddot{x}(t)+\alpha\dot{x}(t)+\beta x(t)+\gamma x^3(t)=F(\sin t,\cos t)\qquad(1)$$

с краевыми условиями

$$x(0)=x(2\pi),\ x'(0)=x'(2\pi),\qquad(2)$$

где $x(t)$ – 2π - периодическая дважды дифференцируемая по t функция.

Разобьем отрезок $[0,2\pi]$ на N частичных отрезков точками t_i ($i=\overline{0,N}$). Аппроксимируем первую и вторую производную в дифференциальном уравнении (1) линейными комбинациями значений $x(t_i)$ ($i=\overline{0,N}$) следующим образом